Математический аппарат и алгоритм решения задачи оптимального управления

Капанов Н.А.; Русак Л.В; Снисаренко С.В.
Кафедра систем управления
Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники
Минск, Республика Беларусь
e-mail: {rusak, snisarenko}@bsuir.by

.

***Аннотация*—Рассмотрим задачу оптимального управления дискретной системой фазового управления (ДСФУ) в случае описания ее непрерывной математической моделью.**

Ключевые слова: фазовое управление, градиент целевой функции, гамильтониан.

Основной трудностью при решении нелинейных многопараметрических задач оптимального управления является вычисление градиента целевой функции в пространстве оптимизируемых параметров. Эта трудность связана не столько с большими затратами на численное определение составляющих градиента (они действительно весьма велики), сколько с невозможностью не только обеспечить, но и даже контролировать точность вычисления этих составляющих.

В такой ситуации градиентные методы оказываются практически неприменимыми: ошибки в вычислении градиента нарушают механизм их действия; наиболее эффективны методы минимизации функции многих переменных.

Этот выход был найден в работах Кураева А.А., где на основе вариационного подхода эвристически получены аналитические формулы для градиента целевой функции, в которых использованы решения сопряженной по Гамильтону системы уравнений (сопряженные переменные). Однако эти формулы придают более строгое обоснование для двух–и многоточечного функционала в задаче с подвижными границами.

Интеграл движения. Пусть нелинейный управляемый процесс задан следующим образом (“уравнение движения”):

$$\frac{d\vec{X}}{dT} = \vec{f}(\vec{\mu},\vec{x},T); \quad T(\vec{\mu}) \le T \le T_1(\vec{\mu}),$$

где $\vec{X} = (X_i)$ –вектор переменных состояния, $\vec{\mu} = (\mu_k)$ – вектор параметров управления.

Дифференцируем уравнение движения для X_i по параметру μ_k:

$$\frac{d}{dT}\left(\frac{\partial X_i}{\partial \mu_k}\right) = \frac{\partial f_i}{\partial \mu_k} + \sum_j \frac{\partial f_i}{\partial X_j}\frac{\partial X_j}{\partial \mu_k}. \qquad (1)$$

Параллельно этому рассматриваем сопряженную систему

$$\Psi_i = -\sum_j \frac{\partial f_i}{\partial X_i}\Psi_i. \qquad (2)$$

Умножаем (1) на Ψ_i, а (2)– на $\frac{\partial X_i}{\partial \mu_k}$ и суммируем по всем i:

$$\sum_j \left[\Psi_i \frac{d}{dT}\left(\frac{\partial X_i}{\partial \mu_k}\right) + \frac{\partial X_i}{\partial \mu_k}\Psi_i\right] = \sum_j \Psi_i \frac{\partial f_i}{\partial \mu_k}.$$

Интегрируя по параметру T, имеем

$$\left(\vec{\Psi}_i \frac{\partial \vec{\Psi}}{\partial \mu_k}\right)_{T_1-0} - \left(\vec{\Psi}\frac{\partial \vec{X}}{\partial \mu_k}\right)_{T_0-0} = \int_{T_0}^{T_1} \vec{\Psi}\frac{d\vec{f}}{\partial \mu_k}dT. \qquad (3)$$

Это равенство записано для локальных производных, т.е. вычисляемых при мысленно заданных границах T_0 и T_1.

Добавляя к левой части (3) выражение $\left(\vec{\Psi}\frac{\partial \vec{X}}{\partial T}\right)_{T_1-0} \cdot \frac{dT_1}{d\mu_k} - \left(\vec{\Psi}\frac{\partial \vec{X}}{\partial T}\right)_{T_0-0} \cdot \frac{dT_0}{d\mu_k}$, а к правой части – равное выражение $\left(\vec{\Psi}\vec{f}\right)_{T_1-0} \cdot \frac{dT_1}{d\mu_k} - \left(\vec{\Psi}\vec{f}\right)_{T_0-0} \cdot \frac{dT_0}{d\mu_k}$, получаем интеграл движения для задачи с подвижными границами

$$\begin{gathered}\left(\vec{\Psi}\frac{\partial \vec{X}}{d\mu_k}\right)_{T_1-0} - \left(\vec{\Psi}\frac{\partial \vec{X}}{d\mu_k}\right)_{T_0-0} = \\ = \int_{T_0}^{T_1} \vec{\Psi}\frac{d\vec{f}}{\partial \mu_k}dT + \left(\vec{\Psi}\vec{f}\right)_{T_1-0} \cdot \frac{dT_1}{d\mu_k} - \left(\vec{\Psi}\vec{f}\right)_{T_0+0} \cdot \frac{dT_0}{d\mu_k}.\end{gathered} \qquad (4)$$

Дифференцирование по параметру двухточечного функционала интегрального типа.

Пусть дано

$$\vec{X} = \vec{f}(\vec{\mu},\vec{X},T), T_0(\vec{\mu}) \le T \le T_1(\vec{\mu});$$

$$J = \int_{T_0}^{T_1} f_j(\vec{\mu},\vec{X},T)dT.$$

Вводим вспомогательную переменную
$$X_j=\int_{T_0}^{T_1} f_j(\vec{\mu},\vec{X},T)dT;\quad X_j(T_0)=0;\quad X_j(T_1)=J,$$
и рассматриваем расширенную дифференциальную задачу
$$X_j = f_j(\vec{\mu},\vec{X},T);\quad \vec{X}=\vec{f}(\vec{\mu},\vec{X},T).$$

Расширенный интеграл движения зададим как
$$\left(\frac{dX_i}{d\mu_k}+\vec{\Psi}\frac{d\vec{X}}{d\mu_k}\right)_{T1-0}-\left(\vec{\Psi}\frac{d\vec{X}}{d\mu_k}\right)_{T0+0}=$$
$$\int_{T0}^{T1}\left(\frac{\partial f_i}{\partial\mu_k}+\vec{\Psi}\frac{\partial\vec{f}}{\partial\mu_k}\right)dT+\left(f_j+\vec{\Psi}\vec{f}\right)_{T1-0}\frac{dT_1}{d\mu_k}-$$
$$-\left(f_j+\vec{\Psi}\vec{f}\right)_{T0+0}\frac{dT_0}{d\mu_k},$$

откуда находится $(dX_j/d\mu_k)_{T_1-0}$ или равное ему выражение d_j/μ_k:
$$\frac{dJ}{d\mu_k}=\left(\vec{\Psi}\frac{d\vec{X}}{d\mu_k}\right)_{T0+0}-\left(f_j+\vec{\Psi}\vec{f}\right)_{T+0}\cdot\frac{dT}{d\mu_k}+$$
$$\int_{T0}^{T}\left(\frac{\partial f_j}{\partial\mu_k}+\vec{\Psi}\frac{\partial f}{\partial\mu_k}\right)dT+\left(f_j+\vec{\Psi}\vec{f}\right)_{T1-0}\cdot\frac{dT_1}{d\mu_k}- \qquad (5)$$
$$-\left(\vec{\Psi}\frac{d\vec{X}}{d\mu_k}\right)_{T1-0}.$$

Дифференцирование по параметру многоточечного функционала смешанного типа.

Пусть теперь дано:
$$\vec{X}=\vec{f}\left(\vec{\mu},\vec{X},T\right), T_0\left(\vec{\mu}\right)<T_1\left(\vec{\mu}\right)<\ldots<T_n\left(\vec{\mu}\right);$$
$$J=\sum_{n=0}^{N-1}\int_{Tn}^{Tn+1} f_j\left(\vec{\mu},\vec{X},T\right)dT+\Phi\left(\vec{\mu},\vec{X},(T_0)\right),\vec{X}(T_n),T_0,T_1,\ldots,T_n).$$

Введением $T_0,T_1,\ldots,T_n$ учитываются все точки функций $\vec{f}$ и f_j и, кроме того, $T_0,\ldots,T_n$ могут быть обычными точками.

Зададим положения точек $T_0,T_1,\ldots,T_n$ неявным уравнением вида
$$Y_n\left(\vec{\mu},\vec{X}(T_n),T_n\right)=0, \qquad (6)$$
и учтем их влияние на функционал с помощью штрафных функций:
$$J=\sum_{N=0}^{N-1}\int_{Tn}^{Tn+1} f_j\left(\vec{\mu},\vec{X},T\right)dT+$$
$$+\Phi\left(\vec{\mu},\vec{X},(T_0),\vec{X}(T_1),\ldots,\vec{X}(T_n),T_0,T_1,\ldots,T_n\right)+$$
$$+\sum_{n=0}^{N}\lambda_n Y_n\left(\vec{\mu},\vec{X}(T_n),T_n\right)$$
где весовые коэффициенты $\lambda_0,\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ пока произвольны.

Применяя формулу (5) к каждому из интегральных слагаемых функционала J, и устраним слагаемые с $dX_j/d\mu_k$ (кроме $\left(d\vec{X}/d\mu_k\right)_{T0}$) и $dT_n/d\mu_k$.

Последовательно вычислим весовые коэффициенты
$$\lambda_n=\begin{cases}0, T_n=const\\ -\dfrac{f_j+\dfrac{\partial\Phi}{\partial T_n}+\sum_j\left(\dfrac{\partial\Phi}{\partial X_j}f_j\right)_{Tn}}{\dfrac{\partial Y_n}{\partial T_n}+\sum_j\left(\dfrac{\partial Y_n}{\partial X_j}f_j\right)_{Tn}}, T_n=\text{var};\end{cases}$$
$$\Psi_i(T_n)=\frac{\partial\left(\Phi-\lambda_n Y_n\right)}{\partial X_{j(Tn)}};$$
$$\lambda_0=\begin{cases}0, T_0=\text{const}\\ \dfrac{\left(f_j+\vec{\Psi}\vec{f}\right)_{T0}+\dfrac{\partial\Phi}{\partial T_0}}{\partial Y_0/\partial T_0}, T_0=\text{var};\end{cases}$$

В результате получаем
$$\frac{dJ}{d\mu_k}=\sum_j\left[\left(\Psi_j+\frac{\partial\Phi}{\partial X_j}+\lambda_0\frac{\partial Y_0}{\partial X_j}\right)\frac{dX_j}{d\mu_k}\right]+$$
$$+\frac{\partial\Phi}{\partial\mu_k}+\sum_{n=0}^{N}\lambda n\frac{\partial Yn}{\partial\mu_k}+ \qquad (7)$$
$$+\sum_{n=0}^{N-1}\int_{Tn}^{Tn+1}\left(\frac{\partial f_j}{\partial\mu_k}+\vec{\Psi}\frac{\partial\vec{f}}{\partial\mu_k}\right)dT.$$

Вывод: Предложен метод оптимального управления дискретных фазовых систем с использованием эффективного метода минимизации функции многих переменных.

[1] М. П. Батура. Дискретные системы с фазовым управлением. – Минск : Ин-т техн. кибернетики НАН Беларуси, 2002. – 152 с.
[2] И. Е. Казаков, Д. И. Гладков. Методы оптимизации стохастических систем – М.: Наука, 1987. – 304 с.
[3] Б. Н. Шахтарин. Квазигармонический метод и его применение к анализу нелинейных фазовых систем – М. :Энергоатомиздат, 1992. – 192 с.