http://dx.doi.org/10.35596/1729-7648-2019-126-8-58-65

Оригинальная статья
Original paper

УДК 004.5;621.38

ТЕОРЕТИКО-МНОЖЕСТВЕННАЯ ОПЕРАЦИЯ ПЕРЕСЕЧЕНИЯ ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ-МНОГОУГОЛЬНИКОВ НА ПЛОСКОСТИ

БУТОВ А.А.

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники, г. Минск, Республика Беларусь

Поступила в редакцию 5 июня 2019

Аннотация. Технологический процесс изготовления сверхбольших интегральных схем включает в себя целый ряд этапов, одним из которых является подготовка с помощью систем автоматизированного проектирования входной информации для генератора изображений фотонаборной установки. Для каждого объекта топологии создается изображение, которое составляется из отдельных областей-прямоугольников, объединение которых дает изображение всего объекта. Создание управляющей программы для генерации изображения порождает большое число задач, многие из которых решаются методами вычислительной геометрии и оперируют обычно геометрическими объектами типа многоугольник или прямоугольник. При решении такого рода задач часто возникает необходимость в использовании теоретико-множественных операций над многоугольниками, позволяющих находить их объединение, пересечение и разность. Целью данной работы явилась разработка способов выполнения теоретико-множественной операции пересечения над топологическими объектами типа многоугольник. В работе проанализированы различные варианты пересечения сторон многоугольников между собой и введены понятия вырожденных и возможных точек пересечения. Сформулированы правила, позволяющие выявить вырожденные точки пересечения сторон многоугольников с целью уменьшения числа фрагментов, на которые разбиваются границы многоугольников точками пересечения, а также уточнить статус возможных точек пересечения. Предложены два метода нахождения пересечения многоугольников: более простой базовый метод, применимый для решения широкого круга практических задач, и более сложный общий метод, применяемый на практике значительно реже. Материал статьи относится к исследованиям, связанным с общей задачей по разработке программной системы подготовки топологической информации для микрофотонаборных генераторов изображений.

Ключевые слова: САПР СБИС, топологическое проектирование, вычислительная геометрия, теоретико-множественные операции, пересечение многоугольников.

Конфликт интересов. Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Для цитирования. Бутов А.А. Теоретико-множественная операция пересечения топологических объектов-многоугольников на плоскости. Доклады БГУИР. 2019; 7–8(126): 58-65.

SET-THEORETIC OPERATION OF INTERSECTION OF TOPOLOGICAL OBJECTS-POLYGONS ON THE PLANE

ALEKSEY A. BUTOV

Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics, Minsk, Republic of Belarus

Submitted 5 June 2019

Abstract. The technological process of manufacturing ultra-large integrated circuits includes a number of stages, one of which is the preparation with the help of computer-aided design of input information for the image generator photodetector. Creating a control program for image generation generates a large number of problems, many of which are solved by methods of computational geometry and usually operate with geometric objects such as polygon or rectangle. The purpose of this work was to develop methods for performing a set-theoretic intersection operation on topological objects of the polygon type. The paper analyzes the different variants of the intersection of the sides of polygons with each other and introduces the concept of degenerate and possible intersection points. The rules are formulated to identify degenerate points of intersection of the sides of polygons in order to reduce the number of fragments into which the boundaries of polygons are divided by intersection points, as well as to clarify the status of possible intersection points. Two methods of finding the intersection of polygons are proposed: a simpler basic method, applicable to a wide range of practical problems, and a more complex General method, used in practice much less often. The material of the article relates to research related to the General task of developing a software system for the preparation of topological information for microphotoset image generators.

Keywords: CAD VLSI, topological design, computational geometry, set-theoretic operations, intersection of polygons.

Conflict of interests. The author declares no conflict of interests.

For citation. Butov A.A. Set-theoretic operation of intersection of topological objects-polygons on the plane. Doklady BGUIR. 2019; 7–8(126): 58-65.

Введение

Одной из важных составных частей технологического процесса изготовления сверхбольших интегральных схем (СБИС) является подготовка с помощью систем автоматизированного проектирования (САПР) входной информации для генератора изображений фотонаборной установки. Для каждого объекта топологии создается изображение, которое составляется из отдельных областей-прямоугольников, объединение которых дает изображение всего объекта.

Создание управляющей программы для генерации изображения порождает большое число задач, многие из которых решаются методами вычислительной геометрии и оперируют обычно геометрическими объектами типа многоугольник или прямоугольник [1–6]. При решении такого рода задач часто возникает необходимость в использовании теоретико-множественных операций над многоугольниками, позволяющих находить их объединение [6], пересечение и разность. Данная статья посвящена разработке способов выполнения теоретико-множественной операции пересечения над топологическими объектами типа многоугольник.

Основные понятия и определения

Многоугольник M на плоскости задается своей границей – замкнутой непересекающейся ломаной линией, состоящей из отрезков прямых, или сторон, многоугольника. Эту границу можно определить упорядоченным множеством угловых точек, или вершин, многоугольника

$P = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$, получаемых при последовательном обходе его вдоль границы (рис. 1). В свою очередь, угловую точку p_i, где $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, можно задать парой (x_i, y_i) декартовых координат на плоскости.

Обход границы многоугольника, а также любые перемещения по отрезкам границы будем всегда выполнять в прямом порядке. При таком обходе отрезки границы ориентируются так, чтобы ближние к отрезку точки многоугольника всегда оставались слева.

Вершина p_1, которая служит начальной угловой точкой для последовательного обозначения отрезков, образующих границу многоугольника, называется начальной. В качестве начальной будем выбирать вершину, наиболее удаленную от начала координат.

Так как каждая пара соседних угловых точек ограничивает соответствующую сторону многоугольника, его границу можно задать также упорядоченной последовательностью сторон многоугольника $S = (s_1, s_2, \ldots, s_n)$, где $s_1 = (p_1, p_2)$, $s_2 = (p_2, p_3)$, …, $s_n = (p_n, p_1)$.

Каждой стороне s_i многоугольника поставим в соответствие ориентированную прямую v_i, содержащую точки p_i и p_{i+1}. Будем считать, что она ориентирована от p_i к p_{i+1}.

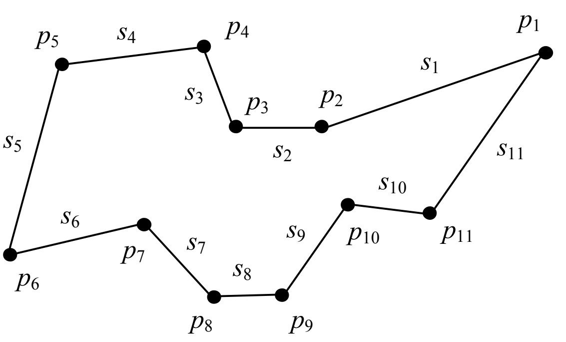


Рис. 1. Вершины и стороны многоугольника *M*
Fig. 1. Vertices and sides of polygon *M*

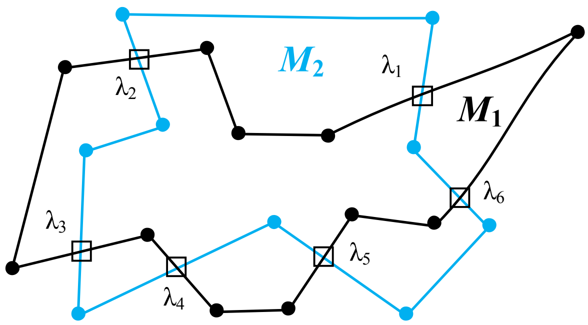


Рис. 2. Пересекающиеся между собой многоугольники M_1 и M_2
Fig. 2. Intersecting polygons M_1 and M_2

Внутренними углами многоугольника являются углы, ограничивающие область плоскости, которую занимает многоугольник, и образованные парами его смежных сторон. Если внутренний угол меньше 180°, будем называть его выпуклым, а если больше 180° – вогнутым (рис. 3).

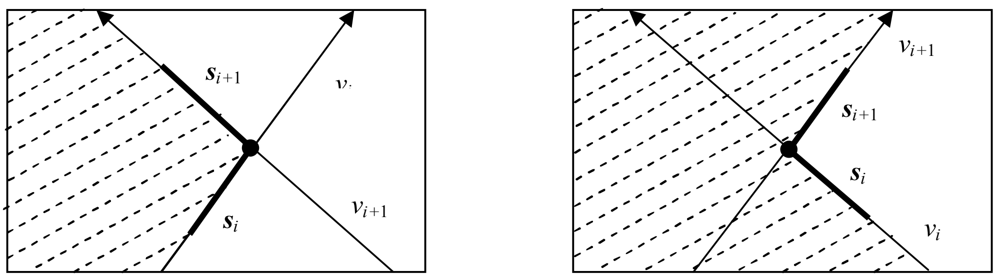


Рис. 3. Участки плоскости, ограниченные выпуклым (слева) и вогнутым (справа) углами
Fig. 3. Areas of the plane bounded by convex (left) and concave (right) angles

Рассмотрим теперь два пересекающихся между собой многоугольника M_1 и M_2 (рис. 2). Результирующий многоугольник M_R, полученный с помощью теоретико-множественной операции пересечения многоугольников M_1 и M_2, будет содержать в себе только те точки плоскости, каждая из которых принадлежит одновременно и многоугольнику M_1 и многоугольнику M_2. Любой из двух рассматриваемых многоугольников M_1 и M_2 будем называть сопряженным по отношению к другому многоугольнику.

Точки плоскости, в которых стороны многоугольников M_1 и M_2 пересекаются между собой, будут разбивать границу каждого из многоугольников на k отдельных фрагментов (на рис. 2 эти точки отмечены небольшими квадратами). Поэтому границы многоугольников M_1 и M_2 можно задать также с помощью упорядоченных множеств F_1 и F_2, содержащих фрагменты границ этих многоугольников.

Пользуясь терминологией теории графов, будем говорить, что фрагмент границы инцидентен точке пересечения, если он заканчивается или начинается в ней.

Рассмотрим теперь тот из многоугольников, начальная вершина которого более удалена от начала координат. Обозначим через λ_1, λ_2, …, λ_k точки пересечения его сторон в порядке их встречаемости при выполнении операции прямого обхода по границе, а фрагмент, инцидентный точкам пересечения λ_1 и λ_2, назовем стартовым фрагментом.

Фрагменты границы многоугольников M_1 и M_2, которые начинаются в точке пересечения λ_i и заканчиваются в точке пересечения λ_j, будем обозначать через $f_1(\lambda_i, \lambda_j)$ и $f_2(\lambda_i, \lambda_j)$ соответственно и называть альтернативными относительно друг друга. Таким образом, все фрагменты границы многоугольников M_1 и M_2 можно разбить на k пар альтернативных фрагментов. Из рис. 2 видно, что граница результирующего многоугольника M_R, полученного пересечением многоугольников M_1 и M_2, будет состоять из k фрагментов и включать в себя по одному фрагменту границы из каждой пары альтернативных фрагментов.

Варианты пересечений сторон многоугольников между собой

Пересечение первого типа. Это самый распространенный вариант пересечения сторон, который продемонстрирован на рис. 2. Здесь каждая из точек пересечения является внутренней точкой для каждой из сторон, образующих пересечение.

Пересечение второго типа. Этот вариант пересечения сторон характерен тем, что точка пересечения является внутренней точкой стороны одного многоугольника и концевой точкой двух смежных сторон другого многоугольника, т. е. совпадает с его вершиной (рис. 4).

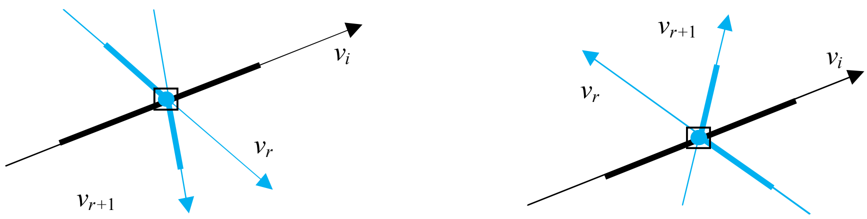


Рис. 4. Примеры пересечений второго типа
Fig. 4. Examples of intersections of the second type

Правило упрощения 1. Если обе смежные стороны многоугольника, образующие со стороной сопряженного многоугольника пересечение второго типа, целиком содержатся в одной из полуплоскостей, расположенных слева или справа от ориентированной прямой v_i (рис. 5), то такое пересечение будем называть вырожденным пересечением и считать, что в данном случае границы не пересекаются. Это влечет за собой уменьшение на единицу общего числа точек пересечения и общего числа фрагментов в границах каждого из многоугольников.

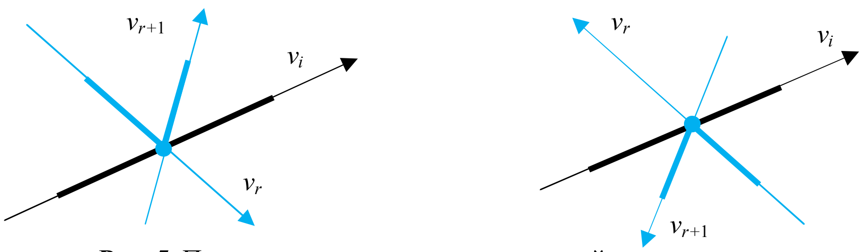


Рис. 5. Примеры вырожденных пересечений второго типа
Fig. 5. Examples of degenerate intersections of the second type

Пересечение третьего типа. Этот вариант пересечения сторон характеризуется тем, что точка пересечения является концевой точкой двух смежных сторон как в одном, так и в другом многоугольнике (рис. 6).

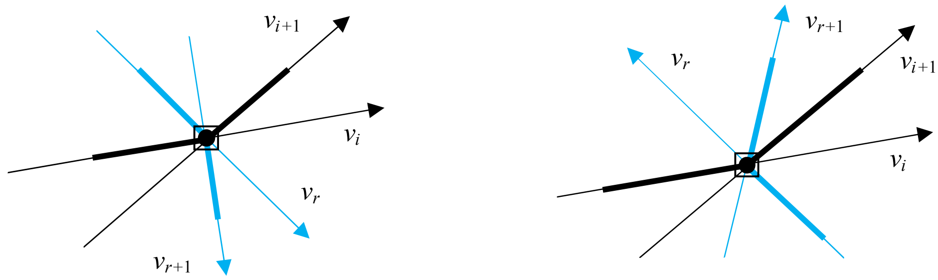


Рис. 6. Примеры пересечений третьего типа
Fig. 6. Examples of intersections of the third type

Правило упрощения 2. Если из точки пересечения третьего типа можно провести два луча, разбивающих всю плоскость на два больших сегмента так, что смежные стороны одного многоугольника окажутся в одном сегменте, а смежные стороны сопряженного – в другом сегменте (рис. 7), то такое пересечение будем называть вырожденным. Это, как и в случае вырожденного пересечения второго типа, влечет за собой уменьшение общего числа точек пересечения и общего числа фрагментов в границах каждого из многоугольников.

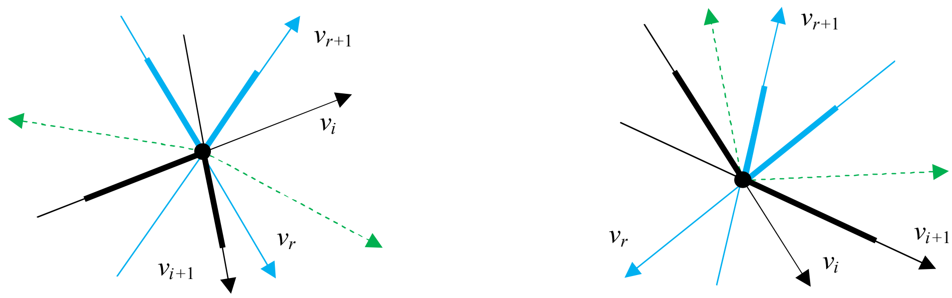
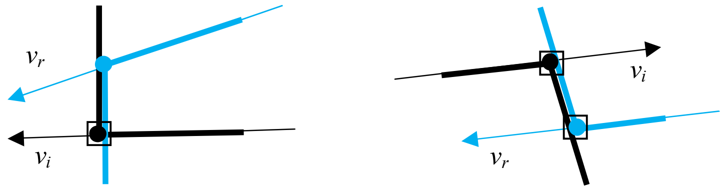


Рис. 7. Примеры вырожденных пересечений третьего типа
Fig. 7. Examples of degenerate intersections of the third type

Пересечение четвертого типа. Этот вариант пересечения сторон характерен тем, что сторона одного и сторона другого многоугольника лежат на одной прямой, при этом каждая из сторон включает в себя общий отрезок данной прямой. Концевые точки такого общего отрезка рассматриваются как возможные точки пересечения, каждая из которых после дополнительного анализа получит статус обычной или вырожденной точки пересечения. Анализ возможных точек пересечения на вырожденность с помощью приведенных ниже правил завершения выполняется по-разному в зависимости от ориентации на плоскости сторон, включающих в себя общий отрезок.

Правило завершения 1 применяется, если стороны, содержащие общий отрезок, имеют противоположную направленность. Анализируются внутренние углы многоугольников, связанные с концами общего отрезка. В случае выпуклого угла соответствующая возможная точка пересечения получает статус вырожденной точки пересечения, а в случае вогнутого угла – статус обычной точки пересечения. Соответствующие примеры приведены на рис. 8.

Правило завершения 2 применяется, если обе стороны, содержащие общий отрезок, однонаправленные. В данном случае одна из возможных точек пересечения, располагающихся по концам общего отрезка, будет начальной, а другая – конечной. Начальная точка λ_{begin} всегда преобразуется в вырожденную точку пересечения. Статус конечной точки λ_{end} определится позднее, в процессе реализации метода нахождения пересечения многоугольников (по аналогии с поздним связыванием в объектно-ориентированном программировании), когда станет ясно, по стороне какого из многоугольников следует перемещаться, чтобы достичь точки λ_{end}.



a *b*

Рис. 8. Примеры пересечений четвертого типа: *a* – одна точка пересечения; *b* – две точки пересечения
Fig. 8. Examples of intersections of the fourth type: *a* – one intersection point; *b* – two intersection points

Теперь предположим, что стала известна сторона одного из многоугольников (назовем ее λ_{end}-гранью), перемещение по которой позволит достичь конечной точки λ_{end}. В этом случае статус точки λ_{end} определяется путем анализа внутреннего угла, связанного с ней. Если одной из сторон, образующих внутренний угол, является λ_{end}-грань, то в случае выпуклого угла точка λ_{end} получает статус вырожденной точки пересечения, а в случае вогнутого угла – статус обычной точки пересечения. Если же внутренний угол образован сторонами сопряженного многоугольника, не содержащего λ_{end}-грани, то правило меняется на противоположное: для выпуклого угла точка λ_{end} преобразуется в обычную точку пересечения, а для вогнутого угла – в вырожденную точку пересечения.

Базовый метод нахождения пересечения многоугольников

Для широкого круга практических задач можно использовать следующий достаточно простой базовый метод нахождения пересечения многоугольников M_1 и M_2.

Сначала находятся все точки пересечения сторон многоугольников M_1 и M_2 между собой с последующим исключением всех вырожденных точек пересечения (возможные точки пересечения сохраняются).

Далее выполняется пошаговое формирование множества F_R, задающего границу результирующего многоугольника M_R, путем добавления в F_R на очередном шаге нового фрагмента, выбираемого из соответствующей пары альтернативных фрагментов. Первоначально множество F_R будет содержать в себе лишь стартовый фрагмент, начинающийся в точке пересечения сторон λ_1. Затем на каждом из шагов выполняются следующие действия.

Рассматривается точка пересечения λ_{cur}, в которой заканчивается последний добавленный в F_R фрагмент $f_\pi(\lambda_{cur-1}, \lambda_{cur})$, принадлежащий границе многоугольника M_π, где $\pi \in \{1, 2\}$. Если λ_{cur} является возможной точкой пересечения, то уточняется ее статус в соответствии с описанными выше правилами завершения, поскольку λ_{cur}-грань уже стала известна. В случае, когда λ_{cur} получает статус вырожденной точки пересечения, она удаляется, а последний добавленный в F_R фрагмент $f_\pi(\lambda_{cur-1}, \lambda_{cur})$ корректируется путем включения в него отрезков границы многоугольника M_π так, чтобы завершиться в следующей за λ_{cur} (в порядке прямого обхода) точке пересечения.

Если же точка пересечения λ_{cur} является обычной точкой пересечения (или стала ею после уточнения своего статуса), то множество F_R расширяется путем добавления фрагмента, начинающегося в точке λ_{cur} и принадлежащего границе многоугольника, сопряженного с многоугольником M_π.

Такое пошаговое формирование множества F_R, задающего границу результирующего многоугольника M_R, заканчивается тогда, когда граница станет замкнутой, т. е. конец последнего добавленного фрагмента совпадет с началом стартового фрагмента, начинающегося в точке пересечения сторон λ_1.

На рис. 9 изображены многоугольники M_1 и M_2, образующие различные типы пересечений своих сторон, и результирующий многоугольник M_R, граница которого отмечена пунктирной линией. Для простоты вершины многоугольников не отмечены кружками. Возможные точки пересечения, получившие статус обычной точки пересечения, обозначены более темными квадратами. Все вырожденные точки пересечения изображены светлыми квадратами.

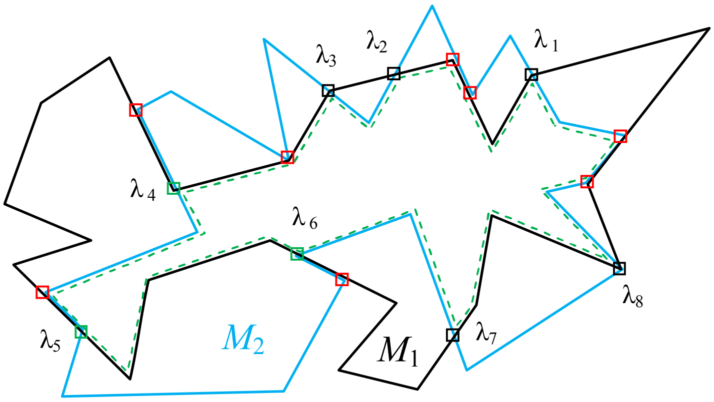


Рис. 9. Нахождение пересечения многоугольников M_1 и M_2 с помощью базового метода
Fig. 9. Finding the intersection of polygons M_1 and M_2 using the basic method

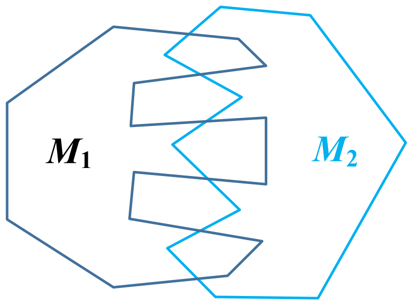


Рис. 10. Пример порождения нескольких результирующих многоугольников
Fig. 10. Example of generating multiple resulting polygons

Общий метод нахождения пересечения многоугольников

При решении задачи нахождения пересечения многоугольников M_1 и M_2 может возникнуть ситуация, когда результат пересечения будет представлять собой не один, а несколько многоугольников (рис. 10).

В этом случае результат пересечения многоугольников M_1 и M_2 будем задавать множеством $M_R^+ = \{M_R^1,\ M_R^2,\ \ldots,\ M_R^N\}$. Для нахождения элементов множества M_R^+ необходимо выполнить следующие действия над множеством точек пересечения $\Lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k)$ и границами многоугольников M_1 и M_2, задаваемыми множествами F_1 и F_2:

1. Сформировать пустое множество M_R^+.
2. К многоугольникам M_1 и M_2 применить базовый метод, после чего результирующий многоугольник M_R добавить в множество M_R^+ в качестве его первого элемента.
3. Из множества Λ удалить все точки пересечения, принадлежащие границе многоугольника M_R, вместе с инцидентными им фрагментами в множествах F_1 и F_2.
4. Если в множестве Λ найдется точка пересечения λ_i, имеющая лишь два инцидентных ей фрагмента, то выполнить следующие операции:

а) из точки λ_i с использованием правил базового метода совершать обход границы до тех пор, пока граница не замкнется; найденный многоугольник занести в множество M_R^+;

б) из множества Λ удалить все точки пересечения, принадлежащие границе найденного многоугольника, вместе с инцидентными им фрагментами.

Этап 4 повторяется до тех пор, пока множество Λ, а также множества F_1 и F_2 не станут пустыми. В результате процесс формирования множества M_R^+ будет завершен. Если же этап 4 не будет выполнен ни разу, то это означает, что базовый и общий методы порождают один и тот же результат, то есть $M_R^+ = M_R$.

Заключение

Работа посвящена рассмотрению одной из частных задач, решаемых в рамках САПР СБИС, – теоретико-множественной операции пересечения топологических объектов-многоугольников.

Предложены базовый и общий методы решения данной задачи. Более простой базовый метод позволяет решать широкий круг задач, часто встречающихся на практике, продуцируя один результирующий многоугольник. Более сложный общий метод применяется на практике реже, является расширением базового метода и позволяет находить результат, включающий в себя не один, а множество многоугольников.

Похожий, но более громоздкий метод пересечения многоугольников был ранее разработан, доведен до формы программ и опробован автором в составе автоматизированной системы подготовки информации для формирования фотошаблонов [2].

Список литературы

1. Фейнберг В.З. *Геометрические задачи машинной графики больших интегральных схем*. Москва: Радио и связь; 1987.
2. Шестаков Е.А., Бутов А.А., Орлова Т.Л., Воронов А.А. Автоматизированная система подготовки информации для формирования фотошаблонов. *Искусственный интеллект*. 2008;4:200-207.
3. Препарата Ф., Шеймос М. *Вычислительная геометрия: Введение*. Москва: Мир; 1989.
4. Шестаков Е.А. Декомпозиция многосвязного многоугольника в множество прямоугольников. *Вестник Брестского государственного технического университета. Физика, математика, информатика*. 2008;5:82-86.
5. Бутов А.А. Устранение избыточности в покрытии топологического объекта прямоугольниками. *Доклады БГУИР*. 2017;8:13-20.
6. Бутов А.А. Теоретико-множественная операция объединения многоугольников в задачах топологического проектирования. *Информатика*. 2019;16(1):93-102.

References

1. Fejnberg V.Z. [*Geometric problems of machine graphics of large integrated circuits*]. Moscow: Radio i svjyaz'; 1987. (In Russ.)
2. Shestakov E.A., Butov A.A., Orlova T.L., Voronov A.A. [Automated system of preparation of information for the formation of photomasks]. *Iskusstvennyy intellect = Artificial intelligence*. 2008;4:200-207. (In Russ.)
3. Preparata F., Sheymos M. [*Computational geometry: An Introduction*]. Moscow: Mir; 1989. (In Russ.)
4. Shestakov E.A. [Decomposition of a multi-connected polygon into a set of rectangles]. *Vestnik Brestskogo Gosudarstvennogo Tehnicheskogo Universiteta. Fisika, Matematika, Informatika=Bulletin of Brest state technical University. Physics, mathematics, computer science*. 2008;5:82-86. (In Russ.)
5. Butov A.A. [Eliminating redundancy in covering a topological object with rectangles]. *Doklady BGUIR = Doklady BGUIR.* 2017;8:13-20. (In Russ.)
6. Butov A.A. [A set-theoretic operation of combining polygons in topological design problems]. *Informatika = Informatics*. 2019;16(1):93-102. (In Russ.)

Сведения об авторе

Бутов А.А., к.т.н., доцент, доцент кафедры экономической информатики Белорусского государственного университета информатики и радиоэлектроники.

Information about the author

Butov .A., PhD, Associate Professor, Associate Professor of Economic Informatics Department of Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics.

Адрес для корреспонденции

220013, Республика Беларусь,
г. Минск, ул. П. Бровки, д. 6,
Белорусский государственный университет
информатики и радиоэлектроники
тел. +375-17-293-22-73;
e-mail: tmkrb9@gmail.com
Бутов Алексей Александрович

Address for correspondence

220013, Republic of Belarus,
Minsk, P. Brovka st., 6,
Belarusian State University
of Informatics and Radioelectronics
tel. + 375-17-293-22-73;
e-mail: tmkrb9@gmail.com
Butov Aleksey Alexandrovich