$$u(x,0)=\varphi(x),\quad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t}=0,\quad x>0, \tag{2}$$

где $\delta(x_i,t_i)$ – функция Дирака, сосредоточенная в точках $(x_i,t_i)\in Q$, т.е. $\delta(x_i,t_i)\times u(x,t)=u(x_i,t_i)$, $\gamma_i\neq 0$ – вещественные числа,

$$Lv(x,t)=\frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial t^2}+\frac{\lambda}{t}\frac{\partial v(x,t)}{\partial t}-\frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2},\quad \lambda>0. \tag{3}$$

Уравнение $Lv=0$ при $\lambda=n-1$ называется уравнением Дарбу в монографии [1, с. 639]. В более общем случае, когда параметр $\lambda>0$ произвольный, это уравнение называется уравнением Эйлера–Пуассона–Дарбу в работе [2]. Мы используем последнее название для уравнения (1).

Теорема. *Пусть* $\sum_{i=1}^m \gamma_i t_i\neq -2(1+\lambda)$ *и* $\varphi\in C^2(\mathbb{R})$. *Тогда существует единственное классическое решение задачи Коши (1), (2), имеющее вид*

$$u(x,t)=v(x,t)-\sum_{k=1}^m \gamma_k v(x_k,t_k)\Big/\Big\{\sum_{i=1}^m \gamma_i t_i+2(1+\lambda)\Big\}, \tag{4}$$

где

$$v(x,t)=\frac{\Gamma(\lambda/2)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma((\lambda+1)/2)}\int_{-1}^{1}\varphi(x+\mu t)(1-\mu^2)^{(\lambda-2)/2}\,d\mu. \tag{5}$$

Замечание. Эта теорема справедлива и при $\lambda=0$. В этом случае интеграл (5) вычисляется как интеграл, зависящий от двух параметров x и t, путем дважды дифференцирования по x и t. В результате получим, что функция $v(x,t)$ удовлетворяет однородному уравнению колебаний струны и начальным условиям вида (2), т.е. имеет вид $v(x,t)=(\varphi(x+t)+\varphi(x-t))/2$.

Литература

1. Курант Р. *Уравнения с частными производными.* М.: Мир, 1964. (Пер. с англ. *Partial Differential Equations* by R. COURANT. 1962. New York; London).

2. Weinstein A. The Generalized Radon Problem and Euler–Poisson–Darboux Equation. Institute Brasileir de Educaçãc. Ciencia e Cultura, 1955. P. 126–146.

О РАЗРЕШИМОСТИ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

Е. А. Баркова

В работе предлагаются модифицированный вариант метода, полученного в работе [1], исследования сходимости последовательных приближений для построения решений задачи Коши уравнений в частных производных смешанного типа в непрерывной шкале банаховых пространств аналитических функций.

Рассмотрим задачу

$$\begin{gathered}\partial_t^k u(t,x)=F(t,\theta(x),u(t,\theta(x)),\partial_x^m u(t,\theta(x)),\partial_x^p\partial_t^q u(t,\theta(x)),\\ \partial_t^\alpha u(t,\theta(x))|_{t=0}=\psi_\alpha,(\theta(x)),\quad \alpha=0,\dots,k-1,\\ \partial_t^\beta(\partial_x^p u(t,\theta(x)))|_{t=0}=\varphi_\beta,(\theta(x)),\quad \beta=0,\dots,q-1;\end{gathered} \tag{1}$$

здесь $u(t,x)$ – неизвестная функция; x – «пространственная» переменная, $\theta(x)$ – инвариантное монотонное преобразование, $\theta'(1) \neq 1$, $(\theta^{-1}(x))'' \geqslant 0$, $F(t,u,y,v,w)$ – функция, непрерывная по совокупности переменных и целая по переменным u, y, v, w.

Обозначим через $\mathbb{X}(s)$ пространство всех целых функций на области

$$T_s = \bigcup_{\sigma\in[0,1]} \{x : x \in \mathbb{R}^2, \ \ |x-\sigma| \leqslant s\},$$

обладающих аналитическими продолжениями на окрестность

$$T_{s'} = \bigcup_{\sigma\in[0,1]} \{x : x \in \mathbb{R}^2, \ \ |x-\sigma| \leqslant s', \ \ s' = \theta(1+s) - 1\}$$

с обычными алгебраическими операциями и нормой $\|u(x)\|_{\mathbb{X}(s')} = \sup\{|u(x)| : x \in T_s\}$. Тогда соответствующий правой части (1) оператор суперпозиции

$$f(t,u,y) = F(t,\theta(x),u(t,\theta(x)),u_x^{(m)}(t,\theta(x)),y_x^{(p)}u(t,\theta(x))$$

удовлетворяет на каждом бишаре $\mathbb{B}(s',s) = \{(u,y) : \|u\|_{\mathbb{X}(s')} \leqslant r_1, \ \|y\|_{\mathbb{X}(s')} \leqslant r_2\}$ условию Липшица вида

$$\|f(t,u_1,y_1) - f(t,u_2,y_2)\|_{\mathbb{X}(s'')} \leqslant \frac{c(r_1)}{(s'' - \theta^{-1}(1+s') + 1)^m}\|u_1 - u_2\|_{\mathbb{X}(s')} +$$

$$+ \frac{c(r_2)}{(s'' - \theta^{-1}(1+s') + 1)^p}\|y_1 - y_2\|_{\mathbb{X}(s')}.$$

Теорема. *Пусть* $(s', s'') \in S^*$ – *множество таких пар, для которых* $\mathbb{X}(s') \subset \subset \mathbb{X}(s'')$, *и существуют цепочки* $s_0, s_1, \ldots, s_n, \ldots$, *для которых* $s_0 = s'$, $s_n = s''$. *Кроме того, функция*

$$h_0(t,\theta(x)) = \psi_0(\theta(x)) + \ldots + \frac{\psi_{k-1}(\theta(x))t^{k-1}}{(k-1)!} + \frac{1}{(k-1)!}\int\limits_0^t (t-\tau)^{k-1} f\Big(\tau, \theta(x), \varphi_0(\theta(x)) + \ldots$$

$$\ldots + \frac{\varphi_{k-1}\tau^{q-1}}{(q-1)!}, \frac{\partial^m \varphi_0}{\partial x^m} + \ldots + \frac{\partial^m \varphi_{k-1}}{\partial x^m}\frac{\tau^{q-1}}{(q-1)!}, 0\Big)\, d\tau$$

ограничена в $\mathbb{X}(s')$. *Тогда задача (1) имеет в* $\mathbb{X}(s'')$ *по крайней мере одно решение для любого* T.

Литература

1. Баркова Е. А., Забрейко П. П. *Задача Коши для дифференциальных уравнений высших порядков с ухудшающими операторами* // Дифференц. уравнения. 1991. Т. 27. № 3. С. 472–478.

2. Петровский И. Г. *Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений.* М., 1984.

ОБ ИНДЕКСЕ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ РИМАНА-ГИЛЬБЕРТА ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ СИСТЕМ В $\mathbb{R}^3$

А.И. Басик, Е.В. Грицук, Т.А. Грицук

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ – ограниченная односвязная область, границей которой является гладкая двумерная поверхность Ляпунова $\partial\Omega$. Задачу нахождения непрерывно-