УДК 681.3

КОРРЕКТИРУЮЩИЕ КОДЫ НА ОСНОВЕ БИНОМИАЛЬНЫХ ФРАКТАЛЬНЫХ СТРУКТУР

С.Б. САЛОМАТИН, А.Э. АЛЕКСЕЕНКО

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники, Республика Беларусь

Поступила в редакцию 30 октября 2019

Аннотация. Рассмотрена связь полярных кодов и кодов Рида-Маллера с фрактальными биномиальными матрицами Паскаля, что позволяет увеличить многообразие кодов для достижения пропускной способности канала.

Ключевые слова: корректирующие коды фрактальные матрицы, спектральные преобразования, биномиальные коэффициенты, пропускная способность.

Введение

Полярные коды были первым семейством кодов, которое было доказано как способствующее пропускной способности [1]. Коды Рида-Мюллера могут быть полезны для достижения пропускной способности канала двоичного стирания. Метод использует кодовую симметрию последовательности кодов Рида-Мюллера при этом с увеличением длины блока и скоростью сходимости достигается пропускная способность канала [2]. Отличительной особенностью полярных кодов и кодов Рида-Маллера является простота процедур их построения, кодирования и декодирования, что делает их привлекательными для практического использования.

В работе рассматривается связь полярных кодов и кодов Рида-Маллера с фрактальными биномиальными матрицами Паскаля, что позволяет увеличить многообразие кодов для достижения пропускной способности.

Биномиальные фрактальные матрицы и преобразование Паскаля

Треугольник Паскаля является геометрическим расположением биномиальных коэффициентов в треугольнике [4, 5]

$$P=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{p-1}^{0} & C_{p-1}^{1} & C_{p-1}^{2} & C_{p-1}^{3} & \cdots & C_{p-1}^{p-1} \end{bmatrix}.$$

Каждый элемент треугольника p_{ij} равен биномиальному коэффициенту a_{ij},

$$a_{ij}=C_i^j=\begin{pmatrix} i \\ j \end{pmatrix}=\frac{i!}{j!(i-j)!},$$

где i, j – неотрицательные целые числа, $i \geq j$.

Матрица Паскаля представляет собой бесконечную матрицу $\mathbf{P} = \left[p_{ij} \right]$, элементами которой являются биномиальные коэффициенты, расположенные в виде двумерного массива. Биномиальные коэффициенты – это коэффициенты (положительные целые числа), возникающие при алгебраическом разложении неотрицательных целочисленных степеней бинома $\left(x + y \right)^n$. Степень n определяет строку матрицы Паскаля, в которой расположены соответствующие биномиальные коэффициенты. Для $y = 1$ биномиальные коэффициенты могут быть идентифицированы как коэффициенты слагаемых x^k в полиномиальном разложении $\left(1 + x \right)^n$.

Основные свойства матрицы **P**:

1. Элементы первого столбца равны 1.
2. Все нижние матрицы треугольные.
3. Сумма элементов каждой строки (кроме первой) равна нулю.
4. Все матрицы равны их обратным.

Дискретное преобразование Паскаля (ДПП)

Преобразование Паскаля может быть представлено в виде:

$$\mathbf{X} = \mathbf{P}\mathbf{x},$$

где $\mathbf{X}, \mathbf{x}$ – векторы размером $N \times 1$ и $\mathbf{P} - \left(N \times N \right)$ – матрица преобразования Паскаля, элементы которой равны

$$p_{ij} = \begin{cases} (-1)^j a_{ij}, & i \geq j, \\ 0, & i < j. \end{cases}$$

Элементы матрицы преобразования Паскаль получаются непосредственно из записей треугольника Паскаля путем чередования знаков столбцов. Матрица преобразования Паскаля для $N = 4$ приведены ниже

$$\mathbf{P}_4 = \left[p_{ij} \right] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 3 & -1 \end{bmatrix}.$$

Преобразование Паскаля может быть представлено в виде:

$$X\left(k \right) = \sum_{n=0}^{N-1} p_{kn} x\left(n \right),$$

где $k = 0, 1, \ldots, N - 1$.

Элементы матрицы преобразования Паскаля выше диагонали равны нулю, т.е. $p_{kn} = 0$ для $k > n$. Дискретное преобразование Паскаля может быть переписано следующим образом:

$$X\left(k \right) = \sum_{n=0}^{k} p_{kn} x\left(n \right), \quad n = 0, 1, \ldots N - 1,$$

или

$$X\left(k \right) = \sum_{n=0}^{N-1} (-1)^n \binom{k}{n} x\left(n \right).$$

Обратное ДПП может быть записано в матричной форме

$$\mathbf{x} = \mathbf{P}\mathbf{X},$$

или

$$x(n)=\sum_{k=0}^{n} p_{nk} X(k)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^{k}\binom{n}{k} X(k), \quad k=0,1,2,\ldots,N-1.$$

Вычислительная сложность ДПП

Вычисление N-точечного ДПП вектора на основе матричного определения приводит к N^2 операций умножения и $N(N-1)$ операций сложения. Если принять во внимание, что верхние элементы треугольника матрицы преобразования равны нулю, а диагональные элементы равны 1 или -1, то есть операций умножения не требуется, то вычислительная сложность составляет $N(N-1)/2$ операций умножения и $[N(N-3)+1]/2$ операций сложения.

Граф вычисления N-точечного ДПП показан на рис. 1. Преобразование включает $(N-1)$ этапов и имеет вид «бабочки».

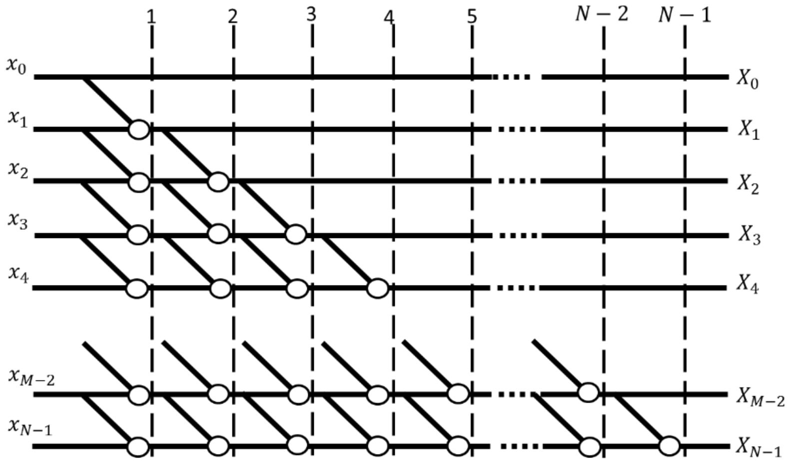

Рис. 1. Граф дискретного преобразования Паскаля

ДПП обладает низкой сложности и фактически представляет собой разновидность быстрого спектрального преобразования.

Структура матрицы Паскаля обладает свойствами фрактала (треугольник Серпинского (рис. 2)) и тесно связана с кодами Рида-Маллера (РМ) [2] и полярными кодами [1].

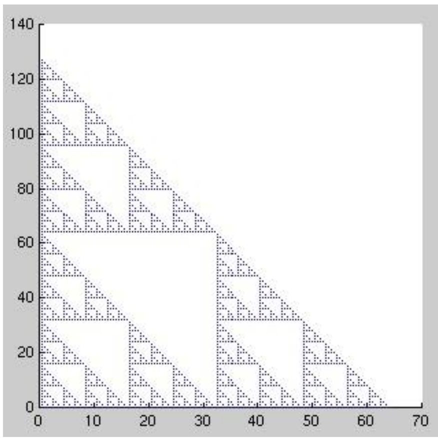

Рис. 2. Треугольник Серпинского

Генераторная матрица **G** полярных кодов и РМ может быть получена просто с помощью операции по модулю 2 на матрице Паскаля.

На самом деле, можно создать бесконечно много фракталов, используя следующее выражение

$$\mathbf{G} = \left[\text{матрица Паскаля}\right] N \bmod q \ \left(\text{для простого } q\right).$$

Вышеуказанный метод не является уникальным. Можно построить любой фрактал, который исходит из матрицы Паскаля, используя степень Кронекера. Нужно только определить матрицу ядра F. Это простая задача, поскольку можно получить матрицу ядра, используя

$$\mathbf{F} = \left[\text{матрица Паскаля}\right] q \bmod q \ \left(\text{для простого } q\right).$$

Матрицы Паскаля и полярные коды

Поляризация канала была первоначально предложена в [1] для дискретных каналов без памяти с двоичным входом как метод кодирования, который был использован для построения нового семейства кодов для передачи данных. Эти коды, называемые полярными кодами, могут достигать «симметричной пропускной способности» любого канала двоичного ввода, используя алгоритмы кодирования и декодирования малой сложности. Позднее было доказано, что эта конструкция кода может обеспечить пропускную способность любого дискретного канала без памяти с первичным входом [1, 2].

Матрица Паскаля троичного полярного кода

Матрица ядра для $q = 3$ имеет вид

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Матрица генератора является фракталом треугольника Серпинского. Линейное преобразование с матрицей ядра объединяет три идентичных канала в новый синтетический канал W_3:

$$\{W, W, W\} \to \left\{\left(y_1^3; u_1\right), \left(y_1^3, u_1; u_2^3\right), \left(y_1^3, u_1^2, u_3\right)\right\},$$

где $\{u_i\}$ – входы, а $\{y_i\}$ – выходы канала.

Структура канала показана на рис. 3.

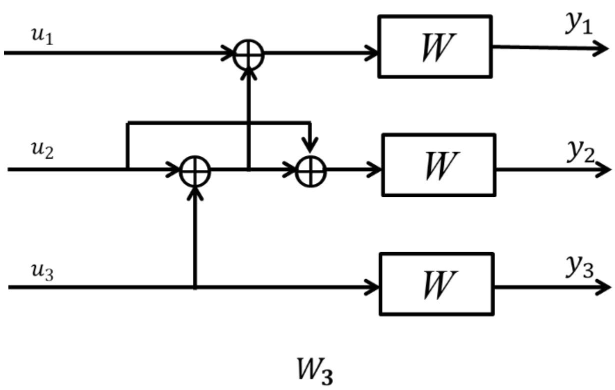

Рис. 3. Структура симметрично канала полярного кода

Сложность кодирования и декодирования троичного полярного кода оценивается как $O\left(N \log_3 N\right)$.

Заключение

Фрактальные биномиальные матрицы и ДПП являются перспективным инструментом для кодирования и обработки кодов и сигналов. Треугольная структура дискретного преобразования матрицы Паскаля производит полезное свойство локализации, что позволяет реализовать симметричную пропускную способность канала и уменьшить сложность кодирования и декодирования.

CORRECTIVE CODES BASED ON BINOMIAL FRACTAL STRUCTURES

S.B. SALOMATIN, A.E. ALEKSEENKO

Abstract. The connection of polar codes and Reed-Muller codes with fractal binomial Pascal matrices, which allows to increase the variety of codes to achieve channel throughput was considered.

Keywords: fractal matrix correction codes, spectral transformations, binomial coefficients, throughput.

Список литературы

1. Arikan E. // Proc. IEEE Inform. Theory Workshop. 2010. P. 1–5.
2. Park W. // IEEE Transactions on Information Theory. 2012. Vol. 59. P. 955–969.
3. Doan D., [et. al.] Demonstratio Mathematica, Vol. XLII, № 1, 2009.
4. Massopust P. Fractal function, fractal surfaces, and wavelets. Academic Press. 1994.