

СУЩЕСТВОВАНИЕ И ЕДИНСТВЕННОСТЬ КЛАССИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ СТЕРЖНЕВОГО ТЕЧЕНИЯ

С.С. Каянович

Для описания движения вязкой несжимаемой жидкости в канале при больших числах Рейнольдса предлагается модель стержневого течения (плотность $\rho = 1$)

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} = \nu \sum_{k=1}^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_k^2} - \sum_{k=1}^2 u_k \frac{\partial u_1}{\partial x_k} - \frac{\partial p}{\partial x_1}, \quad (x, t) \in \tilde{\Omega}_T, \quad (1)$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} = 0, \quad (x, t) \in \Omega_{i\Gamma}, \quad i = 1, 2, \quad \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial x_2} = 0, \quad (x, t) \in \Omega'_T, \quad (2)$$

$$\sum_{k=1}^2 \frac{\partial^2 p}{\partial x_k^2} + \sum_{k=1}^2 \sum_{j=1}^2 \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} = 0, \quad (x, t) \in \tilde{\Omega}_T, \quad (3)$$

$$u_1|_{t=0} = \bar{b}(x), \quad x \in \tilde{\Omega}, \quad u_1|_{\tilde{S}_T} = \tilde{\psi}_1(s, t), \quad (s, t) \in \tilde{S}_T, \quad u_2|_{S_{i\Gamma}} = 0, \quad (4)$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial x_2}|_{S'_{1\Gamma}} = -\frac{\partial u_1}{\partial x_1}|_{S'_{1\Gamma}}, \quad u_2|_{S'_{2\Gamma}} = -\int_H^{H-\epsilon} \frac{\partial u_1(x_1, z, t)}{\partial x_1} dz. \quad (5)$$

$$\frac{\partial p}{\partial \bar{m}}|_{\tilde{S}_T} = \zeta(s) \sum_{j=1}^2 \omega_j(s, t) \cos \alpha_j, \quad \omega_i = \nu \sum_{k=1}^2 \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k^2} - \sum_{k=1}^2 u_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} - \frac{\partial u_i}{\partial t}, \quad (6)$$

где $\zeta(x)$ – срезающая функция, где $\partial p / \partial \bar{n}|_{\tilde{S}_T}$ – производная по направлению вектора \bar{n} внутренней нормали к \tilde{S}_T , α_i – угол между вектором \bar{n} и осью Ox_i , $\tilde{\Omega}$ – область, ограниченная кривой \tilde{S} , $\tilde{\Omega} = \tilde{\Omega} \cup \tilde{S}$, $\tilde{S} = \tilde{S}_1 \cup \tilde{S}_2 \cup \tilde{S}_3 \cup \tilde{S}_4$, где

$$\tilde{S}_1 = [0 \leq x_1 \leq \frac{\delta}{2}, x_2 = \theta_1(x_1)] \cup [\frac{\delta}{2} \leq x_1 \leq L - \frac{\delta}{2}, x_2 = 0] \cup [L - \frac{\delta}{2} \leq x_1 \leq L, x_2 = \phi_1(x_1)],$$

$$\tilde{S}_2 = [0 \leq x_1 \leq \frac{\delta}{2}, x_2 = \theta_2(x_1)] \cup [\frac{\delta}{2} \leq x_1 \leq L - \frac{\delta}{2}, x_2 = H] \cup [L - \frac{\delta}{2} \leq x_1 \leq L, x_2 = \phi_2(x_1)],$$

$$\tilde{S}_3 = [x_1 = 0, \theta_1(0) \leq x_2 \leq \theta_2(0)], \quad \tilde{S}_4 = [x_1 = L, \phi_1(L) \leq x_2 \leq \phi_2(L)],$$

$$S_1 = [0 \leq x_1 \leq L, x_2 = 0], \quad S_2 = [0 \leq x_1 \leq L, x_2 = H], \quad S_U = S_1 + S_2,$$

$$S_{UT} = S_U \times (0, T], \quad \Omega_1 = [0 \leq x_1 \leq L, 0 < x_2 \leq \varepsilon],$$

$$\Omega_2 = [0 \leq x_1 \leq L, H - \varepsilon \leq x_2 < H], \quad \Omega_{iT} = \Omega_i \times [0, T], \quad i = 1, 2,$$

$$\Omega' = [0 \leq x_1 \leq L, \varepsilon_1 < x_2 < H - \varepsilon_1], \quad \tilde{\Omega}'_T = \Omega' \times [0, T], \quad \tilde{\Omega}_T = \tilde{\Omega} \times [0, T],$$

$$S'_1 = [0 \leq x_1 \leq L, x_2 = \varepsilon_1], \quad S'_2 = [0 \leq x_1 \leq L, x_2 = H - \varepsilon_1], \quad S'_{iT} = S'_i \times [0, T], \quad i = 1, 2,$$

$$\tilde{S}_T = \tilde{S} \times [0, T], \quad \tilde{\Omega}_T = \tilde{\Omega} \times [0, T],$$

ε, δ – малые положительные числа, $\varepsilon_1 = \varepsilon/2$.

В работе [1] доказано существование решений этой модели на каждом временном слое $t_m = m\tau$ ($m = 0, 1, 2, \dots, M$). В работе [2] найдены априорные оценки этих решений, которые не зависят от τ и позволяют выполнить предельный переход при $\tau \rightarrow 0$ (там же определена срезающая функция). Из результатов, полученных в [2], вытекает

Теорема. Пусть $b(x)$ есть функция, непрерывная в $\tilde{\Omega}$ (см. условия (4)), и выполнены условия гладкости, указанные в [2]. Тогда задача (1)–(6) имеет классическое решение, которое является единственным.

Литература

1. Каянович С. С. Разрешимость дифференциальной модели стержневого течения // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2015. № 1. С. 52–59.
2. Каянович С. С. Краевая задача для стержневого течения в канале // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2016. № 4. С. 55–66.