ПОСТРОЕНИЕ СКОРРЕЛИРОВАННЫХ ВИНЕРОВСКИХ ПРОЦЕССОВ

Фролов И. И.
Кафедра электронных вычислительных машин, Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектороники
220013, П. Бровки, 6, Минск, Республика Беларусь
E-mail: frolov@bsuir.by

В работе рассматриваются особенности моделирования процессов рынка финансовых деривативов. Описаны вопросы построения скорелированных винеровских процессов, используемых для моделирования цен финансовых инструментов. Приводится порядок использования алгоритма EWMA для расчета волатильности и последующего расчета коэффициентов корреляции, используемых при построении стохастических процессов.

Введение

Винеровские процессы являются важной составляющей стохастических моделей в финансовой математике. Зачастую характер движения цен нескольких интересуемых финансовых инструментов демонстрирует определенную связанность между ними, обусловленную взаимным влиянием, настроением инвесторов, геополитическими факторами, оказывающими определенное влияние на цены. С математической точки зрения такую связанность принято выражать в виде коэффициентов корреляции, играющих весьма значимую роль при описании поведения финансовых инструментов.

I. Скоррелированные винеровские процессы

В практике используется, как правило, стандартный подход построения скоррелированных Винеровских процессов $W1$ и $W2$ [1]. Пусть процессы $Z1$ и $Z2$ являются независимыми Винеровскими процессами. Тогда

$$dW_1(t) = dZ_1(t)$$

$$dW_2(t) = \rho dZ_1(t) + \sqrt{1-\rho^2}dZ_2(t)$$

Нетрудно убедиться, что корреляция между dW_1 и dW_2 имеют дисперсию dt и коэффициент корреляции ρ:

$$D[dW_1(t)] = D[dZ_1(t)] = dt$$

$$D[dW_2(t)] = D[dZ_1(t)] + D[dZ_2(t)] =$$

$$= \rho^2 dt + (1-\rho^2)dt = dt$$

$$Cov[dW_1(t)dW_2(t)] =$$

$$= \rho dZ_1 dZ_2 + \sqrt{1-\rho^2}dZ_1 dZ_2 = \rho dt$$

Учитывая, что процессы Z_1 и Z_2 являются независимыми, то справедливо выражение $dZ_1 dZ_2 = 0$. Тогда коэффициент корреляции между dW_1 и dW_2 равен:

$$\rho = \frac{Cov[dZ_1, dZ_2]}{\sqrt{D[dZ_1]D[dZ_2]}} = \frac{\rho dt}{\sqrt{dt}\sqrt{dt}} = \rho$$

Аналогичным образом выводятся выражения и для многомерных случайных скоррелированных процессов [2]. Однако и в данном случаем одним из значимых факторов является коэффициент корреляции ρ.

II. Оценка волатильности с использованием EWMA

Мерой отклонения, или колебания, цены актива на финансовом рынке выступает фактор волатильности, таким образом являющий одновременно и общепринятым фактором меры риска. Для определения волатильности, как правило, используются разные источники входных данных, в зависимости о ее вида. Выделяют основные три вида волатильности [3]: историческая волатильность – рассчитывается на основании именно реальных исторических данных; ожидаемая, или подразумеваемая, волатильность – оценка выполняется на основании текущей стоимости торгуемых рыночных инструментов в предположении, что возможные риски учитываются в данном случае; историческая ожидаемая волатильность – является, по сути, зафиксированным списком исторических «расчитанных» значений ожидаемой волатильности.

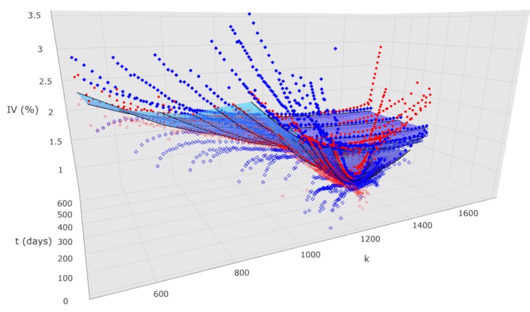

Рис. 1 – Пример поверхности ожидаемой волатильности для акций компании GOOGLE

При построении и последующей оценке стохастического процесса в симуляции более важным и представляющим интерес являются именно изменения характеристик финансового актива, нежели фиксированные состояния в определенный момент времени.

Расчет волатильности заключается в пошаговой оценке последовательных изменений цены исследуемого актива за выбранный период, и может быть представлен следующей последовательностью действий:

Шаг 1. Изначально нужно выбрать исследуемый период для выполнения расчетов, например, 1 год. На данном периоде необходимо выполнить «сбор данных»: изменения цены исследуемого актива на ежедневных интервалах. Для, например, акций или курса валют, такие ежедневные изменения (daily returns) выражаются, как правило, в логарифмической форме:

$$dailyLnRet = \ln\left(\frac{Price_i}{Price_{i-1}}\right)$$

где $Price_i$ представляет собой ежедневную цену закрытия для актива.

Шаг 2. Следующее действие – вычислить квадрат суммы ежедневных изменений за исследуемый интервал. На самом деле расчет сводится к вычислению простой дисперсии или волатильности, представленной следующей формулой:

$$\sigma_n^2 = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} u_{n-i}^2$$

где u представляет собой ежедневные изменения, и m обозначает число дней в исследуемом периоде.

Шаг 3. На данном этапе необходимо назначить веса таким образом, чтобы более свежие данные имели бо́льший вес, чем более старые данные. Для этого вводится постоянный, сглаживающий, параметр λ. Веса назначаются как $(1-\lambda)\lambda^0$. Т.е. параметр λ всегда должен быть меньше единицы. Как правило, общепринятой практикой является использование параметра $\lambda = 94\%$. Таким образом, первый вес будет равным $(1-0.94) = 6\%$, второй вес $6\% \times 0.94 = 5.64\%$ и т.д.

Шаг 4. Сумма перемноженных возведенных в квадрат ежедневных изменений цены $dailyLnRet's$ на соответствующие им веса w_i

$$sum = \sum_{i=1}^{m} dailyLnRet_i^2 \times w_i$$

Данное значение предствляет собой конечную дисперсию σ^2, тогда как волатильность σ будет равна $\sqrt{\sigma^2}$.

Обобщенная форма EWMA для вычисления волатильности может быть представлена в виде следующей рекурсивной формулы:

$$\sigma_n^2(EWMA) = \lambda\sigma_n^2 + (1-\lambda)u_{n-1}^2$$

III. Расчет ковариации

Согласно [2] коэффициент корреляции ρ может быть вычислен как

$$\rho = \frac{Cov_{1,2}}{\sigma_1\sigma_2} \qquad (1)$$

где $Cov_{1,2}$ – ковариация между рядами изменений тех же активов, для которых расчитываются и значения волатильности, вычисляемая по формуле

$$Cov_{1,2} = \sum_{i=1}^{m} dailyLnRet_{1,i} \times dailyLnRet_{2,i} \times w_i$$

Вычислив значения ковариации и волатильностей для исследуемых активов можно расчитать искомое значение корреляции по формуле (1), и после – приступать к моделированию исходных скоррелированных стохастических процессов.

Заключение

Использование EWMA-подхода при вычислении исторической волатильности и последующего расчета коэффициентов корреляции позволяет оценить финансовые активы с точки зрения реальной меры риска, т.к. исторические данные уже фактически зафиксировали произошедшие события и цены. Такое сопоставление исторических оценок с прогнозированием позволяет получить более реалистичные оценки.

Список литературы

1. Tavella, D. Quantitative Methods in derivatives pricing. An Introduction to Computational Finance. / D. Tavella // New Jersey: John Wiley & Sons, Inc. – 2002. – 304 p.
2. Ширяев, А. Н. Основы стохастической финансовой математики: В 2 томах. Т. 1: Факты, модели // Москва: МЦНМО. – 2016. – 440 с.
3. Exploring the Exponentially Weighted Moving Average [Electronic resource] / Ed. M. Grant, D. R. Harper. – 2019. – Mode of access: https://www.investopedia.com/articles/07/ewma.asp. – Date of access: 07.10.2019.