УДК 511.42

Оценки сверху для количества многочленов с заданными дискриминантами и близкими корнями

М. А. Калугина (Беларусь, г. Минск)
Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники
e-mail: m.kalugina@bsuir.by
М. В. Ламчановская (Беларусь, г. Минск)
Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники
e-mail: lammv@mail.ru

Estimates from above for the number of polynomials with given discriminants and close roots

M. A. Kaluguina (Belarus, Minsk)
Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics
e-mail: m.kalugina@bsuir.by
M. V. Lamchanovckaya (Belarus, Minsk)
Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics
e-mail: lammv@mail.ru

Пусть $Q > 1$ - натуральное число, а

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0,\ a_j \in \mathbb{Z},\ 0 \leqslant j \leqslant n, - \tag{1}$$

целочисленный полином степени n и высоты $H = H(P) = \max_{0 \leqslant j \leqslant n} |a_j| \leqslant Q$.

Дискриминантом многочлена (1) с корнями α_1, α_2,…,α_n называется число

$$D(P) = a_n^{2n-2} \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (\alpha_i - \alpha_j)^2. \tag{2}$$

Если $\alpha_j \in \mathbb{Z}$, то и дискриминант $D(P) \in \mathbb{Z}$.

Введем для $Q \in \mathbb{N}$ и $v \geq 0$ класс полиномов $\mathcal{P}_n(Q, v)$ следующим образом:

$$\mathcal{P}_n(Q, v) = \{P(x) \mid \deg P \leqslant n,\ 1 \leqslant D(P) < Q^{2n-2-2v}\}. \tag{3}$$

В приложениях оценок дискриминантов [1] к метрической теории диофантовых приближений важны оценки для количества $\#\mathcal{P}_n(Q, v)$. В [2] доказано, что

$$\#\mathcal{P}_n(Q, v) > c_1(n) Q^{n+1-\frac{n+2}{n}v}. \tag{4}$$

Неравенство (4) справедливо и для подкласса $\mathcal{P}_n(Q, v)$ многочленов с близкими корнями.

Оценки сверху получить сложнее, они пока получены только в частных случаях [3].

В данной работе предполагается, что корни α_1, α_2,…,α_n образуют один кластер, т. е. для них выполняются следующие условия:

$$\begin{cases} |\alpha_1 - \alpha_j| = Q^{-\rho_j},\ 1 \leqslant j \leqslant n, \\ |\alpha_i - \alpha_j| \asymp |\alpha_1 - \alpha_j|,\ 1 \leqslant i < j \leqslant n. \end{cases} \tag{5}$$

При соблюдении указанных выше ограничений (3) на дискриминанты и условий (5) на корни получена оценка сверху для $\mathcal{P}_n(Q, v)$, совпадающая с оценкой снизу в неравенстве (4) с точностью до константы, зависящей от n.

При доказательстве используется обобщение леммы Гельфонда из теории трансцендентных чисел, в которой величины полиномов связываются с мерой интервалов малости.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Спринджук В. Г. Проблема Малера в метрической теории чисел. – Минск: Наука и техника, 1967.

2. Beresnevich V., Bernik V., Götze F. The distribution of close conjugate algebraicnumbers // Compos. Math., 146, № 5, 2010, P. 1165-1179.

3. Коледа Д. В. О частоте целочисленных многочленов с заданным числом близких корней // Труды Института Математики. Т. 20. №2. 2012. С. 51-63.