Фермион с внутренним спектром масс во внешних полях

Кисель В.В.[1], Овсиюк Е.М.[2], Веко О.В.[3], Редьков В.М.[3]

[1] *Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники, ул. П. Бровки, 6, г. Минск, 220013, Беларусь*

[2] *Мозырский государственный педагогический университет, ул. Студенческая, 28, г. Мозырь, 247760, Беларусь*

[3] *Институт физики НАН Беларуси, пр. Независимости, 68, г. Минск, 220072, Беларусь*

e-mail: vasiliy-spu@mail.ru; e.ovsiyuk@mail.ru; vekoolga@mail.ru; redkov@dragon.bas-net.by

Введение

В рамках использования теории релятивистских волновых уравнений с расширенными наборами представлений группы Лоренца [1–3] в работе [4] развита теория для частицы с единственным спином 1/2 и внутренним спектром двух различающихся масс M_1 и M_2. В исходной 16-компонентной модели выделены две основные биспинорные компоненты $\Psi_1(x)$ и $\Psi_2(x)$, остальные восемь строятся из них. В случае свободной частицы уравнения для двух основных биспиноров не связаны между собой, тем не менее полная волновая функция должна строиться как суперпозиция $\Psi(x) = c_1\Psi_1(x) + c_2\Psi_2(x)$ с применением обычной вероятностной интерпретации для коэффициентов c_1, c_2. Построенное обобщенное уравнение сохраняет свою применимость при ограничении к майорановскому случаю электрически незаряженного фермиона, что означает применимость подхода для описания двух различающихся по массе нейтрино. Теория была обобщена в статье [4] на случай присутствия внешних электромагнитных полей, с использованием тетрадного формализма проведен также учет псевдоримановой структуры пространства времени в работе [5]. Два основных биспинора оказываются связанными единой системой уравнений, такая связь сохраняется и для нейтральной частицы, если скалярная кривизна Риччи пространства-времени отлична от нуля.

В настоящем докладе построенное уравнение будет исследовано в присутствии внешнего однородного магнитного поля. Исходим из обобщенного уравнения для фермиона (используем тетрадный формализм)

$$[\, i\hat{D} - M_1 + b\Lambda_1\Sigma(x)\,]\ \Psi_1(x) - a\Lambda_1\Sigma(x)\ \Psi_2(x) = 0\ ,$$

$$[\, i\hat{D} - M_2 - a\Lambda_2\Sigma(x)\,]\ \Psi_2(x) + b\Lambda_2\Sigma(x)\ \Psi_1(x) = 0\ ; \qquad (1)$$

где

$$\hat{D}(x) = \gamma^{\alpha}(x) + \Gamma_{\alpha}(x) + ieA_{\alpha}\ , \quad \gamma^{\alpha}(x) = e^{\alpha}_{(b)}\gamma^{b}, \quad e/\hbar c \Longrightarrow e\ ,$$

$$\Sigma(x) = -ieF_{\alpha\beta}\sigma^{\alpha\beta}(x)\ ,\ \sigma^{\alpha\beta}(x) = \frac{\gamma^{\alpha}(x)\gamma^{\beta}(x) - \gamma^{\beta}(x)\gamma^{\alpha}(x)}{4}\ .$$

Применяется следующая параметризация [4] входящих в уравнения величин:

$$M_1 = \frac{M}{\lambda_1},\ M_2 = \frac{M}{\lambda_2},\ \sin^2\gamma = \frac{4\sigma^2}{\rho^2},\ \gamma \in (0, \pi/2),\ \lambda_1 = \frac{\rho}{2}(1 + \cos\gamma)\ , \lambda_2 = \frac{\rho}{2}(1 - \cos\gamma),$$

$$A' = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2},\ B' = \frac{\sqrt{(\lambda_1 + \lambda_2)^2 + (4/3)\lambda_1\lambda_2}}{2},\ a = \frac{5A' - 3B' - \lambda_1}{M}\ ,$$

$$b = \frac{5A' - 3B' - \lambda_2}{M}\ , \Lambda_1 = (A' + B')\frac{\lambda_1 - A' - B'}{\lambda_1(\lambda_1 - \lambda_2)},\ \Lambda_2 = (A' + B')\frac{\lambda_2 - A' - B'}{\lambda_2(\lambda_2 - \lambda_1)}\ . \qquad (2)$$

1. Разделение переменных

В цилиндрических координатах магнитное поле задается потенциалом $A_\phi = -\frac{Br^2}{2}$; дальше используем обозначения (также отмечаем размерности величин)

$$\frac{eB}{\hbar c} \Longrightarrow B, \quad [B] = L^{-2}, \qquad \frac{mc}{\hbar} \Longrightarrow M, \quad [M] = L^{-1}\ .$$

Тогда (пусть $\Psi = \psi/\sqrt{r}$):

$$\hat{D} = i\gamma^0\frac{\partial}{\partial t} + i\gamma^1\frac{\partial}{\partial r} + \gamma^2(\frac{i\partial_\phi}{r} + \frac{Br}{2}) + i\gamma^3\frac{\partial}{\partial z}\ , \quad e\sigma^{\alpha\beta}(x)F_{\alpha\beta}(x) = iB\gamma^2\gamma^1 = iB\Sigma_3, \qquad (3)$$

и система уравнений приводится к виду

$$[\ i\hat{D} - M_1 + 2b\Lambda_1 B\Sigma_3\ ]\ \psi_1(x) - a\Lambda_1 B\Sigma_3\ \psi_2(x) = 0\ ,$$
$$[\ i\hat{D} - M_2 - 2a\Lambda_2 B\Sigma_3\ ]\ \psi_2(x) + b\Lambda_2 B\Sigma_3\ \psi_1(x) = 0\ . \qquad (4)$$

Дальше используются обозначения

$$2b\Lambda_1 B = \Gamma_1\ ,\ a\Lambda_1 B = R_1\ , \quad 2a\Lambda_2 B = -\Gamma_2\ ,\ b\Lambda_2 B = -R_2\ ,$$
$$\frac{m}{r} - \frac{Br}{2} \Longrightarrow \mu(r)\ , \qquad \frac{\epsilon}{\hbar c} \Longrightarrow \epsilon\ , \quad [\epsilon] = L^{-1}\ ; \qquad (5)$$

параметры $\Gamma_{1,2}$ и $R_{1,2}$ имеют размерность длины.

Для волновой функции $\psi = \{\ \psi_1(x) \otimes \psi_2(x)\ \}$: применяем подстановку

$$\psi_1 = e^{-i\epsilon t}e^{im\phi}e^{ikz}\left|\begin{array}{c} f_1(r) \\ f_2(r) \\ f_3(r) \\ f_4(r) \end{array}\right|, \quad \psi_2 = e^{-i\epsilon t}e^{im\phi}e^{ikz}\left|\begin{array}{c} g_1(r) \\ g_2(r) \\ g_3(r) \\ g_4(r) \end{array}\right|. \qquad (6)$$

Используя спинорный базис для матриц Дирака, находим восемь уравнений:

$$(\epsilon + k)f_3 + (\Gamma_1 - M_1)f_1 - R_1 g_1 = +D_+ f_4\ ,$$
$$(\epsilon - k)f_1 + (\Gamma_1 - M_1)f_3 - R_1 g_3 = -D_+ f_2\ ,$$
$$(\epsilon + k)g_3 + (\Gamma_2 - M_2)g_1 - R_2 f_1 = +D_+ g_4\ ,$$
$$(\epsilon - k)g_1 + (\Gamma_2 - M_2)g_3 - R_2 f_3 = -D_+ g_2\ ; \qquad (7)$$

$$(\epsilon - k)f_4 - (\Gamma_1 + M_1)f_2 + R_1 g_2 = +D_- f_3\ ,$$
$$(\epsilon + k)f_2 - (\Gamma_1 + M_1)f_4 + R_1 g_4 = -D_- f_1\ ,$$
$$(\epsilon - k)g_4 - (\Gamma_2 + M_2)g_2 + R_2 f_2 = +D_- g_3\ ,$$
$$(\epsilon + k)g_2 - (\Gamma_2 + M_2)g_4 + R_2 f_4 = -D_- g_1\ , \qquad (8)$$

где

$$i(\frac{d}{dr} + \mu) = D_+\ , \quad i(\frac{d}{dr} - \mu) = D_-\ .$$

2. Анализ системы уравнений

Решим эти две системы уравнений относительно f_1, f_3, g_1, g_3 и f_2, f_4, g_2, g_4. Пусть

$$A'' = \Big\{ R_1^2 {R_2}^2 + 2[-(\Gamma_1 - M_1)(\Gamma_2 - M_2) + k^2 - \epsilon^2] R_2 R_1 \\ +[(\Gamma_1 - M_1)^2 - \epsilon^2 + k^2][(\Gamma_2 - M_2)^2 - \epsilon^2 + k^2]\Big\}^{-1} ,$$

тогда

$$f_1 = A'' \Big\{(\epsilon + k) \Big[R_1 R_2 + (\Gamma_2 - M_2)^2 - \epsilon^2 + k^2\Big] D_+ f_2 \\ + \Big[(\Gamma_1 - M_1) \Big((\Gamma_2 - M_2)^2 - \epsilon^2 + k^2\Big) - R_1 R_2 \,(\Gamma_2 - M_2)\Big] D_+ f_4 \\ +R_1 \,(\Gamma_2 - M_2 - M_1 + \Gamma_1)\,(\epsilon + k)\; D_+ g_2 \\ + \big[-{R_1}^2 R_2 + \big((\Gamma_2 - M_2)\,(\Gamma_1 - M_1) + \epsilon^2 - k^2\big)\, R_1\big]\, D_+ g_4 \big\} ,$$

$$f_3 = A'' \,\Big\{\Big[R_2 \,(\Gamma_2 - M_2)\, R_1 + (M_1 - \Gamma_1) \Big((\Gamma_2 - M_2)^2 - \epsilon^2 + k^2\Big)\Big] D_+ f_2 \\ + (-\epsilon + k) \Big[R_1 R_2 + (\Gamma_2 - M_2)^2 - \epsilon^2 + k^2\Big] D_+ f_4 \\ + \big[{R_1}^2 R_2 + R_1 \,\big(-(\Gamma_2 - M_2)\,(\Gamma_1 - M_1) + k^2 - \epsilon^2\big)\big] D_+ g_2 \\ +R_1 \,(\Gamma_2 - M_2 + \Gamma_1 - M_1)\,(-\epsilon + k)\; D_+ g_4 \} ,$$

$$g_1 = A'' \,\{R_2 \,(\Gamma_2 - M_2 + \Gamma_1 - M_1)\,(\epsilon + k)\; D_+ f_2 \\ + \big[-R_1 {R_2}^2 - R_2 \,\big(-(\Gamma_2 - M_2)\,(\Gamma_1 - M_1) + k^2 - \epsilon^2\big)\big] D_+ f_4 \\ + \big[(\epsilon + k)\, R_1 R_2 + (\epsilon + k)\,\big((\Gamma_1 - M_1)^2 - \epsilon^2 + k^2\big)\big] D_+ g_2 \\ + \Big[-R_1 R_2 \,(\Gamma_1 - M_1) + (\Gamma_2 - M_2) \Big((\Gamma_1 - M_1)^2 - \epsilon^2 + k^2\Big)\Big] D_+ g_4 \Big\} ,$$

$$g_3 = A'' \,\big\{\big[R_1 {R_2}^2 + R_2 \,\big(-(\Gamma_2 - M_2)\,(\Gamma_1 - M_1) + k^2 - \epsilon^2\big)\big] D_+ f_2 \\ +R_2 \,(\Gamma_2 - M_2 + \Gamma_1 - M_1)\,(-\epsilon + k)\; D_+ f_4 \\ + \Big[R_1 R_2 \,(\Gamma_1 - M_1) + (-\Gamma_2 + M_2) \Big((\Gamma_1 - M_1)^2 - \epsilon^2 + k^2\Big)\Big] D_+ g_2 \\ + (-\epsilon + k) \Big[R_1 R_2 + (\Gamma_1 - M_1)^2 - \epsilon^2 + k^2\Big] D_+ g_4 \Big\} ;$$

т.е.

$$\left|\begin{array}{c} f_1 \\ f_3 \\ g_1 \\ g_3 \end{array}\right| = \left|\begin{array}{cccc} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} & A_{44} \end{array}\right| \left|\begin{array}{c} D_+ f_2 \\ D_+ f_4 \\ D_+ g_2 \\ D_+ g_4 \end{array}\right| . \tag{9}$$

Пусть

$$B'' = \Big\{ R_1^2 {R_2}^2 + 2\,[-(\Gamma_1 + M_1)(\Gamma_2 + M_2) - \epsilon^2 + k^2] R_1 R_2 \\ +[-\epsilon^2 + k^2 + (\Gamma_1 + M_1)^2][(\Gamma_2 + M_2)^2 - \epsilon^2 + k^2]\Big\}^{-1} ,$$

тогда

$$f_2 = B'' \,\Big\{(\epsilon - k) \Big[R_1 R_2 + (\Gamma_2 + M_2)^2 - \epsilon^2 + k^2\Big] D_- f_1 \\ + \Big[R_1 R_2 \,(\Gamma_2 + M_2) - \Big((\Gamma_2 + M_2)^2 - \epsilon^2 + k^2\Big)(\Gamma_1 + M_1)\Big] D_- f_3$$

$$
\begin{aligned}
&+ (\Gamma_2 + M_2 + \Gamma_1 + M_1)\,(\epsilon - k)\,R_1\,D_- g_1 \\
&+ \left[R_1{}^2 R_2 + \left(-(\Gamma_2 + M_2)\,(\Gamma_1 + M_1) - \epsilon^2 + k^2\right) R_1\right] D_- g_3\Big\}\ ,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f_4 = B''\ \Big\{&\Big[-R_1\,R_2\ (\Gamma_2 + M_2) + \Big((\Gamma_2 + M_2)^2 - \epsilon^2 + k^2\Big)\,(\Gamma_1 + M_1)\Big]\,D_- f_1 \\
&+ \Big[-(\epsilon + k)\,\Big(R_1\,R_2 + (\Gamma_2 + M_2)^2 - \epsilon^2 + k^2\Big)\Big]\,D_- f_3 \\
&+ \left[-R_1{}^2 R_2 + \left((\Gamma_2 + M_2)\,(\Gamma_1 + M_1) + \epsilon^2 - k^2\right) R_1\right] D_- g_1 \\
&- (\Gamma_2 + M_2 + \Gamma_1 + M_1)\,(\epsilon + k)\,R_1\,D_- g_3\Big\}\ ,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
g_2 = B''\ \{&-(\Gamma_2 + M_2 + \Gamma_1 + M_1)\,(-\epsilon + k)\,R_2\,D_- f_1 \\
&+ \left[R_1\,R_2{}^2 + \left(-(\Gamma_2 + M_2)\,(\Gamma_1 + M_1) - \epsilon^2 + k^2\right) R_2\right] D_- f_3 \\
&+ (\epsilon - k)\,\Big[R_1\,R_2 + (\Gamma_1 + M_1)^2 - \epsilon^2 + k^2\Big]\,D_- g_1 \\
&+ \Big[R_1\,R_2\ (\Gamma_1 + M_1) - \Big((\Gamma_1 + M_1)^2 - \epsilon^2 + k^2\Big)\,(\Gamma_2 + M_2)\Big]\,D_- g_3\Big\}\ ,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
g_4 = B''\ \{&\left[-R_1\,R_2{}^2 + \left((\Gamma_2 + M_2)\,(\Gamma_1 + M_1) + \epsilon^2 - k^2\right) R_2\right] D_- f_1 \\
&- (\Gamma_2 + M_2 + \Gamma_1 + M_1)\,(\epsilon + k)\,R_2\,D_- f_3 \\
&+ \Big[-R_1\,R_2\ (\Gamma_1 + M_1) + \Big((\Gamma_1 + M_1)^2 - \epsilon^2 + k^2\Big)\,(\Gamma_2 + M_2)\Big]\,D_- g_1 \\
&- (\epsilon + k)\,\Big[R_2\,R_1 + (\Gamma_1 + M_1)^2 - \epsilon^2 + k^2\Big]\,D_- g_3\Big\}\ ;
\end{aligned}
$$

т. е.

$$
\begin{vmatrix} f_2 \\ f_4 \\ g_2 \\ g_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} & B_{14} \\ B_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} \\ A_{31} & B_{32} & B_{33} & B_{34} \\ B_{41} & B_{42} & B_{43} & B_{44} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} D_- f_1 \\ D_- f_3 \\ D_- g_1 \\ D_- g_3 \end{vmatrix} . \tag{10}
$$

Комбинируя полученные выражения, получим

$$
\begin{vmatrix} f_1 \\ f_3 \\ g_1 \\ g_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} & A_{44} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} & B_{14} \\ B_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} \\ A_{31} & B_{32} & B_{33} & B_{34} \\ B_{41} & B_{42} & B_{43} & B_{44} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} D_+ D_- f_1 \\ D_+ D_- f_3 \\ D_+ D_- g_1 \\ D_+ D_- g_3 \end{vmatrix} , \tag{11}
$$

$$
\begin{vmatrix} f_2 \\ f_4 \\ g_2 \\ g_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} & B_{14} \\ B_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} & B_{34} \\ B_{41} & B_{42} & B_{43} & B_{44} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} & A_{44} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} D_- D_+ f_2 \\ D_- D_+ f_4 \\ D_- D_+ g_2 \\ D_- D_+ g_4 \end{vmatrix} . \tag{12}
$$

Достаточно исследовать уравнения для f_1, f_3, g_1, g_3:

$$
\begin{vmatrix} f_1 \\ f_3 \\ g_1 \\ g_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} D_+ D_- f_1 \\ D_+ D_- f_3 \\ D_+ D_- g_1 \\ D_+ D_- g_3 \end{vmatrix} , \quad C = AB\ , \tag{13}
$$

в матричном виде имеем

$$
(D_+ D_-)\ F = \Lambda\ F\ , \quad \Lambda = C^{-1}. \tag{14}
$$

Для матрицы Λ находим следующее представление (пусть $\epsilon^2 - k^2 = E^2$, перечисляем элементы матрицы по столбцам)

$$\Lambda = C^{-1} = \left| \begin{array}{ll} {\Gamma_1}^2 - {M_1}^2 + R_2 R_1 + E^2 & 2(\epsilon + k)\Gamma_1 \\ -2(-\epsilon + k)\Gamma_1 & {\Gamma_1}^2 - {M_1}^2 + R_2 R_1 + E^2 \\ -R_2(\Gamma_1 + \Gamma_2 - M_1 + M_2) & -2R_2(\epsilon + k) \\ 2(-\epsilon + k) R_2 & -R_2(\Gamma_1 + \Gamma_2 - M_1 + M_2) \end{array} \right.$$

$$\left. \begin{array}{rr} -R_1(\Gamma_1 + \Gamma_2 + M_1 - M_2) & -2R_1(\epsilon + k) \\ 2R_1(-\epsilon + k) & -R_1(\Gamma_1 + \Gamma_2 + M_1 - M_2) \\ {\Gamma_2}^2 - {M_2}^2 + R_2 R_1 + E^2 & 2(\epsilon + k)\Gamma_2 \\ -2(-\epsilon + k)\Gamma_2 & {\Gamma_2}^2 - {M_2}^2 + R_2 R_1 + E^2 \end{array} \right| . \tag{15}$$

Опуская детали процедуры диагонализации матрицы Λ:

$$D_+ D_- F = \Lambda F, \quad F = T F', \quad T^{-1} D_+ D_- T F' = T^{-1} \Lambda T F',$$

$$D_+ D_- F' = (T^{-1} \Lambda T) F', \quad T^{-1} \Lambda T = \Lambda' = \left| \begin{array}{cccc} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4 \end{array} \right| ,$$

приведем только выражения для элементов λ_i:

$$\lambda_1 = \epsilon^2 - k^2 + R_1 R_2 - \frac{1}{2} ({M_1}^2 + {M_2}^2) + \frac{1}{2} ({\Gamma_1}^2 + {\Gamma_2}^2) - \sqrt{(\epsilon^2 - k^2)(\Gamma_1 + \Gamma_2)^2}$$
$$-\frac{1}{2} \Big[4 R_1 R_2 \Big((\Gamma_1 + \Gamma_2)^2 - (M_1 - M_2)^2 + 4 \left(\epsilon^2 - k^2\right) \Big)$$
$$+4 \left(\epsilon^2 - k^2\right) (\Gamma_1 - \Gamma_2)^2 + \left({\Gamma_1}^2 - {\Gamma_2}^2 - {M_1}^2 + {M_2}^2\right)^2$$
$$\left. -4 \frac{\Big(4 R_1 R_2 (\Gamma_1 + \Gamma_2)^2 + \left({\Gamma_1}^2 - {\Gamma_2}^2\right) \left({\Gamma_1}^2 - {\Gamma_2}^2 - {M_1}^2 + {M_2}^2\right) \Big) \left(\epsilon^2 - k^2\right)}{\sqrt{(\epsilon^2 - k^2)(\Gamma_1 + \Gamma_2)^2}} \right]^{\frac{1}{2}},$$

$$\lambda_2 = \epsilon^2 - k^2 + R_1 R_2 - \frac{1}{2} ({M_1}^2 + {M_2}^2) + \frac{1}{2} ({\Gamma_1}^2 + {\Gamma_2}^2) - \sqrt{(\epsilon^2 - k^2)(\Gamma_1 + \Gamma_2)^2}$$
$$+\frac{1}{2} \Big[4 R_1 R_2 \Big((\Gamma_1 + \Gamma_2)^2 - (M_1 - M_2)^2 + 4 (\epsilon^2 - k^2) \Big)$$
$$+4 \left(\epsilon^2 - k^2\right) (\Gamma_1 - \Gamma_2)^2 + \left({\Gamma_1}^2 - {\Gamma_2}^2 - {M_1}^2 + {M_2}^2\right)^2$$
$$\left. -4 \frac{\Big(4 R_1 R_2 (\Gamma_1 + \Gamma_2)^2 + \left({\Gamma_1}^2 - {\Gamma_2}^2\right) \left({\Gamma_1}^2 - {\Gamma_2}^2 - {M_1}^2 + {M_2}^2\right) \Big) \left(\epsilon^2 - k^2\right)}{\sqrt{(\epsilon^2 - k^2)(\Gamma_1 + \Gamma_2)^2}} \right]^{\frac{1}{2}},$$

$$\lambda_3 = \epsilon^2 - k^2 + R_1 R_2 - \frac{1}{2} ({M_1}^2 + {M_2}^2) + \frac{1}{2} ({\Gamma_1}^2 + {\Gamma_2}^2) + \sqrt{(\epsilon^2 - k^2)(\Gamma_1 + \Gamma_2)^2}$$
$$-\frac{1}{2} \Big[4 R_1 R_2 \Big((\Gamma_1 + \Gamma_2)^2 - (M_1 - M_2)^2 + 4 (\epsilon^2 - k^2) \Big)$$
$$+4 \left(\epsilon^2 - k^2\right) (\Gamma_1 - \Gamma_2)^2 + \left({\Gamma_1}^2 - {\Gamma_2}^2 - {M_1}^2 + {M_2}^2\right)^2$$

$$+4\,\frac{\Big(4\,R_1\,R_2\,\left(\Gamma_1+\Gamma_2\right)^2+\left({\Gamma_1}^2-{\Gamma_2}^2\right)\left({\Gamma_1}^2-{\Gamma_2}^2-{M_1}^2+{M_2}^2\right)\Big)\left(\epsilon^2-k^2\right)}{\sqrt{\left(\epsilon^2-k^2\right)\left(\Gamma_1+\Gamma_2\right)^2}}\Bigg]^{\frac{1}{2}},$$

$$\lambda_4=\epsilon^2-k^2+R_1\,R_2-\frac{1}{2}\,({M_1}^2+{M_2}^2)+\frac{1}{2}\,({\Gamma_1}^2+{\Gamma_2}^2)+\sqrt{\left(\epsilon^2-k^2\right)\left(\Gamma_1+\Gamma_2\right)^2}$$

$$+\frac{1}{2}\,\Big[4\,R_1\,R_2\,\Big(\left(\Gamma_1+\Gamma_2\right)^2-\left(M_1-M_2\right)^2+4\left(\epsilon^2-k^2\right)\Big)$$

$$+4\,\left(\epsilon^2-k^2\right)\left(\Gamma_1-\Gamma_2\right)^2+\left({\Gamma_1}^2-{\Gamma_2}^2-{M_1}^2+{M_2}^2\right)^2$$

$$+4\,\frac{\Big(4\,R_1\,R_2\,\left(\Gamma_1+\Gamma_2\right)^2+\left({\Gamma_1}^2-{\Gamma_2}^2\right)\left({\Gamma_1}^2-{\Gamma_2}^2-{M_1}^2+{M_2}^2\right)\Big)\left(\epsilon^2-k^2\right)}{\sqrt{\left(\epsilon^2-k^2\right)\left(\Gamma_1+\Gamma_2\right)^2}}\Bigg]^{\frac{1}{2}}.$$

Таким образом, имеем однотипные уравнения

$$D_+D_-F'_{(i)}=\lambda_{(i)}F'_{(i)}\,,\quad i=1,2,3,4\,;$$

для краткости вносим множитель $1/2$ в символ B, т.е. $eB/2\hbar c-->B$. В явном виде уравнения выглядят так:

$$[\;\frac{d^2}{dr^2}+\lambda_i+\frac{m}{r^2}+B-(\frac{m}{r}-Br)^2\;]\;\Phi_i(r)=0\;,\quad i=1,2,3,4\;. \tag{16}$$

Задача сводится к вырожденному гипергеометрическому уравнению. Имеем две формулы для спектров (из физических соображений предполагаем, что $\lambda>0$):

$$m=-\frac{1}{2},-\frac{3}{2},...\qquad \lambda=4B(n+\frac{1}{2}-m)\;,\quad n=1,2,...\,;$$

$$m=+\frac{1}{2},+\frac{3}{2},...\qquad \lambda=4B\;n,\quad n=0,1,2,...\;. \tag{17}$$

Эти две формулы можно объединить в одну:

$$\lambda=4b\;N,\qquad N\in\{0,1,2...\}\;. \tag{18}$$

Введем обозначения

$$\epsilon^2-k^2=E^2\;,\;M_1+M_2=\mu\;,\;M_1-M_2=\nu\;,$$

$$R_1R_2=R\;,\;\Gamma_1+\Gamma_2=x,\;\Gamma_1-\Gamma_2=y\;.$$

Тогда для корней λ_i имеем представления (они объединены в пары):

$$\pm\,2\sqrt{(16R+4y^2)\,E^2-4\,[4Rx+y(yx-\nu\mu)]E+4\,R(x^2-\nu^2)+(yx-\nu\mu)^2}=$$

$$=4E^2-4Ex+4R+x^2+y^2-\mu^2-\nu^2-4\lambda_{1,2}\,, \tag{19}$$

$$\pm\,2\sqrt{(16R+4y^2)E^2+4\,[4Rx+y(yx-\nu\mu)]E+4\,R(x^2-\nu^2)+(yx-\nu\mu)^2}=$$

$$=4E^2+4\,Ex+4R+x^2+y^2-\mu^2-\nu^2-4\lambda_{3,4}\,. \tag{20}$$

Фактически два последних уравнения отличаются от двух первых только знаком при E; следовательно, достаточно исследовать только одну пару (19); полагаем, что физическими являются положительные значения $E > 0$. Имеем следующие ограничения на параметр E (следим за парой λ_1 , λ_2):

$$4E^2 - 4Ex + 4R + x^2 + y^2 - \mu^2 - \nu^2 - 4\lambda_1 > 0\,,$$

$$4E^2 - 4Ex + 4R + x^2 + y^2 - \mu^2 - \nu^2 - 4\lambda_2 < 0\,,$$

откуда следует

$$(E - \frac{x}{2})^2 > \frac{4\lambda_1 + \mu^2 + \nu^2 - y^2}{4}\,, \qquad (E - \frac{x}{2})^2 < \frac{4\lambda_2 + \mu^2 + \nu^2 - y^2}{4}\,; \tag{21}$$

ниже мы убедимся, что $y = 0$. Из неравенств (21) заключаем, что спектр положительных и неограниченных справа значений E возможен только для варианта λ_1. При этом спектр отрицательных и неограниченных слева значений E также возможен, он может быть отнесен к варианту $\lambda_3 : E \to -E$.

3. Численный анализ спектров энергии

Чтобы исследовать возможные уровни энергии численно, найдем явный вид всех входящих в алгебраическое уравнение параметров. Учитывая все промежуточные обозначения, убеждаемся в справедливости равенств (пусть $M_0 = M/\rho$):

$$x = -\frac{4}{3}\,\frac{B\sin^2\gamma}{M_0\,\cos\gamma}\,, \qquad y = 0\,, \qquad R = \frac{1}{9}\,\frac{B^2\sin^4\gamma}{{M_0}^2\cos^2\gamma}\,.$$

$$\mu = M_1 + M_2 = \frac{4M_0}{\sin^2\gamma}\,, \quad \nu = M_1 - M_2 = -\frac{4M_0\cos\gamma}{\sin^2\gamma}\,. \tag{22}$$

Перейдем к безразмерным величинам:

$$\frac{E}{M_0} \Rightarrow E,\ \frac{x}{M_0} \Rightarrow x,\ \frac{y}{M_0} \Rightarrow y,\ \frac{\mu}{M_0} \Rightarrow \mu,\ \frac{\nu}{M_0} \Rightarrow \nu\,,\ \frac{B}{M_0^2} \Rightarrow B,\ \frac{R}{M_0^2} \Rightarrow R\,.$$

Для E имеем алгебраическое уравнение 4-й степени (напоминаем, что $\lambda = 4BN$)

$$E^4 + \frac{8}{3}\,\frac{B\sin^2\gamma E^3}{\cos\gamma} + (\frac{22}{9}\,\frac{B^2\sin^4\gamma}{\cos^2\gamma} - \frac{8\,(1+\cos^2\gamma)}{\sin^4\gamma} - 8\,BN)E^2 +$$

$$+(\frac{8}{9}\,\frac{B^3\sin^6\gamma}{\cos^3\gamma} - \frac{32}{3}\,\frac{B(1+\cos^2\gamma)}{\sin^2\gamma\cos\gamma} - \frac{32}{3}\,\frac{B^2\sin^2\gamma N}{\cos\gamma})E +$$

$$+\frac{16}{\sin^4\gamma} - \frac{8}{3}B^2 - \frac{40}{9}\,\frac{B^2}{\cos^2\gamma} + \frac{1}{9}\,\frac{B^4\sin^8\gamma}{\cos^4\gamma} - \frac{40}{9}\,\frac{B^3\sin^4\gamma N}{\cos^2\gamma} +$$

$$+\frac{32\,BN(1+\cos^2\gamma)}{\sin^4\gamma} + 16\,B^2N^2 = 0\,. \tag{23}$$

Приведем несколько результатов численного решения уравнения:

$$B = 1\,, \quad \sin\gamma = \frac{1}{10}\,,$$

$$N = 1\,, \quad E_1 = 2.23\,, \quad E_2 = 399.00\,, \quad E_3 = 2.24\,, \quad E_4 = 399.01\,;$$

$$N = 5\,, \quad E_1 = 4.58\,, \quad E_2 = 399.02\,, \quad E_3 = 4.59\,, \quad E_4 = 399.03\,;$$

$$N = 10\,, \quad E_1 = 6.40\,, \quad E_2 = 399.04\,, \quad E_3 = 6.41\,, \quad E_4 = 399.05\,.$$

$$B = 1\,, \quad \sin\gamma = \frac{1}{2}\,,$$

$$N = 1\,, \quad E_1 = 2.08\,, \quad E_2 = 14.87\,, \quad E_3 = 2.46\,, \quad E_4 = 15.25\,;$$

$$N = 5\,, \quad E_1 = 4.41\,, \quad E_2 = 15.39\,, \quad E_3 = 4.79\,, \quad E_4 = 15.78\,;$$

$$N = 10\,, \quad E_1 = 6.22\,, \quad E_2 = 16.02,, \quad E_3 = 6.61\,, \quad E_4 = 16.41\,.$$

$$B = 1\,, \quad \sin\gamma = \frac{9}{10}\,,$$

$$N = 1\,, \quad E_1 = 1.00\,, \quad E_2 = 3.03\,, \quad E_3 = 3.48\,, \quad E_4 = 5.51\,;$$

$$N = 5\,, \quad E_1 = 3.16\,, \quad E_2 = 4.75\,, \quad E_3 = 5.64\,, \quad E_4 = 7.23\,;$$

$$N = 10\,, \quad E_1 = 4.90\,, \quad E_2 = 6.35\,, \quad E_3 = 7.38\,, \quad E_4 = 8.83\,.$$

Уровни энергии распределены по четырем сериям. Аналитические формулы могут быть найдены также, но эти выражения оказываются сложными и практически бесполезными.

В заключение, воспользовавшись установленными равенствами $y = 0$ и $\Gamma_1 = \Gamma_2 = \Gamma$, упростим представление обобщенного уравнения для фермиона в магнитном поле:

$$(i\hat{D} - M_1 + \Gamma\Sigma_3)\psi_1 - R_1\Sigma_3\,\psi_2 = 0\,, \quad (i\hat{D} - M_2 + \Gamma\Sigma_3)\psi_2 - R_2\Sigma_3\,\psi_1 = 0\,. \tag{24}$$

В этой системе две дираковские волновые функции для частиц с разными массами (M_1 и M_2), с одинаковыми аномальными магнитными моментами Γ связываются друг с другом через члены $R_1\Sigma_3$ и $R_2\Sigma_3$. С помощью элементарного преобразования

$$\sqrt{R_1}\,\psi_1 \Rightarrow \Psi_1\,, \quad \sqrt{R_2}\,\psi_2 = \Psi_2\,, \quad \Gamma = -\frac{2}{3}\,\frac{B\sin^2\gamma}{M_0\,\cos\gamma}\,, \quad \sqrt{R} = \sqrt{R_1 R_2} = \frac{B}{3}\,\frac{\sin^2\gamma}{\cos\gamma},$$

эта система уравнений может быть представлена в более симметричной форме:

$$(i\hat{D} - M_1 + \Gamma\Sigma_3)\Psi_1 - \sqrt{R}\,\Sigma_3\,\Psi_2 = 0\,, \quad (i\hat{D} - M_2 + \Gamma\Sigma_3)\Psi_2 - \sqrt{R}\,\Sigma_3\,\Psi_1 = 0\,. \tag{25}$$

Литература

1. Fedorov F.I. The Lorentz group. *Moscow*, 1979. 384 p.
2. Gel'fand I.M., Minlos R.A., Shapiro Z.Ya. Representations of the rotation group and of the Lorentz group. *Moscow: Nauka*, 1958. 368 p.
3. Pletjukhov V.A., Red'kov V.M., Strazhev V.I. Relativistic wave equations and intrinsic degrees of freedom. *Minsk: Belaruskaya nauka*, 2015. 328 p.
4. Spin 1/2 particle with two mass states: general theory, interaction with electromagnetic and gravitational fields / V.V. Kisel, V.A. Pletjukhov, V.V. Gilewsky, E.V. Ovsiyuk, V.M. Red'kov // *24 International seminar: Nonlinear Phenomena in Complex System. Minsk*, 2017. Submitted to: Nonlinear Dynamics and Applications. 2017.
5. Red'kov V.M. Fields in Riemannian space and the Lorentz group. *Minsk: Publishing House: Belarusian Science*, 2009. 496 p.