Е. А. Баркова

О СУЩЕСТВОВАНИИ РЕШЕНИЙ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

В докладе обсуждается метод исследования сходимости последовательных приближений для построения решений интегро-дифференциальных уравнений с частными производными в непрерывных шкалах банаховых пространств. Метод основан на результатах, полученных в работе [1] для дифференциальных уравнений с ухудшающими операторами и на модифицированном варианте [2] для уравнений в частных производных смешанного типа.

1. Рассмотрим в семействе банаховых пространств $\mathbb{X}(\omega)$, $\omega \in \Omega$ пространств, непрерывно вложенных в отделимое локально выпуклое пространство $\mathbb{X}$, уравнение вида

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = f\biggl(t, x, \frac{\partial u(t,x)}{\partial x} + \int\limits_S K(t,x,u(t,x))\,dx\biggr), \quad u(t,x)|_{t=0} = u_0(x), \qquad (1)$$

предполагая, что функция $K(t,x,u)$ удовлетворяет по переменной $u(t,x)$ условию Липшица

$$\|K(t,x,u_1) - K(t,x,u_2)\|_{\mathbb{X}(\omega'')} \leqslant q(\omega',\omega'',x)\|u_1 - u_2\|_{\mathbb{X}(\omega')},$$

где $q(\omega',\omega'',x)$ – функция, определенная на некотором множестве $\Delta \subset \Omega \times \Omega$ для $\omega' < \omega''$ п принимающая значения в $[0,\infty]$; $u(t,x)$ – неизвестная функция, x – пространственная переменная, изменяющаяся в некоторой ограниченной области S.

Обозначим далее

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial x} + \int\limits_S K(t,x,u(t,x))\,dx = K_u.$$

Тогда функция $f(t, x, K_u)$ определена на $[0,T]\times S\times\widetilde{\mathbb{X}}$, где $\widetilde{\mathbb{X}}$ – объединение некоторой части Ω пространств $\mathbb{X}(\omega)$ и принимает значения в $\mathbb{X}$, непрерывна по совокупности переменных на каждом множестве $[0,T]\times S\times\mathbb{X}$, $\omega\in\Omega$ и удовлетворяет условию Липшица

$$\|f(t,x,K_{u_1})-f(t,x,K_{u_2})\|_{\mathbb{X}(\omega'')}\leqslant (a(\omega',\omega'')+Q(\omega',\omega''))\|u_1-u_2\|_{\mathbb{X}(\omega')},$$

$a(\omega',\omega'')$ определена па множестве $\Delta\subset\Omega\times\Omega$ и принимает значения в $[0,\infty]$, $Q(\omega',\omega'')$ – линейный интегральный оператор с ядром $q(\omega',\omega'',x)$, т.е.

$$Q(\omega',\omega'')=\int\limits_S q(\omega',\omega'',x)\,dx.$$

Определим для каждой пары $(\omega',\omega'')\in W$, для которой $a(\omega',\omega'')$ и $Q(\omega',\omega'')$ принимают конечные значения, оператор

$$c(\omega',\omega'')z(t)=\int\limits_0^t(a(\omega',\omega'')+Q(\omega',\omega''))z(\tau)\,d\tau.$$

Пусть n – произвольное натуральное число, $(\omega_{j-1},\omega_j)\in W$ и

$$c(\omega_0,\ldots,\omega_n)z(t)=\prod_{j=1}^n c(\omega_{j-1},\omega_j)z(t).$$

Обозначим теперь W^* множество таких пар (ω',ω''), для которых $\mathbb{X}(\omega')\subset\mathbb{X}(\omega'')$, и при любом $n=1,2,\ldots$ существуют цепочки $\omega_0,\omega_1,\ldots,\omega_n$, для которых $\omega_0=\omega'$, $\omega_n=\omega''$; при $(\omega',\omega'')\in W^*$ положим

$$c(\omega',\omega'')z(t)=\inf c(\omega_0,\ldots\omega_n)z(t),$$

где inf берется (при фиксированной функции z и фиксированном t) по всем упомянутым выше цепочкам.

Теорема 2. *Пусть* $(\omega',\omega'')\in W^*$ *и* $T\in\Upsilon(\omega',\omega'')$, *где*

$$\Upsilon(\omega',\omega'')=\{\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{c_n(\omega',\omega'')\,1(t)}<1\quad(0\leqslant t\leqslant T)\}$$

и, кроме того, функция

$$h_0(t,x)=u_0+\int\limits_0^t f\biggl(\tau,x,\int\limits_S K(\tau,x,0)\,dx\biggr)\,d\tau$$

ограничена в $\mathbb{X}(\omega')$. *Тогда задача (1) имеет в* $\mathbb{X}(\omega'')$ *по крайней мере одно определенное на* $[0,T]$ *решение.*

В частном случае, когда $\mathbb{X}(\omega)$ – банахово пространство определенных на S функций, обладающих продолжениями области S на окрестность $U(s,\omega)$ радиусами ω аналитическими и непрерывными на замыкании этой окрестности с обычными алгебраическими операциями и нормой

$$\|u(x)\|_{\mathbb{X}(\omega)}=\sup\{|u(x)|:x\in U(s,\omega)\},$$

соответствующий правой части уравнения (1) оператор $f(t,x,K_u)$, где f – функция непрерывная по совокупности переменных и аналитическая по переменным x, K_u, удовлетворяет на каждом шаре

$$\mathbb{B}(\omega',r)=\{u:\|u\|_{\mathbb{X}(\omega')}\leqslant r\}$$

условию Липшица вида

$$\|f(t,x,K_{u_1})-f(t,x,K_{u_2})\|_{\mathbb{X}(\omega'')}\leqslant\frac{1}{\omega''-\omega'}\biggl(a+\int\limits_S\rho(x)\,dx\biggr)\|u_1-u_2\|_{\mathbb{X}(\omega')},$$

где $\Omega=[0,1]$, $a(\omega',\omega'')=a(\omega''-\omega')^{-1}$, $q(\omega',\omega'',x)=\rho(x)/(\omega''-\omega')$. Тогда задача (1) имеет в $\mathbb{X}(\omega'')$ по крайней мере одно определенное на $[0,T]$ решение, если

$$\Upsilon(\omega',\omega'')=\biggl\{T:T\leqslant(\omega''-\omega')\biggl(\biggl(a+\int\limits_S\rho(x)\,dx\biggr)e\biggr)^{-1}\biggr\}.$$

Список литературы

1. Баркова Е.А., Забрейко П.П. *Задача Коши для дифференциальных уравнений высших порядков с ухудшающими операторами* // Дифференц. уравнения. 1991. Т. 27. № 3. С. 472–478.

2. Баркова Е.А. *О разрешимости задачи Коши для дифференциальных уравнений с частными производными.* // Материалы XIX Междунар. науч. конф. по дифференц. уравнениям («Еругинские чтения»–2019). Минск, 2019. С. 7–8.