

# Формула ветвей петли гистерезиса

Пригара В.Н.

Кафедра теоретических основ электротехники  
Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники  
Минск, Республика Беларусь  
e-mail: prigara@bsuir.by

**Аннотация**— Получена формула петли гистерезиса, основанная на использовании нетрадиционного решения квадратных уравнений с вещественными коэффициентами [1]. Это позволяет по-новому описать ординаты неоднозначных характеристик, упростить и повысить точность учета гистерезиса.

**Ключевые слова:** петли гистерезиса; синусные и косинусные их составляющие.

## I. ВВЕДЕНИЕ

Для получения формулы применены понятия: 1) особые значения аргумента  $h$ ; 2) части петли гистерезиса I-IV; 3) участки ветвей петли. Особые значения аргумента  $h$  — это  $0, \pm h_c, \pm 1$ . Им соответствуют ординаты ветвей, обычно применяющиеся при описании ферромагнетиков. Четыре части петли выделены между вертикалями, проходящими через особые значения  $h$  и охватывают всю площадь петли с учетом ее симметрии. Участки ветвей, их восемь, ограничиваются теми же вертикалями, что и разделяет ветви на закономерные составные части.

## II. ДИАГРАММА РАСЧЕТНЫХ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Ранее [1] показана прямая связь между ординатами петли гистерезиса и соответствующими им корнями частных уравнений (2) – (6). В дополнение к этой статье [2] дано решение этих уравнений нетрадиционным методом. Для особых значений  $h$  общее решение порождает соотношения (Рис. 3):

$$h = 1, \quad Y_1 = Y_2 = 1, \quad A = \sqrt{2}, \quad \cos a = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \sin a = \frac{1}{\sqrt{2}}; \quad (1)$$

$$h = h_c, \quad Y_1 = Y_c, \quad Y_2 = 0, \quad A = Y_c, \quad \cos a = 1, \quad \sin a = 0;$$

$$h = 0, \quad Y_1 = b_r, \quad Y_2 = -b_r, \quad A = \sqrt{2}b_r, \quad \cos a = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \sin a = -\frac{1}{\sqrt{2}};$$

$$h = -h_c, \quad Y_1 = 0, \quad Y_2 = Y_{2c}, \quad A = |Y_{2c}|, \quad \cos a = 0, \quad \sin a = -1;$$

$$h = -1, \quad Y_1 = Y_2 = -1, \quad A = \sqrt{2}, \quad \cos a = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \sin a = -\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Эти соотношения дают основание сформулировать *теорему*:

Все участки ветвей нормированных петель гистерезиса имеют одинаковые интервалы значений расчетных тригонометрических функций, несмотря на различные интервалы аргумента  $h$ .

Для доказательства теоремы установим связь особых значений  $h$  с величинами косинусов и синусов обобщенных углов  $\alpha_0$ , включающих постоянные начальные фазы и текущие величины:

$$\begin{aligned} h = 1, \quad \cos \alpha_0 &= \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \sin \alpha_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \alpha_0 = 45^\circ; \\ h = h_c, \quad \cos \alpha_0 &= 1, \quad \sin \alpha_0 = 0, \quad \alpha_0 = 0^\circ; \\ h = 0, \quad \cos \alpha_0 &= \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \sin \alpha_0 = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \alpha_0 = -45^\circ; \\ h = -h_c, \quad \cos \alpha_0 &= 0, \quad \sin \alpha_0 = -1, \quad \alpha_0 = -90^\circ; \\ h = -1, \quad \cos \alpha_0 &= -\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \sin \alpha_0 = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \alpha_0 = -135^\circ. \end{aligned} \quad (2)$$

В свернутом виде эту связь можно записать для верхней и нижней ветвей петли гистерезиса как:

$$\begin{aligned} \cos(-45^\circ \pm a), \\ \sin(-45^\circ \pm a), \end{aligned} \quad (3)$$

где  $a$  отсчитывается от центра петли гистерезиса вправо, принимая значения  $0, +45^\circ, +90^\circ$ , и влево, принимая значения  $-45^\circ, -90^\circ$ .

Это дает для верхней (косинусной) ветви петли при:

$$\begin{aligned} h = 0, \quad a = 0^\circ, \quad \cos(-45^\circ) &= \frac{1}{\sqrt{2}}; \\ h = h_c, \quad a = 45^\circ, \quad \cos 0^\circ &= 1; \\ h = 1, \quad a = 90^\circ, \quad \cos 45^\circ &= \frac{1}{\sqrt{2}}; \\ h = -h_c, \quad a = -45^\circ, \quad \cos(-90^\circ) &= 0; \\ h = -1, \quad a = -90^\circ, \quad \cos(-135^\circ) &= -\frac{1}{\sqrt{2}}; \end{aligned} \quad (4)$$

Для нижней (синусной) ветви петли при:

$$\begin{aligned} h = 0, \quad a = 0^\circ, \quad \sin(-45^\circ) &= -\frac{1}{\sqrt{2}}; \\ h = h_c, \quad a = 45^\circ, \quad \sin 0^\circ &= 0; \\ h = 1, \quad a = 90^\circ, \quad \sin 45^\circ &= \frac{1}{\sqrt{2}}; \\ h = -h_c, \quad a = -45^\circ, \quad \sin(-90^\circ) &= -1; \\ h = -1, \quad a = -90^\circ, \quad \sin(-135^\circ) &= -\frac{1}{\sqrt{2}}; \end{aligned} \quad (5)$$

Из (4) и (5) следует, что разность углов концов участков и первой, и второй ветвей одна и та же для тригонометрических функций всех петель гистерезиса:

$$\begin{aligned}
 45^\circ - 0^\circ &= 45^\circ, \\
 0 - (-45^\circ) &= 45^\circ, \\
 -45^\circ - (-90^\circ) &= 45^\circ, \\
 -90^\circ - (-135^\circ) &= 45^\circ.
 \end{aligned}
 \tag{6}$$

Такая разность углов тригонометрических функций порождает отличие начала и конца участков косинуса и синуса на  $\frac{1}{\sqrt{2}} = const.$

Вместе с (6) это является доказательством теоремы. Из рассмотренных соотношений можно сделать также следующие выводы:

- 1) Диаграмма тригонометрических функций, как и петля гистерезиса, является замкнутой кривой (Рис. 3).
- 2) Она полностью описывается аналитически.
- 3) При любом значении  $h$  имеет место соотношение  $\cos^2 a + \sin^2 a = 1$ .
- 4) Проекция интервалов  $\cos a$  и  $\sin a$  на ось аргумента  $h$  совпадают с его интервалами.
- 5) Диаграмма имеет симметрию относительно центра петли гистерезиса.

### III. ФОРМУЛА ВЕТВЕЙ ПЕТЛИ ГИСТЕРЕЗИСА

На рис. 1 выделены участки петли гистерезиса, их шесть, которые отображают процесс размагничивания ферромагнетика после достижения им максимальной индукции в положительном ( $b = +1$ ) или отрицательном ( $b = -1$ ) направлении. При этом в обоих случаях индукция спадает от максимальной величины ( $\pm 1$ ) до 0, сохраняя направление предшествующего максимума.

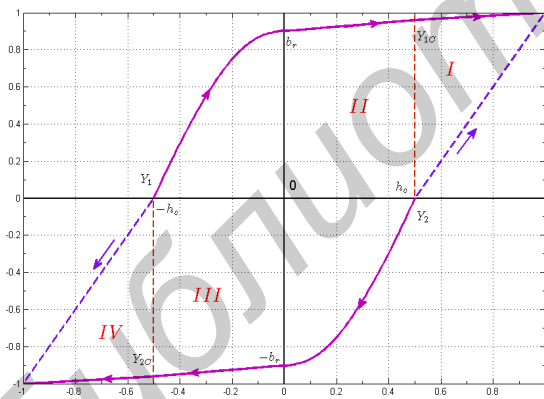


Рис. 1. Диаграмма шести участков размагничивания с хордами (штрихи) двух участков намагничивания ферромагнетика.

В этом процессе, однако, есть принципиально отличающиеся этапы: на участках I и II, а также IV и III спад индукции происходит в условиях спада магнитодвижущей силы  $h$  от  $\pm 1$  до 0, что не ускоряет размагничивание ферромагнетика. Вместе с инерционностью его доменов это приводит, как видно

из рис. 1, к почти линейному снижению индукции от  $\pm 1$  до  $\pm b_r$ . Потом наступает принципиально новый, второй этап размагничивания. В особой точке 0 меняется направление магнитодвижущей силы  $h$ , которая, возрастая до  $\mp h_c$ , интенсивно воздействует на трудно ориентируемые домены, возвращая их в нейтральное положение. Индукция при этом на участке III или II круто снижается от  $\pm b_r$  до 0 нелинейно.

Ферромагнетик интенсивно размагничивается. При дальнейшем росте  $h$  до  $\mp 1$  индукция нелинейно возрастает от 0 до -1 (косинусный участок) или от 0 до 1 (нелинейный синусный участок) (см. выше).

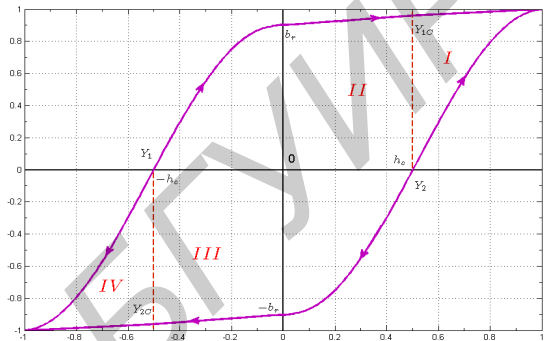


Рис. 2. Части петли гистерезиса I-IV с участками ее ветвей, задаваемых особыми симметричными значениями аргумента  $h$ : 0,  $\pm h_c, \pm 1$ .

Предполагаемый метод моделирования петли гистерезиса основан на разделении ее на восемь участков (Рис. 2), описание которых возможно с помощью простых формул. Заметим также, что оба близких к линейным промежутка размагничивания  $1 \div b_r$  и  $-1 \div -b_r$  «обратимого вращения намагниченности» [2] разделяются ординатами  $Y_{1c}$  и  $Y_{2c}$  на два участка, еще более близких к линейным (Рис. 1). Для петли с коэффициентом прямоугольности равным 1 они строго линейны. Таким образом, петля гистерезиса содержит два близких к линейным косинусных и два таких же синусных участка, которым соответствуют по два нелинейных синусных и по два нелинейных косинусных участка (Рис. 1 и 2).

### IV. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

По-новому определены ординаты петли гистерезиса. Основа метода – нетрадиционное решение квадратных уравнений, описывающих ординаты. Введены понятия: особые значения аргумента  $h$ ; части петли гистерезиса I-IV; её участки.

- [1] Жевняк Р., Карпук А. Высшая математика, учебник, Минск, 1992.
- [2] Ильин В. Доклады БГУИР. 2009. №3, с. 41-45.