



<http://dx.doi.org/10.35596/1729-7648-2019-126-8-50-57>

Оригинальная статья  
Original paper

УДК 629.7

## ФОРМИРОВАНИЕ ОПТИМАЛЬНЫХ ПАРАМЕТРОВ ТРАЕКТОРИИ ПРОЛЕТА БЕСПИЛОТНОГО ЛЕТАТЕЛЬНОГО АППАРАТА ЧЕРЕЗ ЗАДАННЫЕ ТОЧКИ ПРОСТРАНСТВА

ЛОБАТЫЙ А.А., БУМАЙ А.Ю., ДУ ЦЗЮНЬ

*Белорусский национальный технический университет, г. Минск, Республика Беларусь*

*Поступила в редакцию 30 мая 2019*

© Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники, 2019

**Аннотация.** Цель проведения исследований, результаты которых представлены в статье, заключается в аналитическом синтезе закона управления для беспилотного летательного аппарата в случае, когда происходит наведение его по траектории, которая задана опорными точками пространства в инерциальной системе отсчета. Проводится анализ существующих различных подходов к формированию заданной траектории полета беспилотного летательного аппарата, основанных на различной математической постановке задачи. Для достижения поставленной цели траектория полета рассматривается состоящей из отдельных интервалов, на каждом из которых решается задача оптимизации управления. Обоснован критерий оптимизации в общем виде и представление его в форме минимизируемого квадратичного функционала качества, удобного для аналитического синтеза управления. В качестве составляющих функционала рассматриваются параметры отклонения траектории полета летательного аппарата от заданных точек пространства, а также прогнозируемые параметры вектора скорости и управляющее нормальное ускорение. При этом в каждой заданной точке пространства учитывается направление траектории на последующую точку, что обеспечивает оптимальную кривизну траектории при заданной скорости полета летательного аппарата. В результате аналитического синтеза получены математические зависимости для определения управляющего ускорения, которые позволяют на борту беспилотного летательного аппарата получить заданный оптимальный закон управления, обеспечивающий в конечном итоге минимальные затраты энергии. Обоснованность предложенных теоретических положений подтверждается наглядным примером, в котором для упрощенной математической постановки задачи путем компьютерного моделирования рассчитаны оптимальные законы изменения управляющего ускорения и параметры траектории беспилотного летательного аппарата.

**Ключевые слова:** беспилотный летательный аппарат, траектория полета, минимизируемый функционал, управление, интервал оптимизации.

**Конфликт интересов.** Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

**Для цитирования.** Лобатый А.А., Бумай А.Ю., Ду Цзюнь. Формирование оптимальных параметров траектории пролета беспилотного летательного аппарата через заданные точки пространства. Доклады БГУИР. 2019; 7–8(126): 50-57.

## FORMATION OF OPTIMAL PARAMETERS OF THE TRAJECTORY OF THE OVERFLIGHT OF UNMANNED AERIAL VEHICLE THROUGH THE SPECIFIED POINTS OF SPACE

ALEXANDR A. LOBATY, ANDREI Y. BUMAI, JUN DU

*Belarussian National Technical University, Minsk, Republic of Belarus*

*Submitted 30 May 2019*

© Belarussian State University of Informatics and Radioelectronics, 2019

**Abstract.** The purpose of the scientific research, results are determined in the article, is to analytically synthesize the control law of an unmanned aerial vehicle while guiding one along the trajectory that specified by the reference points of space in an inertial coordinate system. The analysis of various existing approaches of the formation of a given flight path of an unmanned aerial vehicle based on various mathematical formulations of the problem is carried out. To achieve the goal, the flight path is considered as separate intervals, where the control optimization problem is solved. The optimization criterion in general form is substantiated and its presentation in the form of a minimized quadratic quality functional is convenient for analytical control synthesis. As components of the functional, the parameters of the deviation of the flight path of the aircraft from the specified points of space are considered, as well as the predicted parameters of the velocity vector and the control normal acceleration. Moreover, at each specified point in space, the direction of the trajectory to the subsequent point is taken into account, that ensures optimal curvature of the trajectory by specified flight speed of the unmanned aerial vehicle. As a result of analytical synthesis, mathematical dependences are obtained to determine control acceleration, which allow us to get a specified optimal control law on board an unmanned aerial vehicle, which ultimately ensures minimum energy consumption. The validity of the proposed theoretical provisions is confirmed by a clear example, where for a simplified mathematical problem statement the optimal laws of change in control acceleration and the trajectory parameters of an unmanned aerial vehicle are calculated by computer simulation.

**Keywords:** unmanned aerial vehicle, flight trajectory, minimized functional, control, optimization interval.

**Conflict of interests.** The authors declare no conflict of interests.

**For citation.** Lobaty A.A., Bumai A.Y., Jun Du. Formation of optimal parameters the trajectory of the overflight of unmanned aerial vehicle through the specified points of space. Doklady BGUIR. 2019; 7–8(126): 50-57.

### Введение

Всё большее распространение в различных областях имеют беспилотные летательные аппараты (БЛА), позволяющие решать широкий спектр задач. Функциональное устройство основных элементов систем управления (СУ) БЛА, а также их структурная компоновка определяются в соответствии с предназначением БЛА. Спектр задач вывода БЛА в определенную точку в пространстве лучше рассматривать подобно задачам аналитического синтеза системы самонаведения БЛА на определенную цель [1].

Обратим внимание на задачу полета БЛА по заранее определенной траектории. Маршрут полета БЛА состоит из трех следующих друг за другом интервалов:

$R_1(t_0, t_1), R_2(t_1, t_2), R_3(t_2, t_3)$ .  $R_1$  – отправной интервал,  $R_2$  – интервал основной задачи,  $R_3$  – интервал возврата,  $t_0$  и  $t_k$  время начала и окончания полета.

Методы аналитического синтеза и оптимизации СУ БЛА могут отличаться постановкой задачи [2, 3]. Но большинство не удовлетворяют реальным условиям применения БЛА.

Общепринято задать первоначальную математическую модель траектории полета БЛА. Например, в источнике [2] применена аппроксимация полиномом

$$R(t) = \sum_{i=0}^n C_i t^i, \quad (1)$$

где  $R(t)$  – процесс изменения пространственной координаты,  $t$  – время полета,  $(C_i (i = \overline{1, n})$  – коэффициенты.

Проекции траектории движения БЛА на каждую из осей инерциальной системы отсчета описываются полиномом следующего вида [2]:

$$A_3(t) = C_0 + C_1 t + C_2 t^2 + C_3 t^3 + C_4 t^4 + C_5 t^5. \quad (2)$$

Продифференцировав формулу (2) дважды по времени, получим:

$$\dot{A}_3(t) = C_1 + 2C_2 t + 3C_3 t^2 + 4C_4 t^3 + 5C_5 t^4, \quad (3)$$

$$\ddot{A}_3(t) = 2C_2 + 6C_3 t + 12C_4 t^2 + 20C_5 t^3. \quad (4)$$

Формулы (3) и (4) – выражения скорости и ускорения. Параметры  $C_3, C_4, C_5$  определяются путем решения системы уравнений для полинома  $A_3(t)$  и его производных  $\dot{A}_3(t)$ ,  $\ddot{A}_3(t)$  в момент окончания наведения. Преимущество вышеописанного подхода – реализуемость заданной траектории на борту БЛА.

Достаточно распространенной задачей является полет БЛА по траектории, проходящей через опорные точки пространства с определенными координатами  $(X^{(k)} Y^{(k)} Z^{(k)})$  в инерциальной системе отсчета  $(OXYZ)$ ,  $k$  – номер точки, через которую необходимо проложить траекторию.

### Задача интервальной оптимизации

С учетом приведенного выше рассмотрим задачу формирования траектории, представляющей собой отдельные интервалы, на каждом из которых обеспечивается наведение БЛА оптимальным образом и выполняются основные требования к СУ. Необходимо обеспечить заданную точность приближения траектории полета к заданным точкам, а также минимизировать интегральные потери, обусловленные маневрированием и изменениями управляющей перегрузки. Из поставленной задачи следует необходимость формировать критерий оптимизации, который включает в себя как составляющую, характеризующую точность достижения поставленной цели, так и составляющую, характеризующую интегральные потери в течение времени управления процессом полета. Вышесказанному соответствует классическая задача Больца минимизации функционала вида [4]

$$J = \varphi(X_k, t_k) + \int_{t_0}^{t_k} F(X, t) dt. \quad (5)$$

В выражении (5) первое слагаемое  $\varphi(X_k, t_k)$  характеризует конечную цель изменения вектора состояния  $X(t)$  на интервале  $[t_0, t_k]$ , второе – указанные интегральные потери в процессе управления. Особенностью данной задачи является то, что функция  $\varphi(X_k, t_k)$  является конечной целью для интервала полета БЛА между заданными  $k$ -1-й и  $k$ -й точками маршрута и промежуточным пунктом для всей траектории движения БЛА. Следовательно,  $\varphi(X_k, t_k)$  характеризует минимальное отклонение траектории полета БЛА от точки  $X_k$  при  $k = 1, N$ ,  $N$  – количество заданных точек маршрута полета БЛА.

При исследовании траектории полета БЛА рассматривается задача «кинematики твердого тела» движения точки центра масс, следовательно, функционал (5), как правило, приводится к виду квадратичного функционала Летова–Калмана [3, 4]:

$$J = X_k^T R X_k + \int_{t_0}^{t_k} [X(t)^T Q(t) X(t) + U(t)^T S(t) U(t)] dt. \quad (6)$$

В выражении (6)  $X_k = [\overset{\circ}{x}_k, \overset{\circ}{y}_k, \overset{\circ}{z}_k]^T$  – вектор, включающий минимальные отклонения относительно промежуточной  $k$ -й точки маршрута;  $X(t) = [x(t), y(t), z(t)]^T$  – вектор координат центра масс БЛА;  $U(t) = [a_x(t), a_y(t), a_z(t)]^T$  – вектор управлений, состоящий из нормальных ускорений центра масс.

Представляет определенную трудность задача выбора матриц коэффициентов  $R$ ,  $Q(t)$ ,  $S(t)$ . Так как в функционал (6) входят переменные слагаемые различной физической природы и размерности  $X_k$ ,  $X(t)$ ,  $U(t)$ , то целесообразно преобразовать их к относительным безразмерным величинам путем нормировки с помощью матриц  $R$ ,  $Q(t)$ ,  $S(t)$ . В качестве нормировочных коэффициентов в работе [5] берутся максимально допустимые значения входящих в функционал (6) переменных  $X_k$ ,  $X(t)$ ,  $U(t)$ .

Изменение параметров полета БЛА в пространстве состояний в общем случае описывается векторным уравнением вида [2, 3]

$$\dot{X}(t) = f(X, t), \quad X(t_0) = X_0, \quad (7)$$

где  $f(X, t)$  – в общем случае нелинейная векторная функция. Задача существенно упрощается, если уравнение движения (7) является линейным вида

$$\dot{X}(t) = A(t)X(t) + B(t)U(t), \quad X(t_0) = X_0, \quad (8)$$

где  $A(t)$ ,  $B(t)$  – матрицы коэффициентов. В данном варианте применима так называемая задача аналитического конструирования оптимального регулятора (АКОР), в которой искомый вектор оптимального управления определяется выражением [4]

$$U^*(t) = -S^{-1}(t)B^T K(t)X(t), \quad (9)$$

где  $K(t)$  – матрица коэффициентов, вычисляемая путем решения векторного дифференциального уравнения типа Риккати вида

$$\dot{K}(t) = -A^T(t)K(t) - K(t)A(t) + K(t)B(t)S^{-1}(t)B^T(t)K(t) - Q(t), \quad K(t_1) = R. \quad (10)$$

Основная проблема, возникающая при определении оптимального управления  $U^*(t)$ , заключается в решении «двухточечной краевой задачи», которая предполагает одновременное решение системы дифференциальных уравнений (8) и (10). При этом у системы (8) заданы начальные условия, а у системы (10) – конечные условия. В основном задача решается методом «прогонки», при котором на начальном этапе задаются приближенные крайние значения для одной из систем (8) или (10), а затем многократно интегрируются системы (8) и (10) в «прямом и обратном времени» до достижения необходимой точности получения результата.

### Решение задачи оптимизации

Кинематическая схема процесса наведения летательного аппарата отражена на рис. 1 для указанной  $(O^{(k)} X^{(k)} Y^{(k)} Z^{(k)})$  инерциальной системы отсчета, где  $k$  – порядковый номер точки пространства, через которую будет перемещаться летательный аппарат [6].

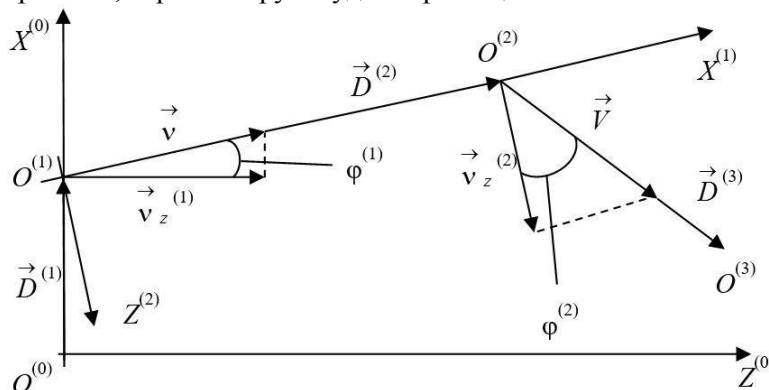


Рис. 1. Кинематическая схема наведения БЛА  
Fig. 1. Kinematic guidance scheme of UAV

Для удобства исследуем наведение летательного аппарата в горизонтальной плоскости. Пространственная модель при данной постановке задачи кардинальных отличий не имеет. На рис. 1 имеются следующие обозначения:  $\vec{v}$  – вектор скорости БЛА. С учетом работы БЛА

в реальных условиях допустим, что  $\left| \dot{\varphi} \right| = \text{const}$ .  $\varphi^{(k)}$  – угол ориентации вектора скорости летательного аппарата в  $k$ -й точке.  $D^{(k)}$  – вектор расстояния между начальной ( $k-1$ -й) и конечной ( $k$ -й) точками  $k$ -го участка траектории.  $O^{(k)}$  – исходная точка указанной инерциальной системы отсчета на  $k$ -м участке траектории летательного аппарата. Общепринято  $k = \overline{0, N}$ .

В представленной постановке задачи отличительно то, что задается новая инерциальная система отсчета  $(O^{(k)} X^{(k)} Y^{(k)} Z^{(k)})$  для каждого последующего интервала. В указанном случае начало системы отсчета  $O^{(k)}$  на каждом следующем  $k$ -м интервале совпадает с предыдущей указанной точкой траектории полета.

Исследуя модель траектории в пространстве в указанном случае, определим, что ось  $O^{(k)} X^{(k)}$  направлена, соответственно, на следующую  $k+1$ -ю точку пути, ось  $O^{(k)} Y^{(k)}$  направлена, соответственно, вертикально вверх, в свою очередь, ось  $O^{(k)} Z^{(k)}$  составляет с осями  $O^{(k)} X^{(k)}$  и  $O^{(k)} Y^{(k)}$  правую систему отсчета.

Для конкретности исследуем следование БЛА относительно заданной системы отсчета на  $k$ -м участке траектории полета в горизонтальной плоскости. Это движение описывается приведенной далее системой дифференциальных уравнений [3]:

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}^{(k)} &= v_x^{(k)}, & x^{(k)}(0) &= x_0^{(k)}, \\ \dot{z}^{(k)} &= v_z^{(k)}, & z^{(k)}(0) &= z_0^{(k)}, \\ \dot{v}_x^{(k)} &= a_x^{(k)}, & v_x^{(k)}(0) &= v_{x0}^{(k)}, \\ \dot{v}_z^{(k)} &= a_z^{(k)}, & v_z^{(k)}(0) &= v_{z0}^{(k)}. \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

В системе линейных дифференциальных уравнений (11) применены следующие обозначения:  $x^{(k)}, z^{(k)}$  – координаты центра масс БЛА в заданной  $k$ -й системе отсчета;  $v_x^{(k)}, v_z^{(k)}$  – проекции вектора скорости летательного аппарата на оси  $k$ -й системы отсчета;  $a_x^{(k)}, a_z^{(k)}$  – ускорения центра масс БЛА в  $k$ -й системе отсчета. В качестве параметра управления БЛА в данном случае будем рассматривать боковое ускорение БЛА  $a_z^{(k)}(t)$ . В реальных условиях, когда БЛА выполняет свою непосредственную задачу, а именно мониторинг поверхности, скорость его полета в общем случае постоянна. В связи с предыдущим допущением систему уравнений (11) можно представить в виде  $v_x^{(k)} = \sqrt{v^2 - (v_z^{(k)})^2}$ , соответственно,  $v = \left| \dot{\varphi} \right|$ .

Вычислим необходимое оптимальное управление летательного аппарата, а именно его ускорение  $a_z^{(k)}(t)$  на  $k$ -м участке траектории. Для данной постановки задачи определим следующий критерий оптимальности – квадратичный функционал, который имеет вид [2, 6]

$$J = \int_{t_0}^{t_k} \left[ c_1 (v_z^{(k)})^2 + c_2 (z^{(k)} - z_{\text{зад}}^{(k)})^2 + c_3 (a_z^{(k)})^2 \right] dt, \quad (12)$$

где  $t_k$  – момент времени достижения летательным аппаратом определенной  $k$ -й точки пространства;  $v_{\text{зад}}^{(k)}$  – указанная величина проекции скорости летательного аппарата на ось  $O^{(k)} Z^{(k)}$  для инерциальной системы отсчета на  $k$ -м участке в момент  $t_k$ ;  $z_{\text{зад}}^{(k)}$  – боковая координата определенной  $k$ -й точки траектории полета летательного аппарата в момент времени  $t_k$ ;  $c_1, c_2, c_3$  – коэффициенты, которые задаются с учетом размерности параметров функционала (12).

Для того чтобы решить поставленную задачу, где необходимо определить оптимальное боковое ускорение  $a_z^{(k)}$ , которое, в свою очередь, минимизирует функционал (12), применяются разнообразные методы аналитического конструирования [2]. Например, в работе [5], используя методы вариационного исчисления, определено решение сходной задачи. Применительно к вышеописанной постановке задачи для каждого участка оптимизации решение примет следующую форму [6]:

$$a_z(v_z, z, t) = \ddot{v}_z(t) \ddot{v}_{\text{зад}} \ddot{z}(t) \ddot{z}_{\text{зад}}, \quad (13)$$

$$\text{где } \vartheta_v(t) = \frac{(1/c_2) + (1/c_1)(t_k - t)^2 + 1/3(t_k - t)^3}{D(t_k - t)}, \quad (14)$$

$$\vartheta_z(t) = \frac{(1/c_1)(t_k - t) + 1/2(t_k - t)^2}{D(t_k - t)}, \quad (15)$$

$$D(t - t) = \frac{1}{c_2} + \frac{1}{3} (t_k - t)^3 + t - t \frac{1}{4} (t_k - t)^4. \quad (16)$$

В формулах (13)–(16) соответственно  $v_{\text{зад}} = v_{\text{зад}}^{(k)} = v_z^{(k)}(t_k) \sin \varphi_{\text{зад}}^{(k)}$  [6], где  $v_z^{(k)}(t_k)$  – значение проекции скорости летательного аппарата на ось  $O^{(k)}Z^{(k)}$  в момент завершения наведения  $t_k$  на  $k$ -м участке;  $\varphi_{\text{зад}}^{(k)}$  – заданный угол подлета летательного аппарата к последующей точке  $O^{(k)}$ . Угол подлета задается исходя из ориентации вектора относительно системы отсчета  $(O^{(k)}X^{(k)}Z^{(k)})$ , как изображено на рис. 1.  $t_k - t = t_{\text{ост}}$  – время, которое необходимо для достижения летательным аппаратом последующей указанной  $k$ -й точки пространства.

$$t_{\text{ост}} = t_{\text{ост}}^{(k)} = \frac{D^{(k)}}{|D|^{(k)}}, \quad (17)$$

где  $D^{(k)}$  – дальность от центра масс до точки  $O^{(k)}$  на  $k$ -м участке наведения,  $|D|^{(k)}$  – модуль скорости сближения летательного аппарата с точкой  $O^{(k)}$ .

При определенных условиях интегральное слагаемое функционала (12) можно проигнорировать. Предложенный прием верен в том случае, когда у летательного аппарата имеется достаточный запас топлива на всем маршруте следования, а скорость полета равномерная и низкая [7].

Необходимо отметить, что формулы (13)–(16) верны в определенных случаях и для соответствующей пространственной задачи по наведению летательного аппарата. В приведенном случае двумерные векторы координат, скоростей и ускорений БЛА возможно заменить аналогичными трехмерными векторами [8].

В качестве примера рассмотрим изменение траектории полета БЛА в горизонтальной плоскости при пролете БЛА через заданные точки пространства со следующими координатами:  $x^{(0)} = z^{(0)} = 0$ ;  $x^{(1)} = 1000$  м,  $z^{(1)} = 0$ ;  $x^{(2)} = 1500$  м,  $z^{(2)} = 1000$  м;  $x^{(3)} = 2500$  м,  $z^{(3)} = 1500$  м (рис. 2, а) и  $x^{(0)} = z^{(0)} = 0$ ;  $x^{(1)} = 1000$  м,  $z^{(1)} = 0$ ;  $x^{(2)} = 1500$  м,  $z^{(2)} = 1000$  м;  $x^{(3)} = 1600$  м,  $z^{(3)} = 2200$  м (рис. 2, б). Представленные результаты рассчитаны в компьютерной среде Mathcad для математической модели траектории БЛА.

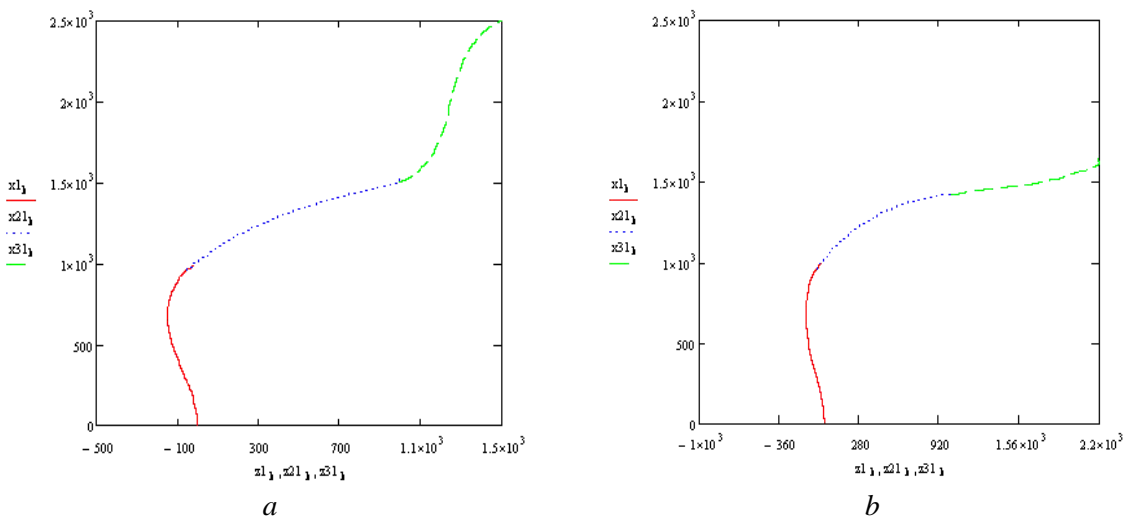


Рис. 1. Траектории полета БЛА: а – траектория, вариант 1; б – траектория, вариант 2  
Fig. 1. Flight path: а – trajectory option 1; б – trajectory option 2

Величины отклонений траектории от заданных промежуточных точек пространства составили от 7 до 20 м, такой результат допустим для мониторинга поверхности.

### Заключение

Представлен метод для аналитического синтеза закона управления БЛА и на основе этого метода сформирована траектория полета БЛА, проходящая через определенные точки пространства. Данный метод дает возможность на стадии предварительного обоснования общего вида системы управления БЛА получить закон управления, являющийся оптимальным для математически определенного критерия качества управления. Дальнейшее техническое и практическое применение определенного закона управления для БЛА представляет собой отдельную задачу, определяемую необходимыми техническими и экономическими характеристиками БЛА.

### Список литературы

1. Лобатый, А.А., Икуас Ю.Ф. Оптимальное программное управление беспилотным летательным аппаратом. *Наука и техника*. 2012;3:17-20.
2. Красильщиков М.Н., Серябряков Г.Г. *Современные информационные технологии в задачах навигации и наведения беспилотных маневренных летательных аппаратов*. Москва: Физматлит; 2009.
3. Моисеев В.С. *Прикладная теория управления беспилотными летательными аппаратами*. Казань: ГБУ РЦМКО; 2013.
4. Пупков К.А., Егупов Н.Д. *Методы классической и современной теории автоматического управления*. Москва: МГТУ им. Н.Э. Баумана; 2004.
5. Брайсон А., Хо Ю. *Прикладная теория оптимального управления*. Москва: Мир; 1972.
6. Лобатый А.А., Аль-Машхадани М.А. Интервально-оптимальное программное управление летательным аппаратом. *Вестник БНТУ*. 2014;1:25-29.
7. He S., Shin H.-S., Tsourdos A. Trajectory optimization for target localization with bearing-only measurement. *IEEE Transactions on Robotics*. 2019;35:635-668. DOI: <https://doi.org/10.1109/TRO.2019.2896436>.
8. He S., Shin H.-S., Tsourdos A. Trajectory optimization for multitarget tracking using joint probabilistic data association filter. *Journal of Guidance, Control and Dynamics*. 2019;01:01-09 DOI: <https://doi.org/10.2514/1.G004249>.

### References

1. Lobaty A.A., Ikuas Y.F. [Optimal unmanned aerial vehicle control]. *Nauka i tekhnika=Science and Technology*. 2012;3:17-20 (in Russ.)
2. Krasilshchikova M.N., Serebryakova G.G. [*Modern information technologies in the problems of navigation and guidance of unmanned maneuverable aircraft*]. Moskva: Fizmatlit; 2009. (in Russ.)
3. Moiseev, V.S. [*Applied control theory of unmanned aerial vehicles*]. Kazan: GBU RCMKO; 2013. (in Russ.)
4. Pupkova K.A., Egupova N.D. [*Methods of the classical and modern theory of automatic control*]. Moskva: MGTU im. N.E. Bauman; 2004. (in Russ.)
5. Brajson A., Ho Y. [*Applied optimal control theory*]. Moskva: Mir; 1972. (in Russ.)
6. Lobaty A.A., Al-Mashkhadani M.A. [Interval optimal software control of the aircraft]. *Vestnik BNTU= Vestnik BNTU*. 2014;1:25-29. (in Russ.)
7. He S., Shin H.-S., Tsourdos A. Trajectory optimization for target localization with bearing-only measurement. *IEEE Transactions on Robotics*. 2019;35:635-668. DOI: <https://doi.org/10.1109/TRO.2019.2896436>.
8. He S., Shin H.-S., Tsourdos A. Trajectory optimization for multitarget tracking using joint probabilistic data association filter. *Journal of Guidance, Control and Dynamics*. 2019;01:01-09. DOI: <https://doi.org/10.2514/1.G004249>.

### Вклад авторов

Лобатый А.А. обосновал принципы и разработал общую методику формирования траектории полета БЛА на основе аналитических методов синтеза оптимального управления.

Бумай А.Ю. разработал алгоритм и компьютерную программу для математического моделирования движения беспилотного летательного аппарата по заданной траектории.

Ду Цзюнь выполнил расчеты для конкретного примера формирования траектории полета БЛА, а также принимал участие в интерпретации результатов.

### Authors contribution

Lobaty A.A. justified the principles and developed a general methodology of formation the flight path of an UAV based on analytical methods for the synthesis of optimal control.

Bumai A.A. developed an algorithm and a computer program for mathematical modeling of the movement of an unmanned aerial vehicle along a specified trajectory.

Du Jun performed calculations for a specific example of the formation of the flight path of an UAV, and also participated in the interpretation of the results.

#### Сведения об авторах

Лобатый А.А., д.т.н., профессор, заведующий кафедрой «Информационные системы и технологии» Белорусского национального технического университета.

Бумай А.Ю., аспирант Белорусского национального технического университета.

Ду Цзюнь, аспирант Белорусского национального технического университета.

#### Information about the authors

Lobaty A.A., PhD, Professor, Head of the Department “Information Systems and Technologies” of Belarusian National Technical University.

Bumai A.Y., PG student of Belarusian National Technical University.

Du Jun, PG student of the Belarusian National Technical University.

#### Адрес для корреспонденции

220013, Республика Беларусь,  
г. Минск, пр. Независимости, д. 65,  
Белорусский национальный  
технический университет  
тел. +375-29-346-82-56;  
Лобатый Александр Александрович  
тел. +375-29-365-57-57;  
e-mail: cikavycmok@gmail.com  
Бумай Андрей Юрьевич

#### Address for correspondence

220013, Republic of Belarus,  
Minsk, Nezavisimosti av., 65,  
Belarussian National Technical University  
tel. +375-29-346-82-56;  
Lobaty Alexander Alexandrovich  
tel. +375-29-365-57-57;  
e-mail: cikavycmok@gmail.com  
Bumai Andrei Yurevich