УСЛОВИЯ ОПТИМАЛЬНОСТИ ДЛЯ ВЫПУКЛЫХ ЗАДАЧ ПОЛУБЕСКОНЕЧНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ С НЕКОМПАКТНЫМ МНОЖЕСТВОМ ИНДЕКСОВ

О.И. Костюкова[1], Т.В. Чемисова[2], М.А. Курдина[1]

[1] Институт математики НАН Беларуси
Сурганова 11, 220072 Минск, Беларусь
{kostyukova, kurdina}@im.bas-net.by

[2] Department of Mathematics, University of Aveiro
University Campus Santiago, 3810-193, Aveiro, Portugal
tatiana@ua.pt

Пусть заданы конечные множества индексов $J \subset \mathbb{N}$, $S_* \subset \mathbb{N}$, $S \subset \mathbb{N}$, $S_* \cap S = \emptyset$, матрицы, вектора и числа:

$$\bar{W}_j \in \mathbb{R}^{n\times n},\ \bar{d}_j \in \mathbb{R}^n,\ \bar{r}_j \in \mathbb{R},\ g_j \in \mathbb{R}^n,\ \ j \in J,\ \ c \in \mathbb{R}^n,$$

$$W_0 \in \mathbb{R}^{n\times n},\ d_0 \in \mathbb{R}^n,\ r_0 \in \mathbb{R};\quad q_j \in \mathbb{R}^n,\ \omega_j \in \mathbb{R},\ j \in S_* \cup S,$$

$$D_j \in \mathbb{R}^{p\times p},\ A_j \in \mathbb{R}^{n\times p},\ B_j \in \mathbb{R}^{m_j\times p},\ c_j \in \mathbb{R}^p,\ j \in J.$$

Определим следующие множества:

$$Y = \{y = (y_j, j \in J) : \sum_{j\in J} g_j y_j = c, y_j \geq 0, j \in J\},$$

$$\mathrm{X} = \{x \in \mathrm{R}^n : q_j^T x + \omega_j = 0, j \in S_*, \quad q_j^T x + \omega_j \le 0, j \in S\},$$

$$K(j) = \{t \in \mathrm{R}^p : B_j t \le 0\}, \ j \in J,$$

и будем считать, что

1) множество Y непусто и ограничено;
2) множество X непусто;
3) выполняются следующие условия:

$$x^T W_0 x \ge 0, \ x^T \bar{W}_j x \ge 0, \ j \in J, \ \forall x \in \mathrm{R}^n; \quad t^T D_j t \ge 0 \ \forall t \in K(j), \ j \in J.$$

Рассмотрим оптимизационную задачу:

$$\min_{x \in \mathrm{X}} \left(\Omega_0(x) + \max_{y \in Y} \sum_{j \in J} y_j \left(\Omega_j(x) - \min_{t \in K(j)} \Psi_j(x, t) \right) \right), \qquad (1)$$

где $\Omega_0(x) := \frac{1}{2} x^T W_0 x + d_0^T x + r_0$, $\Omega_j(x) := \frac{1}{2} x^T \bar{W}_j x + \bar{d}_j^T x + \bar{r}_j$, $j \in J$;

$$\Psi_j(x, t) := \frac{1}{2} t^T D_j t + (c_j^T - x^T A_j) t, \ j \in J.$$

Здесь функции $\Omega_j(x)$, $j \in J \cup \{0\}$, выпуклы по $x \in \mathrm{R}^n$, и функции $\Psi_j(x, t)$ $j \in J$, линейны по $x \in \mathrm{R}^n$ и, в общем случае, невыпуклы по $t \in K(j)$, $j \in J$.

Задачи вида (1) представляют интерес, поскольку возникают при изучении дифференциальных свойств решений нелинейных параметрических задач полубесконечного программирования [1–3].

Цель доклада:

• показать, что оптимизационная задача (1) эквивалентна задаче полубесконечного программирования с некомпактными множествами индексов

$$\min_{x, \ \rho_j, j \in J, \ \beta} \ \frac{1}{2} x^T W_0 x + d_0^T x + \beta,$$

$$\frac{1}{2} x^T W_i x + d_i^T x + r_i - \sum_{j \in J} y_j^{(i)} \rho_j \le \beta, \ i \in I; \ \ x \in \mathrm{X}, \qquad (2)$$

$$\rho_j \le \frac{1}{2} t_j^T D_j t_j + (c_j^T - x^T A_j) t_j, \ \ \forall \ t_j \in K(j), \ \ j \in J,$$

где $y^{(i)} = (y_j^{(i)}, j \in J)$, $i \in I$, вершины многогранника Y, $W_i := \sum_{j \in J} y_j^{(i)} \bar{W}_j$, $d_i := \sum_{j \in J} y_j^{(i)} \bar{d}_j$, $r_i := \sum_{j \in J} y_j^{(i)} \bar{r}_j$, $i \in I$;

• получить условия, гарантирующие существование оптимальных решений задачи (2);

• сформулировать условия оптимальности для задачи (2).

Некомпактность множества индексов является существенным фактором, который не позволяет применить имеющиеся в литературе результаты [1, 2]. В связи с этим тема исследования является актуальной, а полученные результаты – новыми, они могут быть использованы в дальнейших исследованиях параметрических задач полубесконечного программирования.

Библиографические ссылки

1. *Bonnans J.F., Shapiro A.* Perturbation analysis of optimization problems. Springer-Verlag: New-York, 2000.
2. *Goberna M.A., Lopez M. A.* Linear Semi-Infinite Optimization. Wiley: Chichester, 1998.
3. *Kostyukova O.I., Tchemisova T.V., Kurdina M.A.* A study of one class of NLP problems arising in parametric Semi-Infinite Programming // Optimization Methods and Software. 2017. Vol. 32. Iss. 6. P. 1218–1243.