Министерство образования Республики Беларусь
Учреждение образования
«Белорусский государственный университет
информатики и радиоэлектроники»

Инженерно-экономический факультет

Кафедра экономики

В. А. Журавлёв

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ И МОДЕЛИ ПРИНЯТИЯ МАРКЕТИНГОВЫХ РЕШЕНИЙ

*Рекомендовано УМО по образованию
в области информатики и радиоэлектроники в качестве
учебно-методического пособия для специальности
1-28 01 02 «Электронный маркетинг»*

Минск БГУИР 2019

УДК 339.138:519.81(076)
ББК 65.291.3я73+22.18я73
Ж91

Р е ц е н з е н т ы:

кафедра маркетинга Белорусского национального технического университета (протокол №12 от 05.02.2019);

доцент кафедры промышленного маркетинга и коммуникаций учреждения образования «Белорусский государственный экономический университет» кандидат экономических наук, доцент А. Н. Саевец

Журавлёв, В. А.

Ж91 Математические методы и модели принятия маркетинговых решений : учеб.-метод. пособие / В. А. Журавлёв. – Минск : БГУИР, 2019. – 91 с. : ил.
ISBN 978-985-543-538-0.

Рассматриваются теоретические и методические вопросы принятия маркетинговых решений с использованием математических методов и моделей. Рассматриваются методы и модели статистического прогнозирования, оптимизации производства и распределения продукции, транспортная задача, методы и модели теории игр, модели теории массового обслуживания, экспертные методы принятия маркетинговых решений, методы принятия решений в условиях неопределенности и рисков. Материал сопровождается примерами с решениями. Приведены задания для контрольных и самостоятельных работ студентов.

УДК 339.138:519.81(076)
ББК 65.291.3я73+22.18я73

ISBN 978-985-543-538-0

Содержание

Предисловие

Учебно-методическое пособие написано в соответствии с типовой учебной программой по учебной дисциплине «Математические методы и модели принятия маркетинговых решений» для специальности 1-28 01 02 «Электронный маркетинг».

Работа специалистов-маркетологов предполагает проведение маркетинговых исследований, прогнозирование развития рынка и макро- и микросреды предприятия, разработку оптимальных маркетинговых решений с учетом конкуренции, неопределенности и рисков. Поэтому знание математических методов и моделей разработки и принятия маркетинговых решений с использованием математических методов, моделей и программных средств является обязательным требованием подготовки высококвалифицированных специалистов по специальности 1-28 01 02 «Электронный маркетинг».

Учебно-методическое пособие предусматривает системное изложение основных понятий математического моделирования, математических методов и моделей принятия маркетинговых решений.

Цель учебно-методического пособия – помочь студентам, изучающим дисциплину «Математические методы и модели принятия маркетинговых решений», овладеть теоретическими знаниями и практическими навыками разработки и принятия оптимальных маркетинговых решений с использованием математических методов и моделей.

1. Экономико-математическое моделирование и оптимизация экономических систем

Важной чертой современной экономики является применение экономико-математических методов и моделей для решения теоретических и практических задач. Для эффективного управления экономическими системами, объектами и процессами необходимо описание качественных и количественных характеристик их функционирования и развития. Эти описания формулируются в виде моделей экономических систем, объектов и процессов [1–5].

Экономическая система – совокупность экономических субъектов и процессов, совершающихся в мире, стране, регионе, отрасли, на предприятии на основе сложившихся отношений собственности и хозяйственного механизма.

Экономические системы могут быть рыночными и организационно-производственными. Элементами рыночных систем являются производители и потребители продукции, товаров и услуг на рынке; элементами организационно-производственных систем являются службы предприятий (отделы, цехи, участки).

Экономические процессы – процессы производства, распределения, обмена и потребления продукции, товаров и услуг в экономической системе.

По масштабу экономические системы делятся на глобальные, макро-, мезо- и микроэкономические.

Глобальные экономические системы – мировая экономика, экономические союзы государств, международные компании.

Макроэкономическая система – экономика страны.

Мезоэкономические системы – экономика отраслей и регионов.

Микроэкономические системы – предприятия и товарные рынки.

В экономических системах для производства требуются ***экономические ресурсы***. Ресурсы делятся на финансовые, материальные и трудовые, они выступают в качестве ограничений в экономических системах и процессах.

Экономические системы имеют одну или несколько ***целей функционирования*** и ***внешнюю среду***, в которой они находятся.

Целями функционирования экономических систем могут быть для страны – рост благосостояния общества, рост экспорта, снижение инфляции, стабильность национальной валюты и др.; для предприятий – рост прибыли и рентабельности, снижение затрат, повышение эффективности и конкурентоспособности предприятия на рынке.

Внешней средой для страны является мировой рынок, для отраслей и предприятий – внутренний и внешние рынки.

Модель экономической системы – формализованное описание реальной экономической системы или процесса. Моделирование – построение моделей реальных систем и процессов, их изучение и анализ с помощью моделей.

Главное требование, предъявляемое к моделям, – ***адекватность***, т. е. максимальное соответствие модели реальному объекту или процессу.

Экономико-математическая модель (ЭММ) – описание экономического объекта или процесса с помощью системы экономических показателей, математических формул и математических методов.

Математическими методами, применяемыми в ЭММ, являются: дифференциальное и интегральное исчисление, линейная алгебра, теория вероятностей, математическая статистика, математическое программирование, теория графов, теория игр, теория массового обслуживания, методы оценки рисков и принятия решений.

ЭММ имеют постоянные коэффициенты, экзогенные (входные), эндогенные (выходные), управляющие и управляемые переменные, ограничения и критерии оптимального функционирования системы.

Экзогенные переменные – внешние (входные) переменные, которые определяются вне модели. ***Эндогенные переменные*** – выходные переменные, которые определяются с помощью модели. Модель позволяет определить, как изменяются выходные эндогенные переменные при изменении входных экзогенных переменных (рис. 1.1).

Рис. 1.1. Экзогенные и эндогенные переменные модели

Задачей ЭММ является определение таких значений выходных и управляющих переменных, при которых критерии оптимального функционирования системы достигают наилучшего значения.

Экономико-математические модели ***классифицируются*** по разным признакам:

1) по применимости:

– *теоретические модели* предназначены для изучения общих экономических закономерностей и свойств рассматриваемых объектов и процессов;

– *прикладные модели* предназначены для определения и оценки параметров функционирования конкретных экономических объектов и процессов и принятия управленческих решений;

2) по изменению параметров:

– *непрерывные модели*, в которых параметры изменяются непрерывно;

– *дискретные модели*, в которых параметры изменяются дискретно;

3) *по учету времени:*

– *статические модели*, в которых значения всех параметров относятся к одному моменту или промежутку времени;

– *динамические модели*, в которых параметры изменяются во времени;

4) *по характеру причинно-следственных связей*:

– *детерминированные модели*, в которых предполагаются однозначные функциональные связи между показателями;

– *стохастические модели* имеют случайные переменные и используют методы теории вероятностей и математической статистики;

– *теоретико-игровые модели* описывают конкуренцию между субъектами экономических отношений;

5) *по целям моделирования*:

– аналитические – для анализа объектов и процессов;

– прогнозные – для прогнозирования развития процессов и явлений;

– оптимизационные – для определения оптимальных значений параметров объектов и процессов;

– модели принятия решений – для разработки и принятия оптимальных управленческих решений.

В маркетинге экономико-математические модели применяются для:

– анализа и прогнозирования развития рынков;

– оптимизации планов маркетинговой деятельности предприятий;

– принятия оптимальных решений по элементам комплекса 4Р;

– проведения маркетинговых исследований;

– анализа и оценки конкуренции на рынке;

– принятия маркетинговых решений в условиях неопределенности и рисков.

Основными этапами экономико-математического моделирования являются:

1) определение объекта моделирования: экономика страны, отрасль, регион, предприятие, товарный рынок, экономический процесс;

2) формулировка цели моделирования: анализ, прогнозирование, планирование, оптимизация, принятие решения;

3) выделение в объекте основных структурных и функциональных элементов и наиболее существенных качественных и количественных характеристик;

4) определение системы показателей, характеризующих объект моделирования: постоянные величины, экзогенные и эндогенные переменные; известные и неизвестные, управляющие и управляемые, целевые критерии; показатели эффективности;

5) разработка экономико-математической модели объекта. Формализация взаимосвязей между показателями с помощью математических формул. Определение критериев эффективности и оптимальности функционирования объекта (процесса);

6) проведение расчетов по модели и анализ результатов расчетов;

7) проверка адекватности модели реальному процессу. Если результаты неудовлетворительные, производится изменение модели и расчеты повторяются;

8) если результаты моделирования удовлетворительные, то они используются для принятия управленческих решений.

2. Маркетинговые решения предприятий и их оптимизация

2.1. Управление маркетингом на предприятии

Менеджмент в любой области экономической деятельности включает решение следующих основных задач [1, 2]:

1) анализ прошлого периода;
2) прогнозирование;
3) выявление проблем и возможностей в будущем периоде;

4) постановка целей и задач;
5) планирование;
6) организация работ;
7) координация работ;
8) контроль и мотивация;
9) совершенствование деятельности и менеджмента.

Управление маркетингом на предприятии включает решение следующих основных задач:

- анализ и прогнозирование развития рынков и спроса;
- определение целевых рынков и сегментов;
- выявление рыночных проблем и возможностей предприятия;
- постановка целей и задач на рынках и сегментах;
- разработка и реализация оптимальных маркетинговых стратегий, программ, проектов и планов;
- разработка оптимальных комплексов маркетинга для целевых рынков и сегментов;
- организация и координация маркетинговой деятельности;
- контроль и мотивация;
- проведение маркетинговых исследований;
- совершенствование маркетинговой деятельности.

Главными целями маркетинга предприятия являются:

1) максимальное удовлетворение потребностей потребителей;
2) увеличение объемов продаж и прибыли предприятия;
3) расширение рынков сбыта;
4) обеспечение конкурентоспособности и устойчивого положения предприятия на рынке.

На предприятии есть следующие ***уровни управления маркетингом***:

1) стратегический – разработка миссии и стратегии предприятия, выбор целевых рынков и сегментов, постановка целей и задач на срок более 5 лет;

2) тактический – разработка и реализация маркетинговых программ и проектов на период 2–5 лет;

3) оперативный – разработка и реализация планов маркетинга на 1 год в рамках бизнес-плана предприятия;

4) операционный – осуществление мероприятий и выполнение работ, запланированных в годовом плане маркетинга;

5) организационный – организация решения задач маркетинга на каждом уровне управления;

6) контроля – анализ и оценка уровня достижения целей и решения задач маркетинга.

Маркетинговая стратегия – долгосрочные (более 5 лет) направления деятельности предприятия на рынке.

Для достижения своих целей на рынке предприятия применяют следующие основные виды ***маркетинговых стратегий***:

1) недифференцированный маркетинг – предприятие применяет один комплекс маркетинга для всего рынка;

2) дифференцированный маркетинг – предприятие применяет разные комплексы маркетинга для разных рынков и сегментов;

3) специализация на сегменте – предприятие производит разные товары для одного сегмента;

4) концентрированный маркетинг, узкая специализация – предприятие производит один товар для одного сегмента;

5) полный охват рынка – предприятие стремится захватить весь рынок данного товара.

В зависимости от положения на рынке предприятия могут применять следующие виды маркетинговых стратегий:

- атакующая – завоевание и расширение рынка;
- оборонительная – сохранение существующей позиции на рынке;
- отступление – сокращение продаж, уход с рынка для снижения издержек.

Маркетинговые стратегии реализуются с помощью *маркетинговой политики, маркетинговых программ, проектов и планов.*

Маркетинговая политика – это способы реализации маркетинговых стратегий, программ и планов в плановом периоде. Маркетинговая политика строится по элементам комплекса 4P.

Маркетинговая политика предприятия может быть разной на разных рынках и сегментах и изменяться в зависимости от ситуации на рынке (табл. 2.1).

Таблица 2.1

Виды маркетинговой политики предприятия

№ п/п	Маркетинговая политика	Содержание
1	Товарная	Совершенствование номенклатуры и ассортимента продукции, товаров, услуг. Определение оптимальных объемов производства для обеспечения прибыли и конкурентоспособности предприятия и лучшего удовлетворения потребителей
2	Ценовая	Определение ценовой стратегии, оптимальных цен, наценок и скидок для обеспечения рентабельности и конкурентоспособности продукции, товаров, услуг
3	Распределительная и сбытовая	Выбор целевых рынков и способов оптимального доведения продукции до потребителей. Формирование сбытовой сети
4	Коммуникационная	Использование маркетинговых коммуникаций: рекламы, выставок, ярмарок, тендеров, методов стимулирования продаж, интернет-маркетинга

Маркетинговая программа – долгосрочный, стратегический план инновационной и производственно-сбытовой деятельности предприятия, направленный на достижение маркетинговых целей в среднесрочном и долгосрочном периодах, оптимально увязывающий цели фирмы и ее возможности в сфере маркетинга. Маркетинговая программа состоит из комплекса маркетинговых проектов.

Маркетинговый проект – комплекс взаимосвязанных работ, который должен быть выполнен в заданное время и принести требуемый маркетинговый результат.

Годовой план маркетинга – часть годового бизнес-плана предприятия, включает в себя задания по выполнению маркетинговых проектов и программ.

Контроль маркетинга – анализ и оценка результатов маркетинговой деятельности за отчетный период и выполнение корректирующих действий, обеспечивающих достижение целей маркетинга предприятия в плановом периоде.

Объектами контроля в плановом периоде являются:

- цели и задачи маркетинга на рынках и сегментах;
- целевые показатели маркетинга;
- объемы продаж и прибыли, доля рынка;
- соотношение затрат на маркетинг с объемами продаж и прибыли;
- конкурентоспособность продукции, товаров и услуг предприятия;
- мероприятия маркетинга.

2.2. Маркетинговые решения предприятия

Маркетинговые решения (МР) – решения, принимаемые при разработке и реализации маркетинговой стратегии, маркетинговой политики, маркетинговых программ, проектов и планов, элементов комплекса маркетинга 4P, маркетинговых исследований, маркетинговых рекомендаций (табл. 2.2) [2, 5].

Главная цель маркетинговых решений – обеспечить устойчивое положение, конкурентные преимущества и развитие предприятия на рынке.

Маркетинговые решения можно разделить на три уровня:

1) ***стратегические решения*** – долгосрочные решения на 5 и более лет, которые подразумевают выбор видов деятельности, целевых рынков, сегментов и номенклатуры производимой продукции;

2) ***тактические решения*** **–** среднесрочные решения на 2–5 лет, которые подразумевают формирование сбытовой сети, развитие ассортимента продукции, товаров и услуг;

3) ***оперативные решения*** – краткосрочные решения на плановый год и в течение года, принимаются для управления объемами производства, продаж, ценами и продвижением продукции на рынке, а также для проведения маркетинговых исследований.

Таблица 2.2

Основные виды маркетинговых решений предприятия

Решения	Методы принятия решений
1. На уровне предприятия	
1) выбор вида деятельности; 2) определение миссии предприятия; 3) выбор целевых рынков и сегментов; 4) разработка маркетинговой стратегии, программ, проектов и планов для рынков и сегментов; 5) определение товарной, ценовой, сбытовой и коммуникационной политики	1) прогнозирование спроса и развития рынков и сегментов; 2) построение «дерева целей и задач» предприятия; 3) SWOT- и PEST-анализ; 4) оценка конкурентоспособности предприятия; 5) оценка рисков; 6) экспертные и статистические методы; 7) экономико-математические методы и модели оптимизации маркетинговой деятельности; 8) маркетинговые исследования
2. По товарной политике	
1) определение оптимальной номенклатуры, ассортимента и объемов производства продукции, товаров, услуг; 2) позиционирование продукции на рынках и сегментах; 3) планирование стадий жизненного цикла товаров; 4) планирование новых товаров	1) сегментирование рынков; 2) определение емкости и потенциала рынков и сегментов; 3) прогнозирование спроса на продукцию, товары, услуги; 4) ABC- и XYZ-анализ продаж; 5) анализ сезонных колебаний продаж; 6) оценка конкурентоспособности продукции, товаров, услуг; 7) оценка точки безубыточности производства; 8) координаты Абеля, матрицы Ансоффа и БКГ; 9) экспертные и статистические методы; 10) экономико-математические методы и модели оптимизации товарной политики; 11) маркетинговые исследования

Окончание табл. 2.2

3. По ценовой политике	
1) определение оптимальных ценовых стратегий на рынках и сегментах; 2) выбор методов ценообразования; 3) определение уровней и динамики цен; 4) определение наценок и скидок	1) прогнозирование цен; 2) анализ цен конкурентов; 3) экономические расчеты; 4) экспертные и статистические методы; 5) экономико-математические методы и модели оптимизации ценовой политики; 6) маркетинговые исследования
4. По сбытовой политике	
1) определение оптимальных целевых рынков, сегментов и потребителей; 2) оптимальное распределение продукции между рынками, сегментами и потребителям; 3) формирование эффективной сбытовой системы; 4) определение каналов дистрибуции	1) прогнозирование спроса на рынках и сегментах; 2) метод точки безубыточности продаж; 3) метод точки безразличия в каналах дистрибуции; 4) экспертные и статистические методы; 5) экономико-математические методы и модели оптимизации сбыта; 6) маркетинговые исследования
5. По коммуникационной политике	
1) определение оптимальной коммуникационной политики и развитие интернет-маркетинга; 2) оценка затрат на коммуникационную политику; 3) оценка эффективности инструментов коммуникационной политики; 4) планирование коммуникационной политики	1) экспертные и статистические методы; 2) прогнозирование эффективности инструментов коммуникационной политики; 3) экономико-математические методы и модели оптимизации коммуникационной политики; 4) маркетинговые исследования

Эффективность маркетинговых решений определяется соотношением затрат и результатов, объемами продаж, выручки и прибыли от их реализации.

Есть две постановки задачи ***оптимизации маркетинговых решений***:

- ***максимизировать требуемый результат*** (например, прибыль) при заданных ограничениях на имеющиеся ресурсы;
- ***минимизировать затраты*** для получения требуемого результата.

Для принятия *оптимальных маркетинговых решений* рассматривается несколько вариантов решений и выбирается тот вариант, который является лучшим по одному или нескольким критериям.

Критериями оптимизации в маркетинге обычно являются максимум прибыли и объемов продаж, минимум затрат. При оптимизации учитываются ограничения на используемые финансовые, материальные, временные и другие ресурсы.

3. Методы и модели прогнозирования в маркетинге

3.1. Основные виды прогнозов в маркетинге

Современная концепция маркетинга основана на том, что вся деятельность предприятия должна основываться на знании потребностей рынка и покупательского спроса, оценке и учете их изменений в ближайшей и более отдаленной перспективе [1, 2, 5].

Прогнозирование является важнейшим элементом принятия маркетинговых решений, оно создает информационную основу для принятия маркетинговых решений.

Объектами прогнозирования в маркетинге являются: емкость, потенциал и конъюнктура рынков и сегментов, потребности потребителей, уровень конкуренции, объемы продаж, цены, выручка, прибыль, оптимальная структура комплекса 4P предприятий и торговых организаций [2].

> ***Прогноз*** – научно обоснованное, вероятностное, многовариантное представление о будущем развитии объекта прогнозирования, его внешней среды и факторов на них влияющих, а также о возможных состояниях объекта в будущем и альтернативных путях и средствах их достижения.
> ***Цель прогнозирования*** – создать научную и информационную основу для планирования и принятия оптимальных маркетинговых решений.

Важнейшее требование к прогнозам – их *обоснованность.*

Обоснованность прогнозов заключается в том, чтобы руководствоваться теорией изучаемых процессов и явлений, использовать достоверную информацию, применять научные методы прогнозирования, предвидеть ближайшие и более отдаленные перспективы развития исследуемой области.

Основными видами прогнозов являются:

1) по времени:
- *долгосрочные,* на срок более 5 лет;
- *среднесрочные,* на 3–5 лет;
- *краткосрочные,* на 1–2 года;
- *оперативные* в течение года.

2) по характеру:
- *инерционные* – предполагают, что все будет развиваться как и в предыдущем периоде;
- *программные* – разрабатываются с учетом реализации программ, проектов, планов и других управленческих решений.

- *точечные* – дается одно прогнозное значение для каждого периода прогнозирования;
- *интервальные* – для каждого прогнозного периода дается интервал прогнозных значений с вероятностями их осуществления.

Обычно рассматривают три варианта прогнозов:

1) *оптимистический* – предполагается, что ситуация будет улучшаться;
2) *пессимистический* – предполагается, что ситуация будет ухудшаться;
3) *наиболее вероятный* – имеет наибольшую вероятность осуществления.

Каждый из вариантов характеризуется *вероятностью осуществления.*

Прогнозирование включает следующие этапы:

1) анализ прошлого периода и тенденций развития объекта (процесса);
2) выбор методов и моделей прогнозирования;
3) разработку прогноза, учитывающего сложившиеся тенденции, развитие внешней среды и намеченные цели;
4) оценку возможных последствий принимаемых решений.

На основе прогнозов разрабатываются маркетинговые планы и принимаются маркетинговые решения.

Основными методами и моделями прогнозирования являются:

1) статистические (трендовые, регрессионные и эконометрические модели);
2) экспертные (метод Дельфи, сценарии, аналогии и др.);
3) экономико-математические (матричные, оптимизационные, динамические модели).

3.2. Статистические методы и модели прогнозирования

Основными показателями статистического прогнозирования в маркетинге являются спрос, продажи, цены, товарные запасы. Для разработки прогнозов этих показателей используются *ряды их динамики* за прошлый период [3, 5, 8].

При статистическом прогнозировании оценивают колебания прогнозируемого показателя в прошлом периоде, т. к. они определяют точность прогноза.

Колебания прогнозируемого показателя могут быть следующих видов:

1) *случайные колебания* – считаются нормально распределенной случайной величиной с нулевым средним;
2) *сезонные колебания* – повторяются ежегодно по кварталам относительно среднеквартальных значений;
3) *спекулятивные колебания спроса и цен* – зависят от действий крупных покупателей и продавцов на товарных, фондовых и валютных биржах;
4) *экономические циклы деловой активности:*

- краткосрочные циклы Китчина (3–4 года), вызванные обновлением потребительских товаров длительного пользования;
- среднесрочные циклы Жюгляра (7–11 лет), вызванные обновлением основного капитала;
- долгосрочные циклы Кондратьева (40–60 лет), вызванные изменением технологических укладов.

С ускорением технического прогресса длительность этих циклов сокращается.

Статистическое прогнозирование заключается в анализе данных прошлого периода и построении прогнозной модели так, чтобы ее отклонения от фактических значений прошлого периода были минимальными и сохранялась тенденция прошлого периода. При статистическом прогнозировании обычно требуется, чтобы прошлый период (*база прогноза*) *был в 3-4 раза больше периода прогнозирования*.

Основными моделями статистического прогнозирования являются модели трендов, метод гармоник Фурье, регрессии и эконометрические модели.

Тренд – устойчивая средняя тенденция изменения показателя во времени, или функция, выражающая среднюю тенденцию.

Применяют две основные модели статистического прогнозирования – *аддитивную* и *мультипликативную*.

Аддитивная модель прогнозирования показателя имеет вид

$$Y^{*}(t) = \overline{Y}(t) + F_{п}(t) + \varepsilon(t), \tag{3.1}$$

где $Y^{*}(t)$ – прогнозная модель значений показателя; $\overline{Y}(t)$ – функция тренда; $F_{п}(t)$ – периодическая составляющая; $\varepsilon(t)$ – случайная составляющая, t – номер периода времени (t = 1, 2, 3, n).

Обычно считается, что $\varepsilon(t)$ нормально распределенная случайная величина с нулевым средним, среднеквадратичное отклонение которой определяется по данным прошлого периода.

Последний номер прошлого периода равен n, *прогнозные периоды* t = n + 1, n + 2, n + 3, … . Периодами могут быть дни, месяцы, кварталы, годы.

Периодическая составляющая $F_{п}(t)$ моделируется с помощью метода гармоник Фурье. Если периодических колебаний фактического ряда показателя нет, то в формуле (3.1) периодическая составляющая $F_{п}(t)$ *не учитывается*.

Прогнозирование предполагает *продолжение значений прогнозной модели* в будущее, т. е. *экстраполяцию* прогнозной модели (3.1).

Метод экстраполяции исходит из того, что условия, определяющие развитие процесса в прошлом, существенно не изменятся в будущем. Метод экстраполяции применяется для разработки *инерционных прогнозов*, поэтому метод экстраполяции применяют совместно с *экспертными оценками*.

Основным этапом метода экстраполяции является выбор оптимальной функции тренда**.** Для построения функции тренда $\overline{Y(t)}$ используется ***метод наименьших квадратов*** (МНК), который состоит в выборе функции тренда, которая минимизирует сумму квадратов отклонений значений функции тренда от соответствующих значений исходного ряда:

$$\min \sum (Y(t) - \overline{Y(t)})^2 , \tag{3.2}$$

где $Y(t)$ – ряд фактических значений показателя; $\overline{Y(t)}$ – функция тренда.

Сумма (3.2) берется по значениям прошлого периода. Выбирается такая функция тренда, которая дает минимальное значение суммы (3.2).

При выборе функции тренда используются несколько основных моделей тренда (табл. 3.1).

Таблица 3.1

Основные модели функции тренда

№ п/п	Модели тренда	Функция тренда	Приведение к линейному виду
1	Линейная	$y = a_0 + a_1t$	Не надо
2	Полиномиальная	$y= a_0 + a_1t + a_2t^2 + \ldots + a_mt^m$	Не надо
3	Экспоненциальная	$y = a + b \cdot e^{c \cdot t}$	$Y = \ln(y - a)$
4	Степенная	$y = a + b \cdot t^c$	$Y = \ln(y - a)$, $T = \ln(t)$
5	Логарифмическая	$y = a + b \cdot \ln(t)$	$T = \ln(t)$
6	Гиперболическая, тип 1	$y = a + b/t$	$T = 1/t$
7	Гиперболическая, тип 2	$y = a + 1/(в + c \cdot t)$	$Y = 1/y$
8	Гиперболическая, тип 3	$y = t/(a + b \cdot t)$	$Y = 1/y$, $T = 1/t$

Модель функции тренда выбирается исходя из сопоставления графика показателя, вида функции тренда и *качественной характеристики динамики экономического процесса*.

Линейная модель тренда применяется для равномерно развивающихся во времени процессов. Коэффициенты линейной модели тренда определяются по формулам:

$$a_1 = \frac{\overline{t \cdot Y} - \bar{t} \cdot \overline{Y}}{\overline{t^2} - \bar{t}^2},$$
$$a_0 = \overline{Y} - a_1 \cdot \bar{t}. \tag{3.3}$$

Полиномиальная модель применяется для неравномерных процессов. Коэффициенты (a_0, a_1, …, a_n) полиномиальной модели тренда определяются из системы линейных уравнений:

$$a_0 + a_1\bar{t} + a_2\overline{t^2} + \ldots + a_n\overline{t^n} = \bar{y},$$
$$a_0\bar{t} + a_1\overline{t^2} + \ldots + a_n\overline{t^{n+1}} = \overline{yt},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a_0\overline{t^n} + a_1\overline{t^{n+1}} + \ldots + a_n\overline{t^{2n}} = \overline{yt^n}. \tag{3.4}$$

Коэффициенты других *нелинейных моделей функций тренда* из табл. 3.1 определяются путем их преобразования в линейный тренд с помощью замены переменных и обратных преобразований.

Модели и графики функции тренда легко построить с помощью построителя графиков EXCEL.

Точность аппроксимации функцией тренда исходного ряда определяется ***коэффициентом детерминации*** (аппроксимации) R^2, который принимает значения в интервале $0 < R^2 < 1$.

Чем ближе R^2 к единице, тем точнее тренд приближает данные *прошлого периода* (табл. 3.2).

Таблица 3.2

Точность аппроксимации функции тренда

Значение R^2	0,9–1,0	0,7–0,9	0,5–0,7	0,3–0,5	0,3–0
Точность аппроксимации	Высокая	Хорошая	Средняя	Низкая	Плохая

Для прогнозирования выбирают модель тренда так, чтобы она имела *максимальное значение* R^2 и ***сохраняла среднюю тенденцию ряда в будущем периоде***. Модели тренда используются для краткосрочного прогнозирования на 1–3 периода, поэтому *за базу прогноза надо брать 4–6 значений прошлого периода.*

При статистическом прогнозировании рассматривают *точечный* и *интервальный прогнозы.*

Точечный прогноз (point prediction) – прогноз, в котором дается единственное значение прогнозируемого показателя для каждого прогнозного периода по модели (3.1).

Интервальный прогноз (interval prediction) определяет некоторый *доверительный* интервал прогнозных значений для каждого прогнозного периода, который учитывает *случайные колебания* ряда в модели (3.1).

Интервальный прогноз характеризуется *доверительным интервалом* и *доверительной вероятностью* попадания фактических значений ряда в прогнозный интервал.

Пример 3.1. Построить модель тренда и дать точечный и интервальный прогноз на два периода (табл. 3.3). Считаем, что периодических колебаний у показателя нет, колебания ряда носят случайный характер.

Таблица 3.3

Данные прошлого периода для примера 3.1

Номер периода (t)	1	2	3	4	5	6	7
Продажи (Y)	60	54	62	80	90	83	93

Решение. Ряд имеет растущую динамику. Рассмотрим линейную модель тренда, которую построим с помощью построителя графиков EXCEL (рис. 3.1).

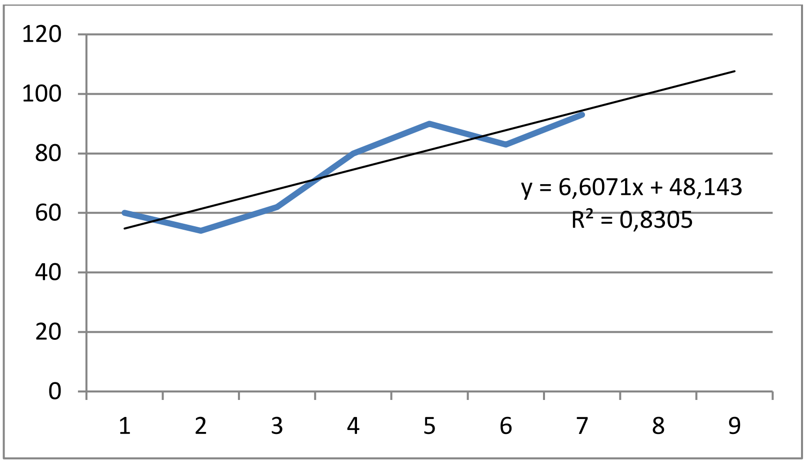

Рис. 3.1. Прогноз продаж с помощью линейной функции тренда

Коэффициент детерминации данной функции тренда $R^2 = 0,83 = 83$ %, т. е. линейная модель хорошо отражает среднюю динамику ряда. Более точной будет аппроксимация полиномиальными функциями, но они *не сохраняют* среднюю тенденцию ряда.

Поэтому для прогнозирования выберем линейную модель тренда $Y(t) = 48,14 + 6,607 \cdot t$ и построим точечный и интервальный прогноз.

Точечный прогноз. Прогнозные значения ряда на два года по линейной модели тренда равны $Y(8) = 48,14 + 6,607 \cdot 8 = 101$, $Y(9) = 48,14 + 6,607 \cdot 9 = 107,6$. Точечный прогноз с помощью линейной модели тренда: $Y(8) = 101$; $Y(9) = 107,6$.

Интервальный прогноз. Считаем, что колебания ряда носят случайный характер и определяем *интервальный прогноз* по линейной модели тренда.

Интервальный прогноз определяется интервалами

$$(\hat{Y}(n+\tau) - \Delta(\tau, p),\ \hat{Y}(n+\tau) + \Delta(\tau, p)), \tag{3.5}$$

где τ – период прогноза (1, 2, …); $\Delta(\tau, p)$ – ошибка прогноза; p – доверительная вероятность; n – последнее значение прошлого периода.

Определим интервальный прогноз для $\tau = 1$, $\tau = 2$, $p = 0,8$, $p = 0,95$.

1. Ошибка прогноза равна

$$\Delta(\tau, p) = t(k, p) \cdot S_{тр} \cdot K_{\tau}, \tag{3.6}$$

где $k = n - m$ – число степеней свободы трендовой модели; где n – длина ряда; m – количество параметров модели; p – доверительная вероятность; τ – период прогноза; K_{τ} – коэффициент ошибки.

2. Среднеквадратичная ошибка тренда $S_{тр}$:

$$S_{тр} = \sqrt{\frac{\sum_{t=1}^{n}(Yt - \hat{Y_t})^2}{n-m}} = \sqrt{\frac{893,75}{7-2}} = 7,06, \tag{3.7}$$

где Yt – значения ряда; $\hat{Y}t$ – значения тренда.

3. Коэффициент доверительной вероятности $t(k;p)$находится по таблице Стьюдента $t(n-m;p)$, $t(5; 0,8) = 1,456$, $t(5; 0,95) = 2,57$. В нашем случае $n = 7$, $m = 2$, $\tau = 1$ и 2.

4. Коэффициент ошибки K_τ равен

$$K_\tau = \sqrt{\frac{(\tau+\frac{n-1}{2})^2 \cdot 12}{(n^2-1)\cdot n} + \frac{n+1}{n}}. \tag{3.8}$$

Таким образом, $K_1 = 1,31$; $K_2 = 1,43$.

Определим ошибку прогноза $\Delta(\tau, p)$ по формуле (3.6):

$\Delta(1; 0,8) = 13,47$; $\Delta(2; 0,8) = 14,7$; $\Delta(1; 0,95) = 23,78$; $\Delta(2; 0,95) = 25,95$.

Интервальный прогноз представлен в табл. 3.4.

Таблица 3.4

Прогноз показателя для t = 8 и t = 9

Прогноз-ный период	Точечный прогноз	Интервальный прогноз, p = 0,8	Интервальный прогноз, p = 0,95
t = 8 (τ = 1)	101,0	(87,53; 114,47)	(77,22; 124,78)
t = 9 (τ = 2)	107,6	(92,9; 122,3)	(81,65; 133,55)

При увеличении периода прогнозирования и доверительной вероятности ошибка интервального прогноза *увеличивается.* Поэтому статистические прогнозы должны дополняться экспертными оценками.

Пример 3.2. Построить монотонный тренд и дать точечный прогноз на два периода. Ряд имеет тенденцию снижения и предполагается, что колебания ряда носят случайный характер (3.5).

Таблица 3.5

Данные прошлого периода для примера 3.2

Период (t)	1	2	3	4	5	6	7	8
Y(t)	16	10	9	7	7,5	6	7	4

Решение. На рис. 3.2 показана логарифмическая модель тренда, построенная с помощью EXCEL.

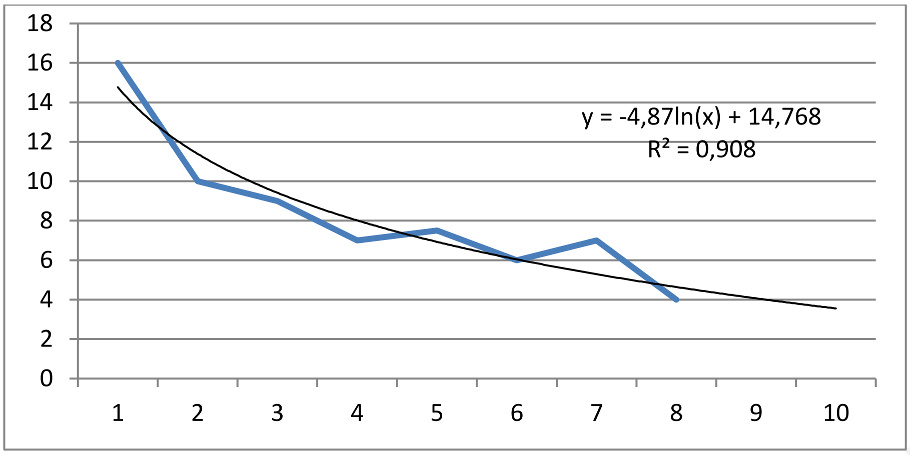

Рис. 3.2. Логарифмический тренд с прогнозом на два периода

Коэффициент детерминации логарифмической функции тренда $R^2 = 0{,}908 = 90{,}8$ %, т. е. аппроксимация высокая, трендовая модель хорошо отражает среднюю тенденцию ряда.

Точечный прогноз значений ряда на два периода равен

$$Y(9) = 4{,}87 \cdot \ln(9) + 14{,}76 = 4{,}06,$$
$$Y(10) = 4{,}87 \cdot \ln(10) + 14{,}76 = 3{,}55.$$

Метод гармоник Фурье [2]

Метод гармоник Фурье применяется для анализа и прогнозирования периодической составляющей модели (3.1), сезонных колебаний и циклов деловой активности. Модель прогнозирования (3.1) на основе гармоник Фурье имеет вид

$$Y^*(t) = \overline{Y}(t) + F(t) + \varepsilon_t, \tag{3.9}$$

где $\overline{Y}(t)$ – функция тренда; F(t) – периодические гармоники Фурье; t – интервалы времени (месяцы, кварталы, годы).

По фактическим данным Y(t) подбирается монотонная функция тренда $\overline{Y}(t)$ с максимальным значением коэффициента детерминации R^2. Затем определяется отклонение фактических данных от тренда $Z(t) = Y(t) - \overline{Y}(t)$.

Для ряда Z(t) определяется модель гармоник Фурье по формулам [2]:

$$\begin{gathered} F(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{m} a_k \cos kt + b_k \sin kt, \\ a_0 = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} Z_t,\ a_k = \frac{2}{n}\sum_{t=1}^{n} Z_t \cos kt,\ b_k = \frac{2}{n}\sum_{t=1}^{n} Z_t \sin kt, \end{gathered} \tag{3.10}$$

где k – номер гармоники, обычно берется m от 1 до 3.

Мультипликативная модель статистического прогнозирования

Мультипликативная модель прогнозирования имеет вид

$$Y_t^* = \overline{Y}_t \cdot I_t^k + \varepsilon_t, \qquad (3.11)$$

где Y^*_t – мультипликативная модель ряда; $I_t^к$ – прогнозные индексы колебаний; $\overline{Y}_t$ – монотонная функция тренда.

Сначала строится монотонный тренд с максимальным R^2. Индексы колебаний определяются как отношение фактических значений ряда к значениям тренда за прошлый период. За прогнозные индексы берутся средние арифметические индексов за 2–3 прошлых периода.

Пример 3.3. На основе квартальных данных за три года дать прогноз квартальных колебаний продаж по мультипликативной модели на один год.

Решение. В случае квартальных колебаний в качестве функции тренда берется среднеквартальное значение. Определяются индексы квартальных колебаний продаж и средние индексы за три года (табл. 3.6).

Таблица 3.6

Расчет индексов квартальных колебаний для примера 3.3

Кварталы (i)	Первый год		Второй год		Третий год		Средние индексы CI_i
	$ПК_i$	I_i	$ПК_i$	I_i	$ПК_i$	Ii	
1	8	0,64	10	0,70	9,5	0,71	0,68
2	10	0,8	12	0,84	11	0,82	0,82
3	20	1,6	22	1,54	21	1,57	1,57
4	12	0,96	13	0,91	12	0,90	0,92
За год	50	4,0	57	4,00	53,5	4,00	4,00
Среднее за квартал	12,5	1,0	14,25	1,0	13,38	1,0	1,0

Здесь $ПК_i$ – квартальные продажи; I_i – индексы квартальных колебаний продаж; CIi – средние квартальные индексы за прошлый период; i – номер квартала.

$$I_i = ПКi/СКП,$$
$$СКП=ГП/4,$$

где СКП – среднеквартальные продажи за год; ГП – годовые продажи.

Годовые продажи (ГП) прогнозируем методами средних индексов и приростов, функцией тренда или экспертно.

Пусть *прогноз годовых продаж* ГПр = 55,28. Тогда *прогноз среднеквартальных продаж* ПрСК = ГПр / 4 = 13,82. Средние индексы CI_i из табл. 3.6 рассматриваем как *прогнозные индексы* квартальных колебаний относительно ПрСК. Тогда *прогноз квартальных продаж* $ПрК_i$ определятся по формуле $ПрК_i = ПрСК \cdot CI_i$, получим $ПрК_1 = 9{,}46$, $ПрК_2 = 11{,}36$, $ПрК_3 = 21{,}72$, $ПрК_4 = 12{,}76$.

Аналогично по месячным средним индексам можно определить и прогнозные значения продаж по месяцам.

Прогнозные значения квартальных и месячных продаж можно определить методом средних индексов и приростов или трендом для каждого квартала и месяца по данным за 2–4 года. Прогнозные значения уточняются экспертами исходя из текущей конъюнктуры. Диаграмма квартальных колебаний продаж представлена на рис. 3.3.

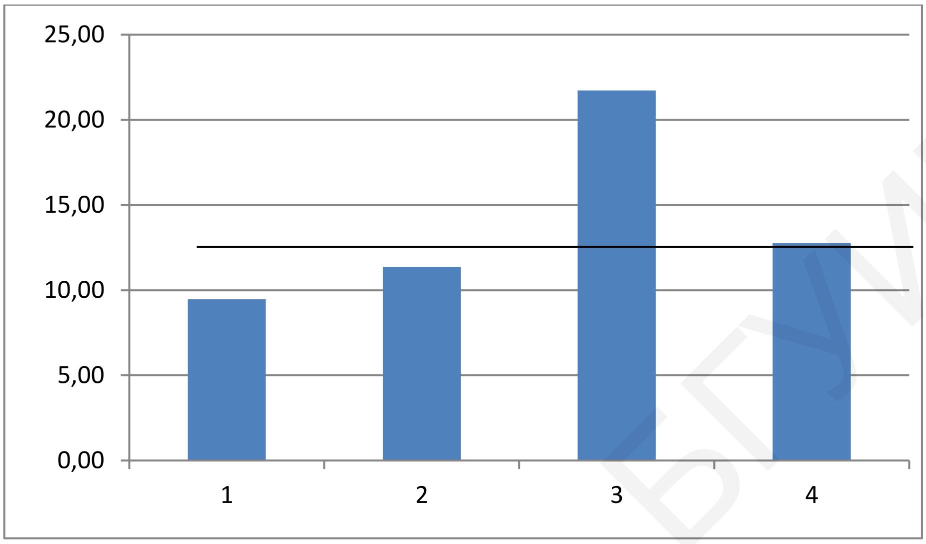

Рис. 3.3. Квартальные колебания продаж

Из рис. 3.3 видно, что наиболее удачным кварталом в году является третий квартал, а наименее удачным – первый. Эти квартальные колебания повторяются каждый год примерно с одинаковыми индексами относительно среднеквартальных продаж. На основе прогнозов сезонных колебаний продаж предприятия и торговые организации разрабатывают планы производства и реализации сезонных товаров.

Ошибка статистической модели прогнозирования – это величина отклонения фактических значений показателя от расчетных значений по модели за прошлый период. Ошибку статистической модели прогнозирования можно оценить по формулам [3, 8]:

1) среднеквадратичная ошибка $S_{тр}$ тренда:

$$S_{тр} = \sqrt{\frac{1}{n-m}\sum_{t=1}^{n}(Y_t - Y^*_t)^2},$$

где Y_t – значения ряда, Y^*_t – значения прогнозной модели, n – длина прошлого периода; m – количество коэффициентов в трендовой модели;

2) среднее абсолютное отклонение (MAD):

$$\bar{\varepsilon} = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}\left|Y_t - Y_t^*\right|;$$

3) относительная ошибка:

$$\delta = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}\frac{\left|Y_t - Y^*_t\right|}{Y_t}\cdot 100\ \%,$$

где Y_t – фактические значения ряда; Y^*_t – значения прогнозной модели.

В формуле *относительной ошибки* значения $Y_t = 0$ *не учитываются*.

Если $\delta < 10$ % – отклонения малые, точность прогноза высокая; $10\ \% < \delta <$ < 20 % – отклонения небольшие, точность прогноза хорошая; $20\ \% < \delta < 50$ % – отклонения средние, точность прогноза удовлетворительная; $\delta > 50$ % – отклонения большие, точность прогноза неудовлетворительная.

Надо выбирать модель прогнозирования с минимальными ошибками, которая отражает среднюю динамику процесса в прошлом периоде.

3.3. Регрессионные методы и модели прогнозирования

Регрессия – статистическая зависимость результативного показателя Y от факторов X_i, на него влияющих, выраженная в виде графика или функции регрессии [3, 6]. В маркетинге результативными показателями могут быть объемы продаж, выручка, прибыль, а факторами – цены, затраты на продвижение, количество мест продаж и др. [3, 5].

Функция регрессии – аналитическое выражение *статистической связи средних значений* результативного признака Y от *средних значений* влияющих на него факторов X_i.

Теоретическая линия регрессии – график функции регрессии, которая выражает изменение средних величин результативного признака Y в зависимости от изменения средних величин факторного признака X (рис. 3.4).

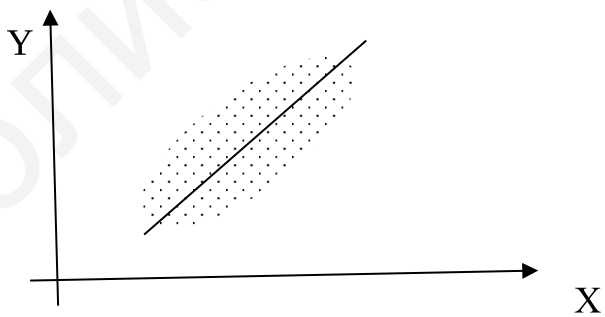

Рис. 3.4. Теоретическая линия регрессии показателя Y от фактора X

Точками на рис. 3.4 обозначены фактические значения (X, Y) фактора X и соответствующего ему результативного показателя Y, которые называются *корреляционным полем*.

Для построения ***графика эмпирической линии регрессии*** диапазон изменения фактора X делят на равные интервалы и в каждом интервале определяются средние арифметические значение показателей $\overline{X}$ и $\overline{Y}$, после чего строится график $(\overline{X},\overline{Y})$.

Теоретическая линия регрессии строится с помощью *функции регрессии.*

Функция регрессии выбирается *аналогично трендовым моделям* так, чтобы сумма квадратов отклонений эмпирического графика регрессии от точек теоретической линии регрессии была минимальной.

В общем виде *функция регрессии* имеет вид

$$\overline{Y} = F(X_1, X_2, ..., X_m) + \varepsilon, \tag{3.12}$$

где $\overline{Y}$ – результативный признак; X_i – факторы; m – количество факторов модели; $F(X_1, X_2, \dots, X_m)$ – функция регрессии; ε – случайная величина.

Регрессия с одним фактором называется однофакторной, с двумя факторами – двухфакторной, если факторов много – многофакторной. Кроме этого, регрессия может быть линейной, нелинейной, мультипликативной.

Модели ***однофакторной регрессии*** выбираются из табл. 3.1 с заменой времени t на фактор X.

Модель ***многофакторной*** линейной регрессии имеет вид

$$Y = a_0 + a_1 X_1 + a_2 X_2 + a_3 X_3 + \dots, \tag{3.13}$$

где Y – результативный признак; X_1, X_2, X_3 …. – факторы; a_0, a_1, a_2, a_3 , … – коэффициенты регрессии.

Модель многофакторной регрессии также может иметь вид

$$\begin{aligned} &Y = a_0 + a_1 Z_1 + a_2 Z_2 + a_3 Z_3 + ..., \\ &Z_i = F_i(X_i), \quad i = 1, 2, ..., \end{aligned} \tag{3.14}$$

где $F_i(X_i)$ – однофакторные модели регрессии показателя Y от факторов X_i.

Модель многофакторной ***мультипликативной*** регрессии имеет вид

$$Y = a_0 \cdot \prod_{i=1}^{n} X_i^{a_i}. \tag{3.15}$$

Мультипликативную регрессию (3.15) сводят к линейной регрессии с помощью логарифмирования и определения коэффициентов линейной регрессии для логарифмов факторов и показателя Y. Затем обратной заменой возвращаются к мультипликативной модели регрессии.

Этапы построения регрессионной модели:

1) выбор результативного показателя;

2) выбор факторов, влияющих на результативны показатель;

3) сбор статистических данных значений показателя и факторов за прошлый период;

4) оценка коэффициентов парной корреляции между показателем и факторами и между факторами;

5) выбор факторов с максимальными значениями коэффициента корреляции с результативным показателем;

6) устранение мультиколлинеарности между факторами;

7) построение модели регрессии;

8) оценка адекватности модели и ее улучшение;

9) прогнозирование значений результативного показателя при изменении значений факторов.

Для модели ***многофакторной линейной регрессии*** (3.13) и (3.14) коэффициенты (a_0, a_1, a_2, …) определяются из системы линейных уравнений:

$$
\begin{aligned}
&a_0 + a_1 \cdot \overline{X_1} + a_2 \cdot \overline{X_2} + \ldots + a_n \cdot X_n = \overline{Y},\\
&a_0 \cdot \overline{X_1} + a_1 \cdot \overline{X_1}^2 + a_2 \cdot \overline{X_1 \cdot X_2} + \ldots + a_n \cdot \overline{X_1 X_n} = \overline{X_1 \cdot Y},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&a_0 \cdot \overline{X_n} + a_1 \cdot \overline{X_n \cdot X_1} + a_2 \cdot \overline{X_n \cdot X_2} \ldots + a_n \cdot \overline{X_n^2} = \overline{X_n \cdot Y}.
\end{aligned}
\qquad (3.16)
$$

Средние значения факторов в (3.16) определяются по данным прошлого периода. Коэффициенты линейной многофакторной регрессии определяются также с помощью функции «Линейн()» EXCEL.

При выборе факторов для модели регрессии производится оценка их влияния на результативный показатель с помощью ***коэффициента парной линейной корреляции*** r_{xy}, который определяется по формулам:

$$
\begin{aligned}
&r_{yx} = \frac{\overline{y \cdot x} - \bar{y} \cdot \bar{x}}{\sigma_y \sigma_x},\\
&\sigma_y = \sqrt{\overline{y^2} - \bar{y}^2},\\
&\sigma_x = \sqrt{\overline{x^2} - \bar{x}^2}.
\end{aligned}
\qquad (3.17)
$$

По таким же формулам определяются коэффициенты парной корреляции между разными факторами X_i и X_j. Матрица коэффициентов корреляции между Y и факторами X определяется с помощью функции «КОРЕЛЛ()» программы EXCEL.

Свойства коэффициента парной линейной корреляции:

1. $-1 \le r_{xy} \le 1$, или $|r_{xy}| \le 1$.

2. Если $r_{xy} > 0$, то при возрастании фактора X показатель Y в среднем возрастает. Между фактором X и показателем Y есть прямая, положительная связь.

3. Если $r_{xy} < 0$, то при возрастании фактора X показатель Y в среднем уменьшается. Между фактором X и показателем Y есть обратная, отрицательная связь.

4. Если $r_{xy} = 0$, то при возрастании фактора X показатель Y в среднем остается постоянным. Между фактором X и показателем Y нет статистической связи, но может быть функциональная связь.

5. Чем ближе модуль $|r_{xy}|$ к единице, тем сильнее линейная зависимость показателя Y от фактора X.

6. Если $|r_{xy}|=1$, то между показателем Y и фактором X есть функциональная линейная зависимость: $Y = a + b \cdot X$.

Квадрат коэффициента корреляции r^2_{xy} называется ***коэффициентом детерминации***. Величина коэффициента детерминации для регрессии показывает, в какой мере изменение результативного признака Y обусловлено влиянием фактора X, в процентах, после умножения на 100. Если коэффициент детерминации $r^2_{xy} = 0{,}85$, то фактор оказывает 85%-е влияния на значения показателя Y [6].

При выборе факторов исходят из экономического смысла задачи и требования, чтобы их коэффициент детерминации с целевым показателем был как можно ближе к единице.

При построении модели регрессии надо ***минимизировать мультиколлинеарность*** факторов, чтобы избежать ложных корреляций. Наиболее распространенные методы: исключение одной из двух сильно связанных переменных, у которой коэффициент детерминации с целевым показателем меньше; использование гребневой регрессии; переход от первоначальных переменных к главным компонентам.

Если между двумя факторами X_i и X_j коэффициент детерминации $r^2_{ij} > 0{,}5$, то выбирается один с наибольшим коэффициентом детерминации r^2_{xy} с целевым показателем y.

Построение и оценка качества многофакторных линейных и нелинейных регрессионных моделей выполняется с помощью программ EXCEL и STATISTICA.

Пример 3.4. Построить функцию регрессии зависимости объема продаж товара от затрат на рекламу и дать прогноз изменения продаж при изменении затрат на рекламу. Исходные данные приведены в табл. 3.7.

Таблица 3.7

Квартальные затраты на рекламу за три года

№ п/п	Квартал	Год	Объем продаж, ден. ед.	Затраты на рекламу, ден. ед.
1	I	Первый	390	11
2	II		370	8
3	III		360	6
4	IV		410	14
5	I	Второй	400	13
6	II		400	10
7	III		370	7
8	IV		390	12
9	I	Третий	410	13
10	II		380	9
11	III		390	10
12	IV		400	11

Решение. Коэффициент парной линейной корреляции между затратами на рекламу и продажами КОРЕЛЛ() = 0,93. Это говорит о том, что связь между затратами на рекламу и продажами сильная и положительная, т. е. при увеличении затрат на рекламу продажи в среднем увеличиваются. Так как коэффициент парной линейной корреляции близок к единице, то следует выбрать модель линейной регрессии объема продаж от затрат на рекламу.

Для построение графика функции регрессии надо фактор (затраты) *упорядочить по возрастанию*, а объемы продаж для одинаковых затрат взять средними.

График функции регрессии представлен на рис. 3.5. Ось X – затраты на рекламу, а ось Y – объем продаж товара. График регрессии строим с помощью *построителя точечных графиков* EXCEL и выбираем линейный вариант графика (рис. 3.5).

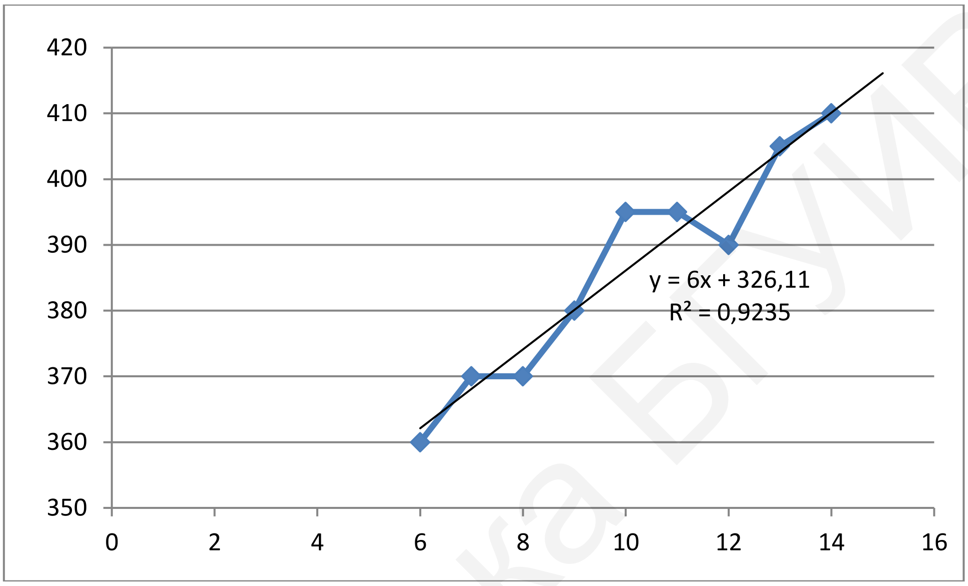

Рис. 3.5. График линейной регрессии объемов продаж от затрат на рекламу

Функция регрессии имеет вид Y(X) = 326,11 + 6 · X.

Коэффициент детерминации регрессии равен R^2 = 0,923, т. е. данная модель регрессии на 92,3 % объясняет фактическую зависимость объемов продаж от затрат на рекламу.

При увеличении затрат на рекламу с 14 до 15 ден. ед. объем продаж может вырасти до Y(15) = 6 · 15 + 326,1 = 416,1 ден. ед. При снижении затрат на рекламу с 14 до 13 ден. ед. объем продаж снизится до Y(13) = 6 · 13 + 326,1 = 404,1 ден. ед.

4. Экономико-математические методы и модели оптимизации маркетинговых решений

4.1. Методы и модели оптимального планирования

Экономико-математическая модель (ЭММ) оптимизации – это математическое представление задачи принятия оптимального решения. ЭММ принятия оптимального решения включает критерий оптимальности (целевую функцию) и систему ограничений на используемые ресурсы [1–5].

В общем виде ЭММ принятия оптимальных решений имеет следующий вид:

$$
\begin{aligned}
&\max_{X}(\min) F(X) = F(X^*), \\
&G(X) \le G_0, \\
&S(X) = S_0, \\
&R(X) \ge R^0, \\
&A \le X \le B, \\
&0 \le X_j,\ j = 1, \dots, n, \qquad (4.1)
\end{aligned}
$$

где F(X) – критерий, или целевая функция (ЦФ), оптимизации решения; $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ – вектор переменных решений; G(X), S(X) и R(X) – вектор-функции ограничений; G_0, S_0, R_0 – значения ограничений; A и B – минимальные и максимальные значения переменных X.

Векторы $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$, удовлетворяющие ограничениям G(X), S(X) и R(X), называются *допустимыми планами.*

Требуется найти оптимальные значения вектора $X^* = (X^*_1, X^*_2, \dots, X^*_n)$, которые дают максимум (минимум) целевой функции F(X) при заданных ограничениях. Вектор $X^* = (X^*_1, X^*_2, \dots, X^*_n)$ решения задачи (4.1) называется ***оптимальным планом.***

Целевая функция, или *критерий оптимальности решения* F(X), описывает цель *оптимизации решения* и показывает зависимость критерия оптимизации от переменных (X). Задача на минимум может быть представлена как задача на максимум (и наоборот) изменением знака F(X) на противоположный, при этом оптимальный план X^* не изменится.

Задача на максимум – это обычно задача максимизации требуемого результата (прибыли, объемов продаж) при заданных ограничениях на ресурсы.

Задача на минимум – это обычно задача минимизации затрат при получении требуемого результата.

Задача (4.1) может иметь единственное, не единственное решение и может не иметь решения, если ограничения противоречивы.

Модель (задача) оптимизации (4.1) может быть:

- линейной – с линейными критерием и ограничениями;
- нелинейной – с нелинейными критерием или ограничениями;
- дискретной – с дискретными значениями вектора X;
- статической – не учитывают времени;
- динамической – учитывают время;
- стохастической – учитывают случайные переменные;
- многокритериальной – с несколькими целевыми функциями.

С помощью моделей оптимизации (4.1) можно решать задачи оптимизации производства и распределения продукции, использования ресурсов предприятия, удовлетворения потребностей потребителей, рационального закрепления поставщиков за потребителям и др.

Модель оптимального линейного планирования включает только линейные целевую функцию и ограничения. Модели оптимального линейного планирования называются *задачами линейного программирования (ЛП)*, программа здесь понимается как план [3–5].

Модель *оптимального линейного планирования*, или *задача линейного программирования (ЛП)*, имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}
&\max_X (\min) \sum_{j=1}^{n} p_j \cdot X_j \,, \\
&\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot X_j \le G_i \,,\ i = 1, ..., m_1, \\
&\sum_{j=1}^{n} b_{ij} \cdot X_j \ge R_i \,,\ i = m_1 + 1, ..., m_2, \\
&\sum_{j=1}^{n} c_{ij} \cdot X_j = C_i \,,\ i = m_2 + 1, ..., m, \\
&A_j \le X_j \le B_j, \\
&0 \le X_j,\ j = 1, ..., n.
\end{aligned} \tag{4.2}$$

Здесь $X = (X_1, ..., X_n)$ – вектор переменных задачи, которые надо определить. Обычно требуется, чтобы $X \ge 0$. Векторы $X = (X_1, ..., X_n)$, которые удовлетворяют ограничениям (4.2), называется *допустимыми планами* задачи линейного программирования. Обычно X – объемы выпуска продукции.

Оптимальный план $X^* = (X^*_1, ..., X^*_n)$ – это допустимый план, который обеспечивает максимум или минимум целевой функции в задаче (4.2).

Целевой функцией обычно является: максимум прибыли, минимум затрат и др. *Ограничениями* (G_i, R_i, C_i) являются имеющиеся ресурсы или требуемые результаты. Ограничения ($A_j < X_j < B_j$) – ограничения на спрос и производственные мощности.

Задача (4.2) решается ***симплекс-алгоритмом***, который реализован в функции «Поиск решения» EXCEL.

Если в задаче (4.2) только две переменные (X_1, X_2), то она может быть решена *графическим методом.*

Свойства задачи линейного программирования (4.2):

1) область допустимых планов представляет собой выпуклый многогранник;

2) оптимальный план (решение задачи (4.2)) будет единственным, и он находится в вершине многогранника, если градиент целевой функции не пропорционален градиентам ограничений;

3) оптимальных планов будет бесконечно много, и они лежат на грани или на ребре многогранника, если градиент целевой функции пропорционален градиенту каких либо ограничений;

4) решение задачи (4.2) может не существовать, если ограничения противоречивы;

5) если решение задачи единственно, то некоторые изменения коэффициентов целевой функции не влияют на оптимальный план. Если решение лежит на грани или ребре области допустимых планов, то изменения коэффициентов целевой функции приводит к большим изменениям оптимального плана задачи (4.2).

Оптимизация плана производства продукции, обеспечивающего максимальную прибыль предприятию в плановом периоде, ставится в форме задачи линейного программирования (4.3):

$$\max_{X} \sum_{j=1}^{n} p_j \cdot X_j,$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot X_j \le R_i, \; i = 1, ..., m,$$

$$0 \le X_j \le M_j,$$

$$C_j^{min} \le X_j \le C_j^{max}, \; j = 1, ..., n, \tag{4.3}$$

где X_j – объемы производства j-й продукции в нат. ед.; p_j – прибыль на единицу j-й продукции предприятия; a_{ij} – нормы расхода i-го ресурса на производство единицы j-й продукции; R_i – объем i-го ресурса предприятия в плановом периоде; M_j – производственная мощность предприятия по j-й продукции; C_j^{min} – минимальный, а C_j^{max} – максимальный спрос на j-ю продукцию в плановом периоде; j – номер продукции; i – номер ресурса; m – количество ресурсов; n – количество видов производимой продукции.

Целевая функция в задаче (4.3) – это сумма прибыли от реализации всех видов продукции $X = (X_j)$.

Минимальный уровень спроса C_j^{min} определяется исходя из заключенных договоров на поставку продукции потребителям или прогнозных значений; максимальный уровень спроса C_j^{max} прогнозируется на основе данных прошлого периода и существующих тенденций.

Ввиду *сезонных (квартальных) колебаний* минимальный (C_j^{min}) и максимальный (C_j^{max}) уровни спроса должны определяться для каждого квартала отдельно. Поэтому оптимальный план производства по модели (4.3) должен разрабатываться *для каждого квартала отдельно.*

Годовой план определяется как сумма квартальных планов производства. Месячные планы производства определяются на основе квартальных планов и потребностей рынка.

Задача (4.3) позволяет найти *оптимальный план производства продукции для каждого квартала и года*, который даст предприятию максимальную прибыль с учетом сезонных колебаний спроса и ограничений на имеющиеся ресурсы. При решении задачи (4.3) определяются оптимальный план производства каждого вида продукта (X_j^*). Потребности в ресурсах на выпуск продукции (X_j^*) равны $\sum a_{ij} \cdot X_j^*$, они определяются при решении задачи.

Пример 4.1. Требуется найти оптимальный план производства четырех видов продукции на первый квартал года по исходным данным, представленным в табл. 4.1. Задача ставится в форме задачи ЛП (4.3).

Таблица 4.1

Исходные данные задачи для примера 4.1

Продукция	$П_1$	$П_2$	$П_3$	$П_4$	Ограничения на ресурсы, кг
Объемы производства продукции, нат. ед.	X_1	X_2	X_3	X_4	
Прибыль на единицу продукции, ден. ед.	2	5	4	3	
Ресурсы	Нормы расхода ресурсов				
1. Сырье 1, кг	5	7	0	3	8500
2. Сырье 2, кг	0	5	3	0	7000
3. Труд 1, чел./ч	7	3	3	5	7200
4. Труд 2, чел./ч	0	7	0	4	6000
Оборудование 1, ч	3	5	2	9	7200
Оборудование 2, ч	0	5	0	7	6000
Минимальный спрос, C_j^{min}	50	100	150	0	–
Максимальный спрос, C_j^{max}	200	1500	1200	400	–
Производственная мощность, M_j	350	2500	2000	300	–

Решение. Задача решается с помощью функции «Поиск решения» EXCEL (рис. 4.1). Устанавливаются параметры: модель линейная, переменные неотрицательные. Целевая ячейка – критерий оптимизации (сумма прибыли).

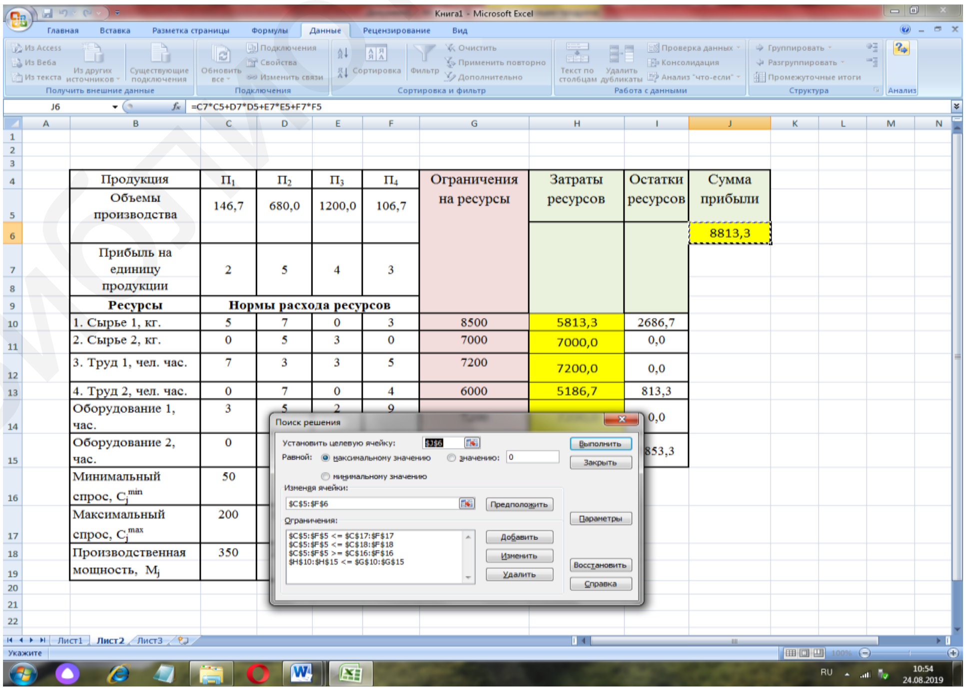

Рис. 4.1. Определение оптимального плана производства продукции с помощью ECXEL

Из решения рис. 4.1 видно, что оптимальные объемы производства каждого продукта равны: X_1 = 146,7 нат. ед., X_2 = 680 нат. ед., X_3 = 1200 нат. ед., X_4 = 106,7 нат. ед.

Максимальная прибыль, которую получит предприятие от реализации произведенной продукции, равна ПР = 8813,3 ден. ед. При других планах производства сумма прибыли будет меньше.

Потребности в ресурсах на производство оптимального плана продукции равны: R_1 = 5813,3 кг, R_2 = 7000 кг, R_3 = 7200 чел./ч, R_4 = 5188,7 чел./ч, R_5 = 7200 ч, R_6 = 4146,7 ч.

Полностью использованы 2-, 3- и 5-й ресурсы, которые являются ограничивающими для оптимального плана. Первый ресурс будет использован на 68,4 %, четвертый – на 86,4 %, шестой – на 69,1 %. Предприятие может увеличить прибыль за счет увеличения производственной мощности 3-го продукта и объемов 2-, 3- и 5-го ресурсов, которые полностью использованы.

Задача оптимального распределения продукции между рынкам

Задачу оптимального распределения продукции между рынкам можно также поставить в виде следующей задачи линейного программирования:

$$P^* = \max_Y \sum_{j=1}^{n} p_j \cdot Y_j,$$

$$\sum_{j=1}^{n} Y_j = Y,$$

$$Y_j^{min} \le Y_j \le Y_j^{max}, \qquad (4.4)$$

где P^* – максимальная суммарная прибыль от реализации продукции на рынках, p_j – прибыль от реализации единицы продукции на j-м рынке; Y_j – объем поставки продукции на j-й рынок, Y – объем производства продукции в плановом периоде; Y_j^{max} – максимальный спрос, а Y_j^{min} – минимальный спрос на продукцию на j-м рынке в рассматриваемом периоде; n – количество рынков.

Пример 4.2. Предприятие составляет план распределения продукции между тремя рынками. Прибыль на единицу продукции на рынках соответственно равна 10, 5, 15 ден. ед. Максимальный спрос на продукцию на рынках прогнозируется на уровне 20, 10, 30 нат. ед., а минимальный спрос на уровне 10, 5, 15 нат. ед. Плановый объем производства продукции равен 50 нат. ед. Требуется найти оптимальное распределение 50 ед. продукции между тремя рынками по критерию максимума прибыли.

Решение. Запишем математическую постановку задачи в виде задачи линейного программирования (ЛП):

$$
\begin{aligned}
&P^* = \max_{Y} \left(10 \cdot Y_1 + 5 \cdot Y_2 + 15 \cdot Y_3\right),\\
&Y_1 + Y_2 + Y_3 = 50,\\
&10 \le Y_1 \le 20,\\
&5 \le Y_2 \le 10,\\
&15 \le Y_3 \le 30,
\end{aligned}
$$

где P^* – сумма прибыли на трех рынках; Y_1, Y_2, Y_3 – распределение продукции между тремя рынками.

На рис. 4.2 представлено решение примера 4.2 с помощью функции «Поиск решения» EXCEL. Целевая ячейка выделена серым фоном.

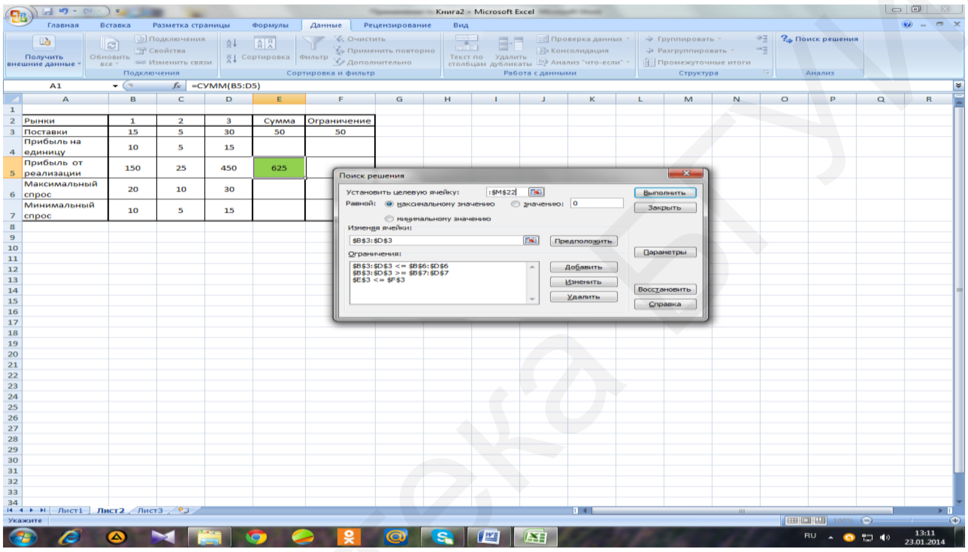

Рис. 4.2. Решения примера 4.2

Таким образом, в оптимальном плане на 1-й рынок надо поставить 15 ед. продукции в соответствии со средним спросом, на 2-й рынок – 5 ед. по минимальному спросу, на 3-й рынок – 30 ед. по максимальному спросу.

Ожидаемая максимальная величина прибыли от реализации продукции на всех рынках составит 625 ден. ед, а вектор прибыли, полученной от реализации продукции на каждом рынке, равен 150, 25, 450 ден. ед. соответственно.

Применение моделей линейного программирования позволяет предприятиям находить оптимальные маркетинговые решения по производству и распределению продукции между рынками.

4.2. Транспортная задача

Транспортная задача – это задача оптимального закрепления поставщиков за потребителями по критерию минимальных транспортных затрат. Задача формулируется следующим образом [3].

Имеется M поставщиков (складов) $A_1, \ldots, A_m$ и N потребителей $B_1, \ldots, B_n$. У поставщиков имеется однородный продукт в объемах (a_1, a_2, … a_m), где a_i –

количество продукта у i-го поставщика. Потребности потребителей в продукте равны (b_1, b_2, … b_n), где b_j – потребность на продукт у j-го потребителя.

Известны затраты C_{ij} на перевозку единицы продукта от i-го поставщика j-му потребителю, i = 1, 2, …, m; j = 1, 2, …, n. Транспортные затраты зависят от маршрута, вида транспорта и тарифов перевозчика.

Требуется составить план перевозок, при котором потребности всех потребителей максимально удовлетворяются, а суммарные транспортные затраты будут минимальными. Исходные данные транспортной задачи представлены в табл. 4.2.

Таблица 4.2

Транспортные затраты, запасы поставщиков
и потребности потребителей

Поставщики (i)	Потребители (j)				Запасы поставщиков
	B_1	B_2	….	B_n	
A_1	c_{11}	c_{12}	….	c_{1n}	a_1
A_2	c_{21}	c_{22}		c_{2n}	a_2
…	…	….	…	…	…
A_m	c_{m1}	c_{n2}		c_{mn}	a_m
Потребности потребителей	b_1	b_2	…	b_n	$a = \sum a_i$
					$b = \sum b_j$

Если некоторые поставки невозможны, то для них значение C_{ij} принимается равным большому числу, например 1000.

Возможны три варианта транспортной задачи:

1. Суммарные запасы у поставщиков (a) ***равны*** суммарной потребности потребителей (b):

$$a = \sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j = b. \tag{4.5}$$

В этом случае потребности всех потребителей будут полностью удовлетворены, а у поставщиков вся продукция будет реализована.

2. Суммарные запасы у поставщиков (a) ***больше*** суммарной потребности потребителей (b):

$$a = \sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j = b. \tag{4.6}$$

В этом случае у некоторых поставщиков часть продукции будет не реализована.

3. Суммарные запасы у поставщиков (a) ***меньше*** суммарной потребности потребителей (b):

$$a = \sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j = b. \tag{4.7}$$

В этом случае потребности некоторых потребителей не будут полностью удовлетворены.

Вариант (4.5) называется ***сбалансированной*** или ***закрытой*** транспортной задачей, варианты (4.6) и (4.7) называются ***несбалансированными (открытыми)*** транспортными задачами.

Для решения несбалансированных транспортных задач их надо *свести к сбалансированной задаче.*

Несбалансированную задачу (4.6) надо свести к сбалансированной задаче (4.5) *введением фиктивного потребителя* с дополнительным спросом (a – b).

Несбалансированную задачу (4.7) надо свести к сбалансированной задаче (4.5) введением *фиктивного поставщика* с дополнительным запасом (b – a).

Транспортные затраты на *фиктивные перевозки* приравниваются нулю.

Сбалансированную транспортную задачу (4.5) формулируют как задачу линейного программирования (ЛП):

$$\min_{x_{ij}} \sum_{ij} c_{ij} \cdot X_{ij},$$

$$\sum_{j=1}^{m} X_{ij} = a_i,$$

$$\sum_{i=1}^{n} X_{ij} = b_j,$$

$$X_{ij} \geq 0, \qquad (4.8)$$

где X_{ij} – объем поставки продукта от i-го поставщика j-му потребителю.

Целевая функция означает, что общие транспортные затраты должны быть минимальными. *Первое ограничение* означает, что сумма поставок у каждого поставщика равна его запасам. *Второе ограничение* означает, что поставки полностью удовлетворяют потребности каждого потребителя.

Задача (4.8) имеет решение, т. к. запасы поставщиков равны суммарным потребностям потребителей.

После решения задачи (4.8) удаляются фиктивные поставки:

1) в случае второго варианта транспортной задачи у некоторых поставщиков будут остатки продукции;

2) в случае третьего варианта у некоторых потребителей потребности не будут полностью удовлетворены.

Пример 4.3. Имеется три поставщика и четыре потребителя продукции. Исходные данные представлены в табл. 4.3.

Таблица 4.3

Транспортные затраты, запасы поставщиков
и потребности потребителей для примера 4.3

Поставщики	Потребители				Запасы поставщиков (a_i)
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	2	4	3	7	300
A_2	1	1	3	5	400
A_3	6	3	2	1	900
Потребности потребителей (bj)	250	300	350	500	a = 1600
					b = 1400

Задача примера 4.3 является несбалансированной, суммарные запасы поставщиков равны 1600 ед. продукции, а суммарные потребности потребителей равны 1400 ед. продукции.

Для получения сбалансированной задачи надо ввести фиктивного потребителя B_5 с потребностью 200 ед. продукции. Транспортные затраты на доставку продукции фиктивному потребителю приравниваем нулю (табл. 4.4).

Таблица 4.4

Транспортные затраты, запасы поставщиков
и потребности потребителей

Поставщики	Потребители					Запасы поставщиков
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	2	4	3	7	0	300
A_2	1	1	3	5	0	400
A_3	6	3	2	1	0	900
Потребности потребителей	250	300	350	500	200	1600
						1600

Решаем транспортную задачу табл. 4.4 с помощью функции «Поиск решения» EXCEL. Для этого в EXCEL составляется матрица искомых перевозок (X_{ij}). Принимают первоначальные значения $X_{ij} = 1$. Матричным поэлементным умножением в выделенную область записывается матрица затрат ($C_{ij} \cdot X_{ij}$), эта операция завершается клавишами (Ctrl + Shift + Enter).

Определяется целевая ячейка как минимум суммы элементов матрицы ($C_{ij} \cdot X_{ij}$). После этого используется функция «Поиск решения» EXCEL (рис. 4.3).

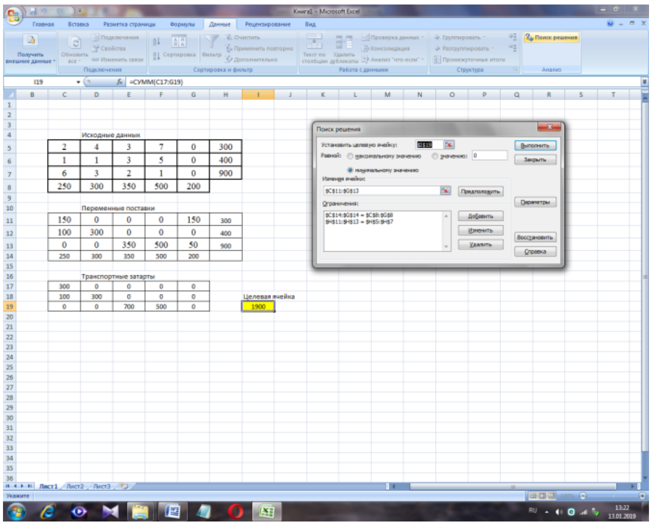

Рис. 4.3. Решение транспортной задачи с помощью функции «Поиск решения» EXCEL

После удаления фиктивного 5-го потребителя и перевозок в его адрес оптимальный план поставок представлен в табл. 4.5.

Таблица 4.5

Решение транспортной задачи

<table>
<tr><td rowspan="2">Поставщики</td><td colspan="4">Потребители</td><td rowspan="2">Поставки</td><td rowspan="2">Запасы поставщиков</td><td rowspan="2">Остатки поставщиков</td></tr>
<tr><td>B_1</td><td>B_2</td><td>B_3</td><td>B_4</td></tr>
<tr><td>A_1</td><td>150</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>150</td><td>300</td><td>150</td></tr>
<tr><td>A_2</td><td>100</td><td>300</td><td>0</td><td>0</td><td>400</td><td>400</td><td>0</td></tr>
<tr><td>A_3</td><td>0</td><td>0</td><td>350</td><td>500</td><td>850</td><td>900</td><td>50</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Потребности потребителей</td><td rowspan="2">250</td><td rowspan="2">300</td><td rowspan="2">350</td><td rowspan="2">500</td><td>1400</td><td>1600</td><td>200</td></tr>
<tr><td>1400</td><td>–</td><td>–</td></tr>
</table>

У поставщика A_1 останется на складе 150 ед. продукции, у поставщика A_3 останется 50 ед. продукции. Потребности потребителей будут полностью удовлетворены. Транспортные затраты на каждую поставку представлены в табл. 4.6.

Минимальные суммарные транспортные затраты (сумма элементов табл. 4.6) равны 1900 ден. ед.

Таблица 4.6

Транспортные затраты на поставки, ден. ед.

Поставщики	Потребители			
	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	300	0	0	0
A_2	100	300	0	0
A_3	0	0	700	500

Аналогично решается задача, когда запасы поставщиков меньше потребностей потребителей. В этом случае вводят фиктивного поставщика с недостающими запасами. После решения фиктивный поставщик и его поставки удаляются и у некоторых потребителей будет неудовлетворенный спрос.

4.3. Многокритериальные и дискретные задачи оптимизации

Важными задачами оптимального планирования являются многокритериальные и дискретные задачи оптимизации [3].

Многокритериальной (многоцелевой) называется задача принятия оптимального решения с учетом нескольких критериев оптимальности. В задаче многокритериальной оптимизации критерий оптимальности задается в виде набора критериев (целевых функций): $F(X) = (F_1(X), F_2(X), \ldots, F_k(X))$. Вектор $X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ – вектор переменных или вектор параметров альтернативных решений. При этом множество альтернативных решений может быть непрерывным, как в задачах ЛП, так и конечным.

Обычно считают, что все целевые функции $F_i(X)$ надо максимизировать, если какую-то целевую функцию надо минимизировать, то у нее надо изменить знак на противоположный.

Задачу многокритериальной оптимизации (МКО) можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned} &\max F_1(X),\\ &\max F_2(X),\\ &\quad\ldots\\ &\max F_k(X),\\ &X \in D, \end{aligned} \tag{4.9}$$

где $X = (X_1, X_2, \ldots, Xn)$ – вектор переменных; D – область изменения вектора X, которая может быть задана линейными ограничениями, как в задаче (4.2).

В задаче МКО (4.9) обычно решения X^*, которое было бы оптимальным по всем критериям, *не существует*, т. к. при *улучшении* одного критерия значения других критериев могут *ухудшиться*. Такие критерии называются *противоречивыми*, и поэтому окончательное решение должно быть *компромиссным.*

Например, в маркетинге критерии максимизации продаж, прибыли, снижения затрат и цены, улучшения качества продукции, расширения рынков часто являются противоречивыми, поэтому оптимальное решение должно быть компромиссным.

Решение задачи МКО (4.9) предполагает ее сведение к задаче однокритериальной оптимизации, для этого используются следующие методы:

1) *метод свертки*, предполагает формирование одного критерия как суммы всех критериев с коэффициентами, отражающими их важность;

2) *метод главного критерия*, когда выбирается один из критериев в качестве главного, а остальные становятся ограничениями;

3) *метод «идеальной точки»*, при котором находятся решения отдельно для каждого критерия, а затем определяется решение задачи МКО по минимуму суммы расстояний до оптимальных решений каждого критерия.

4) *метод уступок*, при котором критерии упорядочиваются по важности и последовательно решаются задачи с каждым критерием, начиная с более важного, используя уменьшение значений предыдущих критериев, которые включаются в ограничения;

5) *метод множества Парето*, при котором формируется множество D_1 парето-оптимальных решений; D_1 содержится в D. Вектор X принадлежит множеству D_1, если он не хуже других векторов по всем критериям и хотя бы по одному критерию лучше. Затем выбирается лучшее из парето-оптимальных решений одним из методов 1–4.

Относительная важность критериев определяется экспертами, для приведения критериев к сопоставимому виду используется их нормировка.

Пример 4.4. Найти оптимальное решение задачи МКО с двумя критериями F_1 и F_2 методом свертки:

$$\max F_1 = \max (2 \cdot X_1 + X_2 + 1),$$
$$\max F_2 = \max (X_1 - X_2 + 5),$$

при ограничениях

$$X_1 + 2 \cdot X_2 \le 8,$$
$$0 \le X_1 \le 6,$$
$$0 \le X_2 \le 3.$$

Решение. Примем коэффициент важности первого критерия равным 1,0, а второго равным 0,7. Тогда задача МКО запишется в виде задачи ЛП с одним критерием:

$$\max (1{,}0 \cdot F_1 + 0{,}7 \cdot F_2) = \max (2{,}7 \cdot X_1 + 0{,}3 \cdot X_2 + 4{,}5),$$
$$X_1 + 2 \cdot X_2 \le 8,$$
$$0 \le X_1 \le 6,$$
$$0 \le X_2 \le 3.$$

Пример 4.5. Найти оптимальное решение задачи МКО из примера 4.4 методом главного критерия.

Решение. Примем первый критерий F_1 в качестве главного, а второй критерий F_2 сделаем ограничением со значением не менее 7. Тогда задача МКО запишется в виде задачи ЛП с одним критерием:

$$\max F_1 = \max (2 \cdot X_1 + X_2 + 1),$$
$$X_1 - X_2 + 5 \ge 7,$$
$$X_1 + 2 \cdot X_2 \le 8,$$
$$0 \le X_1 \le 6,$$
$$0 \le X_2 \le 3.$$

Задачи дискретной оптимизации

Задачи дискретной оптимизации предполагают, что переменные X_i в задачах (4.1) и (4.2) могут принимать только дискретные (целочисленные или булевы) значения, при этом множество этих значений конечно.

Примерами задач дискретной оптимизации являются задача коммивояжера, задача о назначениях, задача о ранце, задача о раскрое и др.

Наиболее простым методом решения таких задач является *метод полного направленного перебора* всех допустимых значений переменных X_i. Но этот метод можно применять только для относительно небольших задач.

Для решения больших задач дискретной оптимизации применяют специальные методы, такие как метод отсечения Гомори, метод ветвей и границ.

Рассмотрим задачу о назначениях. Имеется N видов оборудования и N видов работ. Дана себестоимость Cij выполнения работ на каждом виде оборудования, i – номер оборудования; j – номер работы. Необходимо составить план распределения работ между оборудованием, так чтобы все работы были выполнены, на каждом оборудовании выполнялась одна работа, а суммарная себестоимость выполнения всех работ была минимальной.

В этой задаче переменные X_{ij} являются булевыми и могут принимать значения 0 или 1. Математическая постановка задачи имеет вид

$$\begin{aligned}
&\min_{x_{ij}} \sum_{ij} C_{ij} \cdot X_{ij},\\
&\sum_{j=1}^{N} x_{ij} = 1,\\
&\sum_{i=1}^{N} x_{ij} = 1,\\
&x_{ij} = 0 \text{ или } 1.
\end{aligned} \tag{4.10}$$

Задача (4.10) может быть решена с помощью функции «Поиск решения» EXCEL. Задача о назначениях является вариантом транспортной задачи, у которой количество поставщиков и потребителей равно N, а запасы поставщиков и потребности потребителей равны единице.

5. Методы и модели теории игр

5.1. Основные понятия теории игр

В рыночной экономике предприятия принимают решения, когда на рынке есть конкуренты с противоположными интересами. В теории игр такие ситуации называют игровыми, а их участников – игроками [3, 6].

Теория игр – математическая теория принятия решений в условиях конкуренции или конфликта. Игра – математическая модель принятия решений игроками в условиях конкуренции или конфликта.

Для описания игры используются следующие понятия: *игроки* – множество участников игры; *стратегии* – возможные действия каждого игрока; *функции вы-*

игрыша – числовые показатели, выражающие выигрыш или проигрыш игроков в результате их действий.

Модель игры в *нормальной форме* имеет вид

$$< N, X = (X_1, X_2, \ldots, X_N), U = (U_1, U_2, \ldots U_N) >, \tag{5.1}$$

где N – количество игроков; $X = (X_1, X_2, \ldots, X_N)$ – множество стратегий игроков; X_i – множество стратегий i-го игрока; $U = (U_1, U_2, \ldots, U_N)$ – множество функций выигрыша игроков; $U_i = U_i(X)$ – функция выигрыша (проигрыша) i-го игрока, которая зависит от выбора стратегий X всеми игроками; $i = 1, 2, \ldots, N$.

Игра называется *конечной*, если каждый игрок имеет конечное число стратегий. Выбранные игроками стратегии называется *реализацией игры* (используется также термины *профиль* и *состояние* игры). При выборе своей стратегии игроки не знают о выборе стратегий другими игроками.

В результате реализации игры каждый игрок получает выигрыш $U_i = U_i(X) > 0$, или проигрыш $U_i = U_i(X) < 0$.

Целью игры каждого игрока является максимизация выигрыша, или минимизация проигрыша при каждой реализации игры.

Стратегия i-го игрока (x_i) называется *доминируемой*, если у него есть другая *доминирующая стратегия* (y_i), такая, что его выигрыш для стратегии (y_i), при любых стратегиях других игроков (x_{-i}) *не меньше*, чем для стратегии (x_i), а хотя бы для одной реализации стратегий других игроков *больше*. Формально это выглядит следующим образом:

$$U_i(x_i, x_{-i}) \le U_i(y_i, x_{-i}),$$

где x_i – стратегия i-го игрока; x_{-i} – стратегии остальных игроков.

Рациональные игроки будут использовать *доминирующие стратегии*, поэтому доминируемые стратегии можно удалить из игры.

Стратегии бывают чистыми и смешанными. ***Чистые стратегии*** – это стратегии из множества стратегий X. ***Смешанные стратегии*** – это распределения вероятностей на множествах чистых стратегий X_i каждого игрока.

Если интересы игроков противоположны, то игра называется *антагонистической.* Рассматриваются антагонистические игры с *нулевой суммой*, в которых сумма выигрышей (проигрышей) всех игроков в результате каждой реализации игры равна нулю.

Если участники игры могут объединяться, и это дает им более высокие выигрыши, то игры называются ***кооперативными***.

Динамическая игра – это игра, результат которой определяется последовательностью действий (ходов) игроков. ***Позиционной*** называется динамическая игра, в которой позиция игры (множество стратегий игроков) изменяется при каждой реализации по определенным правилам. Примерами позиционных игр являются шахматы, шашки и аналогичные игры.

5.2. Равновесие Нэша и оптимальность Парето

Важными понятиями теории игр являются равновесие Нэша и оптимальность Парето [6].

Равновесие Нэша – реализация игры, при которой ни один игрок не может увеличить свой выигрыш, изменив свою стратегию, если другие игроки не изменяют своих стратегий.

Реализация игры (x^*_i, x^*_{-i}) называется *равновесной по Нэшу*, если *изменение* своей стратегии с x^*_i на x_i не выгодно *ни одному игроку*, если другие игроки не изменяют своих стратегий (x^*_{-i}) , т. е. для любого i

$$U_i\,(x_i^*) \geq Ui(x_i,\, x_{-i}^*),$$

где $(x_i,\, x_{-i}^*)$ реализация игры для любой стратегии i-го игрока x_i и равновесных по Нэшу стратегиях (x_{-i}^*) других игроков.

Игра может иметь или не иметь равновесие Нэша в *чистых стратегиях.*

Теорема Нэша: У любой *конечной игры* существует равновесия Нэша в смешанных стратегиях.

Оптимальность Парето – это реализация игры, когда каждый игрок не может улучшить свой выигрыш без уменьшения выигрышей других игроков. Реализация игры являет *неоптимальной* по Парето, если хотя бы один игрок может улучшить свой выигрыш, не уменьшив выигрыши других игроков.

Оптимум по Парето означает, что любое изменение ухудшает выигрыш хотя бы одного игрока. Игра может иметь много состояний, оптимальных по Парето.

Множество состояний, *оптимальных по Парето*, называют *множеством Парето*. *Парето-оптимальное состояние рынка* – это ситуация, когда нельзя улучшить положение любого его участника, не ухудшив положение как минимум одного участника.

Движение в сторону оптимума Парето возможно лишь при распределении ресурсов, которое увеличивает доход (выигрыш) хотя бы одного игрока, не уменьшая доходы другим.

Если множество значений функций выигрышей всех игроков U(X) *непрерывно и выпукло*, то *множеством Парето является его граница*.

Множество называется *выпуклым*, если вместе с любыми двумя точками ему принадлежит и отрезок, их соединяющий. Выпуклыми множествами являются круг, прямоугольник, треугольник и т. п.

Обычно множество значений функций выигрышей всех игроков U(X) является выпуклым.

Пример 5.1. Имеются две фирмы, выпускающие аналогичную продукцию. Каждая из фирм может выбрать два уровня цен: высокие и низкие. Если обе фирмы выберут высокие цены, то каждая будет иметь прибыль по 3 млн р. Если обе выберут низкие, то каждая получит по 2 млн р. Однако, если одна выберет высокие, а другая низкие, то вторая получит 4 млн р., а первая – 1 млн р.

Наиболее выигрышным по общей прибыли является вариант с одновременным выбором высоких цен (сумма равна 6 млн р.). Но это состояние *неустойчиво по Нэшу* из-за большего выигрыша, который получит фирма, выбравшая низкую цену, если вторая фирма выберет высокую цену.

Поэтому обе фирмы, действуя независимо, с большой вероятностью выберут низкие цены. Хотя этот вариант не дает максимальной суммарной прибыли (сумма равна 4 млн р.), он исключает выигрыш конкурента, который тот получит за счет отступления от взаимно низких цен. Этот вариант является лучшим для потребителей. Таким образом, в этой модели конкуренция приводит к ***снижению цены товара***.

В этой модели конкуренции ситуация высоких цен *будет оптимальной по Парето*, но *не будет равновесной по Нэшу для фирм*. А ситуация низких цен *будет равновесной по Нэшу*, но *не будет оптимальной по Парето*.

Такая ситуация называется ***дилеммой заключенного***, когда игроки, действуя независимо, могут не сотрудничать друг с другом, даже если это в их интересах. В результате их общий выигрыш будет меньше, чем при сотрудничестве, т. е. *равновесие Нэша* не будет состоянием, *оптимальным по Парето*.

Игра в примере 5.1 называется ***биматричной***, в ней стратегиями игроков являются уровни цены, а результаты игры представлены двумя матрицами, в которых записаны выигрыши, или проигрыши игроков в зависимости выбранных ценовых стратегий. Биматричная игра для примера 5.1 представлена двумя таблицами (табл. 5.1 и 5.2).

Таблица 5.1

Прибыль фирмы А для примера 5.1

Стратегии фирмы А	Стратегии фирмы В	
	Цена высокая	Цена низкая
Цена высокая	3	1
Цена низкая	4	2

Таблица 5.2

Прибыль фирмы В для примера 5.1

Стратегии фирмы А	Стратегии фирмы В	
	Цена высокая	Цена низкая
Цена высокая	3	4
Цена низкая	1	2

5.3. Матричные игры с нулевой суммой

Матричная игра с нулевой суммой – это модель принятия решений, в которой есть два игрока A и B, каждый из которых имеет несколько стратегий своих действий. Каждый игрок старается максимизировать свой результат игры. При этом считается, что выигрыш одного игрока (A) является проигрышем другого (B). Такая игра называется ***антагонистической*** [3, 6]. Матричная антагонистическая игра представляется в виде платежной матрицы (табл. 5.3).

Таблица 5.3

Платежная матрица матричной игры

Стратегии игрока A_i	Стратегии игрока B_j				$ai = \min a_{ij}$
	B_1	B_2	…	B_n	
A_1	a_{11}	a_{12}	…	a_{1n}	α_1
A_2	a_{21}	a_{22}	…	a_{2n}	α_2
…	…	…	…	…	…
A_m	a_{m1}	a_{m2}	…	a_{mn}	α_m
$\beta_j = \max\limits_i a_{ij}$	β_1	β_2	…	β_n	$\alpha = \max \alpha_i$ $\beta = \min \beta_j$

В платежной матрице игры (см. табл. 5.3) записываются ***результаты игрока A.*** Если игрок A использует стратегию A_i, а игрок B использует стратегию B_j, то a_{ij} – выигрыш игрока A со знаком «+» (проигрыш со знаком «–»), а проигрыш (выигрыш) игрока B равен ($-a_{ij}$). Сумма выигрышей (проигрышей) игроков A и B равна нулю. Стратегии A_i и B_j называются ***чистыми стратегиями*** игроков.

Цель игры каждого игрока – максимизировать свой выигрыш или минимизировать свой проигрыш.

В маркетинге игроки A и B будут конкурирующими фирмами, или один из игроков (B) может рассматриваться как рыночный спрос. Стратегиями предприятия могут быть объемы производства продукции или цены, а результатом игры является прибыль или убыток.

Нижняя цена игры

$$\alpha = \max_i \min_j a_{ij}.$$

Игрок A рассматривает для каждой своей стратегии (строки) A_i минимальный свой результат и выбирает ту свою стратегию, которая его *максимизирует*. Это ***максиминная стратегия*** игрока A, при которой его результат будет *не хуже нижней цены* игры α при любых стратегиях игрока B, т. е. игрок A выиграет не меньше α.

Верхняя цена игры

$$\beta = \min_j \max_i a_{ij}.$$

Игрок B рассматривает для каждой своей стратегии (столбца) B_j максимальный результат игрока A и выбирает ту свою стратегию, которая его *минимизирует*. Это ***минимаксная стратегия*** игрока В, при которой результат игрока А *будет не лучше верхней цены* игры β при любых стратегиях игрока А, т. е. игрок В проиграет не больше β.

Нижняя цена игры не больше верхней цены игры:

$$\alpha = \max_i \min_j a_{ij} \le \min_j \max_i a_{ij} = \beta.$$

Игра имеет седловую точку, если

$$\alpha = \beta = a_{ks} .$$

В этом случае значение $V^* = \alpha = \beta$ называется ***ценой игры***.

Платежная матрица игры может иметь несколько седловых точек.

Стратегии k и s называются ***оптимальными чистыми стратегиями игроков.*** Если игрок А будет применять стратегию k, то *его результат будет не хуже* α. Если игрок В будет применять стратегию s, то *результат игрока А будет не лучше* α, т. е. игрок В проиграет не больше α.

Если игроки будут применять стратегии k и s, то игрок А будет всегда иметь результат $V^* = \alpha$, а игрок В будет всегда иметь результат (–α). Если α > 0, то игрок А будет всегда выигрывать, а игрок В – всегда проигрывать, и наоборот, если α < 0. Если игрок отклонится от своей оптимальной стратегии то его результат ухудшится.

Если игра имеет седловую точку, то при оптимальной стратегии один из игроков будет всегда выигрывать, а второй – проигрывать.

Пример 5.2. Платежная матрица игры имеет следующий вид (табл. 5.4).

Таблица 5.4

Платежная матрица игры для примера 5.2

Стратегии игрока А	Стратегии игрока В				min α_j
	B_1	B_2	**B_3**	B_4	
A_1	2	3	5	8	2
A_2	11	8	**7**	15	**7**
A_3	15	9	6	5	5
A_4	11	5	**7**	9	**7**
max β_j	15	9	**7**	15	α = 7 β = 7

Нижняя цена игры равна верхней цене: α = β = 7. Матрица игры имеет две седловые точки. У игрока А две оптимальные стратегии: A_2 и A_4. У игрока В одна оптимальная стратегия B_3. Цена игры, *выигрыш* игрока А равен 7, *проигрыш* игрока В равен 7. Игра выгодна игроку А и невыгодна игроку В.

Упрощение платежной матрицы удалением *доминируемых* строк и столбцов:

1) если в платежной матрице (см. табл. 5.3) есть строка (стратегия игрока А), элементы которой меньше или равны, а хотя бы один элемент меньше элементов другой строки, то первую строку можно вычеркнуть, т. к. при ее применении игрок

А выигрывает меньше, чем от применения другой стратегии. Первая строка называется *доминируемой*, а другая *доминирующей*;

2) если в платежной матрице есть столбец (стратегия игрока В), все элементы которого больше или равны, а хотя бы один больше элементов другого столбца, то первый столбец можно вычеркнуть, т. к. при его применении игрок В проигрывает больше, чем от применения другой стратегии. Первый столбец называется *доминируемым*, а другой *доминирующим*;

3) если в платежной матрице есть строка, которая является линейной комбинацией других строк, то эту строку можно удалить. Это верно и для столбцов.

Упрощение платежной матрицы преобразованием всех ее элементов по правилу W* = a·W + в, где W – первоначальная платежная матрица; W* – преобразованная платежная матрица; а и в – любые числа, не изменяет решения игры. Это правило используется для изменения масштаба и сдвига чисел в платежной матрице.

Пример 5.3. Два игрока выбирают наугад одно из чисел 1, 2 или 3. Если сумма четная, то эту сумму выигрывает игрок А, а игрок В ее проигрывает. Если сумма нечетная, то игрок А ее проигрывает, а игрок В ее выигрывает. Платежная матрица записывается в результатах игрока А (табл. 5.5).

Таблица 5.5

Платежная матица игры для примера 5.3

Стратегии игрока A_i	Стратегии игрока B_j			min a_i
	1	**2**	3	
1	2	–3	4	**–3**
2	–3	4	–5	–5
3	4	–5	6	–5
max β_j	**4**	**4**	6	α = –3 β = 4

Нижняя цена игры меньше верхней цены игры: $\alpha = -3 < \beta = 4$. Игра не имеет седловой точки. При разовой игре игрок А должен применить *максиминную стратегию* – выбрать 1, тогда его результат (проигрыш) будет не хуже –3 при любой стратегии игрока В. Игрок В должен применить *минимаксные стратегии* – выбирать 1 или 2, тогда результат (выигрыш) игрока А (проигрыш игрока В) будет не больше 4 при любой стратегии игрока А. При отклонении от этих стратегий результаты игроков могут быть или лучше, или хуже.

5.4. Решение матричных игр

Оптимальной для каждого игрока называется стратегия, которая обеспечивает ему максимальный выигрыш или минимальный проигрыш независимо от стратегии противника. Отклонение от оптимальной стратегии ухудшает результат игрока. ***Решением матричной игры*** называется *оптимальные стратегии* игроков А и В.

1. Решение матричной игры в чистых стратегиях:

1) если в платежной матрице есть строка, которая больше или равна другим строкам, то она является *оптимальной чистой стратегией игрока А*;

2) если в платежной матрице есть столбец, который меньше или равен другим столбцам, то он является *оптимальной чистой стратегией игрока В*;

3) если игра имеет *седловую точку*, т. е.

$$\alpha = \beta = a_{ks},$$

то она *имеет оптимальное решение в чистых стратегиях для обоих игроков*: для игрока А – это стратегия A_k, для игрока В – это стратегия B_s.

При оптимальных стратегиях результат игрока А будет всегда равен a_{ks}, а результат игрока В всегда равен $–a_{ks}$;

4) если у игры нет *седловой точки*, т. е.

$$\alpha < \beta,$$

то игра *не имеет решений в чистых стратегиях, а имеет решение в смешанных стратегиях*, а средний статистический результат игрока А (цена игры) находится в интервале между α и β.

Пример 5.4. Решение матричной игры в чистых стратегиях. Игра задается платежной матрицей (табл. 5.6).

Таблица 5.6

Платежная матрица игры для примера 5.4

Стратегии игрока А	Стратегии игрока В				min α_i
	B_1	B_2	**B_3**	B_4	
A_1	2	10	3	14	2
A_2	8	9	**5**	6	**5**
A_3	10	8	4	8	4
max β_j	10	10	**5**	14	$\alpha = \beta = 5$

Решение. Нижняя и верхняя цена игры равны: $\alpha = \beta = V^* = 5$. Значит, игра имеет решение в чистых стратегиях. Оптимальными стратегиями являются: для игрока А – стратегия A_2, для игрока В – стратегия B_3. Если игрок А применяет стратегию A_2, а игрок В применяет стратегию B_3, то игрок А выигрывает 5 единиц, а игрок В проигрывает 5 единиц. Если игрок применит неоптимальную стратегию, то он ухудшит свой результат при оптимальной стратегии другого игрока.

2. Решение матричных игр в смешанных стратегиях

Если у игры нет седловой точки, то она имеет решение в *смешанных стратегиях* игроков.

Смешанные стратегии – это *вероятности (частоты)* применения чистых стратегий игроками *в течение периода игры*. Игра повторяется в течение заданного периода. Чистая стратегия является частным случаем смешанной стратегии, когда применяется только она.

Основная теорема теории матричных игр (теорема фон Неймана): всякая матричная игра с нулевой суммой имеет решение в чистых или в смешанных стратегиях.

Задача определения ***оптимальной смешанной стратегии*** игроков ставится следующим образом. Требуется найти векторы $p^* = (p_1^*, p_2^*, \ldots, p_m^*)$ и $q^* = (q_1^*, q_2^*, \ldots, q_n^*)$, такие, что

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} p_i^* q_j^* = \max_p \min_q \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} p_i q_j = \min_q \max_p \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} p_i q_j = V^*, \tag{5.2}$$

$$\begin{gathered}
\sum_{i=1}^{m} p_i = \sum_{i=1}^{m} p^*{}_i = 1, \\
\sum_{i=1}^{n} q_i = \sum_{i=1}^{n} q^*{}_i = 1, \\
p_i \ge 0, q_i \ge 0.
\end{gathered} \tag{5.3}$$

Векторы $p^* = (p_1{}^*, p_2{}^*, \ldots, p_m{}^*)$ и $q^* = (q_1{}^*, q_2{}^*, \ldots, q_n{}^*)$ называются ***оптимальными смешанными стратегиями*** игроков А и В соответственно. Векторы p^* и q^* – это *вероятности (частоты) применения чистых стратегий* игроками во время игры, когда игра повторяется в течение некоторого периода.

Величина V* называется ***ценой игры***, она равна максимальному ожидаемому результату игрока А и минимальному ожидаемому результату игрока В, если они будут применять *оптимальные стратегии в течение некоторого периода времени.*

Если V* > 0, *то игрок А выигрывает, а игрок В проигрывает эту величину.* Если V* < 0, *то игрок А проигрывает, а игрок В выигрывает* –V* .

Если игроки *отклонятся* от своих оптимальных стратегий (p*, q*), то их результаты *ухудшатся.*

Оптимальные смешанные стратегии игроков А и В могут быть найдены как решения *двух задач линейного программирования (ЛП)*:

1) для игрока А:

$$\begin{gathered}
F^* = \min_X \sum_{i=1}^{m} X_i, \\
\sum_{i=1}^{m} a_{ij} X_i \ge 1, \\
X_i \ge 0.
\end{gathered} \tag{5.4}$$

Оптимальная смешанная стратегия игрока А равна $p_i{}^* = V^* \cdot X_i{}^*$, где $V^* = 1/F^*$ – цена игры. Результат игрока А равен V^*.

2) для игрока В:

$$\begin{gathered}
D^* = \max_Y \sum_{j=1}^{n} Y_j, \\
\sum_{j=1}^{n} a_{ij} Y_j \le 1, \\
Y_j \ge 0.
\end{gathered} \tag{5.5}$$

Оптимальная смешанная стратегия игрока В равна $q_j{}^* = V^* \cdot Y_j{}^*$, где $V^* = 1/D^*$ – цена игры. Результат игрока В равен – V^*.

Задачи (5.4) и (5.5) имеют решение для любой матрицы игры (a_{ij}) и F* = D* и решаются с помощью функции «Поиск решения» программы EXCEL. Если игрок имеет *только две чистые стратегии*, то его оптимальную смешанную стратегию и цену игры можно найти ***графическим методом***.

Пример 5.5. Решение матричной игры в смешанных стратегиях. Имеются два игрока А и В. Первый может использовать две стратегии A_1 или A_2, второй – три стратегии B_1, B_2, B_3, (табл. 5.7). Требуется найти оптимальные стратегии игроков.

Таблица 5.7

Платежная матрица игры для примера 5.5

Стратегии игрока А	Стратегии игрока В			min α_i
	$\underline{B_1}$	B_2	B_3	
$\underline{A_1}$	7	20	–5	**$\underline{-5}$**
A_2	–10	30	20	–10
max β_i	**$\underline{7}$**	30	20	$\alpha = -5$
				$\beta = 7$

Решение. Стратегия B_2 *доминируется* стратегиями B_1 и B_3 игрока В, поэтому она не будет применяться игроком В, стратегию B_2 *надо удалить.*

Седловой точки в этой игре нет. Поэтому игроки должны применить смешанные стратегии. Цена игры V* находится в интервале (–5, 7). Для определения оптимальных смешанных стратегий и цены игры надо решить задачи (5.4) и (5.5).

Оптимальной смешанной стратегией игрока А будет следующая: стратегию A_1 он должен применять с вероятностью (частотой) $p_1^* = 0{,}6$; стратегию A_2 – с вероятностью (частотой) $p_2^* = 0{,}4$. Цена игры (выигрыш игрока А) равна $V^* = 5{,}6$. Оптимальная смешанная стратегия игрока В будет следующая: стратегию B_1 он должен применять с вероятностью (частотой) $q_1^* = 0{,}5$; стратегию B_2 – не применять; стратегию B_3 применять с вероятностью (частотой) $q_3^* = 0{,}5$. Тогда *минимальный проигрыш* игрока В равен –V* = –5,6. Игра невыгодна для игрока В.

5.5. Статистические игры

В статистических играх игрок А – предприятие, а игрок В – спрос на рынке или природа. Оптимальную стратегию в этом случае надо определить только для игрока А (предприятия). Стратегии второго игрока В (рынка) случайны и он не стремится к выигрышу [3].

Пример 5.6. Торговая организация (игрок А) должна создать запасы четырех видов товаров, спрос (игрок В) на которые случаен. Продажа единицы первого товара дает прибыль 36 ден. ед., а его хранение на складе требует затрат 16 ден. ед., для второго товара – 30 и 10, для третьего – 25 и 6, для четвертого 20 и 4 ден. ед. соответственно. Требуется найти оптимальную структуру товарных запасов.

Решение. Составляем платежную матрицу (табл. 5.8). По строкам записываем товар на складе, по столбцам – товар спроса, также записываем прибыль (+) от продажи или затраты (–) на хранение единицы товара.

Таблица 5.8

Платежная матрица для примера 5.6

Товар на складе	Спрос на товар				α_i
	1	2	3	4	
1	36	–16	–16	–16	–16
2	–10	30	–10	–10	–10
3	–6	–6	25	–6	–6
4	–4	–4	–4	20	**–4**
β_j	36	30	25	**20**	$\alpha = -4$, $\beta = 20$

Игра не имеет седловой точки, нижняя цена игры $\alpha = -4$, верхняя цена $\beta = 20$ ($\alpha < \beta$). Поэтому оптимальная стратегия торговой организации будет смешанная. Решаем задачу ЛП (5.3) с помощью функции «Поиск решений» EXCEL. Получим вектор $X^* = (0{,}028;\ 0{,}033;\ 0{,}040;\ 0{,}050)$, $F^* = 0{,}15$. Откуда цена игры равна $V^* = 1/F^* = 6{,}62$, а структура оптимальных запасов товаров равна $P^* = (0{,}184;\ 0{,}221;\ 0{,}265;\ 0{,}331) = (18{,}4;\ 22{,}1;\ 26{,}5;\ 33{,}1)$ %.

Пример 5.7. Игрок А – предприятие, игрок В – рыночный спрос. При высоком спросе реализуется 200 ед. продукции, а при низком спросе – 100 ед. продукции. У предприятия две стратегии: произвести 200 или 100 ед. продукции. У рынка две «стратегии» – высокий или низкий спрос. Спрос случайный и непредсказуемый. Требуется определить оптимальную стратегию производства продукции в плановом периоде (месяце) для получения максимальной прибыли.

Решение. Составим таблицу прибыли и убытка предприятия (табл. 5.9).

Таблица 5.9

Прибыль (+), убыток (–) предприятия, ден. ед., для примера 5.7

Производство, нат. ед.	Спрос		α_i
	Высокий	Низкий	
200	300	–350	–350
<u>100</u>	30	**<u>10</u>**	**<u>10</u>**
β_j	300	**<u>10</u>**	$\alpha = 10$, $\beta = 10$

Определяем нижнюю и верхнюю цены игры: $\alpha = \beta = 10$. Игра имеет седловую точку, поэтому оптимальной стратегией предприятия будет максиминная чистая стратегия, где $\alpha = \beta = 10$, т. е. производить 100 единиц продукции каждый месяц.

Прибыль предприятия будет не меньше 10 ден. ед., при высоком спросе прибыль будет равна 30 ден. ед., если спрос равновероятен, то средняя прибыль предприятия будет равна 20 дн. ед. Так как у предприятия две чистые стратегии, то решение игры можно найти графическим методом.

6. Модели систем массового обслуживания в маркетинге

6.1. Основные понятия теории систем массового обслуживания

Система массового обслуживания (СМО) – это система, которая предназначена для обслуживания поступающих заявок. К СМО относятся магазины, кафе, банки, автозаправочные станции, железнодорожные и авиационные кассы, телефонные станции и т. п. [1, 3, 7].

Так как СМО имеют ограниченную пропускную способность, а заявки поступают нерегулярно, то или периодически возникают очереди заявок, или система может простаивать в ожидании заявок. Это ведет к непроизводительным затратам, поэтому при создании систем массового обслуживания решается задача нахождения оптимальной пропускной способности системы, при которой достигается приемлемый компромисс между затратами от простоя заявок в очередях и затратами от простоя системы.

Основными характеристиками СМО являются блок обслуживания, поток входящих заявок, дисциплина обслуживания, очереди в ожидании обслуживания и поток выходящих заявок.

Блок обслуживания может иметь один или несколько каналов обслуживания. ***Канал обслуживания*** – это устройство (или человек), обслуживающее заявки.

СМО может иметь один или несколько каналов обслуживания заявок. В первом случае система называется одноканальной, во втором – многоканальной. Например, магазин может иметь одну или несколько касс.

СМО могут быть однофазными или многофазными, когда заявка обслуживается только одним или последовательно несколькими каналами обслуживания. У каждого канала может возникать очередь заявок.

СМО делят на два основных типа:

1) *СМО с отказами*, в которой заявка, поступившая, когда все каналы заняты, получает отказ и покидает СМО;

2) *СМО с ожиданием*, в которой заявка, поступившая, когда все каналы заняты, становится в общую очередь на обслуживание.

В свою очередь СМО с ожиданием делятся на виды: с ограниченной или неограниченной длиной очереди, или временем ожидания.

Входящий поток заявок. Обычно предполагают, что входящий поток заявок подчиняется некоторому вероятностному закону длительности интервалов между последовательно поступающими заявками.

В СМО обычно рассматривается ***стационарный пуассоновский поток*** заявок, который характеризуется следующими параметрами:

1) ***интенсивностью потока*** λ, т. е. средним количеством заявок, поступающих на обслуживание в единицу времени. Тогда *среднее время между двумя заявками* $T_{сз} = 1/\lambda$, а $\lambda = 1/T_{сз}$;

2) *вероятность* того, что в промежутке времени (0, t) не будет заявок:

$$P_0(t) = Exp(-\lambda \cdot t) = Exp(-t/T_{сз});$$

3) *вероятностью* того, что в промежутке (0, t) будет хотя бы одна заявка:

$$P = 1 - \mathrm{Exp}(-\lambda \cdot t);$$

4) *вероятностью* того, что в промежутке (0, t) будет ровно m заявок:

$$P_m(t) = \frac{(\lambda \cdot t)^m}{m!} \mathrm{Exp}(-\lambda \cdot t).$$

Время определяется в секундах либо минутах.

Часто интенсивность потока заявок λ *изменяется в течение суток*. Это имеет место в сфере услуг (магазины, кафе и др.). Утром, днем и вечером интенсивность потока заявок λ может быть разная. В этом случае сутки надо разделить на промежутки с разными значениями интенсивности λ.

Дисциплина очереди определяет порядок обслуживания заявок, поступающих на вход системы. Обычно применяется дисциплина «первым пришел – первым обслужен». Но возможны другие порядки обслуживания: «первым пришел – последним обслужен», «случайный порядок обслуживания», «обслуживание с приоритетами».

Выходящий поток – поток заявок, покидающих систему. Он состоит из обслуженных и необслуженных заявок.

Время обслуживания заявки каналом. Время обслуживания каналом одного требования – *случайная величина*, которая определяется на основе статистических испытаний. Чаще всего принимают гипотезу о показательном законе распределения времени обслуживания.

Показательный закон распределения времени обслуживания – вероятность того, что время обслуживания продлится не более чем t:

$$P_{об}(t) = 1 - \mathrm{Exp}(-\mu t),$$

где μ – интенсивность обслуживания заявок каналом (среднее количество заявок, обслуживаемых в единицу времени), которая определяется соотношением

$$\mu = 1/T_{об},$$

где $T_{об}$ – среднее время обслуживания одного требования каналом.

Если закон распределения времени обслуживания показательный, то закон распределения времени обслуживания несколькими каналами будет показательным с интенсивностью, равной сумме интенсивностей каналов.

Загрузка канала α – среднее число заявок, приходящих *за среднее время обслуживания одной заявки*:

$$\alpha = \lambda/\mu = T_{об}/T_{сз}.$$

Для одного канала с ожиданием должно быть $\alpha < 1$, т. е. $\mu > \lambda$, или $T_{об} < T_{сз}$. Это значит, что среднее время обслуживания заявки каналом должно быть меньше среднего времени между поступлением заявок, *иначе очередь будет неограниченно расти*.

Если СМО с ожиданием *имеет* n *каналов*, то должно быть $n > \alpha$, иначе число поступающих заявок будет больше суммарной производительности всех каналов и очередь будет неограниченно расти.

6.2. Модели систем массового обслуживания

1. Одноканальные СМО с отказами. Показателями таких СМО являются:

1) вероятность того, что канал свободен:

$$P_0 = \frac{\mu}{\mu + \lambda};$$

2) вероятность того, что канал занят.

$$P_1 = 1 - P_0 = \frac{\lambda}{\mu + \lambda};$$

3) абсолютная пропускная способность системы, при которой среднее количество обслуженных заявок в единицу времени определяется по формуле

$$A = \frac{\mu \cdot \lambda}{\mu + \lambda};$$

4) относительная пропускная способность системы, при которой средняя доля обслуженных заявок к поступившим в единицу времени равна

$$q = P_0 = \frac{\mu}{\mu + \lambda}.$$

2. Многоканальные СМО с отказами. В таких СМО имеется n каналов.

Если заявка пришла, когда все каналы заняты, то она получает отказ и покидает систему. Показателями многоканальных СМО с отказами являются [1]:

1) вероятность того, что все каналы свободны:

$$P_0 = \left[1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha^k}{k!}\right]^{-1};$$

2) вероятность того, что занято ровно k каналов и $1 \le k \le n$:

$$P_k = \frac{\alpha^k}{k!} P_0;$$

3) вероятность отказа:

$$P_{отк} = P_n = \frac{\alpha^n}{n!} P_0;$$

4) относительная пропускная способность системы, при которой средняя доля обслуженных заявок к поступившим в единицу времени равна

$$q = 1 - P_{отк};$$

5) абсолютная пропускная способность системы, при которой среднее количество обслуженных заявок в единицу времени определяется по формуле

$$A = \lambda \cdot q;$$

6) среднее число занятых каналов:

$$N_з = A / \mu = \alpha q;$$

7) коэффициент занятости каналов:

$$K_з = N_з / n.$$

Пример 6.1. В магазине надо установить несколько кассовых аппаратов. Предполагается, что если покупатель пришел, когда все кассы заняты, то он покидает магазин. Предполагаемая интенсивность входящего потока требований составляет 2,5 заказа/мин. Длительность оформления покупателя в среднем равна 0,8 мин. Определить, какое минимальное количество касс надо, чтобы обслуживать не менее 90 % покупателей.

Решение. Рассматриваемая система является системой обслуживания с отказами, для которой $\lambda = 2{,}5$; $m = 0$; $T_{об} = 0{,}8$ мин; $\mu = 1{,}25$ треб./мин; $q \geq 0{,}9$.

Интенсивность нагрузки $\rho = \lambda / \mu = 2{,}5 / 1{,}25 = 2$.

Для определения требуемого количества касс n, обеспечивающего $P_{отк} < 0{,}1$, будем последовательно придавать n значения 1, 2, ... и вычислять $P_{отк}$ до тех пор, пока не будет выполнено данное условие.

Пусть n = 1.

Вероятность того, что система свободна: $P_0 = [1 + \frac{\rho}{1!}]^{-1} = \frac{1}{3}$.

Вероятность того, что заявка, поступившая в систему, получит отказ, равна $P_{отк} = \frac{\rho}{1!} \cdot P_0 = 2 / 3 = 0{,}667$.

Так как $P_{отк} = 0{,}667 > 0{,}1$, то одного канала (кассового аппарата) для удовлетворения заданного уровня обслуживания недостаточно.

Увеличим число каналов и проведем аналогичные расчеты, табл. 6.1.

Таблица 6.1

Варианты СМО

n	P_0	$P_{отк}$
2	0,2	0,4
3	0,16	0,211
4	0,143	0,095

Таким образом, из проведенных расчетов следует, что необходимо установить четыре кассовых аппарата, тогда доля обслуженных покупателей от числа пришедших составит q = 1 – 0,095 = 0,905 или 90,5 %, что соответствует заданному уровню обслуживания.

3. Одноканальные СМО с ожиданием. Основными характеристиками таких СМО являются:

1) коэффициент простоя системы:

$$E_1 = 1 - \alpha;$$

2) среднее число заявок в системе:

$$E_2 = \frac{\alpha}{1-\alpha};$$

3) средняя длина очереди:

$$E_3 = \frac{\alpha^2}{1-\alpha};$$

4) среднее время пребывания заявки в системе:

$$E_4 = \frac{1}{\mu-\lambda};$$

5) среднее время пребывания заявки в очереди:

$$E_5 = \frac{\alpha}{\mu-\lambda}.$$

Пример 6.2. Рассмотрим задачу проектирования АЗС с одной бензоколонкой. Средний интервал между прибытием машин на заправку $1/\lambda = T_{сз} = 4$ мин. Есть три варианта бензоколонки, отличающихся средним временем обслуживания машин $T_{об} = 1/\mu$: 5 мин, 3,5 мин, 2 мин. Требуется выбрать оптимальный вариант бензоколонки.

Решение. Результаты расчета характеристик АЗС представлены в табл. 6.2.

Таблица 6.2

Характеристики вариантов АЗС

Параметры АЗС	Варианты АЗС		
	первый	второй	третий
1	2	3	4
$T_{сз} = 1/\lambda$	4 мин	4 мин	4 мин
$T_{об} = 1/\mu$	5 мин	3,5 мин	2 мин
α	1,25	0,875	0,5
E_1	–0,25	0,125	0,5

Окончание табл. 6.2

1	2	3	4
E_2	–5	7	1
E_3	–6,25	6,125	0,5
E_4	–20	27,48	4
E_5	–25	24,31	2

Первый вариант АЗС плохой, т. к. среднее время обслуживания (1/μ) больше среднего времени между заявками (1/λ), поэтому очередь будет неограниченно расти. Второй вариант хороший по показателю загруженности оборудования $\alpha = 0{,}875$ и малого простоя оборудования $E_1 = 0{,}125$, но в этом варианте получается большая очередь $E_3 > 6$ машин и большое время ожидания в очереди $E_5 = 24{,}31$ мин.

Третий вариант приводит к тому, что оборудование в среднем половину времени простаивает $E_1 = 0{,}5$, но малые средняя длина очереди $E_3 = 0{,}5$ машин и среднее время пребывания в очереди $E_5 = 2$ мин.

Поэтому третий вариант АЗС с учетом тенденции роста автомобильного парка является лучшим. Одноканальные системы являются частным случаем многоканальных СМО.

4. Многоканальные СМО с ожиданием. В такой модели СМО предполагается число каналов n и n > α, т. е. каналов должно быть достаточно, чтобы очередь не росла неограниченно. Показателями многоканальных СМО с ожиданием являются [1, 3, 6]:

1) вероятность того, что все каналы свободны:

$$P_0 = \left[\frac{\alpha^n}{n!(1 - \frac{\alpha}{n})} + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\alpha^k}{k!} \right]^{-1};$$

2) вероятность того, что занято точно k каналов и $k \le n$:

$$P_k = \frac{\alpha^k}{k!} P_0;$$

3) вероятность того, что в СМО находится m заявок и m > n:

$$P_k = \frac{\alpha^m}{n! n^{m-n}} P_0;$$

4) вероятность того, что все каналы заняты:

$$P_n = \frac{\alpha^n}{n!\left(1 - \frac{\alpha}{n}\right)} P_0;$$

5) средняя длина очереди:

$$\overline{L}_{оч} = \frac{\alpha}{n\left(1 - \frac{\alpha}{n}\right)} P_n;$$

6) среднее время ожидания заявки в очереди:

$$\overline{T}_{ож} = \frac{P_n}{\mu(n - \alpha)};$$

7) среднее число свободных каналов:

$$\overline{N}_0 = \sum_{k=0}^{n-1} (n - k) P_k;$$

8) коэффициент простоя каналов:

$$K_{пр} = \frac{\overline{N}_0}{n};$$

9) среднее число занятых каналов:

$$\overline{N}_з = n - \overline{N}_0;$$

10) коэффициент загрузки каналов:

$$K_{заг} = \frac{\overline{N}_з}{n} = 1 - K_{пр}.$$

Пример 6.3. Пусть мастерская по ремонту телевизоров имеет n = 5 мастеров. В течение дня в среднем на ремонт поступает λ = 10 телевизоров. Каждый мастер в течение дня в среднем успевает отремонтировать μ = 2,5 телевизора. Надо определить характеристики работы мастерской.

Решение. Поскольку n = 5, α = λ/μ = 10/2,5 = 4, n > α, то очередь не будет расти неограниченно.

Вероятность, что все мастера свободны, равна

$$P_0 = \left[\frac{4^5}{5!(1 - 4/5)} + 1 + 4 + \frac{4^2}{2!} + \frac{4^3}{3!} + \frac{4^4}{4!}\right]^{-1} = 0{,}013.$$

Вероятность, что все мастера заняты ремонтом:

$$P_5 = \frac{4^5}{5!(1 - 4/5)} 0{,}013 = 0{,}554.$$

Среднее время ожидания ремонта телевизора:

$$\overline{T}_{ож} = \frac{0{,}554}{2{,}5(5 - 4)} = 0{,}222 \text{ ч.}$$

Средняя длина очереди:

$$\overline{L}_{оч} = \frac{4}{5(1-4/5)} 0,554 = 2,2 \text{ телевизора.}$$

Среднее число мастеров, свободных от работы:

$$\overline{N}_0 = 0,95 \text{ мастера.}$$

Среднее число занятых работой мастеров:

$$\overline{N}_з = 5 - 0,95 = 4,05.$$

Коэффициент загрузки мастерской:

$$K_{заг} = \frac{4,05}{5} = 0,81 = 81\%.$$

Таким образом, эффективность работы мастерской достаточно высокая.

5. Многоканальные СМО с ожиданием и ограничением на длину очереди. Пусть число каналов n, а мест в очереди ограничено и равно m. Время обслуживания одного канала $T_{об}$. Если требование поступает, когда все каналы и места в очереди заняты, то оно покидает систему.

Показателями таких СМО являются:

1) вероятность того, что все каналы свободны:

$$P_0 = \left[1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha^k}{k!} + \frac{\alpha^n}{n!} \cdot \frac{(\alpha/n) - (\alpha/n)^{m+1}}{(1 - \frac{\alpha}{n})} \right]^{-1};$$

2) вероятность того, что занято ровно k каналов и $1 \le k \le n$:

$$P_k = \frac{\alpha^k}{k!} P_0;$$

3) вероятность того, что занято ровно r мест в очереди и $1 \le r \le m$:

$$P_{n+r} = \frac{\alpha^{n+r}}{n^r \cdot n!} P_0;$$

4) вероятность отказа:

$$P_{отк} = P_{n+m} = \frac{\alpha^{n+m}}{n^m \cdot n!} P_0;$$

5) относительная пропускная способность системы – доля обслуженных требований от поступивших в единицу времени. Вероятность обслуживания равна

$$q = P_{обс} = 1 - P_{отк};$$

6) абсолютная пропускная способность системы – количество обслуженных требований в единицу времени:

$$A = \lambda \cdot q\,;$$

7) среднее число занятых каналов:

$$N_з = \frac{A}{\mu} = \alpha \cdot q;$$

8) коэффициент занятости каналов:

$$K_з = \frac{N_з}{n};$$

9) среднее число требований в очереди:

$$L_{ож} = P_0 \cdot \frac{\alpha^{n+1}}{n \cdot n!} \cdot \frac{1-(\alpha / n)^m}{(1-\alpha / n)^2} \cdot \left(m + 1 - m \cdot \frac{\alpha}{n} \right);$$

10) среднее время ожидания в очереди:

$$T_{оч} = \frac{L_{ож}}{\lambda};$$

11) среднее количество требований в СМО:

$$L_{сис} = L_{ож} + N_з\,;$$

12) среднее время пребывания требования в СМО:

$$T_{сис} = \frac{L_{сис}}{\lambda}.$$

Пример 6.4. В мини-маркет заходит в среднем шесть покупателей в минуту, которых обслуживают два кассира с интенсивностью два покупателя в минуту. Длина очереди ограничена четырьмя покупателями. Определить характеристики СМО и дать оценку ее работы.

Решение. Рассматриваемая система является многоканальной системой массового обслуживания с ограниченной длиной очереди, для которой $n = 2$, $m = 4$, $\lambda = 6$, $\mu = 2$.

Определим характеристики системы:

1) интенсивность нагрузки на систему: $\alpha = \lambda / \mu = 6 / 2 = 3$;
2) интенсивность нагрузки на канал: $\alpha / n = 3 / 2 = 1{,}5$;
3) вероятность того, что система свободна:

$$P_0 = \left[1 + 3 + \frac{3^2}{2!} + \frac{3^2}{2!} \cdot \frac{1{,}5 - 1{,}5^5}{1 - 1{,}5} \right]^{-1} = 0{,}015;$$

4) вероятность отказа обслуживания покупателя:

$$P_{отк} = \frac{3^6}{2^4 \cdot 2} \cdot 0,015 = 0,34;$$

5) относительная пропускная способность магазина:

$$q = P_{об} = 1 – P_{отк} = 1 – 0,34 = 0,66;$$

6) абсолютная пропускная способность магазина:

$$A = \lambda q = 6 \cdot 0,66 = 3,96;$$

7) среднее число занятых касс:

$$N_з = \alpha q = 3 \cdot 0,66 = 1,88;$$

8) коэффициент занятости касс:

$$K_з = N_з/n = 1,88/2 = 0,94;$$

9) среднее число покупателей в очереди:

$$L_{ож} = 2,58;$$

10) среднее время ожидания в очереди:

$$T_{оч} = 2,58 / 6 = 0,43;$$

11) среднее число покупателей в магазине:

$$L_{сис} = 2,58 + 1,88 = 4,46;$$

12) среднее время пребывания покупателя в магазине:

$$T_{сис} = 4,46 / 6 = 0,743 \text{ мин.}$$

Таким образом, относительная пропускная способность магазина равна 66 %, в очереди в среднем находится 2,6 чел. Для повышения производительности магазина можно увеличить количество касс до трех.

6.3. Оптимизация систем массового обслуживания

Оптимизация систем массового обслуживания определяется выбранными критериями эффективности. В качестве критериев эффективности могут быть приняты любые из параметров, характеризующих работу системы: количество каналов обслуживания, длина очереди, пропускная способность системы и т. д. Применяется также стоимостные критерии, отражающие величину издержек, связанных с функционированием системы в единицу времени [1].

Для систем с ограниченным числом мест в очереди и несколькими обслуживающими каналами функция издержек в единицу времени имеет следующий вид:

$$З_{сис} = C_{пр} \cdot N_{пр} + C_{эк} \cdot N + C_{ож} \cdot L_{ож} + C_{от} \cdot P_{от} \cdot \lambda,$$

где $З_{сис}$ – затраты на систему в единицу времени; $C_{пр}$ – издержки от простоя одного канала в единицу времени; $N_{пр}$ – среднее количество простаивающих каналов в единицу времени; $C_{эк}$ – издержки на эксплуатацию одного канала в единицу времени; N – количество каналов; $C_{ож}$ – издержки от ожидания одного требования в единицу времени; $L_{ож}$ – средняя длина очереди; $C_{от}$ – издержки от отказа в обслуживании одному требованию; $P_{от}$ – вероятность отказа.

Функция издержек для систем с ожиданием имеет следующий вид:

$$З_{ож} = C_{пр} \cdot N_{пр} + C_{эк} \cdot N + C_{ож} \cdot L_{ож} .$$

Функция издержек для систем с отказами имеет следующий вид:

$$З_{от} = C_{пр} \cdot N_{пр} + C_{эк} \cdot N + C_{от} \cdot P_{от} \cdot \lambda .$$

Изменяя условия функционирования системы, в частности, изменяя число каналов, можно изменять функцию издержек. Часто при этом надо соблюдать определенные требования относительно качества функционирования системы.

Задачу оптимизации СМО можно поставить в двух видах:

1) при заданных затратах надо обеспечить максимальную производительность системы;

2) заданную производительность системы надо обеспечить с минимальными затратами.

Задача оптимизации СМО может быть многокритериальной. Для принятия оптимального решения надо выбрать задачу оптимизации, рассмотреть несколько вариантов СМО, определить затраты и выбрать оптимальный вариант системы.

7. Экспертные методы принятия маркетинговых решения

7.1. Сущность экспертных методов принятия решений

Экспертные методы принятия решений – методы сбора и обработки мнений экспертов (специалистов, респондентов) по рассматриваемой проблеме с целью принятия необходимых решений. Экспертами в зависимости от задачи могут быть как специалисты, так и потребители [2].

Экспертные методы применяются, когда математическое описание задачи невозможно или отсутствует необходимая статистическая информация. Эти методы основаны на опыте, знаниях и интуиции специалистов (экспертов). Информация, полученная от экспертов, обрабатывается статистическими методами.

Экспертные методы применяются для решения следующих задач:

- оценка альтернатив решения проблем;
- упорядочение списка альтернатив (объектов) по одному или нескольким критериям и выбор одной или нескольких лучших альтернатив;
- оценка влияния факторов на некоторый показатель или ситуацию;
- присвоение числовых значений качественным показателям;
- прогнозирование развития рассматриваемой ситуации.

Экспертными методами оцениваются качество и конкурентоспособность продукции, конкурентоспособность предприятий, рынки, предпочтения потребителей, конкуренты и поставщики, риски, факторы, влияющие на решение, и т. д.

Для применения экспертных методов создаются экспертная и рабочая группы для организации работ и подсчета баллов. В состав экспертной и рабочей групп включаются специалисты по данной проблеме. Оптимальное количество экспертов – от 5 до 12 человек. Сбор информации от экспертов осуществляется с помощью анкет и таблиц.

Принятие решения на основе экспертных методов включает следующие этапы:

1) определение объекта, предмета и цели экспертизы;
2) формирование рабочей группы;
3) выбор критериев оценки объектов;
4) разработка шкалы оценок объектов по критериям и анкет опроса экспертов;
5) формирование группы экспертов;
6) разработка сценария и процедура экспертизы;
7) сбор и анализ экспертной информации;
8) обработка экспертной информации;
9) анализ результатов экспертизы;
10) принятие решений.

Экспертные методы классифицируются по следующим признакам:

- количество экспертов: индивидуальные; коллективные;
- количество критериев: однокритериальные; многокритериальные.
- количество этапов: одноэтапные; многоэтапные.

7.2. Метод ранжирования альтернатив

Ранжирование – расположение альтернатив в порядке убывания (или возрастания) значения некоторого критерия. Ранжирование – это использование порядковой шкалы для упорядочения объектов в соответствии с заданным критерием.

Метод ранжирования применяется, когда надо упорядочить некоторые объекты (решения, показатели, факторы) по некоторому критерию и выбрать из них один или несколько лучших или наиболее важных.

Данный метод применяется, если количество альтернатив не слишком велико и используется один критерий для упорядочения альтернатив, а также для упорядочения нескольких факторов по степени их влияния на рассматриваемый показатель или ситуацию при недостатке статистических данных.

Алгоритм метода следующий [2, 8]:

1. Присвоение рангов. Каждый эксперт приписывает ранги объектам (1, 2, 3 и т. д.) в порядке убывания некоторого критерия.

Выбирается лучший объект, ему присваивается ранг 1, из оставшихся альтернатив снова выбирается лучший, ему присваивается ранг 2 и т. д. Максимальный ранг должен быть не больше числа альтернатив (n).

2. Стандартизация рангов. Если некоторым объектам присвоены равные ранги, в этом случае осуществляется стандартизация рангов.

3. Если ранжирование выполняется несколькими экспертами, то для каждого объекта определяется сумма стандартизированных рангов, указанных экспертами.

4. Определяются результирующие ранги. Объекту с наименьшей суммой рангов присваивается результирующий ранг – 1, следующему – 2 и т. д. Ранжирование объектов выполняется по результирующим рангам. Лучшим является объект с результирующим рангом 1, далее с рангом 2 и т. д.

5. Проверяется согласованность мнений экспертов. При статистическом анализе мнений экспертов необходимо оценить степень их согласованности по данной проблеме, выявить экспертов с расходящимися мнениями от средних, установить и устранить причины рассогласований их мнений. Для этого используются *коэффициент конкордации и коэффициент Спирмена.*

Пример 7.1. Определение стандартизированных рангов (табл. 7.1).

Таблица 7.1

Стандартизация рангов

Объекты	Ранги	Стандартизированные ранги
1	4	5,5
2	3	3,5
3	3	3,5
4	2	2
5	4	5,5
6	1	1
Сумма		
21	17	21

Сумма стандартизированных рангов *должна равняться сумме номеров объектов*. Объекты 6 и 4 имеют ранги 1 и 2. Объекты 2, 3 поделили места 3-е и 4-е, им присваивается общий стандартизированный ранг:

$$x_2 = x_3 = \frac{3+4}{2} = 3{,}5.$$

Объекты 1 и 6 поделили места 5-е и 6-е, им присваивается стандартизированный ранг:

$$x_1 = x_5 = \frac{5+6}{2} = 5{,}5.$$

Пример 7.2. Количество экспертов n = 5, количество объектов m = 6. По рангам экспертов сформирована таблица стандартизированных рангов объектов (табл. 7.2) [8].

Таблица 7.2

Стандартизированные ранги альтернатив

Эксперты	Объекты						Сумма
	1	2	3	4	5	6	
1	1	3	2	4	5	6	21
2	2	1	3	5	4	6	21
3	1	2	3	5	4	6	21
4	1	2	3	5	4	6	21
5	2	1	3	4	6	5	21
$X_j = \sum_{i=1}^{m} x_{ij}$	7	9	14	23	23	29	105
Результирующий ранг	1	2	3	4,5	4,5	6	21
$X_j - \bar{x}$	–10,5	–8,5	–3,5	5,5	5,5	11,5	0,0
$(X_j - \bar{x})^2$	110,2	72,25	12,25	30,25	30,25	132,25	S = 387,5

В табл. 7.2 :

$$\bar{x} = \frac{n(m+1)}{2} = \frac{5(6+1)}{2} = 17,5.$$

Упорядочение объектов выполняется по результирующему рангу. Из таблицы видно, что наиболее предпочтительным является первый объект, потом второй, третий и т. д.

Нет связанных рангов, поэтому коэффициент конкордации определяются по формуле

$$w = \frac{12 \cdot S}{n^2(m^3 - m)} = \frac{12 \cdot 387,5}{5^2(6^3 - 6)} = \frac{4650}{5250} = 0,89 > 0,5.$$

Мнения экспертов согласованы. Оценим значимость коэффициента конкордации:

$$\chi^2 = 5 \cdot 5 \cdot 0,89 = 22,14.$$

При уровне значимости 0,05 (доверительной вероятности 0,95) и числе степеней свободы (n – 1) = 5 имеем $22,14 > \chi^2(5; 0,95) = 11,07$.

Таким образом, с уровнем значимости (ошибки) a = 0,5 или с доверительной вероятностью 0,95 принимается коллективная оценка объектов экспертами.

7.3. Метод парных сравнений

В случае большого числа альтернатив (больше 10) их непосредственное ранжирование может быть затруднительно. В этом случае применяются методы парных сравнений [2].

Рассмотрим метод *частичного парного сравнения:*

1. Выбираются сравниваемые объекты (альтернативы);

2. Выбирается критерий сравнения альтернатив.

3. Каждый эксперт заполняет табл. 7.3 для клеток j > i, j – номер столбца, i – номер строки. В клетку (i, j) записывается номер альтернативы i или j, которая более предпочтительна, чем другая.

Таблица 7.3

Таблица парных сравнений альтернатив

Альтернативы (i)	Альтернативы (j)				R_i
	1	2	…	N	
1	–				
2	–	–			
…	…	…	…	…	…
N	–	–		–	
S_j					

В столбец R_i записывается количество предпочтений i-й альтернативы над другими в строке. В строку S_j записывается количество предпочтений j-й альтернативы над другими в столбце.

4. Определяется сумма частот превосходства i-й альтернативы над другими для каждого эксперта:

$$M_{ij} = S_{ij} + R_{ij},$$

где i – номер альтернативы; j – номер эксперта.

5. Формируется сводная таблица оценок всех экспертов (табл. 7.4).

Таблица 7.4

Сводная таблица оценок альтернатив

Альтернативы (i)	Эксперты (j)				M_i	K_i
	1	2	…	M		
1	M_{11}	M_{12}	…	M_{1m}	M_1	K_1
2	M_{21}	M_{22}	…	M_{2m}	M_2	K_2
…	…	…	…	…		…
N	M_{n1}	M_{n2}	…	M_{nm}	M_n	K_n

6. По табл. 7.4 определяются *средние частоты превосходства* M_i и *коэффициенты предпочтительности* альтернатив K_i:

$$M_i = \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} M_{ij},$$

$$K_i = \frac{M_i}{L} = \frac{2 \cdot M_i}{n(n-1)},$$

$$L = \frac{n(n-1)}{2},$$

где L – число парных сравнений; K_i – коэффициент предпочтительности для i-й альтернативы.

7. Ранжирование альтернатив осуществляется в порядке убывания K_i, наиболее предпочтительной является альтернатива с наибольшим значением K_i.

7.4. Метод коллективных экспертных балльных оценок объектов по нескольким критериям

Этот метод имеет важное практическое значение, на его основе принимаются решения об уровне конкурентоспособности и запуске в производство новых товаров, выборе направлений развития и др. [2].

При оценке нескольких объектов по нескольким критериям (показателям) строится таблица (табл. 7.5).

Таблица 7.5

Балльная оценка объекта

Критерии (i)	Балл важности критериев	Коэффициенты важности критериев	Балльные оценки объектов (j)			
			Объект 1	Объект 2	…	Объект m
1	B_1	W_1	X_{11}	X_{12}		X_{1m}
2	B_2	W_2	X_{21}	X_{22}		X_{2m}
…	…	…	.	.	.	.
n	B_n	W_n	X_{n1}	X_{n2}		X_{nm}
Сумма	СВ	1,0	K_1	K_2	…	K_m

Здесь Bi – балл важности показателя; X_{ij} – баллы показателей, определяемые экспертными методами по 5- или 10-балльной шкале; W_i – коэффициент важности i-го критерия. Коэффициенты важности определяются по формуле $W_i = B_i / CB$.

Интегральная оценка объектов определяется по формуле

$$K_j = \sum_{i=1}^{n} W_i X_{ij},$$

где K_j – интегральная оценка j-го объекта.

Объекты ранжируются в порядке убывания интегральной оценки K_j. Лучший объект имеет максимальную интегральную оценку.

Для определения экспертами баллов и заполнения табл. 4.5 разрабатываются специальные анкеты, где указывается критерий оценки и порядок присвоения баллов экспертами (респондентами).

Некоторые показатели могут иметь значения, определяемые методами технических измерений, по этим значениям эксперты присваивают баллы по определенной шкале оценок. Для оценки качества показателей, таких как функциональное назначение, используемые материалы, дизайн, современность, эргономические свойства, имидж, эксперты дают субъективные оценки баллами по заданной шкале – 5- или 10-балльной (табл. 7.6 и 7.7):

Таблица 7.6

Пятибалльная шкала

Оценка	Неудовлетво-рительная	Удовлетвори-тельная	Средняя	Хорошая	Высокая
Баллы	1	2	3	4	5

Таблица 7.7

Десятибалльная шкала

Оценка	Неудовлетво-рительная	Удовлетвори-тельная	Средняя	Хорошая	Высокая
Баллы	1–2	3–4	5–6	7–8	9–10

Для построения табл. 7.5 надо присвоить баллы объектам и определить коэффициенты важности показателей (критериев).

1. ***Присвоение баллов объектам.***

Каждый эксперт независимо от других оценивает объекты по заданной шкале. По оценкам экспертов составляется сводная табл. 7.8.

Таблица 7.8

Таблица баллов объектов

Объекты (i)	Эксперты (j)				Средний балл объектов (Xi)
	1	2	…	m	
1	X_{11}	X_{12}	…	X_{1n}	X_1
2	X_{21}	X_{22}	…	X_{2n}	X_2
…	…	…	…	…	…
n	X_{m1}	X_{m2}	…	X_{mn}	X_n

Здесь X_{ij} – балл i-го объекта, присвоенный j-м экспертом.

Средние баллы объектов определяются по формуле

$$X_i = \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} x_{ij},$$

где i – номер объекта; j – номер эксперта; m – количество экспертов.

2. ***Проверка согласованности экспертов.***

Находятся несмещенные дисперсии оценок экспертов по каждому объекту:

$$D_i = \frac{1}{m-1}\sum_{j=1}^{m}\left(x_{ij} - X_j\right)^2.$$

Эти дисперсии позволяют определить разброс оценок экспертов по всем объектам.

3. ***Определение коэффициентов вариации*** оценок экспертов по каждому объекту:

$$V_i = \frac{\sigma_i}{X_i} \cdot 100\,\%,$$

$$\sigma_i = \sqrt{D_i}.$$

Данная величина показывает различие оценок экспертов для i-го объекта. Чем больше эта величина, тем больше расхождение оценок экспертов по данному объекту. Если она велика, то следует проанализировать причины расхождений.

Можно оценивать согласованность экспертов с помощью табл. 7.9.

Таблица 7.9

Шкала согласованности мнений экспертов

Коэффициент вариации, %	$V \le 10$	$10 < V \le 20$	$20 < V \le 30$	$30 < V \le 50$	$V > 50$
Согласованность экспертов	Высокая	Выше средней	Средняя	Ниже средней	Низкая

Если согласованность низкая, то надо *провести новую экспертизу* и уточнить оценки экспертов по объектам.

Пример 7.3. Проведем оценку качества веб-сайта предприятия в сравнении с конкурентами. Оценка проводится по 5-балльной шкале. Считается, что все функции сайта имеют одинаковую важность, поэтому коэффициенты важности не учитываются (табл. 7.10).

Таблица 7.10

Оценка конкурентоспособности веб-сайта

Функции сайта	Наша фирма	Конкурент №1	Конкурент №2	Конкурент №3
1. Информационная	4	3	4	4
2. Имиджевая	3	4	4	4
3. Рекламная	5	4	3	5
4. Маркетинговая	4	5	4	5
5. Коммуникационная	3	4	3	5
Сумма	19	20	18	23
Ранг (место)	3	2	4	1

Таким образом, конкурент №3 занял 1-е место, набрав 23 балла, конкурент №1 занял 2-е место с 20 баллами, наша фирма заняла 3-е место с 19 баллами. Из полученных оценок видно, что наша фирма уступает лидерам по имиджевой, маркетинговой и коммуникационной функциям сайта. Таким образом, эти функции сайта нуждаются в улучшении.

8. Принятие маркетинговых решений в условиях неопределенности и рисков

Маркетинговые решения (МР) относятся к будущим периодам времени и дать 100%-й прогноз их результатов невозможно. Поэтому МР должны приниматься с учетом неопределенностей и рисков [1].

Решение называется ***неопределенным***, если оно может иметь *несколько вариантов результата*. Решение называется ***рискованным***, если оно может иметь как *положительные (прибыльные)*, так и *отрицательные (убыточные)* варианты результата. Обычно рассматривают *благоприятные, средние и неблагоприятные* варианты результата.

С учетом неопределенности и рисков в маркетинге принимаются решения:

1) о производстве в условиях неустойчивого спроса;
2) расширении ассортимента производства продукции;
3) производстве новой продукции;
4) выходе на новые рынки;
5) расширении сбытовой сети.

8.1. Принятие решений в условиях неопределенности

Принятие решения в условиях неопределенности состоит в том, что необходимо выбрать одно решение из нескольких вариантов с учетом возможных состояний внешней среды (спроса), которые приводят к разным результатам. При этом вероятности возможных состояний внешней среды неизвестны.

В отличие от матричных игр здесь предполагается, что решение принимается один раз. При выборе оптимального решения стремятся получить некоторый гарантированный положительный результат [2, 3].

Для принятия решений и оценки возможных результатов в условиях неопределенности строится таблица (матрица) решений, или платежная матрица (табл. 8.1).

Таблица 8.1

Таблица решений

Варианты решения (i)	Состояния внешней среды (j)			
	1	2	…	m
1	R_{11}	R_{12}	…	R_{1m}
2	R_{21}	R_{22}		R_{2m}
…	…	…	…	…
n	R_{n1}	R_{n2}	…	R_{nm}

В таблице R_{ij} – возможный результат при принятии i-го решения и j-м состоянии внешней среды, который может быть положительным (прибыль) или отрицательным (убыток). Оценка величин R_{ij} производится прямыми расчетами или экспертными методами.

При выборе оптимального решения используют несколько критериев и по их результатам выбирают оптимальное решение.

1. Критерий оптимиста (максимакса) определяет решение, максимизирующее максимальный результат по всем состояниям внешней среды. Оптимальное решение и его результат определяется из задачи

$$R_{ks} = \max_{i} (\max_{j} R_{ij}), \tag{8.1}$$

где i – номер строки (варианты решений); j – номер столбца (состояния внешней среды); k – номер оптимального (принимаемого) решения; s – номер ожидаемого состояния внешней среды; R_{ks} – ожидаемый максимальный результат от принятия решения.

Оптимальное решение находится следующим образом. Составляется список максимальных результатов для каждого решения (строки) платежной матрицы и выбирается решение, соответствующее максимальному результату.

Этот критерий означает, что расчет делается на наиболее выгодное состояние внешней среды, при котором может быть получен максимально возможный результат решения. Применяется если все элементы таблицы решений (см. табл. 8.1) положительные.

Пример 8.1. Предприятие должно определить, сколько партий продукции произвести в течение месяца, если возможный спрос равен 5, 6, 7 или 8 партий. Затраты на производство одной партии равны 50 ден. ед., а цена продажи – 70 ден. ед.

Решение. Составляется таблица решений (табл. 8.2). Расчет элементов матрицы (прибыли или убытка) выполняется следующим образом: выручка получается от реализованной продукции, а затраты определяются произведенной продукцией.

Таким образом, прибыль или убыток предприятия равны:

R = Ц·П – З·П , если производство (П) меньше или равно спросу (С);

R = Ц·С – З·П, если производство (П) больше спроса (С),

где П – количество партий произведенной продукции; С – спрос на продукцию в нат. ед.; Ц – цена одной партии; З – затраты на производство одной партии.

Таблица 8.2

Таблица решений к примеру 8.1

Производство (П)	Спрос (С)			
	5	6	7	8
5	100	100	100	100
6	50	120	120	120
7	0	70	140	140
8	–50	20	90	160

Составим список максимальных результатов по всем строкам (100, 120, 140, 160). Выбираем максимальный результат (160), который определяет оптимальным четвертое решение – производство восьми партий. Это решение *оптимистично,* т. к. предполагает максимальный спрос на продукцию.

2. Критерий пессимиста (критерий Вальда) определяет решение, максимизирующее минимальный результат по всем возможным решениям.

Оптимальное решение и его результат определяется из задачи

$$R_{ks} = \max_i (\min_j R_{ij}), \tag{8.2}$$

где i – номер вариантов решений; j – номер состояний внешней среды; k – номер оптимального (принимаемого) решения; s – номер ожидаемого состояния внешней среды; Rks – ожидаемый результат от принятия решения.

Составляется список минимальных результатов для каждого решения и выбирается решение, соответствующее максимальному результату. Данный критерий означает, что из худших возможных результатов выбирается лучший.

Пример 8.2. Рассмотрим таблицу решений к примеру 8.1 (см. табл. 8.2). Составим список минимальных результатов по всем строкам (100, 50, 0, –50). Выбираем максимальный результат, который определяет оптимальным первое решение – производство пяти партий.

Это *самое осторожное* решение, т. к. предполагает минимальный спрос.

3. Критерий Гурвица (критерий реалиста) определяет решение, максимизирующее некоторый средний результат между минимальным и максимальным результатами по всем состояниям внешней среды.

Оптимальное решение и его результат определяется из задачи

$$R_{ks} = \max_i (a \cdot \min_j R_{ij} + (1-a) \cdot \max_j R_{ij}), \tag{8.3}$$

где R_{ks} – ожидаемый результат от принятия решения; a – коэффициент пессимизма, принимает значения между нулем и единицей в зависимости от того, как принимающий решение оценивает ситуацию; i – номер вариантов решений; j – номер состояний внешней среды; k – номер оптимального (принимаемого) решения; s – номер ожидаемого состояния внешней среды.

При a = 0 данный критерий совпадает с критерием оптимиста, при a = 1 – с критерием Вальда (пессимиста).

Пример 8.3. Рассмотрим табл. 8.2 при a = 0,4. Составим список результатов по всем строкам с учетом коэффициента пессимизма по формуле (8.3):

1) $R_1 = 0{,}4 \cdot 100 + 0{,}6 \cdot 100 = 100$;

2) $R_2 = 0{,}4 \cdot 50 + 0{,}6 \cdot 120 = 92$;

3) $R_3 = 0{,}4 \cdot 0 + 0{,}6 \cdot 140 = 84$;

4) $R_4 = 0{,}4 \cdot (-50) + 0{,}6 \cdot 160 = 76$.

Таким образом, оптимальным будет первое решение с максимальным значением результата.

4. Критерий Сэвиджа (минимизации упущенных возможностей) определяет решение, минимизирующее максимальную упущенную возможность по всем решениям.

Оптимальное решение и его результат определяется из задачи

$$R_{ks} = \min_i \max_j ((\max_i R_{ij}) - R_{ij}), \qquad (8.4)$$

где R_{ks} – ожидаемый результат от принятия решения; i – номер вариантов решений; j – номер состояний внешней среды; k – номер оптимального (принимаемого) решения; s – номер ожидаемого состояния внешней среды.

Решение находится следующим образом. Строится *матрица упущенных возможностей* (рисков), элементы которой определяются из соотношения

$$V_{ij} = (\max_k R_{kj}) - R_{ij}, \qquad (8.5)$$

где V_{ij} – упущенная возможность (упущенный результат) при принятии i-го решения при j-м состоянии внешней среды.

Столбцы матрицы рисков строятся следующим образом: из максимального элемента каждого столбца матрицы решений вычитаются элементы того же столбца. После этого к матрице рисков применяется критерий минимакса.

Пример 8.4. По табл. 8.2 строим матрицу упущенных возможностей (табл. 8.3).

Таблица 8.3

Таблица упущенных возможностей

Производство (i)	Спрос (j)			
	5	6	7	8
5	0	20	40	60
6	50	0	20	20
7	100	50	0	20
8	150	100	50	0

Для каждой строки составляем список значений максимальных упущенных возможностей, (60, 50, 100, 150) и выбираем минимальное значение упущенной возможности (50). Таким образом, оптимальным будет второе решение.

5. Критерий Байеса. Для каждого возможного решения определяется средний результат по всем состояниям внешней среды, после чего выбирается решение, дающее максимальную величину среднего результата. Средние результаты от решений определяются по формуле

$$M_i = \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} R_{ij}, \qquad (8.6)$$

где M_i – средний результат при принятии i-го решения; m – количество возможных результатов решения.

Оптимальное решение определяется по максимуму M_i.

Пример 8.5. Рассмотрим табл. 8.2. Составим список средних результатов по всем строкам (100; 102,5; 87,5; 67,5). Таким образом, оптимальным будет второе решение – произвести шесть партий продукции.

8.2. Принятие решений с учетом рисков

Риск – это возможность получить результат ниже запланированного (или убыток) при реализации маркетингового решения. Риск характеризуется тремя параметрами: возможной величиной ущерба, ее вероятностью и уровнем риска [2].

Различают ***объективную*** и ***субъективную*** вероятности событий.

Объективная вероятность – это относительная частота события при большом числе наблюдений. Объективная вероятность определяется на основе статистических данных о рассматриваемых событиях.

Субъективная вероятность определяется экспертно при отсутствии достаточной статистической информации.

В маркетинге рассматривают следующие виды рисков:

1) *коммерческие риски* связаны с возможностями колебания цен и спроса на товары, они отражаются на затратах, выручке и прибыли предприятия;

2) *производственные риски* связаны с возможными отклонениями в производстве и снабжении, сложностями конструкторско-технологического, производственного и других видов обеспечения;

3) *финансовые риски* связаны с недостатком собственных оборотных средств, задержками с платежами, ростом дебиторской задолженности, изменением банковского процента;

4) *инновационные риски* связаны с эффективностью нововведений, вероятностью технического и коммерческого успеха новшества, освоения новых рынков;

5) *социально-психологические* риски связаны с кадровым обеспечением, стилем руководства, квалификацией исполнителей;

6) *правовые (договорные)* риски включают невыполнение контрактов, а также обстоятельства, ведущие к невыполнению соглашений с партнерами;

7) *валютные риски* связаны с колебаниями курсов валют, что отражается на ценах, продажах и закупках на зарубежных рынках.

Методы снижения рисков.

Чтобы разработать меры снижения рисков, необходимо провести анализ рисков, определить возможные причины их появления, экспертно оценить их значимость.

Анализ рисков:

- качественный, имеющий целью определить возможные типы рисков, их причины и методы снижения,

- количественный, целью которого является определение возможной величины риска и потерь, с ним связанных.

Качественный анализ выделяет вероятные, маловероятные и случайные факторы риска. К вероятным относятся известные и ожидаемые обстоятельства, к маловероятным – известные обстоятельства, вероятность появления которых мала. В группу случайных включаются факторы, которые не учитываются экспертами.

Количественный анализ факторов риска осуществляется на основе оценки конъюнктуры. В качестве меры риска выступают показатели ***колеблемости развития*** основных параметров рынка. Чем интенсивнее вариация, тем выше риск.

Для снижения рисков используются следующие методы:

- страхование;
- распределение рисков между участниками;
- учет рисков в договорах и соглашениях;
- создание запасов и резервов материальных, финансовых ресурсов и времени при реализации МР;
- осуществление контроля за реализацией МР;
- диверсификация решений;
- уклонение, отказ от решения.

Анализ устойчивости результатов решений от факторов риска.

Сначала определяется ***базовое значение*** (наиболее вероятное) основных факторов риска и определяются результаты от принятия решения.

Затем в определенных пределах (от 5 до 10 %) они изменяются в худшую сторону и оцениваются результаты и вероятность таких изменений.

При расчетах изменяется отдельно каждый фактор, остальные сохраняют базовое значение, все расчеты сводят в таблицу с целью определения допустимых пределов ухудшения основных факторов, влияющих на результат решения.

Рассматривается три сценария: ***базовый***, ***благоприятный*** и ***неблагоприятный*** с оценками вероятности и величины результата.

При каждом сценарии определяется, как надо действовать при реализации решения, какими будут объем продаж, доход, затраты, прибыль и показатели эффективности.

Решение считается устойчивым и эффективным, если во всех ситуациях разработаны меры по снижению рисков до допустимого уровня.

Рассматривают коэффициент (уровень) риска:

$$Н = СУ / СР, \tag{8.7}$$

где СУ – максимально возможная сумма убытков в денежном выражении; СР – объем собственных средств предприятия с учетом поступлений.

Чтобы оценить риски, выделяются зоны риска в зависимости от возможной величины потерь:

1) ***безрисковая зона***, в которой потери отсутствуют и величина прибыли не меньше запланированной (Н = 0);

2) ***зона минимального риска***, в которой уровень потерь не превышает чистой прибыли, есть только риск потери дивидендов (Н = 0 … 25 %);

3) ***зона повышенного риска***, в которой потери не превышают расчетной прибыли (Н = 25 … 50 %);

4) ***зона критичного риска*** характеризуется возможностью потерь вплоть до величины расчетной выручки (Н = 50 … 75 %);

5) ***зона катастрофического риска*** – область потерь, которые могут достигнуть величины, равной стоимости собственного капитала и привести предприятие к банкротству по причине невозможности вернуть полученные кредиты (Н = 75 … 100 %).

Каждая из этих зон характеризуется своей вероятностью, которая определяется на основе экспертных оценок.

Расчет *уровня риска* УР по коэффициенту риска (Н) с учетом вероятностей приведен в табл. 8.4.

Таблица 8.4

Оценки коэффициента риска

Значения Н, %	0	0–25	25–50	50–75	75–100
X_i – среднее значение Н, %	0	12,5	37,5	62,5	87,5
Вероятности	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5

Уровень риска определяется по формуле

$$УР = \sum_{i=1}^{n} P_i \cdot X_i. \qquad (8.8)$$

Пример 8.6. Рассматривается два проекта. Надо выбрать для реализации наименее рискованный проект по уровню риска.

Решение. Строим таблицу коэффициентов риска (табл. 8.5) и их вероятностей для проектов. Вероятности определяются экспертами.

Таблица 8.5

Оценка коэффициента риска для примера 8.6

Значение Н, %	0	0–25	25–50	50–75	75–100
X_i – среднее значение Н, %	0	12,5	37,5	62,5	87,5
Вероятность риска для 1-го проекта	0,4	0,2	0,2	0,1	0,1
Вероятность риска для 2-го проекта	0,3	0,5	0,1	0,05	0,05

Применяя формулу (8.8), получим для первого проекта $УР_1$ = 25 %, а для второго проекта $УР_2$ = 17,5 %. Таким образом, первый проект находится в зоне повышенного риска, а второй проект находится в зоне минимального риска. Поэтому надо выбрать для реализации второй проект.

Расчет рисков по прибыли (убытку) производится следующим образом:

Рассматриваются несколько возможных результатов решения и их вероятностей и формируется табл. 8.6.

Таблица 8.6

Таблица результатов и их вероятности

Характеристики	Убытки со знаком минус			Прибыль со знаком плюс		
Диапазоны результата	L_1–L_2	…	L_{m-1}–L_m	L_m–L_{m+1}	…	L_n–L_{n+1}
Средний результат	X_1	…	X_m	X_{m+1}	…	X_n
Вероятность	P_1	…	P_m	P_{m+1}	…	P_n

Средний результат $X_i = (L_i + L_{i+1}) / 2$.

Оценка рисков принимаемых решений выполняется по следующим показателям:

1. Вероятный средний результат (математическое ожидание результата) решения:

$$M = \sum_{i=1}^{n} P_i X_i, \tag{8.9}$$

где M – математическое ожидание результата решения; Xi – возможные результаты реализации решения (положительные – прибыль, отрицательные – убыток); Pi – вероятности результатов решения; i – номер результата; n – количество результатов решения.

Если M < 0, то решение отклоняется.

2. Вероятность убытка:

$$P_у = \sum_{X \le 0} P_i. \tag{8.10}$$

3. Вероятность прибыли:

$$P_п = \sum_{X > 0} P_i. \tag{8.11}$$

4. Относительный уровень риска:

$$R = \left| \frac{\sum_{X_i < 0} P_i \cdot X_i}{\sum_{X_i > 0} P_i \cdot X_i} \right|. \tag{8.12}$$

Если R > 1, то решение отклоняется. Это эквивалентно условию M < 0. Решение принимается, если R < 1; чем меньше R, тем меньше риск. Шкала риска в табл. 8.7.

Таблица 8.7

Шкала риска

Уровень риска R	< 0,1	0,1–0,3	0,3–0,5	0,5–0,7	0,7–1,0	> 1,0
Риск	Низкий	Ниже среднего	Средний	Выше среднего	Высокий	Недопустимый

Оптимальным будет решение с минимальной степенью риска R < 0,5.

Если рассматривается несколько вариантов решений, то оптимальное решение определяется по всем вариантам решений из задачи

$$\begin{gathered} \max M \\ M > 0, \\ R < R_д, \end{gathered} \tag{8.13}$$

где $R_д$ – максимальный допустимый риск, обычно (0,3–0,5).

Пример 8.7. Есть два маркетинговых проекта А и В. Проект А с вероятностью 0,4 обеспечивает прибыль 15 ден. ед. и с вероятностью 0,6 возможен убыток – 6 ден. ед. В проекте В с вероятностью 0,8 будет прибыль 10 ден. ед. и с вероятностью 0,2 возможен убыток – 7 ден. ед. Надо принять решение о выборе проекта.

Решение.

Математическое ожидание результатов проектов:

А: $M_1 = 0{,}4 \cdot 15 + 0{,}6 \cdot (-6) = 2{,}4$;

В: $M_2 = 0{,}8 \cdot 10 + 0{,}2 \cdot (-7) = 6{,}6$.

Относительная величина рисков проектов:

А: $R_1 = (0{,}6 \cdot 6)/(0{,}4 \cdot 15) = 0{,}6$, риск выше среднего.

В: $R_2 = 0{,}2 \cdot 7/0{,}8 \cdot 10 = 0{,}18$, риск ниже среднего.

Относительный риск второго решения ниже.

Таким образом, несмотря на то что у проекта В прибыль меньше, а убыток больше, чем у первого, надо выбрать проект В, т. к. он менее рискован, чем проект А.

Экспертный метод оценки рисков с учетом нескольких факторов.

Если при оценке риска учитывается несколько факторов, применяются экспертные методы. В этом случае каждому фактору экспертами присваивается вес (W_i) (их сумма равна единице), который отражает долю влияния фактора на общий риск.

Величина риска (R_i) по каждому фактору экспертами определяются в баллах по некоторой шкале (например, 10-балльной).

Тогда общий риск (R) определяется по формуле

$$R = \sum_{i=1}^{N} W_i \cdot R_i, \tag{8.14}$$

где W_i – вес i-го фактора риска; R_i – величина i-го фактора риска; N – количество факторов.

Для оценки риска экспертами в этом случае может использоваться следующая шкала (табл. 8.8).

Таблица 8.8

Шкала уровня риска в баллах

Баллы	<1,0	1,0–2,5	2,5–3,5	3,5–5,0	5,0–7,5	7,5–10,0
Уровень риска	Минимальный	Ниже среднего	Средний	Выше среднего	Критический	Недопустимый

Пример 8.8. Рассмотрим пример расчета риска выхода на новый рынок. Учитывается 10 факторов риска. По этим данным каждому фактору присвоен балл, характеризующий его влияние на общую величину риска. Применена 10-балльная шкала риска. Расчет риска представлен в табл. 8.9.

Таблица 8.9

Расчет риска выхода на новый рынок

Факторы риска	Конъюнктурная оценка фактора	Вес фактора (W_i)	Величина риска, баллы (R_i)	Взвешенное значение риска ($Wi \cdot R_i$)
1. Емкость рынка	Значительная	0,15	2	0,3
2. Тенденция и устойчивость спроса	Неустойчивый спад	0,15	7	1,05
3. Конкурентоспособность товара	Высокая	0,1	7	0,7
4. Конкуренция на рынке	Средняя	0,1	2	0,2
5. Финансовое состояние предприятия	Нормальное	0,1	5	0,5
6. Обеспечение сырьем	Удовлетворительное	0,08	4	0,32
7. Надежность дистрибьюторов	Достаточная	0,06	3	0,18
8. Работа маркетинговой службы	Хорошая	0,04	3	0,12
9. Сбыт и продажа товаров на предприятии	Успешные	0,16	2	0,32
10. Имидж фирмы	Высокий	0,06	1	0,06
Сумма		1,0	–	3,75

Таким образом, уровень риска равен 3,75, т. е. согласно табл. 8.8 риск выхода на новый рынок выше среднего. Причины этого: низкая емкость рынка, неустойчивый и низкий спрос. В этой связи можно дать следующие рекомендации: усилить мероприятия по продвижению товара на рынке или отказаться от выхода на этот рынок.

8.3. Метод «Дерево решений»

Метод «Дерево решений» применяется для прогнозирования, анализа и оценки возможных результатов последовательности альтернативных решений, направленных на достижение поставленной цели. При этом принимаемые решения зависят от результатов предыдущих решений и ожидаемых состояний внешней среды [1, 2].

Этот метод часто применяют для анализа рисков инновационных и инвестиционных проектов. Он предполагает, что проект имеет несколько стадий и существует несколько вариантов их развития. Например, этапами при создании нового продукта являются НИОКР, производство, сбыт. С каждым из этих этапов связаны затраты и вероятности их успешной реализации.

«Дерево решений» – графическое изображение последовательности решений по этапам с указанием затрат, результатов и их вероятностей. Есть разные варианты графического представления «дерева решений», зависящие от постановки задачи.

В «дереве решений» обычно есть три вида вершин:

1) квадраты – вершины принятия решений (R_n), из которых выходят альтернативы принимаемых решений; начальная вершина R_0 – решаемая проблема; Z_{ij} – затраты по альтернативам решений;

2) круги – вершины событий (C_{nm}), из которых выходят возможные результаты решений; P_{ij} – вероятности результатов решений;

3) треугольники – конечные вершины, в которых находятся окончательные результаты (D_i) предыдущих решений.

Над дугами, выходящими из вершин решений, записываются соответствующие решениям инвестиционные затраты. Над дугами, выходящими из вершин событий, записываются вероятности соответствующих результатов.

В промежуточных вершинах решений записываются результаты решения, принятого на предыдущем шаге, с учетом предыдущего события.

Конечным вершинам соответствуют вероятности, затраты и окончательные результаты, которые могут выражаться в форме полученной прибыли.

Лучшей является последовательность решений, которая приводит к максимальному конечному результату. Вероятность конечного результата равна произведению вероятностей дуг, лежащих на соответствующем пути. Затраты, связанные с данным результатом, равны сумме всех затрат соответствующей последовательности решений.

Поскольку все решения и результаты соответствуют разным моментам времени, то для сопоставления затрат и результатов, выраженных в стоимостной форме, они должны быть дисконтированы к начальному моменту времени $t = 0$.

Так как любой путь, выходящий из начальной вершины, может иметь несколько возможных результатов, то для них определяются вероятности, средний результат, среднеквадратичные отклонения и коэффициенты вариации.

Строится таблица решений, в которую заносятся результаты и их вероятности. С учетом этого принимается решение о реализации одной из последовательности решений при отказе от решений с высокой вероятностью (с большим риском) получения отрицательных результатов.

Пример 8.9. Предприятие принимает решение о реализации одного из двух проектов А или В по организации производств продуктов А и В соответственно. Принят максимальный допустимый риск по проектам Rд = 0,3. Требуется выбрать лучший проект для реализации. Исходные данные по проектам представлены в табл. 8.9.

Таблица 8.9

Исходные данные для примера 8.9

Проект	Затраты проекта, ден. ед.	Вероятность успеха проекта	Прибыль на единицу продукции, ден. ед.	Прогнозируемые объемы продаж, нат. ед.	Вероятность продаж
А	30000	0,9	25	1500 1600 2000	0,2 0,6 0,2
Б	40000	0,7	30	1000 2000 1500	0,1 0,5 0,4

Решение

Вероятный средний результат по проектам определяем по формуле (8.9).

Для проекта А вероятный средний результат равен

МА = – 0,1·30000 + (0,2·1500+0,6·1600+0,2·2000) ·25 = 38500 ден. ед.

Для проекта Б вероятный средний результат равен

МБ = – 0,3·40000 + (0,1·1000+0,5·2000+0,4·1500) ·30 = 39000 ден. ед.

Вероятный средний результат проекта Б больше, чем у проекта А.

Оценим относительный риск каждого проекта по формуле (8.12).

RА = (0,1·30000) / (0,2·1500+0,6·1600+0,2·2000) ·25 = 0,072;

RБ = (0,3·40000) / (0,1·1000+0,5·2000+0,4·1500) ·30 = 0,24.

Таким образом, проект Б намного более рискован, но оба проекта имеют риск, меньше допустимого, Rд = 0,3. Для реализации выбираем проект А, поскольку вероятные средние результаты проектов близки, а риск проекта Б намного больше, чем риск проекта А.

9. Контрольные задания

9.1. Оптимальное планирование производства

Привести математическую постановку задачи, решить ее с помощью функции «Поиск решения» EXCEL и дать скриншот решения.

Вариант 1

Фирма имеет возможность рекламировать свою продукцию, используя местные радиосети и телевизионные сети. Затраты на рекламу в бюджете фирмы ограничены 100 000 ден. ед. в месяц (30 дней). Каждая минута радиорекламы обходится в 500 ден. ед., а каждая минута телерекламы – в 10 000 ден. ед.

Фирма хотела бы использовать радиосеть по крайней мере в 2 раза чаще, чем телевидение. Опыт прошлых лет показал, что объем сбыта, который обеспечивает каждая минута телерекламы, в 5 раз больше объема сбыта, обеспечиваемого одной минутой радиорекламы.

Определить оптимальное распределение финансовых средств, ежемесячно отпускаемых на радио- и телерекламу, предел увеличения месячной суммы расходов на рекламу, превышение которого уже не будет влиять на оптимальное решение.

Вариант 2

На кондитерской фабрике ассортимент выпускаемой карамели разделен на три группы: $К_1$, $К_2$ и $К_3$. Найти оптимальный план производства, суммарную прибыль и прибыль от каждого вида карамели, а также расход и остатки сырья. Критерием оптимальности плана является максимум прибыли. Исходные данные представлены в табл. 9.1.

Таблица 9.1

Затраты сырья на единицу продукции и запасы сырья

Основное сырье	Расход сырья на 1 т продукции			Запас сырья, т
	$К_1$	$К_2$	$К_3$	
1. Сахарный песок	0,7	0,5	0,8	700
2. Патока	0,2	0,3	0,4	300
3.Фруктовое пюре	0,2	0,3	0	150
Прибыль на 1 т	100	110	120	–

Вариант 3

Торговое предприятие реализует со склада четыре вида продукции: $Т_1$, $Т_2$, $Т_3$, $Т_4$. Лимитируемые ресурсы и нормы их расхода на единицу продукции даны в табл. 9.2.

Определить оптимальный план продаж продукции и уровень использования ресурсов. Критерий оптимальности – максимум прибыли от реализации продукции.

Таблица 9.2

Затраты ресурсов на единицу продукции

Лимитируемые ресурсы и показатели	Товары				Ограничения на ресурсы, всего
	$Т_1$	$Т_2$	$Т_3$	$Т_4$	
1. Складские площади, м^2/ед.	1,8	2,6	1,6	1,0	<11000
2. Трудовые ресурсы, чел.-ч	1,5	1,4	0,5	0,8	<9500
3. Издержки обращения, ден. ед.	17	23	28	12	<12000
4. Товарные запасы, ден. ед.	3,1	4,2	3,0	2,0	<18000
5. Выручка от реализации, ден. ед.	20	15	17	5	>75000
6. Минимальный план продаж, нат. ед.	1200	1600	1200	1500	–
7. Прибыль от единицы, ден. ед.	12	5	3	10	–

Вариант 4

Производственному участку надо заказать стальные прутья длиной 111 см. Необходимо их разрезать на 311, 215 и 190 шт. заготовок по 19, 23 и 30 см. Построить модель, найти оптимальный вариант выполнения этой работы, при котором количество заказанных прутьев будет минимально. Каким будет минимальное количество заказанных прутьев?

Вариант 5

На заготовительный участок поступило 69 металлических прутьев длиной 107 см. Их необходимо разрезать на заготовки по 13, 15 и 31 см в комплектности, задаваемой отношением 1:4:2. Построить ЭММ принятия решения и найти оптимальный план разрезания прутьев, для которого количество комплектов заготовок будет максимально. Каким будет максимальное количество комплектов заготовок?

Вариант 6

Предприятие выпускает три вида продукции (П) и использует три вида сырья (С). Расход сырья на единицу продукции и требуемый минимальный выпуск продукции приведены в табл. 9.3. Найти оптимальный план производства продукции и закупки сырья, суммарные затраты и затраты на каждый вид сырья. Критерием оптимальности плана производства является минимум суммарных затрат на используемое сырье.

Таблица 9.3

Расход сырья на единицу продукции

Продукция	Сырье			Минимум выпуска продукции, нат. ед.
	C_1	C_2	C_3	
1. $П_1$	0,7	0,5	0,8	100
2. $П_2$	0,2	0,3	0,4	250
3. $П_3$	0,2	0,3	0	150
Цены сырья, ден. ед.	10	8	12	–

Вариант 7

Требуется найти оптимальный план производства четырех видов продукции (X) на квартал будущего года по исходным данным, представленным в табл. 9.4. Критерий оптимальности – максимум прибыли от реализации продукции. Найти выручку, затраты и прибыл всего и по каждому виду продукции, а также уровни использования и остатки ресурсов.

Таблица 9.4

Исходные данные задачи

Показатели	Продукция				Объемы ресурсов
	П1	П2	П3	П4	
Цена реализации, ден. ед.	12	10	18	16	
Себестоимость, ден. ед.	10	5	14	13	
Ресурсы	Нормы расхода ресурсов				
Сырье 1, кг	5	7	0	3	8500
Сырье 2, кг	0	5	3	0	7000
Трудоемкость 1, чел.-ч	7	3	3	5	7200
Трудоемкость 2, чел.-ч	0	7	0	4	6000
Оборудование 1, ст./ч	3	5	2	9	7200
Оборудование 2, ст./ч	0	5	0	7	6000
Производственная мощность, ед.	350	2500	2000	300	–
Спрос на продукцию					
Минимальный, ед.	50	100	150	0	–
Максимальный, ед.	400	1500	1200	350	–

Вариант 8

Предприятие производит четыре вида продукции (1–4), на производство которых затрачиваются три вида материалов. Прибыль от реализации и затраты материалов на единицу продукции даны в табл. 9.5.

Дать математическую постановку задачи, найти оптимальный план производства продукции, максимальную прибыль, прибыль от каждого вида продукции, расход каждого материала на производство, остатки материалов на складе.

Таблица 9.5

Прибыль и расходы сырья на единицу продукции

Продукция	1	2	3	4	Запасы материалов
Прибыль на единицу продукции	2	4	1	1	
Материалы	Расход материалов на единицу продукции				
Материал 1	1	3	0	1	40
Материал 2	2	1	0	0	30
Материал 3	0	1	4	1	30

Вариант 9

Предприятие производит 150 единиц продукции в плановом периоде. Найти оптимальное распределение продукции между тремя рынками. Критерий оптимальности распределения продукции – максимальная суммарная прибыль от реализации продукции на всех рынках. Исходные данные приведены в табл. 9.6.

Таблица 9.6

Прибыль на единицу продукции и спрос на рынках

Показатели рынков	Рынки (j)		
	$Р_1$	$Р_2$	$Р_3$
1. Прибыль на единицу продукции	2,5	3	4
2. Максимальный спрос	100	50	80
3. Минимальный спрос	50	30	20

Вариант 10

Предприятие производит два вида продукции: $П_1$ и $П_2$. Объем сбыта продукции $П_1$ составляет не менее 60 % общего объема реализации продукции обоих видов. Для изготовления продукции $П_1$ и $П_2$ используется одно и то же сырье, суточный запас которого равен 100 кг. Расход сырья на единицу продукции $П_1$ равен 2 кг, а на единицу продукции $П_2$ – 4 кг. Цены продукции $П_1$ и $П_2$ – 20 и 40 ден. ед. соответственно. Определить оптимальный план производства и распределение сырья для изготовления продукции $П_1$ и $П_2$.

Критерий оптимальности плана производства – максимум выручки от реализации продукции.

9.2. Оптимизация перевозок (транспортная задача)

От трех поставщиков еженедельно надо развозить продукцию в четыре магазина торговой сети. Требуется закрепить поставщиков за магазинами так, чтобы суммарные транспортные затраты на перевозку были минимальными. Определить объем поставки каждому потребителю, остатки у поставщиков, транспортные затраты для каждого поставщика и магазина, суммарные транспортные затраты.

Исходные данные для выполнение транспортной задачи для каждого варианта представлены в табл. 9.7.

Таблица 9.7

Транспортные затраты на перевозку единицы товара со складов в магазины

Номер варианта	Поставщики (i)	Магазины (j)				Запасы поставщиков
		1	2	3	4	
1	2	3	4	5	6	7
1	1	2,5	3,0	3,7	1,5	30
	2	5,2	2,3	4,0	6,2	40
	3	2,0	5,4	3,6	5,0	30
	Потребность магазина	25	30	40	15	–
2	1	1,5	2,0	3,7	1,5	30
	2	5,2	3,0	4,0	6,2	40
	3	2,0	5,4	3,6	5,0	30
	Потребность магазина	15	20	40	10	–
3	1	3,5	3,0	7,0	1,5	20
	2	5,2	2,3	4,0	6,2	45
	3	2,0	2,4	3,6	5,0	20
	Потребность магазина	25	30	40	15	–
4	1	2,5	3,0	3,7	1,5	30
	2	5,2	2,3	4,0	6,2	30
	3	2,0	5,4	3,6	5,0	40
	Потребность магазина	25	30	40	15	–
5	1	3,5	3,0	3,7	3,5	30
	2	5,2	2,3	5,0	4,2	40
	3	2,0	5,4	3,6	5,0	30
	Потребность магазина	30	35	40	10	–

Окончание табл. 9.7

1	2	3	4	5	6	7
6	1	3,5	3,0	3,7	3,5	35
	2	3,2	2,3	5,0	4,2	50
	3	2,0	3,4	2,6	5,0	40
	Потребность магазина	20	35	30	10	–
7	1	2,5	3,0	3,7	3,5	30
	2	3,2	2,3	4,0	3,2	50
	3	2,0	3,4	2,6	5,0	30
	Потребность магазина	20	55	30	15	–
8	1	2,5	3,0	3,7	3,5	30
	2	3,2	2,3	3,0	3,2	50
	3	2,0	3,4	2,6	4,0	20
	Потребность магазина	20	15	30	15	–
9	1	2,5	3,0	3,7	3,5	35
	2	3,2	2,3	3,0	3,2	50
	3	2,0	3,4	2,6	4,0	20
	Потребность магазина	20	55	30	15	–
10	1	2,5	4,0	3,7	3,5	15
	2	3,2	2,3	3,0	3,2	50
	3	2,0	3,4	2,6	3,0	20
	Потребность магазина	20	55	10	15	–

9.3. Задачи по теории игр

Выполнить упрощение матричной игры, найти нижнюю и верхнюю цену игры, определить оптимальные стратегии игроков и цену игры. Смешанные стратегии найти с помощью функции «Поиск решения» EXCEL.

Вариант 1

1	2	–3	–1	0
3	4	–1	2	1
2	0	1	–3	6
3	4	–1	2	1
1	–2	1	–4	3

Вариант 2

–5	0	4	2
7	5	4	9
6	8	–1	0
3	4	–1	2

Вариант 3

3	–4	1	–6	5
2	5	3	2	4
6	3	2	4	6
4	1	1	–3	–2
2	–5	–3	2	4

Вариант 4

1	2	0	4
3	2	1	2
0	4	2	3
5	3	1	4

Вариант 5

3	1	–2	1	–3
2	8	5	–1	4
6	5	4	3	8
2	–1	0	–2	5

Вариант 6

3	1	9	5
1	5	7	0
0	4	5	–1
1	5	7	0

Вариант 7

3	1	5	4
6	6	2	0
4	2	7	6
5	3	5	5

Вариант 8

1	0	8	6
2	2	7	5
5	3	1	1
5	5	2	0

Вариант 9

9	9	2	1
7	8	9	6
3	5	7	7
5	7	1	0
4	4	5	3

Вариант 10

3	1	2	1	–3
2	8	–5	–1	4
6	6	–4	3	8
2	–1	0	–2	5

9.4. Задачи по теории массового обслуживания

Вариант 1

На автозаправочной станции (АЗС) имеется одна колонка. Площадка при станции, на которой машины ожидают заправку, может вместить не более трех машин одновременно, и если она занята, то очередная машина, прибывшая к станции, в очередь не становится, а проезжает на соседнюю АЗС. В среднем машины прибывают на станцию каждые 2 мин. Процесс заправки одной машины продолжается в среднем 2,5 мин. Определить основные характеристики системы.

Вариант 2

Сбербанк планирует организовать прием оплаты за жилищно-коммунальные услуги с жителей микрорайона и имеет для этого в штате три контролера-кассира. Предполагается, что поток жителей будет идти с интенсивностью 40 чел./ч. Средняя продолжительность обслуживания одного человека контролером-кассиром составляет 3 мин. Определить характеристики работы расчетно-кассового центра.

Вариант 3

В справочной службе автовокзала четыре параллельно работающих телефонных линии. Вызовы поступают каждые 20 с, средняя продолжительность разговора составляет 1 мин. Считая все потоки простейшими, определить показатели эффективности обслуживания клиентов.

Вариант 4

Автоматическая мойка может принять на обслуживание три машины. В очереди могут находиться не более четырех машин. В среднем машины прибывают через 4 мин, а средняя продолжительность мойки – 10 мин. Считая все потоки простейшими, определить показатели эффективности работы автоматической мойки.

Вариант 5

В мастерской по срочному ремонту обуви два мастера, а в коридоре три стула для ожидания приема. Поток клиентов – простейший с интенсивностью шесть клиентов в час, среднее время обслуживания составляет 15 мин. Если все стулья в коридоре заняты, то клиент уходит в другую мастерскую. Определить показатели эффективности обслуживания.

Вариант 6

Таможня располагает тремя терминалами. Интенсивность потока машин, перевозящих грузы и подлежащих прохождению таможенного контроля, составляет 30 шт. в сутки. Среднее время таможенной обработки одной автомашины составляет 3 ч. Если в очереди на прохождение таможенного контроля стоят пять машин, то приезжающие машины уезжают на другую таможню. Определить показатели эффективности работы таможни.

Вариант 7

В типографию с тремя множительными аппаратами поступают заказы от соседних предприятий на размножение рабочей документации. Если все аппараты заняты, то вновь поступающий заказ не принимается. Среднее время работы с одним заказом составляет 2 ч. Считая все потоки простейшими, определить показатели эффективности работы типографии.

Вариант 8

В магазине работают четыре кассы. Среднее время обслуживания одного покупателя 3 мин. Интенсивность потока покупателей 50 чел./ч. Считая длину очереди неограниченной, определить показатели эффективности работы магазина.

Вариант 9

На автозаправочной станции установлены три колонки для заправки машин бензином. В среднем на станцию для заправки прибывает одна машина каждые 4 мин. Среднее время обслуживания одной машины составляет 3 мин. Определить показатели эффективности работы автозаправочной станции.

Вариант 10

В магазине работают четыре кассы. Среднее время обслуживания одного покупателя 4 мин. Интенсивность потока покупателей 40 чел./ч. Считая длину очереди неограниченной, определить показатели эффективности работы магазина.

Список использованных источников

1. Количественные методы принятия решений : учеб. пособие для слушателей программы MBA / Л. Ф. Дежурко [и др.] ; под ред. А. Ф. Дежурко. – Минск : Изд. центр БГУ, 2003.

2. Сак, А. В. Оптимизация маркетинговых решений / А. В. Сак, В. А. Журавлёв. – Минск: Изд-во Гревцова, 2010.

3. Эконометрика и экономико-математические методы и модели : учеб. пособие / Г. О. Читая [и др.] ; под ред. Г. О. Читая, С. Ф. Миксюк. – Минск : БГЭУ, 2018.

4. Экономико-математические методы и модели : практикум / С. Ф. Миксюк [и др.] ; под ред. С. Ф. Миксюк. – Минск : БГЭУ , 1999.

5. Экономико-математические методы и прикладные модели : учебник для бакалавров / В. В. Федосеев [и др.] ; под ред. В. В. Федосеева. – М. : Изд-во Юрайт, 2013.

6. Колесник, Г. В. Теория игр : учеб. пособие. – М. : Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2017.

7. Минченков, Ю. В. Системы массового обслуживания. Эконометрика и экономико-математические методы и модели: учеб.-метод. пособие / Ю. В. Минченков, В. И. Метельский. – Минск : Частн. ин-т упр. и предпр., 2014.

8. Сак, А. В. Прогнозирование и планирование экономики : метод. указ. к практическим занятиям для студ. / А. В. Сак. – Минск : БГУИР, 2007.

Св. план 2019, поз. 50

Учебное издание

Журавлёв Валерий Александрович

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ И МОДЕЛИ ПРИНЯТИЯ МАРКЕТИНГОВЫХ РЕШЕНИЙ

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ

Корректор *Е. Н. Батурчик*
Компьютерная правка, оригинал-макет *О. И. Толкач*

Подписано в печать 28.11.2019. Формат 60×84 1/16. Бумага офсетная. Гарнитура «Таймс». Отпечатано на ризографе. Усл. печ. л. 5,46. Уч.-изд. л. 5,8. Тираж 70 экз. Заказ 48.

Издатель и полиграфическое исполнение: учреждение образования «Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники». Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя, распространителя печатных изданий №1/238 от 24.03.2014, №2/113 от 07.04.2014, №3/615 от 07.04.2014.
Ул. П. Бровки, 6, 220013, г. Минск