Вучоныя запіскі 2018 • Вып. 14
Ч. 2 • Прыродазнаўчыя навукі

УДК 539.12:530.145

***В.А. Плетюхов*[1]*, В.В. Кисель*[2]*, Е.М. Овсиюк*[3]**
***Я.А. Войнова*[4]*, О.В. Веко*[5]*, В.М. Редьков*[6]**
[1]*д-р физ.-мат. наук, проф., проф. каф. общей и теоретической физики*
Брестского государственного университета имени А.С. Пушкина
[2]*канд. физ.-мат. наук, доц. каф. физики*
Белорусского государственного университета информатики и радиоэлектроники
[3]*канд. физ.-мат. наук, доц. каф. общей физики и методики преподавания физики*
Мозырского государственного университета имени И.П. Шамякина
[4]*учитель физики Качищанской средней школы Ельского района*
[5]*учитель физики гимназии г. Калинковичи*
[6]*д-р физ.-мат. наук, гл. науч. сотрудник лаборатории теоретической физики*
Института физики имени Б.И. Степанова НАН Беларуси
e-mail: otf@brsu.brest.by

ФЕРМИОН С ТРЕМЯ МАССОВЫМИ ПАРАМЕТРАМИ. ОБЩАЯ ТЕОРИЯ, ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ С ВНЕШНИМИ ПОЛЯМИ

В рамках подхода Гельфанда – Яглома получено новое 20-компонентное релятивистское волновое уравнение для фермиона со спином ½ и тремя массовыми параметрами. Из компонент волновой функции строятся три вспомогательных биспинора, которые в отсутствие внешнего поля удовлетворяют трем независимым диракоподобным уравнениям с различными массами M_1, M_2, M_3. Выполнено обобщение на случай псевдоримановой структуры пространства-времени, показано, что в этом случае возникает дополнительное зацепление трех биспинорных компонент через скалярную кривизну Риччи. Теория допускает переход к случаю электрически нейтральных частиц, т.е. возможно существование майрановских фермионов с тремя массовыми состояниями.

1. Уравнение для фермиона с тремя массовыми параметрами, формализм Гельфанда – Яглома

Имея в виду существование нейтрино с различными массами, исследуем в рамках теории релятивистских волновых уравнений возможность описания частицы со спином ½ и тремя массовыми параметрами. При этом в качестве исходного будем использовать подход Гельфанда – Яглома [1; 2]. Для построения уравнения для фермиона с тремя массовыми параметрами будем исходить из следующего набора зацепляющихся неприводимых представлений группы Лоренца

$$T = (0,\frac{1}{2}) \oplus (\frac{1}{2},0) \oplus (0,\frac{1}{2})' \oplus (\frac{1}{2},0)' \oplus (1,\frac{1}{2}) \oplus (\frac{1}{2},1)\,, \qquad (1.1)$$

или (нумеруем отдельные представления цифрами от 1 до 6)

$$T = 1 \oplus 2 \oplus 3 \oplus 4 \oplus 5 \oplus 6\,, \qquad (1.2)$$

где введены обозначения

$$1 = (0,\frac{1}{2}), \quad 2 = (\frac{1}{2},0), \quad 3 = (0,\frac{1}{2})', \quad 4 = (\frac{1}{2},0)', \quad 6 = (1,\frac{1}{2}), \quad 5 = (\frac{1}{2},1). \qquad (1.3)$$

Соответствующая схема зацеплений имеет вид

$$\begin{array}{ccc} 1 & - & 2 \\ | & & | \\ 5 & - & 6 \\ | & & | \\ 3 & - & 4\,. \end{array} \qquad (1.4)$$

Базисные вектора пространства определим в виде (см. детали общего формализма в кн. [2])

$$s=\tfrac{1}{2}\ \Rightarrow\quad (\varepsilon^1_{\frac12,\frac12},\varepsilon^1_{\frac12,-\frac12},\varepsilon^2_{\frac12,\frac12},\varepsilon^2_{\frac12,-\frac12}),\ \ (\varepsilon^3_{\frac12,\frac12},\varepsilon^3_{\frac12,-\frac12},\varepsilon^4_{\frac12,\frac12},\varepsilon^4_{\frac12,-\frac12}),\ \ (\varepsilon^5_{\frac12,\frac12},\varepsilon^5_{\frac12,-\frac12},\varepsilon^6_{\frac12,\frac12},\varepsilon^6_{\frac12,-\frac12});$$

$$s=\frac{3}{2}\Rightarrow(\varepsilon^5_{\frac32,\frac32},\varepsilon^5_{\frac32,-\frac32},\varepsilon^6_{\frac32,\frac32},\varepsilon^6_{\frac32,-\frac32}),(\varepsilon^5_{\frac32,\frac12},\varepsilon^5_{\frac32,-\frac12},\varepsilon^6_{\frac32,\frac12},\varepsilon^6_{\frac32,-\frac12}). \tag{1.5}$$

Матрица Γ_4 при этом представима в виде

$$L_4=\begin{vmatrix} L_4^{(1/2)} & 0 \\ 0 & L_4^{(3/2)} \end{vmatrix}, \tag{1.6}$$

где блоки $L_4^{(1/2)}$ и $L_4^{(3/2)}$ имеют следующую структуру:

$$L_4^{(1/2)}=\begin{vmatrix}
0 & 0 & c_{12}^{1/2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{15}^{1/2} & 0 \\
0 & 0 & 0 & c_{12}^{1/2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{15}^{1/2} \\
c_{21}^{1/2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{51}^{1/2} & 0 & 0 & 0 \\
0 & c_{21}^{1/2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{51}^{1/2} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{34}^{1/2} & 0 & 0 & 0 & c_{35}^{1/2} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{34}^{1/2} & 0 & 0 & 0 & c_{35}^{1/2} \\
0 & 0 & 0 & 0 & c_{43}^{1/2} & 0 & 0 & 0 & c_{46}^{1/2} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{43}^{1/2} & 0 & 0 & 0 & c_{46}^{1/2} & 0 & 0 \\
0 & 0 & c_{62}^{1/2} & 0 & 0 & 0 & c_{64}^{1/2} & 0 & 0 & 0 & c_{65}^{1/2} & 0 \\
0 & 0 & 0 & c_{62}^{1/2} & 0 & 0 & 0 & c_{64}^{1/2} & 0 & 0 & 0 & c_{65}^{1/2} \\
c_{51}^{1/2} & 0 & 0 & 0 & c_{53}^{1/2} & 0 & 0 & 0 & c_{56}^{1/2} & 0 & 0 & 0 \\
0 & c_{51}^{1/2} & 0 & 0 & 0 & c_{53}^{1/2} & 0 & 0 & 0 & c_{56}^{1/2} & 0 & 0
\end{vmatrix}, \tag{1.7}$$

$$L_4^{(3/2)}=\begin{vmatrix}
0 & 0 & c_{65}^{3/2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & c_{65}^{3/2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
c_{56}^{3/2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & c_{56}^{3/2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{65}^{3/2} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{65}^{3/2} \\
0 & 0 & 0 & 0 & c_{56}^{3/2} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{56}^{3/2} & 0 & 0
\end{vmatrix}. \tag{1.8}$$

Из требования Р-инвариантности модели получаем ограничения

$$c_{56}^{3/2}=c_{65}^{3/2}, \tag{1.9}$$

тогда блок $L_4^{(3/2)}$ записывается короче

$$L_4^{(3/2)}=\begin{vmatrix} c_{65}^{3/2}\gamma_4 & 0 \\ 0 & c_{65}^{3/2}\gamma_4 \end{vmatrix}. \tag{1.10}$$

Исключаем из модели присутствие спина $3/2$, это дает ограничения

$$c_{56}^{3/2} = c_{65}^{3/2} = 0 \quad \Rightarrow \quad L_4^{(3/2)} = 0; \tag{1.11}$$

таким образом, блок $L_4^{(3/2)}$ является нулевым.

Рассматриваем блок $L_4^{(1/2)}$. В нем помимо ограничений на $c_{56}^{1/2}$ из требования P-инвариантности уравнения имеем и другие ограничения:

$$c_{12}^{1/2} = c_{21}^{1/2}, \quad c_{34}^{1/2} = c_{43}^{1/2}, \quad c_{15}^{1/2} = c_{26}^{1/2},$$
$$c_{35}^{1/2} = c_{46}^{1/2}, \quad c_{62}^{1/2} = c_{51}^{1/2}, \quad c_{64}^{1/2} = c_{53}^{1/2}. \tag{1.12}$$

Условие существования лагранжевой формулировки теории приводит к вещественности параметров $c_{12}^{1/2}, c_{34}^{1/2}$ и к условиям

$$c_{62}^{1/2} = \frac{\eta_{56}^{1/2}}{\eta_{12}^{1/2}} (c_{15}^{1/2})^*, \quad c_{64}^{1/2} = \frac{\eta_{56}^{1/2}}{\eta_{34}^{1/2}} (c_{35}^{1/2})^*. \tag{1.13}$$

Введем обозначения:

$$c_{12}^{1/2} = c_1, \quad c_{34}^{1/2} = c_2, \quad c_{15}^{1/2} = c_3, \quad c_{35}^{1/2} = c_4, \quad \frac{\eta_{56}^{1/2}}{\eta_{12}^{1/2}} = f, \quad \frac{\eta_{56}^{1/2}}{\eta_{34}^{1/2}} = g, \tag{1.14}$$

где c_1, c_2 – вещественные, c_3, c_4 – комплексные, а $f, g \in \{-1, +1\}$. С учетом этого спиновый блок $L_4^{(1/2)}$ представляется в виде

$$L_4^{(1/2)} = \begin{vmatrix} c_1\gamma_4 & 0 & c_1\gamma_4 \\ 0 & c_2\gamma_4 & c_4\gamma_4 \\ fc_3^*\gamma_4 & gc_4^*\gamma_4 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_1 & 0 & c_1 \\ 0 & c_2 & c_4 \\ fc_3^* & gc_4^* & 0 \end{vmatrix} \otimes \gamma_4 = \beta^{(1/2)} \otimes \gamma_4, \tag{1.15}$$

где

$$\beta^{(1/2)} = \begin{vmatrix} c_1 & 0 & c_1 \\ 0 & c_2 & c_4 \\ fc_3^* & gc_4^* & 0 \end{vmatrix}. \tag{1.16}$$

В аналогичной форме представима и матрица билинейной формы:

$$\eta = \begin{vmatrix} \eta^{(1/2)} & 0 \\ 0 & \eta^{(3/2)} \end{vmatrix}, \tag{1.17}$$

$$\eta^{(1/2)} = \begin{vmatrix} \eta_{12}^{(1/2)} & 0 & 0 \\ 0 & \eta_{34}^{(1/2)} & 0 \\ 0 & 0 & \eta_{56}^{(1/2)} \end{vmatrix} \otimes \gamma_4, \tag{1.18}$$

$$\eta^{(3/2)} = \eta_{56}^{(3/2)} I_2 \oslash \gamma_4, \qquad \eta_{56}^{(3/2)} = -\eta_{56}^{(1/2)}; \tag{1.19}$$

не уменьшая общности, можно считать, что

$$\eta_{ij}^{(1/2)} = \pm 1.$$

Найдем явный вид характеристического уравнения для матрицы $\beta^{(1/2)}$:

$$\begin{vmatrix} c_1 - \lambda & 0 & c_1 \\ 0 & c_2 - \lambda & c_4 \\ fc_3^* & gc_4^* & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\lambda^3 - \lambda^2(c_1 + c_2) + \lambda[c_1c_2 - f\,|c_3|^2 - g\,|c_4|^2] + (fc_2\,|c_3|^2 + gc_1\,|c_4|^2) = 0. \tag{1.20}$$

Определим спинорный вариант записи системы спинорных уравнений для рассматриваемого случая. Для решения данной задачи необходимо определить оператор перехода от представления функции ψ в модифицированном базисе Гельфанда – Яглома к ее спинорному представлению и наоборот.

Решение этой задачи проведем поэтапно: сначала определим операторы переходов от представления функции ψ в модифицированном базисе Гельфанда – Яглома к ее каноническому представлению, а затем от канонического представления к спинорному. Функцию ψ в указанных представлениях определим соответственно следующим образом:

$$\psi_{G.-Y.}=\left|\begin{matrix}
\psi^{(0,1/2)}_{1/2,1/2}\\
\psi^{(0,1/2)}_{1/2,-1/2}\\
\psi^{(1/2,0)}_{1/2,1/2}\\
\psi^{(1/2,0)}_{1/2,-1/2}\\
\psi'^{(0,1/2)}_{1/2,1/2}\\
\psi'^{(0,1/2)}_{1/2,-1/2}\\
\psi'^{(1/2,0)}_{1/2,1/2}\\
\psi'^{(1/2,0)}_{1/2,-1/2}\\
\psi^{(1,1/2)}_{1/2,1/2}\\
\psi^{(1,1/2)}_{1/2,-1/2}\\
\psi^{(1/2,1)}_{1/2,1/2}\\
\psi^{(1/2,1)}_{1/2,-1/2}\\
\psi^{(1,1/2)}_{3/2,3/2}\\
\psi^{(1,1/2)}_{3/2,-3/2}\\
\psi^{(1/2,1)}_{3/2,3/2}\\
\psi^{(1/2,1)}_{3/2,-3/2}\\
\psi^{(1,1/2)}_{3/2,1/2}\\
\psi^{(1,1/2)}_{3/2,-1/2}\\
\psi^{(1/2,1)}_{3/2,1/2}\\
\psi^{(1/2,1)}_{3/2,-1/2}
\end{matrix}\right|,\
\psi_{canon.}=\left|\begin{matrix}
\psi^{(0,1/2)}_{0,1/2}\\
\psi^{(0,1/2)}_{0,-1/2}\\
\psi^{(1/2,0)}_{1/2,0}\\
\psi^{(1/2,0)}_{-1/2,0}\\
\psi'^{(0,1/2)}_{0,1/2}\\
\psi'^{(0,1/2)}_{0,-1/2}\\
\psi'^{(1/2,0)}_{1/2,0}\\
\psi'^{(1/2,0)}_{-1/2,0}\\
\psi^{(1,1/2)}_{1,1/2}\\
\psi^{(1,1/2)}_{0,1/2}\\
\psi^{(1,1/2)}_{-1,1/2}\\
\psi^{(1,1/2)}_{1,-1/2}\\
\psi^{(1,1/2)}_{0,-1/2}\\
\psi^{(1,1/2)}_{-1,-1/2}\\
\psi^{(1/2,1)}_{1/2,1}\\
\psi^{(1/2,1)}_{1/2,0}\\
\psi^{(1/2,1)}_{1/2,-1}\\
\psi^{(1/2,1)}_{-1/2,1}\\
\psi^{(1/2,1)}_{-1/2,0}\\
\psi^{(1/2,1)}_{-1/2,-1}
\end{matrix}\right|,\
\psi_{spinor}=\left|\begin{matrix}
\psi^{\dot{1}}\\
\psi^{\dot{2}}\\
\psi_{1}\\
\psi_{2}\\
\psi'^{\dot{1}}\\
\psi'^{\dot{2}}\\
\psi'_{1}\\
\psi'_{2}\\
\psi^{\dot{1}}_{(11)}\\
\psi^{\dot{1}}_{(12)}\\
\psi^{\dot{1}}_{(22)}\\
\psi^{\dot{2}}_{(11)}\\
\psi^{\dot{2}}_{(12)}\\
\psi^{\dot{2}}_{(22)}\\
\psi_{1}^{(\dot{1}\dot{1})}\\
\psi_{1}^{(\dot{1}\dot{2})}\\
\psi_{1}^{(\dot{2}\dot{2})}\\
\psi_{2}^{(\dot{1}\dot{1})}\\
\psi_{2}^{(\dot{1}\dot{2})}\\
\psi_{2}^{(\dot{2}\dot{2})}
\end{matrix}\right|,$$

Представление Гельфанда – Яглома для функции ψ может быть определено согласно формуле

$$\psi^{\tau}_{s,m}=\Sigma_{l_3,l'_3}C^{s,m}_{ll'l_3l'_3}\psi^{(l,l')}_{l_3l'_3},$$

где s,m – фиксированы, $l_3+l'_3=m,$ а каноническое и спинорное – согласно формуле

$$\psi^{(l,l')}_{l_3l'_3}=\{\frac{(2l)!}{(l+l_3)!(l-l_3)!}\}^{1/2}\{\frac{(2l')!}{(l'+l'_3)!(l'-l'_3)!}\}^{1/2}\psi^{(\dot{1}\ldots\dot{1}\dot{2}\ldots\dot{2})}_{(1\ldots12\ldots2)},$$

где число индексов типа: $\dot{1}$ равно $l'+l'_3$; $\dot{2}$ равно $l'-l'_3$; 1 равно $l+l_3$; 2 равно $l-l_3$. В результате получаем

$$\psi_{canon.}=A\psi_{spinor},$$

$$A =$$

$$\begin{vmatrix}
1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&\sqrt{2}&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&\sqrt{2}&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&\sqrt{2}&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&\sqrt{2}&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1
\end{vmatrix};$$

$$\psi_{G.-Y.} = B\psi_{canon.},$$

$$B =$$

$$\begin{vmatrix}
1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&-\frac{1}{\sqrt{3}}&0&\sqrt{\frac{2}{3}}&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&-\sqrt{\frac{2}{3}}&0&\frac{1}{\sqrt{3}}&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&\frac{1}{\sqrt{3}}&0&-\sqrt{\frac{2}{3}}&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&\sqrt{\frac{2}{3}}&0&-\frac{1}{\sqrt{3}}&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&\sqrt{\frac{2}{3}}&0&\frac{1}{\sqrt{3}}&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&\frac{1}{\sqrt{3}}&0&\sqrt{\frac{2}{3}}&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&\sqrt{\frac{2}{3}}&0&\frac{1}{\sqrt{3}}&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&\frac{1}{\sqrt{3}}&0&\sqrt{\frac{2}{3}}&0
\end{vmatrix}.$$

Следовательно, $$\psi_{spinor} = A^{-1}B^{+}\psi_{G.-Y.},$$

а $$L_4^{(spinor)} = A^{-1}B^{+}L_4BA =$$

$$
\left|\begin{array}{cccccccccc}
0 & 0 & c_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & c_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
c_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\sqrt{\frac{2}{3}}c_3 \\
0 & c_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_2 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_2 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & c_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\sqrt{\frac{2}{3}}c_4 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -\frac{fc_3^*}{\sqrt{6}} & 0 & 0 & 0 & -\frac{gc_4^*}{\sqrt{6}} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -\sqrt{\frac{2}{3}}fc_3^* & 0 & 0 & 0 & -\sqrt{\frac{2}{3}}gc_4^* & 0 & 0 \\
0 & 0 & \sqrt{\frac{2}{3}}fc_3^* & 0 & 0 & 0 & -\sqrt{\frac{2}{3}}gc_4^* & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \frac{fc_3^*}{\sqrt{6}} & 0 & 0 & 0 & \frac{gc_4^*}{\sqrt{6}} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\frac{fc_3^*}{\sqrt{6}} & 0 & 0 & 0 & \frac{gc_4^*}{\sqrt{6}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \sqrt{\frac{2}{3}}fc_3^* & 0 & 0 & 0 & \sqrt{\frac{2}{3}}gc_4^* & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-\sqrt{\frac{2}{3}}fc_3^* & 0 & 0 & 0 & -\sqrt{\frac{2}{3}}gc_4^* & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -\frac{fc_3^*}{\sqrt{6}} & 0 & 0 & 0 & -\frac{gc_4^*}{\sqrt{6}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right.
$$

$$
\left.\begin{array}{cccccccccc}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{\frac{2}{3}}c_3 & 0 & -\sqrt{\frac{2}{3}}c_3 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{\frac{2}{3}}c_3 & 0 & -\sqrt{\frac{2}{3}}c_3 & 0 \\
0 & \sqrt{\frac{2}{3}}c_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-\sqrt{\frac{2}{3}}c_3 & 0 & \sqrt{\frac{2}{3}}c_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{\frac{2}{3}}c_4 & 0 & -\sqrt{\frac{2}{3}}c_4 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{\frac{2}{3}}c_4 & 0 & -\sqrt{\frac{2}{3}}c_4 & 0 \\
0 & \sqrt{\frac{2}{3}}c_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-\sqrt{\frac{2}{3}}c_4 & 0 & \sqrt{\frac{2}{3}}c_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right|.
$$

Полученный результат представим в ином виде, более удобном при переходе к системе спинорных уравнений первого порядка в координатном представлении. Определим функцию ψ в виде

$$\psi_{spinor}=\begin{vmatrix}\psi^{\dot{R}}\\ \psi_{R}\\ \psi'^{\dot{R}}\\ \psi'_{R}\\ \psi^{\dot{R}}_{(AB)}\\ \psi^{(\dot{A}\dot{B})}_{R}\end{vmatrix}.$$

В этом случае

$$L_4^{(spinor)}=$$

$$\frac{1}{i}\left|\begin{matrix}0 & c_1\sigma^{4\dot{a}R} & 0\\ c_1\sigma^{4}_{a\dot{R}} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & c_1\sigma^{4}_{a\dot{R}}\\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{6}}fc_3^{*}\{\sigma_b^{4\dot{a}}\delta_c^R+\sigma_c^{4\dot{a}}\delta_b^R\} & 0\\ -\frac{1}{\sqrt{6}}fc_3^{*}\{\sigma_a^{4\dot{b}}\delta_{\dot{R}}^{\dot{c}}+\sigma_a^{4\dot{c}}\delta_{\dot{R}}^{\dot{b}}\} & 0 & \end{matrix}\right.$$

$$\left.\begin{matrix}0 & 0 & c_3\sqrt{\frac{2}{3}}\delta^{(\dot{a}\dot{c})}_{(\dot{A}\dot{B})}\sigma^{4R}_{\dot{c}}\\ 0 & c_3\sqrt{\frac{2}{3}}\delta^{(AB)}_{(ac)}\sigma^{4c}_{R} & 0\\ c_2\sigma^{4\dot{a}R} & 0 & c_4\sqrt{\frac{2}{3}}\delta^{(\dot{a}\dot{c})}_{(\dot{A}\dot{B})}\sigma^{4R}_{\dot{c}}\\ 0 & c_3\sqrt{\frac{2}{3}}\delta^{(AB)}_{(ac)}\sigma^{4c}_{R} & 0\\ -\frac{1}{\sqrt{6}}gc_4^{*}\{\sigma_b^{4\dot{a}}\delta_c^R+\sigma_c^{4\dot{a}}\delta_b^R\} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{matrix}\right|.$$

Здесь δ_B^A, $\delta_{\dot{B}}^{\dot{A}}$ – спинорные символы Кронекера, равные 1 при $A=B,\dot{A}=\dot{B}$ и 0 при $A\neq B,\dot{A}\neq\dot{B}$;

$$\delta^{(ab)}_{(cd)}=\frac{1}{2}(\delta_c^a\delta_d^b+\delta_d^a\delta_c^b),\qquad \delta^{(\dot{a}\dot{b})}_{(\dot{c}\dot{d})}=\frac{1}{2}(\delta_{\dot{c}}^{\dot{a}}\delta_{\dot{d}}^{\dot{b}}+\delta_{\dot{d}}^{\dot{a}}\delta_{\dot{c}}^{\dot{b}});\qquad \sigma^4_{\dot{a}b}=\begin{vmatrix}i & 0\\ 0 & i\end{vmatrix}.$$

В аналогичном виде задаются и другие матрицы исследуемого уравнения. При этом σ^4 следует заменить на σ^{μ}, причем

$$\sigma^1_{\dot a b}=\begin{vmatrix}0&1\\1&0\end{vmatrix},\quad \sigma^2_{\dot a b}=\begin{vmatrix}0&-i\\i&0\end{vmatrix},\quad \sigma^3_{\dot a b}=\begin{vmatrix}1&0\\0&-1\end{vmatrix}.$$

Соответственно, система спинорных уравнений в рассматриваемом случае имеет вид ($\partial_{\dot a b}=\frac{1}{i}\partial_\mu\sigma^\mu_{\dot a b}$)

$$c_1\partial^{\dot a b}\Psi_b+\sqrt{\frac{2}{3}}c_3\partial^c_{\dot b}\Psi^{(\dot a\dot b)}_c+M\Psi^{\dot a}=0, \tag{1.21}$$

$$c_1\partial_{a\dot b}\Psi^{\dot b}+\sqrt{\frac{2}{3}}c_3\partial^b_{\dot c}\Psi^{\dot c}_{(ab)}+M\Psi_a=0, \tag{1.22}$$

$$c_2\partial^{\dot a b}\Psi'_b+\sqrt{\frac{2}{3}}c_4\partial^c_{\dot b}\Psi^{(\dot a\dot b)}_c+M\Psi'^{\dot a}=0, \tag{1.23}$$

$$c_2\partial_{a\dot b}\Psi'^{\dot b}+\sqrt{\frac{2}{3}}c_4\partial^b_{\dot c}\Psi^{\dot c}_{(ab)}+M\Psi'_a=0, \tag{1.24}$$

$$-\frac{fc_3^*}{\sqrt6}(\partial^{\dot a}_b\Psi^{\dot c}+\partial^{\dot c}_b\Psi^{\dot a})-\frac{gc_4^*}{\sqrt6}(\partial^{\dot a}_b\Psi'^{\dot c}+\partial^{\dot c}_b\Psi'^{\dot a})+M\Psi^{(\dot a\dot c)}_b=0, \tag{1.25}$$

$$-\frac{fc_3^*}{\sqrt6}(\partial^{\dot b}_a\Psi_c+\partial^{\dot b}_c\Psi_a)-\frac{gc_4^*}{\sqrt6}(\partial^{\dot b}_a\Psi'_c+\partial^{\dot b}_c\Psi'_a)+M\Psi^{\dot b}_{(ac)}=0. \tag{1.26}$$

Определим спин-тензорный вариант записи системы (1.21)–(1.26). Для этого зададим входящие в (1.21–1.26) спиноры формулами

$$\Psi^{\dot a}=\sigma^{\mu\dot a b}\Psi_{\mu b},\quad \Psi_a=\sigma^\mu_{a\dot b}\Psi^{\dot b}_\mu,\quad \Psi'^{\dot a}=\Psi^{\dot a}_0,\quad \Psi'_a=\Psi_{0a},$$
$$\Psi^{\dot a}_{(bc)}=\frac12(\sigma^{\mu\dot a}_b\Psi_{\mu c}+\sigma^{\mu\dot a}_c\Psi_{\mu b}),\quad \Psi^{(\dot b\dot c)}_a=\frac12(\sigma^{\mu\dot b}_a\Psi^{\dot c}_\mu+\sigma^{\mu\dot c}_a\Psi^{\dot b}_\mu). \tag{1.27}$$

При этом уравнение (1.21) принимает вид

$$c_1\partial^{\dot a b}\sigma^\mu_{b\dot c}\Psi^{\dot c}_\mu+\frac{c_3}{\sqrt6}\partial^c_{\dot b}(\sigma^{\mu\dot a}_c\Psi^{\dot b}_\mu+\sigma^{\mu\dot b}_c\Psi^{\dot a}_\mu)+M\sigma^{\mu\dot a b}\Psi_{\mu b}=0,$$

или

$$c_1\partial^{\dot a b}\sigma^\mu_{b\dot c}\Psi^{\dot c}_\mu+\frac{c_3}{\sqrt6}(-\sigma^{\mu\dot a c}\partial_{c\dot b}\Psi^{\dot b}_\mu+\frac{2}{i}\partial_\mu\Psi^{\dot a}_\mu)+M\sigma^{\mu\dot a b}\Psi_{\mu b}=0. \tag{1.28}$$

В случае уравнения (1.22) имеем

$$c_1\partial_{a\dot b}\sigma^{\mu\dot b c}\Psi_{\mu c}+\frac{c_3}{\sqrt6}\partial^b_{\dot c}(\sigma^{\mu\dot c}_a\Psi_{\mu b}+\sigma^{\mu\dot c}_b\Psi_{\mu a})+M\sigma^\mu_{a\dot b}\Psi^{\dot b}_\mu=0,$$

или

$$c_1\partial_{a\dot b}\sigma^{\mu\dot b c}\Psi_{\mu c}+\frac{c_3}{\sqrt6}(-\sigma^\mu_{a\dot c}\partial^{\dot c b}\Psi_{\mu b}+\frac{2}{i}\partial_\mu\Psi_{\mu a})+M\sigma^\mu_{a\dot b}\Psi^{\dot b}_\mu=0. \tag{1.29}$$

Уравнения (1.28) и (1.29) объединяем в одно

$$ic_1\hat\partial(\gamma_\mu\Psi_\mu)+\frac{c_3}{\sqrt6}(-i\gamma_\mu\hat\partial\Psi_\mu+\frac{2}{i}\partial_\mu\Psi_\mu)+iM(\gamma_\mu\Psi_\mu)=0,$$

или

$$c_1\hat{\partial}(\gamma_\mu \Psi_\mu) + \frac{c_3}{\sqrt{6}}(-\gamma_\mu \hat{\partial}\Psi_\mu - 2(\partial_\mu \Psi_\mu)) + M(\gamma_\mu \Psi_\mu) = 0 .$$

Таким образом, получаем уравнение

$$c_1\hat{\partial}(\gamma_\mu \Psi_\mu) + \frac{c_3}{\sqrt{6}}(\hat{\partial}(\gamma_\mu \Psi_\mu) - 4(\partial_\mu \Psi_\mu)) + M(\gamma_\mu \Psi_\mu) = 0 , \qquad (1.30)$$

где

$$\gamma_\mu = \frac{1}{i}\begin{vmatrix} 0 & \sigma^{\mu \dot{a} b} \\ \sigma^{\mu}_{a\dot{b}} & 0 \end{vmatrix}, \quad \Psi_\mu = \begin{vmatrix} \Psi^{\dot{a}}_\mu \\ \Psi_{\mu a} \end{vmatrix}.$$

Из уравнений (1.23), (1.24) аналогичным образом получаем

$$c_2 \partial^{\dot{a}b}\Psi_{0b} + \frac{c_4}{\sqrt{6}}\partial^c_{\dot{b}}(\sigma^{\mu\dot{a}}_c \Psi^{\dot{b}}_\mu + \sigma^{\mu\dot{b}}_c \Psi^{\dot{a}}_\mu) + M\Psi^{\dot{a}}_0 = 0 ,$$

или

$$c_2 \partial^{\dot{a}b}\Psi_{0b} + \frac{c_4}{\sqrt{6}}(-\sigma^{\mu\dot{a}c}\partial_{c\dot{b}}\Psi^{\dot{b}}_\mu + \frac{2}{i}\partial_\mu \Psi^{\dot{a}}_\mu) + M\Psi^{\dot{a}}_0 = 0 . \qquad (1.31)$$

И аналогично

$$c_2 \partial_{a\dot{b}}\Psi^{\dot{b}}_0 + \frac{c_4}{\sqrt{6}}\partial^b_{\dot{c}}(\sigma^{\mu\dot{c}}_a \Psi_{\mu b} + \sigma^{\mu\dot{c}}_b \Psi_{\mu a}) + M\Psi_{0a} = 0 ,$$

или

$$c_2 \partial_{a\dot{b}}\Psi^{\dot{b}}_0 + \frac{c_4}{\sqrt{6}}(-\sigma^{\mu}_{a\dot{c}}\partial^{\dot{c}b}\Psi_{\mu b} + \frac{2}{i}\partial_\mu \Psi_{\mu a}) + M\Psi_{0a} = 0. \qquad (1.32)$$

При объединении (1.31), (1.32) приходим к следующему уравнению:

$$c_2\hat{\partial}\Psi_0 + \frac{c_4}{\sqrt{6}}(-i\gamma_\mu \hat{\partial}\Psi_\mu + \frac{2}{i}\partial_\mu \Psi_\mu) + M\Psi_0 = 0 ,$$

или

$$c_2\hat{\partial}\Psi_0 - i\frac{c_4}{\sqrt{6}}(\gamma_\mu \hat{\partial}\Psi_\mu + 2(\partial_\mu \Psi_\mu)) + M\Psi_0 = 0 ;$$

$$c_2\hat{\partial}\Psi_0 - i\frac{c_4}{\sqrt{6}}(-\hat{\partial}(\gamma_\mu \Psi_\mu) + 4(\partial_\mu \Psi_\mu)) + M\Psi_0 = 0. \qquad (1.33)$$

Обратимся к уравнению (1.25). Его можно переписать в виде

$$-\frac{fc^*_3}{\sqrt{6}}(\partial^{\dot{a}}_b \sigma^{\mu\dot{c}k}\Psi_{\mu k} + \partial^{\dot{c}}_b \sigma^{\mu\dot{a}k}\Psi_{\mu k}) - \frac{gc^*_4}{\sqrt{6}}(\partial^{\dot{a}}_b \Psi^{\dot{c}}_0 + \partial^{\dot{c}}_b \Psi^{\dot{a}}_0) + M\frac{1}{2}(\sigma^{\mu\dot{a}}_b \Psi^{\dot{c}}_\mu + \sigma^{\mu\dot{c}}_b \Psi^{\dot{a}}_\mu) = 0. \quad (1.34)$$

Подействуем на уравнение (1.34) оператором $\sigma^{\lambda b}_{\dot{a}}$. В результате находим

$$-\frac{fc^*_3}{\sqrt{6}}(\sigma^{\lambda b}_{\dot{a}}\partial^{\dot{a}}_b \sigma^{\mu\dot{c}k}\Psi_{\mu k} + \sigma^{\lambda b}_{\dot{a}}\partial^{\dot{c}}_b \sigma^{\mu\dot{a}k}\Psi_{\mu k}) - \frac{gc^*_4}{\sqrt{6}}(\sigma^{\lambda b}_{\dot{a}}\partial^{\dot{a}}_b \Psi^{\dot{c}}_0 + \sigma^{\lambda b}_{\dot{a}}\partial^{\dot{c}}_b \Psi^{\dot{a}}_0) +$$

$$+M\frac{1}{2}(\sigma^{\lambda b}_{\dot a}\sigma^{\mu\dot a}_{b}\Psi^{\dot c}_{\mu}+\sigma^{\lambda b}_{\dot a}\sigma^{\mu\dot c}_{b}\Psi^{\dot a}_{\mu})=0,$$

или

$$\frac{fc_3^*}{\sqrt6}(\sigma^{\lambda\dot a b}\partial_{b\dot a}\sigma^{\mu\dot c k}\Psi_{\mu k}+\partial^{\dot c b}\sigma^{\lambda}_{b\dot a}\sigma^{\mu\dot a k}\Psi_{\mu k})+\frac{gc_4^*}{\sqrt6}(\sigma^{\lambda\dot a b}\partial_{b\dot a}\Psi^{\dot c}_{0}+\partial^{\dot c b}\sigma^{\lambda}_{b\dot a}\Psi^{\dot a}_{0})-$$

$$-\frac{M}{2}(\sigma^{\lambda\dot a b}\sigma^{\mu}_{b\dot a}\Psi^{\dot c}_{\mu}+\sigma^{\mu\dot c b}\sigma^{\lambda}_{b\dot a}\Psi^{\dot a}_{\mu})=0,$$

$$-\frac{fc_3^*}{\sqrt6}(\frac{2}{i}\partial_\lambda\sigma^{\mu\dot c k}\Psi_{\mu k}-\partial^{\dot c b}\sigma^{\lambda}_{b\dot a}\sigma^{\mu\dot a k}\Psi_{\mu k})-\frac{gc_4^*}{\sqrt6}(\frac{2}{i}\partial_\lambda\Psi^{\dot c}_{0}-\partial^{\dot c b}\sigma^{\lambda}_{b\dot a}\Psi^{\dot a}_{0})+$$

$$+\frac{M}{2}(2\Psi^{\dot c}_{\lambda}-\sigma^{\mu\dot c b}\sigma^{\lambda}_{b\dot a}\Psi^{\dot a}_{\mu})=0. \qquad (1.35)$$

Из уравнения (1.26) следует, что

$$-\frac{fc_3^*}{\sqrt6}(\partial^{\dot b}_{a}\sigma^{\mu}_{c\dot k}\Psi^{\dot k}_{\mu}+\partial^{\dot b}_{c}\sigma^{\mu}_{a\dot k}\Psi^{\dot k}_{\mu})-\frac{gc_4^*}{\sqrt6}(\partial^{\dot b}_{a}\Psi_{0c}+\partial^{\dot b}_{c}\Psi_{0a})+\frac{M}{2}(\sigma^{\mu\dot b}_{a}\Psi_{\mu c}+\sigma^{\mu\dot b}_{c}\Psi_{\mu a})=0. \qquad (1.36)$$

Подействовав на уравнение (1.36) оператором $\sigma^{\lambda a}_{\dot b}$, получаем

$$-\frac{fc_3^*}{\sqrt6}(\sigma^{\lambda a}_{\dot b}\partial^{\dot b}_{a}\sigma^{\mu}_{c\dot k}\Psi^{\dot k}_{\mu}+\sigma^{\lambda a}_{\dot b}\partial^{\dot b}_{a}\partial^{\dot b}_{c}\sigma^{\mu}_{a\dot k}\Psi^{\dot k}_{\mu})-\frac{gc_4^*}{\sqrt6}(\sigma^{\lambda a}_{\dot b}\partial^{\dot b}_{a}\partial^{\dot b}_{a}\Psi_{0c}+\sigma^{\lambda a}_{\dot b}\partial^{\dot b}_{a}\partial^{\dot b}_{c}\Psi_{0a})+$$

$$+\frac{M}{2}(\sigma^{\lambda a}_{\dot b}\partial^{\dot b}_{a}\sigma^{\mu\dot b}_{a}\Psi_{\mu c}+\sigma^{\lambda a}_{\dot b}\partial^{\dot b}_{a}\sigma^{\mu\dot b}_{c}\Psi_{\mu a})=0,$$

или

$$\frac{fc_3^*}{\sqrt6}(\sigma^{\lambda}_{a\dot b}\partial^{\dot b a}\sigma^{\mu}_{c\dot k}\Psi^{\dot k}_{\mu}+\partial_{c\dot b}\sigma^{\lambda\dot b a}\sigma^{\mu}_{a\dot k}\Psi^{\dot k}_{\mu})+\frac{gc_4^*}{\sqrt6}(\sigma^{\lambda\dot b a}\partial_{a\dot b}\Psi_{0c}+\partial_{c\dot b}\sigma^{\lambda\dot b a}\Psi_{0a})-$$

$$-\frac{M}{2}(\sigma^{\lambda\dot b a}\sigma^{\mu}_{a\dot b}\Psi_{\mu c}+\sigma^{\mu}_{c\dot b}\sigma^{\lambda\dot b a}\Psi_{\mu a})=0,$$

$$-\frac{fc_3^*}{\sqrt6}(\frac{2}{i}\partial_\lambda\sigma^{\mu}_{c\dot k}\Psi^{\dot k}_{\mu}-\partial_{c\dot b}\sigma^{\lambda\dot b a}\sigma^{\mu}_{a\dot k}\Psi^{\dot k}_{\mu})-\frac{gc_4^*}{\sqrt6}(\frac{2}{i}\partial_\lambda\Psi_{0c}-\partial_{c\dot b}\sigma^{\lambda\dot b a}\Psi_{0a})+$$

$$+\frac{M}{2}(2\Psi_{\lambda c}-\sigma^{\mu}_{c\dot b}\sigma^{\lambda\dot b a}\Psi_{\mu a})=0. \qquad (1.37)$$

Объединения (1.36) и (1.37), получаем уравнение

$$-\frac{fc_3^*}{\sqrt6}(2\partial_\lambda(\gamma_\mu\Psi_\mu)+\hat\partial\gamma_\lambda(\gamma_\mu\Psi_\mu))-\frac{gc_4^*}{\sqrt6}(\frac{2}{i}\partial_\lambda\Psi_0-i\hat\partial\gamma_\lambda\Psi_0)+$$

$$+\frac{M}{2}(2\Psi_\lambda+\gamma_\mu\gamma_\lambda\Psi_\mu)=0,$$

или

$$-\frac{2fc_3^*}{\sqrt6}(\partial_\lambda(\gamma_\mu\Psi_\mu)-\frac{1}{4}\gamma_\lambda\hat\partial(\gamma_\mu\Psi_\mu))+$$

$$+i\frac{2gc_4^*}{\sqrt6}(\partial_\lambda\Psi_0-\frac{1}{4}\gamma_\lambda\hat\partial\Psi_0)+M(\Psi_\lambda-\frac{1}{4}\gamma_\lambda(\gamma_\mu\Psi_\mu))=0. \qquad (1.38)$$

Таким образом, искомая система спин-тензорных уравнений имеет вид

$$c_1\hat{\partial}(\gamma_\mu\Psi_\mu)+\frac{c_3}{\sqrt{6}}(\hat{\partial}(\gamma_\mu\Psi_\mu)-4(\partial_\mu\Psi_\mu))+M(\gamma_\mu\Psi_\mu)=0\,,$$

$$c_2\hat{\partial}\Psi_0-i\frac{4c_4}{\sqrt{6}}(-\frac{1}{4}\hat{\partial}(\gamma_\mu\Psi_\mu)+(\partial_\mu\Psi_\mu))+M\Psi_0=0\,,$$

$$-\frac{2fc_3^*}{\sqrt{6}}(\partial_\lambda(\gamma_\mu\Psi_\mu)-\frac{1}{4}\gamma_\lambda\hat{\partial}(\gamma_\mu\Psi_\mu))+$$

$$+i\frac{2gc_4^*}{\sqrt{6}}(\partial_\lambda\Psi_0-\frac{1}{4}\gamma_\lambda\hat{\partial}\Psi_0)+M(\Psi_\lambda-\frac{1}{4}\gamma_\lambda(\gamma_\mu\Psi_\mu))=0\,. \tag{1.39}$$

Система уравнений может быть представлена в несколько иной форме. Подействуем на первое уравнение системы (1.39) оператором $\frac{1}{4}\gamma_\lambda$. Получаем

$$\frac{1}{4}c_1\gamma_\lambda\hat{\partial}(\gamma_\mu\psi_\mu)+\frac{c_3}{\sqrt{6}}(\frac{1}{4}\gamma_\lambda\hat{\partial}(\gamma_\mu\psi_\mu)-\gamma_\lambda(\partial_\mu\psi_\mu))+\frac{M}{4}\gamma_\lambda(\gamma_\mu\psi_\mu)=0. \tag{1.40}$$

Суммируя вновь полученное уравнение с третьим уравнением (1.39), приходим к тому, что

$$-\frac{2fc_3^*}{\sqrt{6}}(\partial_\lambda(\gamma_\mu\psi_\mu)-\frac{1}{4}\gamma_\lambda\hat{\partial}(\gamma_\mu\psi_\mu))+i\frac{2gc_4^*}{\sqrt{6}}(\partial_\lambda\psi_0-\frac{1}{4}\gamma_\lambda\hat{\partial}\psi_0)+$$

$$\frac{1}{4}c_1\gamma_\lambda\hat{\partial}(\gamma_\mu\psi_\mu)-\frac{c_3}{\sqrt{6}}(\gamma_\lambda(\partial_\mu\psi_\mu)-\frac{1}{4}\gamma_\lambda\hat{\partial}(\gamma_\mu\psi_\mu))+M\psi_\lambda=0.$$

Данное уравнение совместно со вторым уравнением системы (1.39) и образует систему, эквивалентную (1.39) (обозначим её, не выписывая, (1.41)).

$$c_1\hat{\partial}(\gamma_\mu\psi_\mu)+\frac{c_3}{\sqrt{6}}(\hat{\partial}(\gamma_\mu\psi_\mu)-4(\partial_\mu\psi_\mu))+M(\gamma_\mu\psi_\mu)=0,$$

2. Дальнейший анализ спин-тензорных уравнений

Проведем дополнительные исследования системы уравнений (1.78). Поскольку вектор-биспинор Ψ_μ определяется через биспиноры Ψ_0, $(\gamma_\mu\Psi_\mu)$, $(\partial_\mu\Psi_\mu)$ (см. второе уравнение в (1.41)), то попытаемся сформулировать систему уравнений первого порядка исключительно относительно указанных биспиноров $(\gamma_\mu\Psi_\mu)$, Ψ_0, $(\partial_\mu\Psi_\mu)$.

Действуя на второе уравнение системы (1.41) оператором ∂_λ, находим

$$-f\frac{\sqrt{6}}{4}c_3^*\partial_\lambda\partial_\lambda(\gamma_\mu\Psi_\mu)+ig\frac{\sqrt{6}}{4}c_4^*\partial_\lambda\partial_\lambda\Psi_0+\frac{1}{4}c_1\partial_\lambda\partial_\lambda(\gamma_\mu\Psi_\mu)-$$

$$-\frac{c_3}{\sqrt{6}}\hat{\partial}(\partial_\mu\Psi_\mu)+\frac{c_3}{4\sqrt{6}}\partial_\lambda\partial_\lambda(\gamma_\mu\Psi_\mu)+M(\partial_\mu\Psi_\mu)=0\,. \tag{2.1}$$

Из первого уравнения системы (1.41) следует

$$c_1\partial_\lambda\partial_\lambda(\gamma_\mu\Psi_\mu)-\frac{4c_3}{\sqrt{6}}(\hat{\partial}(\partial_\mu\Psi_\mu)-\frac{1}{4}\partial_\lambda\partial_\lambda(\gamma_\mu\Psi_\mu))+M\hat{\partial}(\gamma_\mu\Psi_\mu)=0\,,$$

$$c_1\partial_\lambda\partial_\lambda(\gamma_\mu\Psi_\mu)+\frac{c_3}{\sqrt{6}}\partial_\lambda\partial_\lambda(\gamma_\mu\Psi_\mu)=\frac{4c_3}{\sqrt{6}}\hat{\partial}(\partial_\mu\Psi_\mu)-M\hat{\partial}(\gamma_\mu\Psi_\mu)\,.$$

С учетом этого уравнение (2.1) представимо в виде

$$-f\frac{\sqrt{6}}{4}c_3^*\partial_\lambda\partial_\lambda(\gamma_\mu\Psi_\mu)+ig\frac{\sqrt{6}}{4}c_4^*\partial_\lambda\partial_\lambda\Psi_0+M(\partial_\mu\Psi_\mu)-\frac{M}{4}\hat{\partial}(\gamma_\mu\Psi_\mu)=0\,. \qquad (2.2)$$

В свою очередь, из уравнения (1.40) получаем

$$(c_1+\frac{c_3}{\sqrt{6}})\partial_\lambda\partial_\lambda(\gamma_\mu\Psi_\mu)=\frac{4c_3}{\sqrt{6}}\hat{\partial}(\partial_\mu\Psi_\mu)-M\hat{\partial}(\gamma_\mu\Psi_\mu)\,,$$

или

$$\partial_\lambda\partial_\lambda(\gamma_\mu\Psi_\mu)=\frac{1}{c_1+c_3/\sqrt{6}}\{\frac{4c_3}{\sqrt{6}}\hat{\partial}(\partial_\mu\Psi_\mu)-M\hat{\partial}(\gamma_\mu\Psi_\mu)\}\,. \qquad (2.3)$$

Используя (2.3), уравнение (2.1) можно переписать в виде

$$-\frac{f\,|c_3|^2}{c_1+c_3/\sqrt{6}}\hat{\partial}(\partial_\mu\Psi_\mu)+M\frac{\sqrt{6}}{4}\frac{fc_3^*}{c_1+c_3/\sqrt{6}}+ig\frac{\sqrt{6}}{4}c_4^*\partial_\lambda\partial_\lambda\Psi_0+$$
$$+M(\partial_\mu\Psi_\mu)-\frac{M}{4}\hat{\partial}(\gamma_\mu\Psi_\mu)=0\,. \qquad (2.4)$$

Из первого уравнения системы (1.41) получаем уравнение

$$c_2\partial_\lambda\partial_\lambda\Psi_0+i\frac{c_4}{\sqrt{6}}\partial_\lambda\partial_\lambda(\gamma_\mu\Psi_\mu)=\hat{\partial}\{i\frac{4}{\sqrt{6}}c_4(\partial_\mu\Psi_\mu)-M\Psi_0\}\,,$$

которое с учетом (2.3) переписывается так:

$$c_2\partial_\lambda\partial_\lambda\Psi_0+i\frac{c_4}{\sqrt{6}}\frac{1}{c_1+c_3/\sqrt{6}}\{\frac{4c_3}{\sqrt{6}}\hat{\partial}(\partial_\mu\Psi_\mu)-M\hat{\partial}(\gamma_\mu\Psi_\mu)\}=\hat{\partial}\{i\frac{4}{\sqrt{6}}c_4(\partial_\mu\Psi_\mu)-M\Psi_0\}\,;$$

отсюда следует:

$$\partial_\lambda\partial_\lambda\Psi_0=\frac{i}{c_2}\{-\frac{2}{3}\frac{c_3c_4}{c_1+\frac{c_3}{\sqrt{6}}}+\frac{4c_4}{\sqrt{6}}\}\hat{\partial}(\partial_\mu\Psi_\mu)+i\frac{M}{c_2\sqrt{6}}\cdot\frac{c_4}{c_1+\frac{c_3}{\sqrt{6}}}\hat{\partial}(\gamma_\mu\Psi_\mu)-\frac{M}{c_2}\hat{\partial}\Psi_0\,.$$

С учетом последнего равенства уравнение (2.4) принимает вид

$$-\frac{fc_2\,|c_3|^2+gc_1\,|c_4|^2}{c_2(c_1+\frac{c_3}{\sqrt{6}})}\hat{\partial}(\partial_\mu\Psi_\mu)-igM\frac{\sqrt{6}}{4}\cdot\frac{c_4^*}{c_2}\hat{\partial}\Psi_0+$$
$$+\frac{M}{4}\cdot\frac{1}{c_2(c_1+\frac{c_3}{\sqrt{6}})}\{\sqrt{6}fc_2c_3^*-g\,|c_4|^2-c_2(c_1+\frac{c_3}{\sqrt{6}})\}\hat{\partial}(\gamma_\mu\Psi_\mu)+M(\partial_\mu\Psi_\mu)=0\,. \qquad (2.5)$$

Уравнение (2.5) является одним из требуемых уравнений первого порядка относительно указанного выше набора биспинорных функций. Для получения еще одного уравнения необходимо из уравнения (2.5) выразить величину $(\partial_\mu\Psi_\mu)$ и подставить результат в первое из уравнений системы (1.41). В результате получаем

$$\frac{1}{c_2(c_1+\frac{c_3}{\sqrt{6}})}\{c_1c_2(c_1+\frac{c_3}{\sqrt{6}})+fc_2|c_3|^2-\frac{g}{\sqrt{6}}c_3|c_4|^2\}\hat{\partial}(\gamma_\mu\Psi_\mu)-$$
$$-\frac{4c_3}{M\sqrt{6}}\cdot\frac{fc_2|c_3|^2+gc_1|c_4|^2}{c_2(c_1+\frac{c_3}{\sqrt{6}})}\hat{\partial}(\partial_\mu\Psi_\mu)-ig\frac{c_3c_4^*}{c_2}\hat{\partial}\Psi_0+M(\gamma_\mu\Psi_\mu)=0. \quad (2.6)$$

Аналогичным образом может быть получено третье из уравнений первого порядка относительно биспинорных функций

$$\frac{c_2^2+g|c_4|^2}{c_2}\hat{\partial}\Psi_0-i\frac{4c_4}{M\sqrt{6}}\cdot\frac{fc_2|c_3|^2+gc_1|c_4|^2}{c_2(c_1+\frac{c_3}{\sqrt{6}})}\hat{\partial}(\partial_\mu\Psi_\mu)+$$
$$+\frac{i}{\sqrt{6}}\cdot\frac{c_4}{c_2(c_1+\frac{c_3}{\sqrt{6}})}\{\sqrt{6}fc_2c_3^*-g|c_4|^2\}\hat{\partial}(\gamma_\mu\Psi_\mu)+M\Psi_0=0. \quad (2.7)$$

Итак, система уравнений первого порядка относительно биспинорных функций $\gamma_\mu\Psi_\mu$, Ψ_0. $\partial_\mu\Psi_\mu$, определяющих вектор-биспинор Ψ_λ, задается в виде

$$\frac{1}{c_2(c_1+c_3/\sqrt{6})}\left\{c_1c_2(c_1+c_3/\sqrt{6})+fc_2|c_3|^2-\frac{g}{\sqrt{6}}c_3|c_4|^2\right\}\hat{\partial}(\gamma_\mu\Psi_\mu)-$$
$$-ig\frac{c_3c_4^*}{c_2}\hat{\partial}\Psi_0-\frac{4c_3}{M\sqrt{6}}\cdot\frac{fc_2|c_3|^2+gc_1|c_4|^2}{c_2(c_1+c_3/\sqrt{6})}\hat{\partial}(\partial_\mu\Psi_\mu)+M(\gamma_\mu\Psi_\mu)=0, \quad (2.8)$$

$$\frac{i}{\sqrt{6}}\cdot\frac{c_4}{c_2(c_1+c_3/\sqrt{6})}\{\sqrt{6}fc_2c_3^*-g|c_4|^2\}\hat{\partial}(\gamma_\mu\Psi_\mu)+\frac{c_2^2+g|c_4|^2}{c_2}\hat{\partial}\Psi_0-$$
$$-i\frac{4c_4}{M\sqrt{6}}\cdot\frac{fc_2|c_3|^2+gc_1|c_4|^2}{c_2(c_1+c_3/\sqrt{6})}\hat{\partial}(\partial_\mu\Psi_\mu)+M\Psi_0=0, \quad (2.9)$$

$$+\frac{M}{4}\cdot\frac{1}{c_2(c_1+c_3/\sqrt{6})}\left\{\sqrt{6}fc_2c_3^*-g|c_4|^2-c_2(c_1+c_3/\sqrt{6})\right\}\hat{\partial}(\gamma_\mu\Psi_\mu)-$$
$$-igM\frac{\sqrt{6}}{4}\cdot\frac{c_4^*}{c_2}\hat{\partial}\Psi_0-\frac{fc_2|c_3|^2+gc_1|c_4|^2}{c_2(c_1+c_3/\sqrt{6})}\hat{\partial}(\partial_\mu\Psi_\mu)+M(\partial_\mu\Psi_\mu)=0. \quad (2.10)$$

Определим характеристическое уравнение для матрицы, составленной из коэффициентов при операторе $\hat{\partial}$ в системе уравнений (2.8–2.10). Оно имеет вид равенства нулю следующего определителя:

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{c_2(c_1+\frac{c_3}{\sqrt{6}})}\{c_1c_2(c_1+\frac{c_3}{\sqrt{6}})+fc_2|c_3|^2-\frac{g}{\sqrt{6}}c_3|c_4|^2\}-\lambda & -ig\frac{c_3c_4^*}{c_2} & -\frac{4c_3}{M\sqrt{6}}\cdot\frac{fc_2|c_3|^2+gc_1|c_4|^2}{c_2(c_1+\frac{c_3}{\sqrt{6}})} \\ \frac{i}{\sqrt{6}}\cdot\frac{c_4}{c_2(c_1+\frac{c_3}{\sqrt{6}})}\{\sqrt{6}fc_2c_3^*-g|c_4|^2\} & \frac{c_2^2+g|c_4|^2}{c_2}-\lambda & -i\frac{4c_4}{M\sqrt{6}}\cdot\frac{fc_2|c_3|^2+gc_1|c_4|^2}{c_2(c_1+\frac{c_3}{\sqrt{6}})} \\ \frac{M}{4}\cdot\frac{1}{c_2(c_1+\frac{c_3}{\sqrt{6}})}\{\sqrt{6}fc_2c_3^*-g|c_4|^2-c_2(c_1+\frac{c_3}{\sqrt{6}})\} & -igM\frac{\sqrt{6}}{4}\cdot\frac{c_4^*}{c_2} & -\frac{fc_2|c_3|^2+gc_1|c_4|^2}{c_2(c_1+\frac{c_3}{\sqrt{6}})}-\lambda \end{vmatrix}.$$

Отсюда получаем

$$\{\frac{1}{c_2(c_1+\frac{c_3}{\sqrt{6}})}\{c_1c_2(c_1+\frac{c_3}{\sqrt{6}})+fc_2|c_3|^2-\frac{g}{\sqrt{6}}c_3|c_4|^2\}-\lambda\}\{\frac{c_2^2+g|c_4|^2}{c_2}-\lambda\}\{-\frac{fc_2|c_3|^2+gc_1|c_4|^2}{c_2(c_1+\frac{c_3}{\sqrt{6}})}-\lambda\}+$$

$$+\frac{i}{\sqrt{6}}\cdot\frac{c_4}{c_2(c_1+\frac{c_3}{\sqrt{6}})}\{\sqrt{6}fc_2c_3^*-g|c_4|^2\}(-igM\frac{\sqrt{6}}{4}\cdot\frac{c_4^*}{c_2})(-\frac{4c_3}{M\sqrt{6}}\cdot\frac{fc_2|c_3|^2+gc_1|c_4|^2}{c_2(c_1+\frac{c_3}{\sqrt{6}})})+$$

$$+(-ig\frac{c_3c_4^*}{c_2})(-i\frac{4c_4}{M\sqrt{6}}\cdot\frac{fc_2|c_3|^2+gc_1|c_4|^2}{c_2(c_1+\frac{c_3}{\sqrt{6}})})\frac{M}{4}\cdot\frac{1}{c_2(c_1+\frac{c_3}{\sqrt{6}})}\{\sqrt{6}fc_2c_3^*-g|c_4|^2-c_2(c_1+\frac{c_3}{\sqrt{6}})\}+$$

$$+\frac{M}{4}\cdot\frac{1}{c_2(c_1+\frac{c_3}{\sqrt{6}})}\{\sqrt{6}fc_2c_3^*-g|c_4|^2-c_2(c_1+\frac{c_3}{\sqrt{6}})\}\{\frac{c_2^2+g|c_4|^2}{c_2}-\lambda\}\frac{4c_3}{M\sqrt{6}}\cdot\frac{fc_2|c_3|^2+gc_1|c_4|^2}{c_2(c_1+\frac{c_3}{\sqrt{6}})}-$$

$$-ig\frac{c_3c_4^*}{c_2}\frac{i}{\sqrt{6}}\cdot\frac{c_4}{c_2(c_1+\frac{c_3}{\sqrt{6}})}\{\sqrt{6}fc_2c_3^*-g|c_4|^2\}\{\frac{fc_2|c_3|^2+gc_1|c_4|^2}{c_2(c_1+\frac{c_3}{\sqrt{6}})}+\lambda\}-$$

$$-igM\frac{\sqrt{6}}{4}\cdot\frac{c_4^*}{c_2}i\frac{4c_4}{M\sqrt{6}}\cdot\frac{fc_2|c_3|^2+gc_1|c_4|^2}{c_2(c_1+\frac{c_3}{\sqrt{6}})}\{\frac{1}{c_2(c_1+\frac{c_3}{\sqrt{6}})}\{c_1c_2(c_1+\frac{c_3}{\sqrt{6}})+fc_2|c_3|^2-\frac{g}{\sqrt{6}}c_3|c_4|^2\}-\lambda\}=$$

$$=-\lambda^3+\lambda^2\{\frac{1}{c_2(c_1+\frac{c_3}{\sqrt{6}})}\{c_1c_2(c_1+\frac{c_3}{\sqrt{6}})+fc_2|c_3|^2-\frac{g}{\sqrt{6}}c_3|c_4|^2\}+\frac{c_2^2+g|c_4|^2}{c_2}-\frac{fc_2|c_3|^2+gc_1|c_4|^2}{c_2(c_1+\frac{c_3}{\sqrt{6}})}\}-$$

$$-\lambda\{\frac{1}{c_2^2(c_1+\frac{c_3}{\sqrt{6}})}[c_2(c_1^2+f|c_3|^2)+\frac{c_3}{\sqrt{6}}(c_1c_2-g|c_4|^2)]\cdot[c_2^2+g|c_4|^2]-$$

$$-\frac{1}{c_2^2(c_1+\frac{c_3}{\sqrt{6}})^2}[c_2(c_1^2+f|c_3|^2)+\frac{c_3}{\sqrt{6}}(c_1c_2-g|c_4|^2)]\cdot[fc_2|c_3|^2+gc_1|c_4|^2]-$$

$$-\frac{1}{c_2^2(c_1+\frac{c_3}{\sqrt{6}})}(c_2^2+g|c_4|^2)(fc_2|c_3|^2+gc_1|c_4|^2)\}-\frac{1}{c_2^3(c_1+\frac{c_3}{\sqrt{6}})^2}[c_2(c_1^2+f|c_3|^2)+\frac{c_3}{\sqrt{6}}(c_1c_2-g|c_4|^2)]\cdot$$

$$\cdot(c_2^2+g|c_4|^2)(fc_2|c_3|^2)+c_1|c_4|^2))-\frac{1}{c_2^3(c_1+\frac{c_3}{\sqrt{6}})^2}\cdot\frac{gc_3|c_4|^2}{\sqrt{6}}(\sqrt{6}fc_2c_3^*-g|c_4|^2)(fc_2|c_3|^2+gc_1|c_4|^2)-$$

$$-\frac{1}{c_2^3(c_1+\frac{c_3}{\sqrt{6}})^2}\cdot\frac{gc_3|c_4|^2}{\sqrt{6}}(fc_2|c_3|^2+gc_1|c_4|^2)(\sqrt{6}fc_2c_3^*-g|c_4|^2-c_2(c_1+\frac{c_3}{\sqrt{6}}))-$$

$$-\lambda\frac{1}{c_2^2(c_1+\frac{c_3}{\sqrt{6}})^2}\cdot\frac{c_3}{\sqrt{6}}(fc_2|c_3|^2+gc_1|c_4|^2)(\sqrt{6}fc_2c_3^*-g|c_4|^2-c_2(c_1+\frac{c_3}{\sqrt{6}}))+$$

$$+\frac{1}{c_2^3(c_1+\frac{c_3}{\sqrt{6}})^2}\cdot\frac{c_3}{\sqrt{6}}(fc_2|c_3|^2+gc_1|c_4|^2)(\sqrt{6}fc_2c_3^*-g|c_4|^2-c_2(c_1+\frac{c_3}{\sqrt{6}}))(c_2^2+g|c_4|^2)+$$

$$+\frac{1}{c_2^3(c_1+\frac{c_3}{\sqrt{6}})^2}\cdot g|c_4|^2(fc_2|c_3|^2+gc_1|c_4|^2)[c_2(c_1^2+f|c_3|^3)+\frac{c_3}{\sqrt{6}}(c_1c_2-g|c_4|^2)]-$$

$$-\lambda\frac{1}{c_2^2(c_1+\frac{c_3}{\sqrt{6}})}\cdot g|c_4|^2(fc_2|c_3|^2+gc_1|c_4|^2)+$$

$$+\frac{1}{c_2^3(c_1+\frac{c_3}{\sqrt{6}})^2}\cdot g|c_4|^2\frac{c_3}{\sqrt{6}}(fc_2|c_3|^2(+gc_1|c_4|^2)(\sqrt{6}fc_2c_3^*-g|c_4|^2)+$$

$$+\lambda\frac{1}{c_2^2(c_1+\frac{c_3}{\sqrt{6}})}\cdot g\,|c_4|^2\,\frac{c_3}{\sqrt{6}}(\sqrt{6}fc_2c_3^*-g\,|c_4|^2)=$$
$$=-\lambda^3+\lambda^2(c_1+c_2)-\lambda(c_1c_2-f\,|c_3|^2-g\,|c_4|^2)-(fc_2\,|c_3|^2+gc_1\,|c_4|^2)=0\,.$$

Таким образом, характеристическое уравнение имеет относительно простой вид

$$\lambda^3-\lambda^2(c_1+c_2)+\lambda(c_1c_2-f\,|c_3|^2-g\,|c_4|^2)+(fc_2\,|c_3|^2+gc_1\,|c_4|^2)=0, \qquad (2.11)$$

это уравнение совпадает (как и следовало ожидать) с характеристическим уравнением матрицы $\beta^{(1/2)}$. Это означает, что матрица (вводим сокращенные обозначения для ее элементов) системы уравнений (2.8–2.10)

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{c_2(c_1+\frac{c_3}{\sqrt{6}})}\{c_1c_2(c_1+\frac{c_3}{\sqrt{6}})+fc_2\,|c_3|^2-\frac{g}{\sqrt{6}}c_3\,|c_4|^2\} & -ig\frac{c_3c_4^*}{c_2} & -\frac{4c_3}{M\sqrt{6}}\cdot\frac{fc_2\,|c_3|^2+gc_1\,|c_4|^2}{c_2(c_1+\frac{c_3}{\sqrt{6}})} \\ \frac{i}{\sqrt{6}}\cdot\frac{c_4}{c_2(c_1+\frac{c_3}{\sqrt{6}})}\{\sqrt{6}fc_2c_3^*-g\,|c_4|^2\} & \frac{c_2^2+g\,|c_4|^2}{c_2} & -i\frac{4c_4}{M\sqrt{6}}\cdot\frac{fc_2\,|c_3|^2+gc_1\,|c_4|^2}{c_2(c_1+\frac{c_3}{\sqrt{6}})} \\ \frac{M}{4}\cdot\frac{1}{c_2(c_1+\frac{c_3}{\sqrt{6}})}\{\sqrt{6}fc_2c_3^*-g\,|c_4|^2-c_2(c_1+\frac{c_3}{\sqrt{6}})\} & -igM\frac{\sqrt{6}}{4}\cdot\frac{c_4^*}{c_2} & -\frac{fc_2\,|c_3|^2+gc_1\,|c_4|^2}{c_2(c_1+\frac{c_3}{\sqrt{6}})} \end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & R_1 \\ A_2 & B_2 & R_2 \\ A_3 & B_3 & R_3 \end{vmatrix} \qquad (2.12)$$

может быть приведена к диагональному виду. Соответственно, система (2.8–2.10) примет вид трех независимых диракоподобных уравнений с массами

$$M_1=\frac{M}{\lambda_1},\quad M_2=\frac{M}{\lambda_2},\quad M_3=\frac{M}{\lambda_3}. \qquad (2.13)$$

Осуществим подобный переход в соответствии с преобразованием

$$(\hat{K}-M)\Psi=0,\quad \Psi'=S\Psi,\quad S\hat{K}S^{-1}=\hat{K}'=\begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{vmatrix}. \qquad (2.14)$$

Матрицу преобразования S ищем в виде

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ r_1 & r_2 & r_3 \end{vmatrix},$$

она удовлетворяет уравнению

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ r_1 & r_2 & r_3 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & R_1 \\ A_2 & B_2 & R_2 \\ A_3 & B_3 & R_3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ r_1 & r_2 & r_3 \end{vmatrix}.$$

Откуда получаем три системы уравнений:

$$a_1A_1 + a_2A_2 + a_3A_3 = \lambda_1 a_1\,,$$
$$a_1B_1 + a_2B_2 + a_3B_3 = \lambda_1 a_2\,,$$
$$a_1R_1 + a_2R_2 + a_3R_3 = \lambda_1 a_3\,; \qquad (2.15)$$

$$b_1A_1 + b_2A_2 + b_3A_3 = \lambda_2 b_1\,,$$
$$b_1B_1 + b_2B_2 + b_3B_3 = \lambda_2 b_2,$$
$$b_1R_1 + b_2R_2 + b_3R_3 = \lambda_2 b_3\,; \qquad (2.16)$$

$$r_1A_1 + r_2A_2 + r_3A_3 = \lambda_3 r_1\,,$$
$$r_1B_1 + r_2B_2 + r_3B_3 = \lambda_3 r_2,$$
$$r_1R_1 + r_2R_2 + r_3R_3 = \lambda_3 r_3\,. \qquad (2.17)$$

Используя явный вид величин R_i (см. (2.12)), из третьего уравнения системы (2.15) будем иметь

$$a_3 = -\frac{4}{\sqrt{6}}\cdot\frac{1}{M}\frac{fc_2\,|\,c_3\,|^2 + gc_1\,|\,c_4\,|^2}{\lambda_1 c_2(c_1+\frac{c_3}{\sqrt{6}}) + [fc_2\,|\,c_3\,|^2 + gc_1\,|\,c_4\,|^2]}(a_1c_3 + ia_2c_4)\,. \qquad (2.18)$$

При учете соотношения (2.18) из второго уравнения системы (2.15) получаем

$$a_2 = a_1\frac{-igc_3c_4^*(c_1+\frac{c_3}{\sqrt{6}})\lambda_1}{\lambda_1c_2(\lambda_1-c_2)+(\lambda_1-c_2)[fc_2\,|\,c_3\,|^2+gc_1\,|\,c_4\,|^2]-\lambda_1(c_1+\frac{c_3}{\sqrt{6}})g\,|\,c_4\,|^2}\,, \qquad (2.19)$$

$$a_3 = -a_1\frac{4}{\sqrt{6}}\cdot\frac{1}{M}\cdot\frac{c_3(\lambda_1-c_2)[fc_2\,|\,c_3\,|^2+gc_1\,|\,c_4\,|^2}{\lambda_1c_2(\lambda_1-c_2)+(\lambda_1-c_2)[fc_2\,|\,c_3\,|^2+gc_1\,|\,c_4\,|^2]-\lambda_1(c_1+\frac{c_3}{\sqrt{6}})g\,|\,c_4\,|^2}\,. \qquad (2.20)$$

При определении постоянных a_2, a_3 в форме (2.19), (2.20) первое из уравнений (2.15) выполняется автоматически, поскольку сводится к соотношению

$$c_2^2(c_1+\frac{c_3}{\sqrt{6}})^2\{\lambda_1^3-\lambda_1^2(c_1+c_2)+\lambda_1(c_1c_2-f\,|\,c_3\,|^2-g\,|\,c_4\,|^2)+(fc_2\,|\,c_3\,|^2+gc_1\,|\,c_4\,|^2\}=0\,, \qquad (2.21)$$

где λ_1 – решение характеристического уравнения (2.11).

Действуя в той же последовательности, из системы уравнений (2.16) получаем

$$b_3 = -\frac{4}{\sqrt{6}}\cdot\frac{1}{M}\cdot\frac{fc_2\,|\,c_3\,|^2 + gc_1\,|\,c_4\,|^2}{\lambda_2 c_2(c_1+\frac{c_3}{\sqrt{6}}) + [fc_2\,|\,c_3\,|^2 + gc_1\,|\,c_4\,|^2]}(b_1c_3 + ib_2c_4)\,, \qquad (2.22)$$

$$b_2 = b_1\frac{-igc_3c_4^*(c_1+\frac{c_3}{\sqrt{6}})\lambda_2}{\lambda_2c_2(\lambda_2-c_2)+(\lambda_2-c_2)[fc_2\,|\,c_3\,|^2+gc_1\,|\,c_4\,|^2]-\lambda_2(c_1+\frac{c_3}{\sqrt{6}})g\,|\,c_4\,|^2}\,, \qquad (2.23)$$

$$b_3 = -b_1\frac{4}{\sqrt{6}}\cdot\frac{1}{M}\cdot\frac{c_3(\lambda_2-c_2)[fc_2\,|\,c_3\,|^2+gc_1\,|\,c_4\,|^2}{\lambda_2c_2(\lambda_2-c_2)+(\lambda_2-c_2)[fc_2\,|\,c_3\,|^2+gc_1\,|\,c_4\,|^2]-\lambda_2(c_1+\frac{c_3}{\sqrt{6}})g\,|\,c_4\,|^2}\,. \qquad (2.24)$$

При этом первое уравнение системы (2.16) сводится к равенству

$$c_2^2(c_1+\frac{c_3}{\sqrt{6}})^2\{\lambda_2^3-\lambda_2^2(c_1+c_2)+\lambda_2(c_1c_2-f\,|\,c_3\,|^2-g\,|\,c_4\,|^2)+(fc_2\,|\,c_3\,|^2+gc_1\,|\,c_4\,|^2\}=0\,, \quad (2.25)$$

которое выполняется, т.к. λ_2 – решение характеристического уравнения (2.11).

Подобный результат получается и при решении системы алгебраических уравнений (2.17):

$$r_3=-\frac{4}{\sqrt{6}}\cdot\frac{1}{M}\cdot\frac{fc_2\,|\,c_3\,|^2+gc_1\,|\,c_4\,|^2}{\lambda_3c_2(c_1+\frac{c_3}{\sqrt{6}})+[fc_2\,|\,c_3\,|^2+gc_1\,|\,c_4\,|^2]}(r_1c_3+ir_2c_4)\,, \quad (2.26)$$

$$r_2=r_1\frac{-igc_3c_4^*(c_1+\frac{c_3}{\sqrt{6}})\lambda_3}{\lambda_3c_2(\lambda_3-c_2)+(\lambda_3-c_2)[fc_2\,|\,c_3\,|^2+gc_1\,|\,c_4\,|^2]-\lambda_3(c_1+\frac{c_3}{\sqrt{6}})g\,|\,c_4\,|^2}\,, \quad (2.27)$$

$$r_3=-r_1\frac{4}{\sqrt{6}}\cdot\frac{1}{M}\cdot\frac{c_3(\lambda_3-c_2)[fc_2\,|\,c_3\,|^2+gc_1\,|\,c_4\,|^2}{\lambda_3c_2(\lambda_3-c_2)+(\lambda_3-c_2)[fc_2\,|\,c_3\,|^2+gc_1\,|\,c_4\,|^2]-\lambda_3(c_1+\frac{c_3}{\sqrt{6}})g\,|\,c_4\,|^2}\,, \quad (2.28)$$

$$c_2^2(c_1+\frac{c_3}{\sqrt{6}})^2\{\lambda_3^3-\lambda_3^2(c_1+c_2)+\lambda_3(c_1c_2-f\,|\,c_3\,|^2-g\,|\,c_4\,|^2)+(fc_2\,|\,c_3\,|^2+gc_1\,|\,c_4\,|^2\}=0\,. \quad (2.29)$$

3. О решениях характеристического уравнения

Запишем характеристическое уравнение (2.11) в краткой форме

$$\lambda^3+\lambda^2a+\lambda b+c=0\,, \quad (3.1)$$

где

$$a=-(c_1+c_2),\quad b=c_1c_2-f\,|\,c_3\,|^2-g\,|\,c_4\,|^2,\quad c=fc_2\,|\,c_3\,|^2+gc_1\,|\,c_4\,|^2\,. \quad (3.2)$$

Выполнив стандартную замену переменной, преобразуем уравнение (3.1) к более простому виду

$$y^3+py+q=0\,,\quad y=\lambda-\frac{c_1+c_3}{3}=\lambda+\frac{a}{3}\,, \quad (3.3)$$

$$p=-\frac{a^3}{3}+b=-\frac{1}{3}(c_1+c_3)^3+c_1c_2-f\,|\,c_3\,|^2-g\,|\,c_4\,|^2\,, \quad (3.4)$$

$$q=2(\frac{a}{3})^3-\frac{ab}{3}+c=-\frac{2}{27}c_1+c_3{}^3+$$

$$+\frac{c_1+c_2}{3}\{c_1c_2-f\,|\,c_3\,|^2-g\,|\,c_4\,|^2\}+\{f\,|\,c_3\,|^2+g\,|\,c_4\,|^2\}\,. \quad (3.5)$$

По физическим соображениям требуем вещественность всех трех корней уравнения (3.3). Это возможно при выполнении неравенств

$$p<0,\qquad Q<0,\quad \text{где}\quad Q=(\frac{p}{3})^3+(\frac{q}{2})^2. \quad (3.6)$$

Решения уравнения (3.3) могут быть представлены в тригонометрической форме

$$y_1=2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos\frac{\alpha}{3},\quad y_2=-2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos(\frac{\alpha}{3}-\frac{\pi}{3}),$$

$$y_3=-2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos(\frac{\alpha}{3}+\frac{\pi}{3}),\quad \cos\alpha=\frac{-q/2}{\sqrt{-(\frac{p}{3})^3}}, \quad (3.7)$$

что дает для исходных физически интерпретируемых корней следующие выражения:

$$\lambda_1 = y_1 + \frac{c_1 + c_2}{3} = 2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos\frac{\alpha}{3} + \frac{c_1 + c_2}{3} >,$$

$$\lambda_2 = y_2 + \frac{c_1 + c_2}{3} = -2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos(\frac{\alpha}{3} - \frac{\pi}{3}) + \frac{c_1 + c_2}{3},$$

$$\lambda_3 = y_3 + \frac{c_1 + c_2}{3} = -2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos(\frac{\alpha}{3} + \frac{\pi}{3}) + \frac{c_1 + c_2}{3}. \qquad (3.8)$$

Нетрудно получить следующие равенства (учитываем требование вещественности корней):

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = c_1 + c_2,$$

$$\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 = c_1^2 + c_2^2 + 2f\,|c_3|^2 + 2g\,|c_4|^2 > 0,$$

$$\lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_2 = c_1c_2 - f\,|c_3|^2 - g\,|c_4|^2,$$

$$\lambda_1\lambda_2\lambda_3 = -fc_2\,|c_3|^2 - gc_1\,|c_4|^2,$$

$$p = \frac{1}{6}\{(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)^2 - 3(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2)\} < 0,$$

$$q = \frac{1}{6}\{\frac{5}{9}(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)^2 - (\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2)\}(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) - \lambda_1\lambda_2\lambda_3,$$

$$\cos\frac{\alpha}{3} = \frac{2\lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3}{\sqrt{-2[(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)^2 - 3(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2)]}},$$

$$\cos(\frac{\alpha}{3} - \frac{\pi}{3}) = \frac{2\lambda_2 - \lambda_1 - \lambda_3}{\sqrt{-2[(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)^2 - 3(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2)]}},$$

$$\cos(\frac{\alpha}{3} + \frac{\pi}{3}) = \frac{2\lambda_3 - \lambda_1 - \lambda_2}{\sqrt{-2[(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)^2 - 3(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2)]}}. \qquad (3.9)$$

В первую очередь интерес представляет случай трех положительных корней, при этом соотношения (3.9) дают

$$\lambda_{1,2,3} > 0, \quad \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = c_1 + c_2 > 0,$$

$$\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 = c_1^2 + c_2^2 + 2f\,|c_3|^2 + 2g\,|c_4|^2 > 0,$$

$$\lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_2 = c_1c_2 - f\,|c_3|^2 - g\,|c_4|^2 > 0,$$

$$\lambda_1\lambda_2\lambda_3 = -fc_2\,|c_3|^2 - gc_1\,|c_4|^2 > 0,$$

$$p = \frac{1}{6}\{(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)^2 - 3(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2)\} < 0,$$

$$q = \frac{1}{6}\{\frac{5}{9}(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)^2 - (\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2)\}(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) - \lambda_1\lambda_2\lambda_3,$$

$$\cos\frac{\alpha}{3} = \frac{2\lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3}{\sqrt{-2[(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)^2 - 3(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2)]}},$$

$$\cos(\frac{\alpha}{3} - \frac{\pi}{3}) = \frac{2\lambda_2 - \lambda_1 - \lambda_3}{\sqrt{-2[(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)^2 - 3(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2)]}},$$

$$\cos(\frac{\alpha}{3} + \frac{\pi}{3}) = \frac{2\lambda_3 - \lambda_1 - \lambda_2}{\sqrt{-2[(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)^2 - 3(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2)]}}. \qquad (3.10)$$

Очевидно, что случаю трех положительных корней может соответствовать только вариант

$$f = -1, \quad g = -1. \tag{3.11}$$

При этом соотношения (3.10) принимают вид

$$\begin{gathered}
\lambda_{1,2,3} > 0, \quad \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = c_1 + c_2 > 0, \\
\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 = c_1^2 + c_2^2 - 2|c_3|^2 - 2|c_4|^2 > 0, \\
\lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_2 = c_1c_2 + |c_3|^2 + |c_4|^2 > 0, \\
\lambda_1\lambda_2\lambda_3 = +c_2|c_3|^2 + c_1|c_4|^2 > 0, \\
p = \frac{1}{6}\{(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)^2 - 3(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2)\} < 0, \\
q = \frac{1}{6}\{\frac{5}{9}(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)^2 - (\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2)\}(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) - \lambda_1\lambda_2\lambda_3, \\
\cos\frac{\alpha}{3} = \frac{2\lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3}{\sqrt{-2[(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)^2 - 3(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2)]}}, \\
\cos(\frac{\alpha}{3} - \frac{\pi}{3}) = \frac{2\lambda_2 - \lambda_1 - \lambda_3}{\sqrt{-2[(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)^2 - 3(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2)]}}, \\
\cos(\frac{\alpha}{3} + \frac{\pi}{3}) = \frac{2\lambda_3 - \lambda_1 - \lambda_2}{\sqrt{-2[(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)^2 - 3(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2)]}}.
\end{gathered} \tag{3.12}$$

Введем обозначения

$$|c_4|^2 = a^2, \quad |c_3|^2 = b^2 \tag{3.13}$$

и проанализируем два из приведенных выше соотношения

$$\lambda_1 + \lambda_2 = c_1 + c_2 - \lambda_3, \quad \lambda_1\lambda_2 = \frac{c_1a^2 + c_2b^2}{\lambda_3};$$

отсюда находим выражения для корней λ_1, λ_2:

$$\begin{gathered}
\lambda_1 = \frac{c_1 + c_2 - \lambda_3}{2} - \sqrt{\left(\frac{c_1 + c_2 - \lambda_3}{2}\right)^2 - \frac{c_1a^2 + c_2b^2}{\lambda_3}}, \\
\lambda_2 = \frac{c_1 + c_2 - \lambda_3}{2} + \sqrt{\left(\frac{c_1 + c_2 - \lambda_3}{2}\right)^2 - \frac{c_1a^2 + c_2b^2}{\lambda_3}},
\end{gathered} \tag{3.14}$$

где под корнем должно стоять положительно число. Замечаем, что поскольку

$$\lambda_1 + \lambda_2 = c_1 + c_2 - \lambda_3 > 0,$$

то должно выполняться неравенство

$$0 < \lambda_3 < c_1 + c_2;$$

отсюда следует возможность тригонометрической параметризации значений для λ:

$$\lambda_3 = (c_1 + c_2)\cos\alpha, \qquad \alpha \in (0, \frac{\pi}{2}). \tag{3.15}$$

Соответственно, формулы (3.12) переписываются так:

$$\lambda_1 = (c_1 + c_2)\left\{\frac{1-\cos\alpha}{2} - \sqrt{(\frac{1-\cos\alpha}{2})^2 - \frac{c_1 a^2 + c_2 b^2}{(c_1+c_2)^3}\frac{1}{\cos\alpha}}\right\},$$

$$\lambda_2 = (c_1 + c_2)\left\{\frac{1-\cos\alpha}{2} + \sqrt{(\frac{1-\cos\alpha}{2})^2 - \frac{c_1 a^2 + c_2 b^2}{(c_1+c_2)^3}\frac{1}{\cos\alpha}}\right\}. \qquad (3.16)$$

Имеет смысл ввести обозначение

$$\Gamma = \frac{c_1 a^2 + c_2 b^2}{(c_1+c_2)^3}. \qquad (3.17)$$

Тогда можно получить выражения для корней λ_1, λ_2:

$$\lambda_1 = \lambda_3 \cdot \frac{1}{\cos\alpha}\left\{\sin^2(\alpha/2) - \sqrt{\sin^4(\alpha/2) - \Gamma/\cos\alpha}\right\} \qquad (3.18)$$

$$\lambda_2 = \lambda_3 \cdot \frac{1}{\cos\alpha}\left\{\sin^2(\alpha/2) + \sqrt{(\sin^4(\alpha/2) - \Gamma/\cos\alpha}\right\}; \qquad (3.19)$$

а также

$$\lambda_1 = \lambda_2 \cdot \frac{\sin^2(\alpha/2) - \sqrt{\sin^4(\alpha/2) - \Gamma/\cos\alpha}}{\sin^2(\alpha/2) + \sqrt{\sin^4(\alpha/2) - \Gamma/\cos\alpha}}. \qquad (3.20)$$

Учтем, что под корнем должно стоять положительное число, т.е.

$$\cos\alpha \sin^4(\alpha/2) > \Gamma. \qquad (3.21)$$

Отсюда получаем выражения для трех возможных масс

$$M_3 = \frac{M}{\lambda_3} = \frac{M}{(c_1+c_2)}\frac{1}{\cos\alpha} = \mu \cdot \frac{1}{\cos\alpha}, \qquad (3.22)$$

$$M_2 = \frac{M}{\lambda_2} = \frac{\mu}{\sin^2(\alpha/2) - \sqrt{\sin^4(\alpha/2) - \Gamma/\cos\alpha}} \qquad (3.23)$$

$$M_1 = \frac{M}{\lambda_2} = \frac{\mu}{\sin^2(\alpha/2) + \sqrt{\sin^4(\alpha/2) - \Gamma/\cos\alpha}} \qquad (3.24)$$

Отмечаем, что корни задавались тремя параметрами $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \;<\!---\; (c_1+c_2), \cos\alpha, \Gamma$; три массы также задаются с помощью следующих трех параметров

$$M_1, M_2, M_3 \;<\!---\; \mu, \cos\alpha, \Gamma.$$

Заметим, что если

$$a \to 0, \quad b \to 0 \quad \Rightarrow \quad \Gamma \to 0,$$

$$M_3 = \frac{\mu}{\cos\alpha}, \quad M_2 \to \infty, \quad M_1 = \frac{\mu}{1-\cos^2\alpha}. \qquad (3.25)$$

При этом значения $\alpha = 0, \pi/2$ также особые, поскольку приводят к еще одной бесконечной массе.

Проанализируем неравенство $\cos\alpha\,\sin^4(\alpha/2) > \Gamma$, которое равносильно задаче

$$f(\alpha) = \cos\alpha\,\frac{(1-\cos^2\alpha)^2}{4} > \Gamma\,.$$

$$f(\alpha = 0) = 0, \qquad f(\alpha = \frac{\pi}{2} = 0\,.$$

Можно ввести переменную $x = \cos\alpha$, тогда

$$f(x) = \frac{1}{4}x(1-x^2)^2 > \Gamma, \quad x \in (0,1)\,;$$

внутри интервала $x \in (0,1)$ есть точка локального максимума α_0:

$$\frac{df}{dx} = \frac{(1-x^2)(1-5x^2)}{4}, \qquad \cos\alpha_0 = \frac{1}{\sqrt{5}}, \quad f(\alpha_0) = \frac{4}{25\sqrt{5}}\,.$$

Таким образом, при каждом $\Gamma < \Gamma_0 = \dfrac{4}{25\sqrt{5}}$ неравенство $f(\alpha) > \Gamma$ имеет решением непустой интервал, содержащий внутри себя точку α_0.

Случай

$$\Gamma_0 = \frac{4}{25\sqrt{5}}$$

является особым, поскольку при этом интервал значений для параметра α стягивается в одну точку $\alpha = \alpha_0$ и имеем ситуацию, когда две массы равны друг другу:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = (c_1 + c_2)\frac{1-\cos\alpha_0}{2}, \quad \cos\alpha_0 = \frac{1}{\sqrt{5}}\,,$$

$$M_3 = \frac{\mu}{\cos\alpha_0} = \mu\sqrt{5}\,, \tag{3.26}$$

$$M_{1,2} = \frac{\mu}{(1-\cos\alpha_0)/2} = \mu\frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{5}-1}\,. \tag{3.27}$$

4. Диагонализация системы уравнений для свободной частицы, дополнительный анализ

Для упрощения дальнейших расчетов будем использовать обозначения

$$A_1 = \frac{1}{c_2(c_1 + c_3/\sqrt{6})}\left[c_2(c_1^2 + f\,|c_3|^2) + \frac{c_3}{\sqrt{6}}(c_1c_2 - g\,|c_4|^2\right],$$

$$A_2 = \frac{i}{\sqrt{6}}\frac{c_4}{c_2(c_1 + c_3/\sqrt{6})}\left[f\sqrt{6}c_2c_3^* - g\,|c_4|^2\right],$$

$$A_3 = \frac{M}{4}\frac{1}{c_2(c_1 + c_3/\sqrt{6})}\left[f\sqrt{6}c_2c_3^* - g\,|c_4|^2 - c_2(c_1 + c_3/\sqrt{6})\right]; \tag{4.1}$$

$$B_1 = -ig\frac{c_3 c_4^*}{c_2}, \qquad B_2 = \frac{c_2^2 + g\,|\,c_4\,|^2}{c_2}, \qquad B_3 = -igM\,\frac{\sqrt{6}}{4}\frac{c_4^*}{c_2}; \tag{4.2}$$

$$R_1 = -\frac{4}{M}\frac{c_3}{\sqrt{6}}\frac{fc_2\,|\,c_3\,|^2 + gc_1\,|\,c_4\,|^2}{c_2(c_1 + c_3/\sqrt{6})}, \quad R_2 = -\frac{4i}{M}\frac{c_4}{\sqrt{6}}\frac{fc_2\,|\,c_3\,|^2 + gc_1\,|\,c_4\,|^2}{c_2(c_1 + c_3/\sqrt{6})},$$

$$R_3 = -\frac{fc_2\,|\,c_3\,|^2 + gc_1\,|\,c_4\,|^2}{c_2(c_1 + c_3\,/\,\sqrt{6})}. \tag{4.3}$$

Корень λ_1 исследуемого характеристического уравнения, определяющий массовый параметр M_1, входит в следующую систему (см. предыдущий раздел):

$$\begin{aligned} a_1 A_1 + a_2 A_2 + a_3 A_3 &= \lambda_1 a_1, \\ a_1 B_1 + a_2 B_2 + a_3 B_3 &= \lambda_1 a_2, \\ a_1 R_1 + a_2 R_2 + a_3 R_3 &= \lambda_1 a_3\,; \end{aligned} \tag{4.4}$$

решение системы (4.4) имеет вид

$$a_2 = a_1 \cdot \frac{-igc_3 c_4^*(c_1 + c_3/\sqrt{6})\,\lambda_1}{\lambda_1 c_2(\lambda_1 - c_2)(c_1 + c_3/\sqrt{6}) + (\lambda_1 - c_2)[fc_2\,|\,c_3\,|^2 + gc_1\,|\,c_4\,|^2] - \lambda_1(c_1 + c_3/\sqrt{6})g\,|\,c_4\,|^2},$$

$$a_3 = a_1 \cdot \frac{-4}{\sqrt{6}M} \times$$

$$\times \frac{c_3(\lambda_1 - c_2)[fc_2\,|\,c_3\,|^2 + gc_1\,|\,c_4\,|^2]}{\lambda_1 c_2(\lambda_1 - c_2)(c_1 + c_3/\sqrt{6}) + (\lambda_1 - c_2)[fc_2\,|\,c_3\,|^2 + gc_1\,|\,c_4\,|^2] - \lambda_1(c_1 + c_3/\sqrt{6})g\,|\,c_4\,|^2}. \tag{4.5}$$

Подставляя (4.4–4.5) в первое уравнение системы (4.4), придем к характеристическому уравнению с корнем $\lambda = \lambda_1$.

С применением обозначений (4.1–4.3) полученная выше система уравнений для трех биспиноров

$$\Psi_0, \quad \gamma_\mu \Psi_\mu, \quad \partial_\mu \Psi_\mu \tag{4.6}$$

запишется следующим образом:

$$\begin{aligned} A_1\hat{\partial}\,(\gamma_\mu \Psi_\mu) + B_1\hat{\partial}\,\Psi_0 + R_1\hat{\partial}\,(\partial_\mu \Psi_\mu) + M(\gamma_\mu \Psi_\mu) &= 0\,, \\ A_2\hat{\partial}\,(\gamma_\mu \Psi_\mu) + B_2\hat{\partial}\,\Psi_0 + R_2\hat{\partial}\,(\partial_\mu \Psi_\mu) + M\Psi_0 &= 0\,, \\ A_3\hat{\partial}\,(\gamma_\mu \Psi_\mu) + B_3\hat{\partial}\,\Psi_0 + R_3\hat{\partial}\,(\partial_\mu \Psi_\mu) + M(\partial_\mu \Psi_\mu) &= 0\,. \end{aligned} \tag{4.7}$$

Эти уравнения можно преобразовать в три уравнения для отдельных биспиноров. Для этого сначала суммируем эти три уравнения с коэффициентами a_1, a_2, a_3 соответственно:

$$(a_1 A_1 + a_2 A_2 + a_2 A_3)\hat{\partial}\,(\gamma_\mu \Psi_\mu) + (a_1 B_1 + a_2 B_2 + a_3 B_3)\hat{\partial}\,\Psi_0 +$$
$$+(a_1 R_1 + a_2 R_2 + a_3 R_3)\hat{\partial}\,(\partial_\mu \Psi_\mu) + M\{a_1(\gamma_\mu \Psi_\mu) + a_2\Psi_0 + a_3(\partial_\mu \Psi_\mu)\} = 0\,,$$

с учетом (4.4) последнее уравнение можно переписать так:

$$\lambda_1 a_1\hat{\partial}(\gamma_\mu \Psi_\mu)+\lambda_1 a_2\hat{\partial}\Psi_0+\lambda_1 a_3\hat{\partial}(\partial_\mu \Psi_\mu)+M\{a_1(\gamma_\mu \Psi_\mu)+a_2\Psi_0+a_3(\partial_\mu \Psi_\mu)\}=0\,.$$

Введем биспинор

$$\Phi_1=a_1(\gamma_\mu \Psi_\mu)+a_2\Psi_0+a_3(\partial_\mu \Psi_\mu)\,, \tag{4.8}$$

тогда предыдущее уравнение принимает дираковский вид

$$(\hat{\partial}+\frac{M}{\lambda_1})\Phi_1=0\,,\quad M_1=M/\lambda_1\,. \tag{4.9}$$

Собственное значение λ_2, определяющее второй массовый параметр M_2, входит в систему уравнений

$$\begin{aligned}
b_1A_1+b_2A_2+b_3A_3&=\lambda_2 b_1\,,\\
b_1B_1+b_2B_2+b_3B_3&=\lambda_2 b_2\,,\\
b_1R_1+b_2R_2+b_3R_3&=\lambda_2 b_3\,.
\end{aligned} \tag{4.10}$$

Обратимся снова к уравнениям для трех биспиноров

$$\begin{aligned}
&A_1\hat{\partial}\,(\gamma_\mu \Psi_\mu)+B_1\hat{\partial}\,\Psi_0+R_1\hat{\partial}\,(\partial_\mu \Psi_\mu)+M(\gamma_\mu \Psi_\mu)=0\,,\\
&A_2\hat{\partial}\,(\gamma_\mu \Psi_\mu)+B_2\hat{\partial}\,\Psi_0+R_2\hat{\partial}\,(\partial_\mu \Psi_\mu)+M\Psi_0=0\,,\\
&A_3\hat{\partial}\,(\gamma_\mu \Psi_\mu)+B_3\hat{\partial}\,\Psi_0+R_3\hat{\partial}\,(\partial_\mu \Psi_\mu)+M(\partial_\mu \Psi_\mu)=0\,,
\end{aligned}$$

из которых для биспинора

$$\Phi_2=b_1(\gamma_\mu \Psi_\mu)+b_2\Psi_0+b_3(\partial_\mu \Psi_\mu) \tag{4.11}$$

находим уравнение дираковского вида с массой M_2:

$$(\hat{\partial}+\frac{M}{\lambda_2})\Phi_2=0\,,\quad M_2=M/\lambda_2\,. \tag{4.12}$$

Наконец, обращаемся к уравнениям, в которые входит корень λ_3:

$$\begin{aligned}
r_1A_1+r_2A_2+r_3A_3&=\lambda_3 r_1\,,\\
r_1B_1+r_2B_2+r_3B_3&=\lambda_3 r_2\,,\\
r_1R_1+r_2R_2+r_3R_3&=\lambda_3 3_3\,.
\end{aligned} \tag{4.13}$$

Поступая аналогично двум предыдущим случаям, получаем

$$r_2=-r_1\cdot\frac{igc_3c_4^*(c_1+c_3/\sqrt{6})\lambda_3}{(\lambda_3-c_2)[fc_2\,|\,c_3\,|^2+gc_1\,|\,c_4\,|^2]+\lambda_3c_2(\lambda_3-c_2)(c_1+c_3/\sqrt{6})-\lambda_3(c_1+c_3/\sqrt{6})g\,|\,c_4\,|^2},$$

$$r_3=-r_1\cdot\frac{4}{\sqrt{6}}\frac{1}{M}\times$$

$$\times\frac{c_3(\lambda_3-c_2)[fc_2|c_3|^2+gc_1|c_4|^2]}{(\lambda_3-c_2)[fc_2|c_3|^2+gc_1|c_4|^2]+\lambda_3c_2(\lambda_3-c_2)(c_1+c_3/\sqrt{6})-\lambda_3(c_1+c_3/\sqrt{6})g|c_4|^2}; \tag{4.14}$$

а для биспинора

$$\Phi_3=r_1(\gamma_\mu\Psi_\mu)+r_2\Psi_0+r_3(\partial_\mu\Psi_\mu) \tag{4.15}$$

находим уравнение дираковского вида с массой M_3:

$$(\hat{\partial}+\frac{M}{\lambda_3})\Phi_3=0, \quad M_3=M/\lambda_3. \tag{4.16}$$

5. Учет электромагнитного поля

Присутствие внешнего электромагнитного поля учтем обычным приемом удлинения производной:

$$D_\mu=\partial_\mu-ieA_\mu(x). \tag{5.1}$$

Обращаемся вновь к двум уравнениям (см. (1.41)), которые с учетом внешних полей принимают вид

$$c_2\hat{D}\Psi_0-\frac{4ic_4}{\sqrt{6}}\left[(D_\mu\Psi_\mu)-\frac{1}{4}\hat{D}(\gamma_\mu\Psi_\mu)\right]+M\Psi_0=0, \tag{5.2}$$

$$\begin{gathered}-\frac{2fc_3^*}{\sqrt{6}}\left[D_\lambda(\gamma_\mu\Psi_\mu)-\frac{1}{4}\gamma_\lambda\hat{D}(\gamma_\mu\Psi_\mu)\right]+\\
+\frac{2igc_4^*}{\sqrt{6}}\left[D_\lambda\Psi_0-\frac{1}{4}\gamma_\lambda\hat{D}\Psi_0\right]+\frac{c_1}{4}\gamma_\lambda\hat{D}(\gamma_\mu\Psi_\mu)-\\
-\frac{c_3}{\sqrt{6}}\left[\gamma_\lambda(D_\mu\Psi_\mu)-\frac{1}{4}\gamma_\lambda\hat{D}(\gamma_\mu\Psi_\mu)\right]+M\Psi_\lambda=0.\end{gathered} \tag{5.3}$$

Совершим над этой системой некоторые преобразования. Сначала свернем уравнение (5.3) с матрицей γ_λ. Получим уравнение

$$\begin{gathered}-\frac{2fc_3^*}{\sqrt{6}}\left[\gamma_\lambda D_\lambda(\gamma_\mu\Psi_\mu)-\frac{1}{4}\gamma_\lambda\gamma_\lambda\hat{D}(\gamma_\mu\Psi_\mu)\right]+\\
+\frac{2igc_4^*}{\sqrt{6}}\left[\gamma_\lambda D_\lambda\Psi_0-\frac{1}{4}\gamma_\lambda\gamma_\lambda\hat{D}\Psi_0\right]+\frac{c_1}{4}\gamma_\lambda\gamma_\lambda\hat{D}(\gamma_\mu\Psi_\mu)-\\
-\frac{c_3}{\sqrt{6}}\left[\gamma_\lambda\gamma_\lambda(D_\mu\Psi_\mu)-\frac{1}{4}\gamma_\lambda\gamma_\lambda\hat{D}(\gamma_\mu\Psi_\mu)\right]+M\gamma_\lambda\Psi_\lambda=0,\end{gathered}$$

из которого с учетом тождества $\frac{1}{4}\gamma_\lambda\gamma_\lambda=1$ будем иметь

$$-\frac{2fc_3^*}{\sqrt{6}}\left[\hat{D}(\gamma_\mu\Psi_\mu)-\hat{D}(\gamma_\mu\Psi_\mu)\right]+$$

$$+\frac{2igc_4^*}{\sqrt{6}}\left[\hat{D}\Psi_0-\hat{D}\Psi_0\right]+c_1\hat{D}(\gamma_\mu\Psi_\mu)-$$

$$-\frac{c_3}{\sqrt{6}}\left[4(D_\mu\Psi_\mu)-\hat{D}(\gamma_\mu\Psi_\mu)\right]+M\gamma_\lambda\Psi_\lambda=0,$$

$$(c_1+\frac{c_3}{\sqrt{6}})\hat{D}(\gamma_\mu\Psi_\mu)-\frac{4c_3}{\sqrt{6}}(D_\mu\Psi_\mu)+M(\gamma_\mu\Psi_\mu)=0. \tag{5.4}$$

Теперь на уравнение (5.3) действуем оператором D_λ:

$$-\frac{2fc_3^*}{\sqrt{6}}\left[D^2(\gamma_\mu\Psi_\mu)-\frac{1}{4}\hat{D}\hat{D}(\gamma_\mu\Psi_\mu)\right]+$$

$$+\frac{2igc_4^*}{\sqrt{6}}\left[D^2\Psi_0-\frac{1}{4}\hat{D}\hat{D}\Psi_0\right]+\frac{c_1}{4}\hat{D}\hat{D}(\gamma_\mu\Psi_\mu)-$$

$$-\frac{c_3}{\sqrt{6}}\left[\hat{D}(D_\mu\Psi_\mu)-\frac{1}{4}\hat{D}\hat{D}(\gamma_\mu\Psi_\mu)\right]+M(D_\lambda\Psi_\lambda)=0, \tag{5.5}$$

где $D^2=D_\lambda D_\lambda$. С учётом тождества

$$\hat{D}\hat{D}=D_\lambda D_\rho\,[\,\frac{1}{2}(\gamma_\lambda\gamma_\rho-\gamma_\rho\gamma_\lambda)+\frac{1}{2}(\gamma_\lambda\gamma_\rho+\gamma_\rho\gamma_\lambda)\,]=$$

$$=2D_\lambda D_\rho\sigma_{\lambda\rho}+D^2=[\,D^2+(D_\lambda D_\rho-D_\rho D_\lambda)\sigma_{\lambda\rho}\,] \tag{5.6}$$

уравнение (5.5) принимает вид

$$-\frac{2fc_3^*}{\sqrt{6}}\left[\frac{3}{4}D^2(\gamma_\mu\Psi_\mu)-\frac{1}{4}(D_\lambda D_\rho-D_\rho D_\lambda)\sigma_{\lambda\rho}(\gamma_\mu\Psi_\mu)\right]+$$

$$+\frac{2igc_4^*}{\sqrt{6}}\left[\frac{3}{4}D^2\Psi_0-\frac{1}{4}(D_\lambda D_\rho-D_\rho D_\lambda)\sigma_{\lambda\rho}\Psi_0\right]+\frac{c_1}{4}[(D_\lambda D_\rho-D_\rho D_\lambda)\sigma_{\lambda\rho}+D^2](\gamma_\mu\Psi_\mu)-$$

$$-\frac{c_3}{\sqrt{6}}\left[\hat{D}(D_\mu\Psi_\mu)-\frac{1}{4}[(D_\lambda D_\rho-D_\rho D_\lambda)\sigma_{\lambda\rho}+D^2](\gamma_\mu\Psi_\mu)\right]+M(D_\lambda\Psi_\lambda)=0. \tag{5.7}$$

Отметим здесь выражение для коммутатора

$$D_\lambda D_\rho-D_\rho D_\lambda=(-ieF_{\lambda\rho}). \tag{5.8}$$

Уравнение (5.7) можно переписать так:

$$-\frac{2fc_3^*}{\sqrt{6}}\left[\frac{3}{4}D^2\,(\gamma_\mu\Psi_\mu)-\frac{1}{4}(-ieF_{\lambda\rho})\,\sigma_{\lambda\rho}\,(\gamma_\mu\Psi_\mu)\right]+$$

$$+\frac{2igc_4^*}{\sqrt{6}}\left[\frac{3}{4}D^2\,\Psi_0-\frac{1}{4}(-ieF_{\lambda\rho})\,\sigma_{\lambda\rho}\,\Psi_0\right]-\frac{c_3}{\sqrt{6}}\hat{D}\,(D_\mu\Psi_\mu)+$$

$$+\frac{1}{4}(c_1+\frac{c_3}{\sqrt{6}})\,[\,D^2+(-ieF_{\lambda\rho})\,\sigma_{\lambda\rho}\,]\,(\gamma_\mu\Psi_\mu)+M\,(D_\lambda\Psi_\lambda)=0. \tag{5.9}$$

С учетом (5.4) уравнение (5.9) принимает вид

$$-\frac{2fc_3^*}{\sqrt{6}}\left[\frac{3}{4}D^2\,(\gamma_\mu\Psi_\mu)-\frac{1}{4}(-ieF_{\lambda\rho})\,\sigma_{\lambda\rho}\,(\gamma_\mu\Psi_\mu)\right]+$$
$$+\frac{2igc_4^*}{\sqrt{6}}\left[\frac{3}{4}D^2\,\Psi_0-\frac{1}{4}(-ieF_{\lambda\rho})\,\sigma_{\lambda\rho}\,\Psi_0\right]-\frac{c_3}{\sqrt{6}}\hat{D}\,(D_\mu\Psi_\mu)+$$
$$+\frac{1}{4}\left[\frac{4c_3}{\sqrt{6}}\hat{D}(D_\mu\Psi_\mu)-M\hat{D}(\gamma_\mu\Psi_\mu)\right]+M\,(D_\lambda\Psi_\lambda)=0\,,$$

или

$$-\frac{2fc_3^*}{\sqrt{6}}\left[\frac{3}{4}D^2-\frac{1}{4}(-ieF_{\lambda\rho})\,\sigma_{\lambda\rho}\right](\gamma_\mu\Psi_\mu)+$$
$$+\frac{2igc_4^*}{\sqrt{6}}\left[\frac{3}{4}D^2-\frac{1}{4}(-ieF_{\lambda\rho})\,\sigma_{\lambda\rho}\right]\Psi_0-\frac{M}{4}\hat{D}(\gamma_\mu\Psi_\mu)+M\,(D_\lambda\Psi_\lambda)=0\,; \qquad (5.11)$$

обозначаем его как уравнение III. Приведем здесь же два других уравнения:

уравнение I

$$c_2\hat{D}\Psi_0-\frac{4ic_4}{\sqrt{6}}\left[(D_\mu\Psi_\mu)-\frac{1}{4}\hat{D}(\gamma_\mu\Psi_\mu)\right]+M\Psi_0=0\,, \qquad (5.12)$$

уравнение II

$$(c_1+\frac{c_3}{\sqrt{6}})\hat{D}(\gamma_\mu\Psi_\mu)-\frac{4c_3}{\sqrt{6}}(D_\mu\Psi_\mu)+M(\gamma_\mu\Psi_\mu)=0\,. \qquad (5.13)$$

Заметим, что только уравнение III содержит оператор второго порядка D^2.

Наша цель – получить систему уравнений первого порядка для биспиноров

$$\Psi_0\,,\quad (\gamma_\mu\Psi_\mu),\quad (D_\mu\Psi_\mu).$$

Покажем, как можно исключить из уравнения (5.11) оператор второго порядка. Сначала выделим в уравнении (5.11) отдельные слагаемые:

$$-\frac{\sqrt{6}fc_3^*}{4}D^2(\gamma_\mu\Psi_\mu)+\frac{fc_3^*}{2\sqrt{6}}(-ieF_{\lambda\rho})\,\sigma_{\lambda\rho}\,(\gamma_\mu\Psi_\mu)+$$
$$+\frac{i\sqrt{6}gc_4^*}{4}D^2\Psi_0-\frac{igc_4^*}{2\sqrt{6}}(-ieF_{\lambda\rho})\,\sigma_{\lambda\rho}\Psi_0-\frac{1}{4}M\hat{D}(\gamma_\mu\Psi_\mu)+M(D_\lambda\Psi_\lambda)=0\,.$$

В этом уравнении преобразуем с помощью (5.10), переписанного в виде

$$D^2(\gamma_\mu\Psi_\mu)=(+ieF_{\lambda\rho})\sigma_{\lambda\rho}(\gamma_\mu\Psi_\mu)+$$
$$+\frac{4}{\sqrt{6}}\frac{c_3}{(c_1+c_3/\sqrt{6})}\hat{D}(D_\mu\Psi_\mu)-\frac{M}{(c_1+c_3/\sqrt{6})}\hat{D}(\gamma_\mu\Psi_\mu)\,, \qquad (5.14)$$

первое слагаемое:

$$-\frac{\sqrt{6}fc_3^*}{4}\left\{(+ieF_{\lambda\rho})\sigma_{\lambda\rho}(\gamma_\mu\Psi_\mu)+\frac{4}{\sqrt{6}}\frac{c_3}{(c_1+c_3/\sqrt{6})}\hat{D}(D_\mu\Psi_\mu)-\frac{M}{(c_1+c_3/\sqrt{6})}\hat{D}(\gamma_\mu\Psi_\mu)\right\}+$$

$$+\frac{fc_3^*}{2\sqrt{6}}(-ieF_{\lambda\rho})\,\sigma_{\lambda\rho}\,(\gamma_\mu\Psi_\mu)+$$

$$+\frac{i\sqrt{6}gc_4^*}{4}D^2\Psi_0-\frac{igc_4^*}{2\sqrt{6}}(-ieF_{\lambda\rho})\,\sigma_{\lambda\rho}\Psi_0-\frac{1}{4}M\hat{D}(\gamma_\mu\Psi_\mu)+M(D_\lambda\Psi_\lambda)=0\,,$$

или

$$-\frac{\sqrt{6}fc_3^*}{4}\frac{4}{\sqrt{6}}\frac{c_3}{(c_1+c_3/\sqrt{6})}\hat{D}(D_\mu\Psi_\mu)+\frac{M}{4}\frac{\sqrt{6}fc_3^*}{(c_1+c_3/\sqrt{6})}\hat{D}(\gamma_\mu\Psi_\mu)+$$

$$+\frac{i\sqrt{6}gc_4^*}{4}D^2\Psi_0-\frac{igc_4^*}{2\sqrt{6}}(-ieF_{\lambda\rho})\,\sigma_{\lambda\rho}\Psi_0+$$

$$+fc_3^*\,(\frac{\sqrt{6}}{4}+\frac{1}{2\sqrt{6}})\,(-ieF_{\lambda\rho})\,\sigma_{\lambda\rho}\,(\gamma_\mu\Psi_\mu)-\frac{1}{4}M\hat{D}(\gamma_\mu\Psi_\mu)+M(D_\lambda\Psi_\lambda)=0\,.$$

Это уравнение после простой перегруппировки представляем так:

$$-\frac{f\,|c_3|^2}{(c_1+c_3/\sqrt{6})}\hat{D}(D_\mu\Psi_\mu)+\frac{M}{4}[\,\frac{\sqrt{6}fc_3^*}{(c_1+c_3/\sqrt{6})}-1\,]\,\hat{D}(\gamma_\mu\Psi_\mu)+$$

$$+\frac{i\sqrt{6}gc_4^*}{4}D^2\Psi_0-\frac{igc_4^*}{2\sqrt{6}}(-ieF_{\lambda\rho})\sigma_{\lambda\rho}\Psi_0+\frac{2}{\sqrt{6}}fc_3^*(-ieF_{\lambda\rho})\sigma_{\lambda\rho}(\gamma_\mu\Psi_\mu)+M(D_\lambda\Psi_\lambda)=0\,. \quad (5.15)$$

Чтобы преобразовать член $D^2\Psi_0$, обратимся к первому уравнению (5.12) и подействуем на него оператором $\hat{D}$:

$$c_2\hat{D}\hat{D}\Psi_0-\frac{4ic_4}{\sqrt{6}}\left[\hat{D}(D_\mu\Psi_\mu)-\frac{1}{4}\hat{D}\hat{D}(\gamma_\mu\Psi_\mu)\right]+M\hat{D}\Psi_0=0\,.$$

Отсюда, учитывая тождество (5.6)

$$\hat{D}\hat{D}=D^2+(-ieF_{\lambda\rho})\sigma_{\lambda\rho}\,,$$

получаем

$$c_2[D^2+(-ieF_{\lambda\rho})\sigma_{\lambda\rho}]\Psi_0-\frac{4ic_4}{\sqrt{6}}\left[\hat{D}(D_\mu\Psi_\mu)-\frac{1}{4}[D^2+(-ieF_{\lambda\rho})\sigma_{\lambda\rho}](\gamma_\mu\Psi_\mu)\right]+M\hat{D}\Psi_0=0\,,$$

или

$$D^2\Psi_0=-(-ieF_{\lambda\rho})\sigma_{\lambda\rho}\Psi_0+\frac{4ic_4}{\sqrt{6}c_2}\hat{D}(D_\mu\Psi_\mu)-$$

$$-\frac{ic_4}{\sqrt{6}c_2}D^2(\gamma_\mu\Psi_\mu)-\frac{ic_4}{\sqrt{6}c_2}(-ieF_{\lambda\rho})\sigma_{\lambda\rho}(\gamma_\mu\Psi_\mu)-\frac{M}{c_2}\hat{D}\Psi_0\,.$$

В этом соотношении член $D^2(\gamma_\mu\Psi_\mu)$ выражаем с помощью (5.14):

$$D^2(\gamma_\mu\Psi_\mu)=(+ieF_{\lambda\rho})\sigma_{\lambda\rho}(\gamma_\mu\Psi_\mu)+$$

$$+\frac{4}{\sqrt{6}}\frac{c_3}{(c_1+c_3/\sqrt{6})}\hat{D}(D_\mu\Psi_\mu)-\frac{M}{(c_1+c_3/\sqrt{6})}\hat{D}(\gamma_\mu\Psi_\mu)\,,$$

тогда получаем

$$D^2\Psi_0 = -(-ieF_{\lambda\rho})\sigma_{\lambda\rho}\Psi_0 + \frac{4ic_4}{\sqrt{6}c_2}\hat{D}(D_\mu\Psi_\mu) -$$

$$-\frac{ic_4}{\sqrt{6}c_2}\left\{(+ieF_{\lambda\rho})\sigma_{\lambda\rho}(\gamma_\mu\Psi_\mu) + \frac{4}{\sqrt{6}}\frac{c_3}{(c_1 + c_3/\sqrt{6})}\hat{D}(D_\mu\Psi_\mu) - \frac{M}{(c_1 + c_3/\sqrt{6})}\hat{D}(\gamma_\mu\Psi_\mu)\right\} -$$

$$-\frac{ic_4}{\sqrt{6}c_2}(-ieF_{\lambda\rho})\sigma_{\lambda\rho}(\gamma_\mu\Psi_\mu) - \frac{M}{c_2}\hat{D}\Psi_0 .$$

Отсюда после приведения подобных членов, приходим к равенству

$$D^2\Psi_0 = -\frac{M}{c_2}\hat{D}\Psi_0 - (-ieF_{\lambda\rho})\sigma_{\lambda\rho}\Psi_0 +$$

$$+\frac{4i}{\sqrt{6}}\frac{c_1c_4}{c_2(c_1 + c_3/\sqrt{6})}\hat{D}(D_\mu\Psi_\mu) + iM\frac{1}{\sqrt{6}}\frac{c_4}{c_2(c_1 + c_3/\sqrt{6})}\hat{D}(\gamma_\mu\Psi_\mu) . \qquad (5.16)$$

С учетом этого из уравнения (5.15) исключаем член $D^2\Psi_0$:

$$-\frac{f\,|c_3|^2}{(c_1 + c_3/\sqrt{6})}\hat{D}(D_\mu\Psi_\mu) + \frac{M}{4}\frac{\sqrt{6}fc_3^* - (c_1 + c_3/\sqrt{6})}{(c_1 + c_3/\sqrt{6})}\hat{D}(\gamma_\mu\Psi_\mu) +$$

$$+\frac{i\sqrt{6}gc_4^*}{4}\left\{-\frac{M}{c_2}\hat{D}\Psi_0 - (-ieF_{\lambda\rho})\sigma_{\lambda\rho}\Psi_0 +\right.$$

$$\left.+\frac{4i}{\sqrt{6}}\frac{c_1c_4}{c_2(c_1 + c_3/\sqrt{6})}\hat{D}(D_\mu\Psi_\mu) + iM\frac{1}{\sqrt{6}}\frac{c_4}{c_2(c_1 + c_3/\sqrt{6})}\hat{D}(\gamma_\mu\Psi_\mu)\right\} -$$

$$-\frac{igc_4^*}{2\sqrt{6}}(-ieF_{\lambda\rho})\sigma_{\lambda\rho}\Psi_0 + \frac{2}{\sqrt{6}}fc_3^*(-ieF_{\lambda\rho})\sigma_{\lambda\rho}(\gamma_\mu\Psi_\mu) + M(D_\lambda\Psi_\lambda) = 0 .$$

Собираем подобные члены вместе:

$$\left[-\frac{f\,|c_3|^2}{(c_1 + c_3/\sqrt{6})} + \frac{4i}{\sqrt{6}}\frac{c_1c_4}{c_2(c_1 + c_3/\sqrt{6})}\right]\hat{D}(D_\mu\Psi_\mu) +$$

$$+\left[\frac{M}{4}\frac{\sqrt{6}fc_3^* - (c_1 + c_3/\sqrt{6})}{(c_1 + c_3/\sqrt{6})} - \frac{M}{4}\frac{gc_4^*c_4}{c_2(c_1 + c_3/\sqrt{6})}\right]\hat{D}(\gamma_\mu\Psi_\mu) -$$

$$-\frac{i\sqrt{6}gc_4^*}{4}\frac{M}{c_2}\hat{D}\Psi_0 - \left(\frac{i\sqrt{6}gc_4^*}{4} + \frac{igc_4^*}{2\sqrt{6}}\right)(-ieF_{\lambda\rho})\sigma_{\lambda\rho}\Psi_0 +$$

$$+\frac{2}{\sqrt{6}}fc_3^*\,(-ieF_{\lambda\rho})\sigma_{\lambda\rho}\,(\gamma_\mu\Psi_\mu) + M\,(D_\mu\Psi_\mu) = 0 .$$

Окончательно для уравнения III получаем представление

$$+\frac{M}{4}\frac{\sqrt{6}fc_2c_3^* - c_2(c_1 + c_3/\sqrt{6}) - g\,|c_4|^2}{c_2(c_1 + c_3/\sqrt{6})}\hat{D}(\gamma_\mu\Psi_\mu) - i\frac{\sqrt{6}}{4}M\frac{gc_4^*}{c_2}\hat{D}\Psi_0 -$$

$$-\frac{fc_2|c_3|^2+gc_1|c_4|^2}{c_2(c_1+c_3/\sqrt{6})}\hat{D}(D_\mu\Psi_\mu)-i\frac{2}{\sqrt{6}}gc_4^*(-ieF_{\lambda\rho})\sigma_{\lambda\rho}\Psi_0+$$
$$+\frac{2}{\sqrt{6}}fc_3^*(-ieF_{\lambda\rho})\sigma_{\lambda\rho}(\gamma_\mu\Psi_\mu)+M(D_\mu\Psi_\mu)=0; \qquad (5.17)$$

оно не содержит оператора D^2.

6. Приведение системы уравнений во внешнем поле к квазидиагональному виду

Будем исходить из трех уравнений:

уравнение I

$$c_2\hat{D}\Psi_0-\frac{4ic_4}{\sqrt{6}}\left[(D_\mu\Psi_\mu)-\frac{1}{4}\hat{D}(\gamma_\mu\Psi_\mu)\right]+M\Psi_0=0, \qquad (6.1)$$

уравнение II

$$(c_1+\frac{c_3}{\sqrt{6}})\hat{D}(\gamma_\mu\Psi_\mu)-\frac{4c_3}{\sqrt{6}}(D_\mu\Psi_\mu)+M(\gamma_\mu\Psi_\mu)=0, \qquad (6.2)$$

уравнение III

$$+\frac{M}{4}\frac{\sqrt{6}fc_2c_3^*-c_2(c_1+c_3/\sqrt{6})-g|c_4|^2}{c_2(c_1+c_3/\sqrt{6})}\hat{D}(\gamma_\mu\Psi_\mu)-i\frac{\sqrt{6}}{4}M\frac{gc_4^*}{c_2}\hat{D}\Psi_0-$$
$$-\frac{fc_2|c_3|^2+gc_1|c_4|^2}{c_2(c_1+c_3/\sqrt{6})}\hat{D}(D_\mu\Psi_\mu)-i\frac{2}{\sqrt{6}}gc_4^*(-ieF_{\lambda\rho})\sigma_{\lambda\rho}\Psi_0+$$
$$+\frac{2}{\sqrt{6}}fc_3^*(-ieF_{\lambda\rho})\sigma_{\lambda\rho}(\gamma_\mu\Psi_\mu)+M(D_\mu\Psi_\mu)=0. \qquad (6.3)$$

Дальнейшая задача – привести систему уравнений к виду, когда смешивание трех биспиноров

$$(\gamma_\mu\Psi_\mu),\quad \Psi_0,\quad (D_\mu\Psi_\mu). \qquad (6.4)$$

осуществляется только через тензор электромагнитного поля.

Обратимся к первому уравнению (6.1):

$$c_2\hat{D}\Psi_0+\frac{ic_4}{\sqrt{6}}\hat{D}(\gamma_\mu\Psi_\mu)-\frac{4ic_4}{\sqrt{6}}(D_\mu\Psi_\mu)+M\Psi_0=0,$$

Исключим член $(D_\mu\Psi_\mu)$ с помощью третьего уравнения (6.3), получаем

$$c_2\hat{D}\Psi_0+\frac{ic_4}{\sqrt{6}}\hat{D}(\gamma_\mu\Psi_\mu)+\frac{4ic_4}{\sqrt{6}}$$
$$\{+\frac{1}{4}\frac{\sqrt{6}fc_2c_3^*-c_2(c_1+c_3/\sqrt{6})-g|c_4|^2}{c_2(c_1+c_3/\sqrt{6})}\hat{D}(\gamma_\mu\Psi_\mu)-i\frac{\sqrt{6}}{4}\frac{gc_4^*}{c_2}\hat{D}\Psi_0-$$
$$-\frac{1}{M}\frac{fc_2|c_3|^2+gc_1|c_4|^2}{c_2(c_1+c_3/\sqrt{6})}\hat{D}(D_\mu\Psi_\mu)-\frac{1}{M}i\frac{2}{\sqrt{6}}gc_4^*(-ieF_{\lambda\rho})\sigma_{\lambda\rho}\Psi_0+$$
$$+\frac{1}{M}\frac{2}{\sqrt{6}}fc_3^*(-ieF_{\lambda\rho})\sigma_{\lambda\rho}(\gamma_\mu\Psi_\mu)\}+M\Psi_0=0.$$

Приводим подобные члены

$$\frac{c_2^2+g|c_4|^2}{c_2}\hat{D}\Psi_0+$$

$$+\frac{ic_4}{\sqrt{6}}\left[1+\frac{\sqrt{6}fc_2c_3^*-c_2(c_1+c_3/\sqrt{6})-g|c_4|^2}{c_2(c_1+c_3/\sqrt{6})}\right]\hat{D}(\gamma_\mu\Psi_\mu)-$$

$$-\frac{4ic_4}{\sqrt{6}}\frac{1}{M}\frac{fc_2|c_3|^2+gc_1|c_4|^2}{c_2(c_1+c_3/\sqrt{6})}\hat{D}(D_\mu\Psi_\mu)+$$

$$+\frac{4}{3}\frac{1}{M}g|c_4|^2(-ieF_{\lambda\rho})\sigma_{\lambda\rho}\Psi_0+\frac{4i}{3}\frac{1}{M}fc_3^*c_4(-ieF_{\lambda\rho})\sigma_{\lambda\rho}(\gamma_\mu\Psi_\mu)+M\Psi_0=0.$$

В этом уравнении можно упростить второе слагаемое

$$\frac{c_2^2+g|c_4|^2}{c_2}\hat{D}\Psi_0+\frac{ic_4}{\sqrt{6}}\frac{\sqrt{6}fc_2c_3^*-g|c_4|^2}{c_2(c_1+c_3/\sqrt{6})}\hat{D}(\gamma_\mu\Psi_\mu)-$$

$$-\frac{4ic_4}{\sqrt{6}}\frac{1}{M}\frac{fc_2|c_3|^2+gc_1|c_4|^2}{c_2(c_1+c_3/\sqrt{6})}\hat{D}(D_\mu\Psi_\mu)+$$

$$+\frac{4}{3}\frac{1}{M}g|c_4|^2(-ieF_{\lambda\rho})\sigma_{\lambda\rho}\Psi_0+\frac{4i}{3}\frac{1}{M}fc_3^*c_4(-ieF_{\lambda\rho})\sigma_{\lambda\rho}(\gamma_\mu\Psi_\mu)+M\Psi_0=0. \qquad (6.5)$$

Аналогично, обратившись к уравнению II:

$$(c_1+\frac{c_3}{\sqrt{6}})\hat{D}(\gamma_\mu\Psi_\mu)-\frac{4c_3}{\sqrt{6}}(D_\mu\Psi_\mu)+M(\gamma_\mu\Psi_\mu)=0,$$

исключим в нем также член $(D_\mu\Psi_\mu)$:

$$(c_1+\frac{c_3}{\sqrt{6}})\hat{D}(\gamma_\mu\Psi_\mu)+$$

$$+\frac{4c_3}{\sqrt{6}}\frac{1}{4}\frac{\sqrt{6}fc_2c_3^*-c_2(c_1+c_3/\sqrt{6})-g|c_4|^2}{c_2(c_1+c_3/\sqrt{6})}\hat{D}(\gamma_\mu\Psi_\mu)-\frac{4c_3}{\sqrt{6}}i\frac{\sqrt{6}}{4}\frac{gc_4^*}{c_2}\hat{D}\Psi_0-$$

$$-\frac{4c_3}{\sqrt{6}}\frac{1}{M}\frac{fc_2|c_3|^2+gc_1|c_4|^2}{c_2(c_1+c_3/\sqrt{6})}\hat{D}(D_\mu\Psi_\mu)-\frac{4c_3}{\sqrt{6}}\frac{1}{M}i\frac{2}{\sqrt{6}}gc_4^*(-ieF_{\lambda\rho})\sigma_{\lambda\rho}\Psi_0+$$

$$+\frac{4c_3}{\sqrt{6}}\frac{1}{M}\frac{2}{\sqrt{6}}fc_3^*(-ieF_{\lambda\rho})\sigma_{\lambda\rho}(\gamma_\mu\Psi_\mu)++M(\gamma_\mu\Psi_\mu)=0.$$

Приводим подобные члены:

$$\left[(c_1+c_3/\sqrt{6})+\frac{c_3}{\sqrt{6}}\frac{\sqrt{6}fc_2c_3^*-c_2(c_1+c_3/\sqrt{6})-g|c_4|^2}{c_2(c_1+c_3/\sqrt{6})}\right]\hat{D}(\gamma_\mu\Psi_\mu)-$$

$$-\frac{4c_3}{\sqrt{6}}\frac{1}{M}\frac{fc_2|c_3|^2+gc_1|c_4|^2}{c_2(c_1+c_3/\sqrt{6})}\hat{D}(D_\mu\Psi_\mu)-i\frac{gc_3c_4^*}{c_2}\hat{D}\Psi_0-$$

$$-\frac{4ic_3}{3}\frac{1}{M}gc_4^*(-ieF_{\lambda\rho})\sigma_{\lambda\rho}\Psi_0+\frac{4c_3}{3}\frac{1}{M}fc_3^*(-ieF_{\lambda\rho})\sigma_{\lambda\rho}(\gamma_\mu\Psi_\mu)+M(\gamma_\mu\Psi_\mu)=0.$$

В этом уравнении можно упростить первый член

$$\frac{1}{c_2(c_1+c_3/\sqrt{6})}\left[c_2(c_1^2+f\,|c_3|^2)+\frac{c_3}{\sqrt{6}}(c_1c_2-g_4\,|c^2)\right]\hat{D}(\gamma_\mu\Psi_\mu)-$$
$$-\frac{4}{\sqrt{6}}\frac{c_3}{M}\frac{fc_2\,|c_3|^2+gc_1\,|c_4|^2}{c_2(c_1+c_3/\sqrt{6})}\hat{D}(D_\mu\Psi_\mu)-i\frac{gc_3c_4^*}{c_2}\hat{D}\Psi_0-$$
$$-\frac{4ic_3}{3}\frac{1}{M}gc_4^*(-ieF_{\lambda\rho})\sigma_{\lambda\rho}\,\Psi_0+\frac{4c_3}{3}\frac{1}{M}fc_3^*(-ieF_{\lambda\rho})\sigma_{\lambda\rho}\,(\gamma_\mu\Psi_\mu)+M(\gamma_\mu\Psi_\mu)=0\,. \qquad (6.6)$$

Вводим обозначения

$$\gamma_\mu\Psi_\mu=\bar{\Phi}_1,\quad \bar{\Phi}_2=\Psi_0,\quad \bar{\Phi}_3=D_\mu\Psi_\mu\,;\qquad (-ieF_{\lambda\rho})\sigma_{\lambda\rho}=\Sigma\,.$$

Полученную выше систему из трех уравнений записываем так:

$$\frac{1}{c_2(c_1+c_3/\sqrt{6})}\left[c_2(c_1^2+f\,|c_3|^2)+\frac{c_3}{\sqrt{6}}(c_1c_2-g_4\,|c^2)\right]\hat{D}\bar{\Phi}_1-$$
$$-i\frac{gc_3c_4^*}{c_2}\hat{D}\bar{\Phi}_2-\frac{4}{\sqrt{6}}\frac{c_3}{M}\frac{fc_2\,|c_3|^2+gc_1\,|c_4|^2}{c_2(c_1+c_3/\sqrt{6})}\hat{D}\bar{\Phi}_3+$$
$$+\frac{4c_3}{3}\frac{1}{M}fc_3^*\Sigma\,\bar{\Phi}_1-\frac{4ic_3}{3}\frac{1}{M}gc_4^*\Sigma\,\bar{\Phi}_2+M\,\bar{\Phi}_1=0\,,$$
$$(6.7)$$

$$\frac{ic_4}{\sqrt{6}}\frac{\sqrt{6}fc_2c_3^*-g\,|c_4|^2}{c_2(c_1+c_3/\sqrt{6})}\hat{D}\bar{\Phi}_1+\frac{c_2^2+g\,|c_4|^2}{c_2}\hat{D}\bar{\Phi}_2-\frac{4ic_4}{\sqrt{6}}\frac{1}{M}\frac{fc_2\,|c_3|^2+gc_1\,|c_4|^2}{c_2(c_1+c_3/\sqrt{6})}\hat{D}\bar{\Phi}_3+$$
$$+\frac{4i}{3}\frac{1}{M}fc_3^*c_4\Sigma\,\bar{\Phi}_1+\frac{4}{3}\frac{1}{M}g\,|c_4|^2\,\Sigma\bar{\Phi}_2+M\Psi_0=0\,,$$
$$(6.8)$$

$$+\frac{M}{4}\frac{\sqrt{6}fc_2c_3^*-c_2(c_1+c_3/\sqrt{6})-g\,|c_4|^2}{c_2(c_1+c_3/\sqrt{6})}\hat{D}\bar{\Phi}_1-i\frac{\sqrt{6}}{4}M\frac{gc_4^*}{c_2}\hat{D}\bar{\Phi}_2-\frac{fc_2\,|c_3|^2+gc_1\,|c_4|^2}{c_2(c_1+c_3/\sqrt{6})}\hat{D}\bar{\Phi}_3+$$
$$+\frac{2}{\sqrt{6}}fc_3^*\,\Sigma\,\bar{\Phi}_1-i\frac{2}{\sqrt{6}}gc_4^*\,\Sigma\bar{\Phi}_2+M\,\bar{\Phi}_3=0\,. \qquad (6.9)$$

Если воспользоваться обозначениями, которые были введены при рассмотрении случая свободной частицы

$$A_1=\frac{1}{c_2(c_1+c_3/\sqrt{6})}\left[c_2(c_1^2+f\,|c_3|^2)+\frac{c_3}{\sqrt{6}}(c_1c_2-g\,|c_4|^2\right],$$
$$A_2=\frac{i}{\sqrt{6}}\frac{c_4}{c_2(c_1+c_3/\sqrt{6})}\left[f\sqrt{6}c_2c_3^*-g\,|c_4|^2\right],$$
$$A_3=\frac{M}{4}\frac{1}{c_2(c_1+c_3/\sqrt{6})}\left[f\sqrt{6}c_2c_3^*-g\,|c_4|^2-c_2(c_1+c_3/\sqrt{6})\right];$$
$$B_1=-ig\frac{c_3c_4^*}{c_2},\qquad B_2=\frac{c_2^2+g\,|c_4|^2}{c_2},\qquad B_3=-igM\frac{\sqrt{6}}{4}\frac{c_4^*}{c_2};$$

$$R_1=-\frac{4}{M}\frac{c_3}{\sqrt{6}}\frac{fc_2\,|\,c_3\,|^2+gc_1\,|\,c_4\,|^2}{c_2(c_1+c_3/\sqrt{6})},\; R_2=-\frac{4i}{M}\frac{c_4}{\sqrt{6}}\frac{fc_2\,|\,c_3\,|^2+gc_1\,|\,c_4\,|^2}{c_2(c_1+c_3/\sqrt{6})},\; R_3=-\frac{fc_2\,|\,c_3\,|^2+gc_1\,|\,c_4\,|^2}{c_2(c_1+c_3/\sqrt{6})};$$

то последние три уравнения записываем коротко таким образом:

$$A_1\hat{D}\,\bar{\Phi}_1+B_1\hat{D}\,\bar{\Phi}_2+R_1\hat{D}\,\bar{\Phi}_3+M\,\bar{\Phi}_1+\frac{4}{3}\frac{f\,|\,c_3\,|^2}{M}\Sigma\,\bar{\Phi}_1-\frac{4i}{3}\frac{gc_3c_4^*}{M}\Sigma\,\bar{\Phi}_2=0\,,$$

$$A_2\hat{D}\,\bar{\Phi}_1+B_2\hat{D}\,\bar{\Phi}_2+R_2\hat{D}\,\bar{\Phi}_3+M\,\Phi_2+\frac{4i}{3}\frac{fc_3^*c_4}{M}\Sigma\,\bar{\Phi}_1+\frac{4}{3}\frac{g\,|\,c_4\,|^2}{M}\Sigma\,\bar{\Phi}_2=0\,,$$

$$A_3\hat{D}\,\bar{\Phi}_1+B_3\hat{D}\,\bar{\Phi}_2+R_3\hat{D}\,\bar{\Phi}_3+M\,\bar{\Phi}_3+\frac{2}{\sqrt{6}}fc_3^*\,\Sigma\,\bar{\Phi}_1-i\frac{2}{\sqrt{6}}gc_4^*\Sigma\,\bar{\Phi}_2=0\,. \qquad (6.10)$$

Дальше действуем как и в случае свободного поля. Умножаем первое, второе, третье уравнения соответственно на a_1, a_2, a_3 и результаты складываем:

$$(a_1A_1+a_2A_2+a_3A_3)\hat{D}\bar{\Phi}_1+(a_1B_1+a_2B_2+a_3B_3)\hat{D}\bar{\Phi}_2+$$
$$+(a_1R_1+a_2R_2+a_3R_3)\hat{D}\bar{\Phi}_3+M(a_1\bar{\Phi}_1+a_2\bar{\Phi}_2+a_3\bar{\Phi}_3)+$$
$$+[\,a_1\frac{4}{3}\frac{f\,|\,c_3\,|^2}{M}+a_2\frac{4i}{3}\frac{fc_3^*c_4}{M}+a_3\frac{2}{\sqrt{6}}fc_3^*\,]\,\Sigma\,\bar{\Phi}_1+$$
$$+[\,-a_1\frac{4i}{3}\frac{gc_3c_4^*}{M}+a_2\frac{4}{3}\frac{g\,|\,c_4\,|^2}{M}-a_3\frac{2i}{\sqrt{6}}gc_4^*\,]\,\Sigma\,\bar{\Phi}_2=0\,;$$

откуда, учитывая равенства

$$a_1A_1+a_2A_2+a_3A_3=\lambda_1a_1\,,$$
$$a_1B_1+a_2B_2+a_3B_3=\lambda_1a_2\,,$$
$$a_1R_1+a_2R_2+a_3R_3=\lambda_1a_3\,, \qquad (6.11)$$

получаем уравнение

$$\lambda_1\hat{D}(a_1\bar{\Phi}_1+a_2\bar{\Phi}_2+a_3\bar{\Phi}_3)+M(a_1\bar{\Phi}_1+a_2\bar{\Phi}_2+a_3\bar{\Phi}_3)+$$
$$+[\,a_1\frac{4}{3}\frac{f\,|\,c_3\,|^2}{M}+a_2\frac{4i}{3}\frac{fc_3^*c_4}{M}+a_3\frac{2}{\sqrt{6}}fc_3^*\,]\,\Sigma\,\bar{\Phi}_1+$$
$$+[\,-a_1\frac{4i}{3}\frac{gc_3c_4^*}{M}+a_2\frac{4}{3}\frac{g\,|\,c_4\,|^2}{M}-a_3\frac{2i}{\sqrt{6}}gc_4^*\,]\,\Sigma\,\bar{\Phi}_2=0\,. \qquad (6.12)$$

Аналогично находим еще два уравнения (заменяя a_i на b_i и на r_i)

$$\lambda_1\hat{D}(b_1\bar{\Phi}_1+b_2\bar{\Phi}_2+b_3\bar{\Phi}_3)+M(b_1\bar{\Phi}_1+b_2\bar{\Phi}_2+b_3\bar{\Phi}_3)+$$
$$+[\,b_1\frac{4}{3}\frac{f\,|\,c_3\,|^2}{M}+b_2\frac{4i}{3}\frac{fc_3^*c_4}{M}+b_3\frac{2}{\sqrt{6}}fc_3^*\,]\,\Sigma\,\bar{\Phi}_1+$$
$$+[\,-b_1\frac{4i}{3}\frac{gc_3c_4^*}{M}+b_2\frac{4}{3}\frac{g\,|\,c_4\,|^2}{M}-b_3\frac{2i}{\sqrt{6}}gc_4^*\,]\,\Sigma\,\bar{\Phi}_2=0\,; \qquad (6.13)$$

$$\lambda_1\hat{D}(r_1\bar{\Phi}_1+r_2\bar{\Phi}_2+r_3\bar{\Phi}_3)+M(r_1\bar{\Phi}_1+r_2\bar{\Phi}_2+r_3\bar{\Phi}_3)+$$
$$+[\,r_1\frac{4}{3}\frac{f\,|\,c_3\,|^2}{M}+r_2\frac{4i}{3}\frac{fc_3^*c_4}{M}+r_3\frac{2}{\sqrt{6}}fc_3^*\,]\,\Sigma\,\bar{\Phi}_1+$$

$$+[\,-r_1\frac{4i}{3}\frac{gc_3c_4^*}{M}+r_2\frac{4}{3}\frac{g\,|\,c_4\,|^2}{M}-r_3\frac{2i}{\sqrt{6}}\,gc_4^*\,]\,\Sigma\,\bar{\Phi}_2=0\,. \tag{6.14}$$

Вводим три новых биспинора следующими линейными комбинациями:

$$\Phi_1=a_1\bar{\Phi}_1+a_2\bar{\Phi}_2+a_3\bar{\Phi}_3\,,$$
$$\Phi_2=b_1\bar{\Phi}_1+b_2\bar{\Phi}_2+b_3\bar{\Phi}_3\,,$$
$$\Phi_3=r_1\bar{\Phi}_1+r_2\bar{\Phi}_2+r_3\bar{\Phi}_3\,; \tag{6.15}$$

тогда система уравнений принимает вид

$$\lambda_1\hat{D}\Phi_1+M\Phi_1+$$
$$+[\,a_1\frac{4}{3}\frac{f\,|\,c_3\,|^2}{M}+a_2\frac{4i}{3}\frac{fc_3^*c_4}{M}+a_3\frac{2}{\sqrt{6}}\,fc_3^*\,]\,\Sigma\,\bar{\Phi}_1+$$
$$+[\,-a_1\frac{4i}{3}\frac{gc_3c_4^*}{M}+a_2\frac{4}{3}\frac{g\,|\,c_4\,|^2}{M}-a_3\frac{2i}{\sqrt{6}}\,gc_4^*\,]\,\Sigma\,\bar{\Phi}_2=0\,, \tag{6.16}$$

$$\lambda_1\hat{D}\Phi_2+M\Phi_2+$$
$$+[\,b_1\frac{4}{3}\frac{f\,|\,c_3\,|^2}{M}+b_2\frac{4i}{3}\frac{fc_3^*c_4}{M}+b_3\frac{2}{\sqrt{6}}\,fc_3^*\,]\,\Sigma\,\bar{\Phi}_1+$$
$$+[\,-b_1\frac{4i}{3}\frac{gc_3c_4^*}{M}+b_2\frac{4}{3}\frac{g\,|\,c_4\,|^2}{M}-b_3\frac{2i}{\sqrt{6}}\,gc_4^*\,]\,\Sigma\,\bar{\Phi}_2=0\,, \tag{6.17}$$

$$\lambda_1\hat{D}\Phi_3+M\Phi_3+$$
$$+[\,r_1\frac{4}{3}\frac{f\,|\,c_3\,|^2}{M}+r_2\frac{4i}{3}\frac{fc_3^*c_4}{M}+r_3\frac{2}{\sqrt{6}}\,fc_3^*\,]\,\Sigma\,\bar{\Phi}_1+$$
$$+[\,-r_1\frac{4i}{3}\frac{gc_3c_4^*}{M}+r_2\frac{4}{3}\frac{g\,|\,c_4\,|^2}{M}-r_3\frac{2i}{\sqrt{6}}\,gc_4^*\,]\,\Sigma\,\bar{\Phi}_2=0\,. \tag{6.18}$$

7. Обобщение теории на общековариантный случай

Чтобы обобщить подход на риманово пространство-время, нужно сделать ряд изменений.

1. Поскольку в римановом пространстве будем использовать метрический тензор $g_{\alpha\beta}(x)$, соотвествующий сигнатуре $(+,-,-,-)$, нужно сделать замену

$$M\;-->\;iM\,. \tag{7.1}$$

2. Затем нужно использовать другие матрицы Дирака (для определенности имеем в виду спинорный базис)

$$\gamma^0=\begin{vmatrix}0 & I\\ I & 0\end{vmatrix},\quad \gamma^i=\begin{vmatrix}0 & -\sigma^i\\ \sigma^i & 0\end{vmatrix}. \tag{7.2}$$

3. Нужно изменить выражения для операторов дифференцирования [1.3]

$$D_\alpha(x)=\partial_\alpha+ieA_\alpha(x)\;-->\;D_\alpha(x)=\nabla_\alpha+\Gamma_\alpha(x)+ieA_\alpha(x),\;\;\hat{D}=\gamma^\alpha(x)D_\alpha(x), \tag{7.3}$$

где $\Gamma_\alpha(x)$ – биспинорная связность, и $\gamma^\alpha(x)=\gamma^a e^\alpha_{(a)}(x)$.

4. Будем учитывать перестановочные соотношения:

$$\gamma^{\rho}(x)D_{\beta} = D_{\beta}\gamma^{\rho}(x), \qquad D_{\sigma}(x)g_{\alpha\beta}(x) = g_{\alpha\beta}(x)D_{\sigma}(x),$$

$$\hat{D}\hat{D} = D_{\alpha}D_{\beta}(\frac{\gamma^{\alpha}\gamma^{\beta}+\gamma^{\beta}\gamma^{\alpha}}{2} + \frac{\gamma^{\alpha}\gamma^{\beta}-\gamma^{\beta}\gamma^{\alpha}}{2}) = -\Sigma(x),$$

$$D^2 = D^{\alpha}D_{\alpha}, \quad \Sigma(x) = (-ieF_{\alpha\beta}\sigma^{\alpha\beta}(x) + \frac{R}{4}), \tag{7.4}$$

где $R(x)$ – скалярная кривизна Риччи.

С учетом этого имеем модифицированную общековариантную систему уравнений

$$c_2\hat{D}\Psi_0 - \frac{4ic_4}{\sqrt{6}}\left[(D^{\mu}\Psi_{\mu}) - \frac{1}{4}\hat{D}(\gamma^{\mu}(x)\Psi_{\mu})\right] + iM\Psi_0 = 0, \tag{7.5}$$

$$(c_1 + \frac{c_3}{\sqrt{6}})\hat{D}(\gamma^{\mu}(x)\Psi_{\mu}) - \frac{4c_3}{\sqrt{6}}(D^{\mu}\Psi_{\mu}) + iM(\gamma^{\mu}(x)\Psi_{\mu}) = 0, \tag{7.6}$$

$$+\frac{iM}{4}\frac{\sqrt{6}fc_2c_3^* - c_2(c_1 + c_3/\sqrt{6}) - g|c_4|^2}{c_2(c_1 + c_3/\sqrt{6})}\hat{D}(\gamma^{\mu}(x)\Psi_{\mu}) - i\frac{\sqrt{6}}{4}iM\frac{gc_4^*}{c_2}\hat{D}\Psi_0 -$$

$$-\frac{fc_2|c_3|^2 + gc_1|c_4|^2}{c_2(c_1 + c_3/\sqrt{6})}\hat{D}(D^{\mu}\Psi_{\mu}) - i\frac{2}{\sqrt{6}}gc_4^*(-ieF_{\lambda\rho}\sigma_{\lambda\rho}(x) + \frac{R}{4})\Psi_0 +$$

$$+\frac{2}{\sqrt{6}}fc_3^*(-ieF_{\lambda\rho}\sigma_{\lambda\rho} + \frac{R}{4})(\gamma^{\mu}(x)\Psi_{\mu}) + iM(D^{\mu}\Psi_{\mu}) = 0. \tag{7.7}$$

Дальнейший анализ повторяется с небольшими формальными изменениями, в результате приходим к уравнениям

$$i\hat{D}(x)\Phi_1(x) - M_1\Phi_1(x) + iY_1\Sigma(x)\Phi(x) = 0,$$

$$i\hat{D}(x)\Phi_2(x) - M_2\Phi_2(x) + iY_2\Sigma(x)\Phi(x) = 0,$$

$$i\hat{D}(x)\Phi_3(x) - M_3\Phi_3(x) + iY_3\Sigma(x)\Phi(x) = 0. \tag{7.8}$$

где

$$\hat{D}(x) = \gamma^{\alpha}(x)D_{\alpha}, \quad D_{\alpha}(x) = \nabla_{\alpha} + \Gamma_{\alpha}(x) + ieA_{\alpha}(x),$$

$$Y_i = \frac{4c_2c_3}{3iM}(\lambda_i - c_2), \quad i = 1,2,3; \quad \Phi = L_1\Phi_1(x) + L_2\Phi_2(x) + L_3\Phi_3(x),$$

$$\Sigma(x) = -ieF_{\lambda\rho}(x)\sigma_{\lambda\rho}(x) + \frac{R(x)}{4}. \tag{7.9}$$

Отметим, что система уравнений (7.8) допускает ограничение в случае майорановских частиц (когда $e = 0$), при этом имеем уравнения

$$i\gamma^{\alpha}(x)(\nabla_{\alpha} + \Gamma_{\alpha})\Phi_1(x) - M_1\Phi_1(x) + Y'_1\frac{R(x)}{4}\Phi(x) = 0,$$

$$i\gamma^{\alpha}(x)(\nabla_{\alpha} + \Gamma_{\alpha})\Phi_2(x) - M_2\Phi_2(x) + Y'_2\frac{R(x)}{4}\Phi(x) = 0,$$

$$i\gamma^{\alpha}(x)(\nabla_{\alpha} + \Gamma_{\alpha})\Phi_3(x) - M_3\Phi_3(x) + Y'_3\frac{R(x)}{4}\Phi(x) = 0, \tag{7.10}$$

где

$$Y'_i = \frac{4c_2c_3}{3M}(\lambda_i - c_2), \quad i = 1,2,3, \quad \Phi = L_1\Phi_1(x) + L_2\Phi_2(x) + L_3\Phi_3(x). \qquad (7.11)$$

Поскольку в любом из майорановских базисов выполняется тождество $[i\gamma^\alpha(x)]^* = i\gamma^\alpha(x)$ $[\Gamma_\alpha(x)]^* = \Gamma_\alpha(x)$; то биспиноры $\Phi_1(x), \Phi_2(x), \Phi_3(x)$ и биспинор $\Phi(x)$ могут быть либо вещественными, либо чисто мнимыми.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гельфанд, И. М. Общие релятивистские инвариантные уравнения и бесконечномерные представления группы Лоренца / И. М. Гельфанд, А. М. Яглом // ЖЭТФ. – 1948. – Т. 18, вып. 8. – С. 703–733.

2. Гельфанд, И. М. Представления группы вращений и группы Лоренца / И. М. Гельфанд, Р. А. Минлос, З. Я. Шапиро. – М. : Физматгиз, 1958. – 368 с.

3. Плетюхов, В. А. Релятивистские волновые уравнения и внутренние степени свободы / В. А. Плетюхов, В. М. Редьков, В. И. Стражев. – Минск : Беларус. навука, 2015. – 326 с.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 03.09.2018

Pletyukhov V.A., Kisel V.V., Ovsiyuk E.M., Voynova Y.A., Veko O.V., Red'kov V.M. **Fermion with Three Mass Parameters. General Theory, Interaction with External Fields**

In the paper, starting from general Gel'fand – Yaglom approach a new 20-component wave equation for spin 1/2 fermion, which is characterized by three mass parameters, is derived. On the base of 20-component wave function, three auxiliary bispinors are introduced, they in absence of external field for these bispinors obey to treee separate Dirac-like equations with different masses M_1, M_2, M_3. *It is shown that in presence of external fields, electromagnetic field and gravitational non-Euclidean background with non-vanishing Ricci scalar curvature, the main equation is not split into separated equations, instead a quite definite mixing of three Dirac-like equations arises. It is shown that a generalized equation for Majorana particle with three mass parameters exists as well, such a generalized Majorana equation is not split into three separated equations in curved background if Ricci scalar of space-time model does not vanish.*