УДК 521.643.8

Д-АНАЛОГ МЕТОДА ОПРЕДЕЛЕНИЯ ОДНОПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ ОБОБЩЕННОЙ ОБРАТНОЙ МАТРИЦЫ ДРАЗИНА, ОСНОВАННЫЙ НА КАНОНИЧЕСКОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ МАТРИЦЫ

Г.А. АСЛАНЯН, С.О. СИМОНЯН

Государственный инженерный университет Армении (Политехник)
Теряна, 105, Ереван, 0009,Армения

Поступила в редакцию 5 февраля 2015

Введение

Пусть $A(t)$ – однопараметрическая квадратная матрица порядка n с рангом r (параметр t может быть временем, оператором Лапласа ($S \sim \frac{d}{dt}$) или другим параметром), а индекс матрицы $A(t)$ равен $k = index(A(t))$ (k – наименьшее неотрицательное целое число, при котором $rank(A^{k+1}(t)) = rank(A^k(t))$. Псевдообратной Дразина $A^D(t)$ к матрице $A(t)$ по аналогии с числовыми матрицами назовем матрицу, которая удовлетворяет нижеприведенным равенствам [1]:

$$\begin{aligned} &A^D(t)A(t)A^D(t) = A^D(t), \\ &A(t)A^D(t) = A^D(t)A(t), \\ &A^{k+1}(t)A^D(t) = A^k(t). \end{aligned} \tag{1}$$

Обобщенная обратная матрица Дразина находит применение в теории типа конечных цепей Маркова, в решении нестационарных линейных систем дифференциальных уравнений, в модели населения Лесли и ее обратной проекции, при решении рекуррентных уравнений [1], а также при решении алгебро-дифференциальных систем [2], часто встречающихся при моделировании энергоблоков ТЭС [3].

Если $index(A(t)) = k > 0$, тогда существует невырожденная матрица $P(t)$ такая [1], что

$$A(t) = P(t)\begin{bmatrix} C(t) & 0 \\ 0 & N(t) \end{bmatrix}P^{-1}(t), \tag{2}$$

где $C(t)$ – невырожденная матрица, а $N(t)$ – k-нильпотентная матрица, т.е. $N^k(t) = 0$ [4]. Более того, если $P(t)$, $C(t)$ и $N(t)$ матрицы, удовлетворяющие соотношению (2), то обобщенная обратная Дразина может быть представлена следующим образом:

$$A^D(t) = P(t)\begin{bmatrix} C^{-1}(t) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}P^{-1}(t). \tag{3}$$

Разложение матрицы $A(t)$ (2) называется ее каноническим представлением.

Математический аппарат

Пусть $A(t)$ – матрица с аналитическими элементами. Также пусть $p \geq k$ – некая целочисленная константа (которая всегда может быть выбрана равной n, если более малое значение не известно заранее) [1]. Если $A^p(t) = 0$, то $A^D(t) = 0$. Следовательно, будем считать, что $A^p(t) \neq 0$.

Представим алгоритм вычисления однопараметрической обобщенной обратной Дразина, аналогичный предложенному в работе [1] для числовых матриц.

Шаг 1. Вычисляется нормальная эрмитова форма $A^p(t)$, т.е. $H_{A^p}(t)$ [4].

Шаг 2. Составляется ряд столбцов $\left\{ \overset{\downarrow}{a^p}_j(t) \right\}$ из матрицы $A^p(t)$, где j – индекс тех строк/столбцов $H_{A^p}(t)$, у которых элементы на диагонали не равны нулю.

Шаг 3. Вычисляется матрица $I - H_{A^p}(t)$, где I – единичная матрица порядка n.

Шаг 4. Составляется матрица $P(t)$ из столбцов, вычисленных на шаге 2, добавляя к ним ненулевые столбцы матрицы $I - H_{A^p}(t)$.

Шаг 5. Вычисляется обратная к матрице $P(t)$, т.е. $P^{-1}(t)$.

Шаг 6. Вычисляется произведение $T(t) = P^{-1}(t)A(t)P(t)$, которое будет иметь следующий вид:

$$T(t) = P^{-1}(t)A(t)P(t) = \begin{bmatrix} C(t) & 0 \\ 0 & N(t) \end{bmatrix}. \tag{4}$$

Шаг 7. Вычисляется обратная $C^{-1}(t)$.

Шаг 8. Вычисляется обобщенная обратная Дразина $A^D(t)$ используя формулу (3).

Теперь представим Д-аналог определения однопараметрической обобщенной обратной Дразина. При этом приведенный выше алгоритм в области дифференциальных преобразований [5] будет выглядеть следующим образом.

Шаг 1. Вычисляются следующие матричные дискреты:

$$A(K) = \frac{H^K}{K!} \cdot \frac{\partial^K A(t)}{\partial t^K}\Big|_{t=t_\nu}, \; K = \overline{0,\infty} \;\; \overline{\underline{\bullet}} \;\; A(t) = \aleph_1(t, t_\nu, H, A(K)), \tag{5}$$

$$A^p(K) = A^{p-1}(K) * A(K) = \sum_{l=0}^{K} A^{p-1}(l)A(K-l), \tag{6}$$

где $K = \overline{0,\infty}$ – целочисленный аргумент; $A(K)$ и $A^p(K), K = \overline{0,\infty}$ – матричные дискреты матричных оригиналов $A(t)$ и $A^p(t)$ (прямые дифференциальные преобразования), H – масштабный коэффициент; t_ν – центр аппроксимации, $\aleph_1(t, t_\nu, H, A(K))$ – обратное дифференциальное преобразование, восстанавливающее оригинал – матрицу $A(t)$, $*$ – знак Т-умножения (свертка), а знак $\overline{\underline{\bullet}}$ это знак перехода из области оригиналов в область Д-изображений и наоборот [6].

Шаг 2. Вычисляются дискреты нормальной эрмитовой формы $A^p(K)$, т.е. $H_{A^p}(K)$ с помощью алгоритма, предложенного в работе [5].

Шаг 3. Вычисляются дискреты столбцов $\left\{\overset{\downarrow}{a^p}_j(K)\right\}$ матрицы $A^p(K)$, где j – индекс тех строк/столбцов $H_{A^p}(K)$, у которых элементы на диагонали не равны нулю при некотором $k \in \overline{0,K}$.

Шаг 4. Вычисляются дискреты матрицы $[I - H_{A^p}](K)$.

Шаг 5. Составляются матричные дискреты $P(K)$ из дискрет-столбцов, вычисленных на шаге 3 и ненулевых столбцов матричных дискрет $[I - H_{A^p}](K)$.

Шаг 6. Вычисляются матричные дискреты $P^{(-1)}(K)$ с помощью алгоритма, предложенного в [7] (заметим, что $P^{(-1)}(K)$ – K-я матричная дискрета обратной матрицы $P^{-1}(t)$, а не обратная матрица K-й матричной дискреты $P(K)$).

Шаг 7. Вычисляются матричные дискреты

$$T(K) = P^{(-1)}(K) * A(K) * P(K) = \begin{bmatrix} C(K) & 0 \\ 0 & N(K) \end{bmatrix}. \qquad (7)$$

Шаг 8. Вычисляются матричные дискреты $C^{(-1)}(K)$ с помощью предложенного в работе алгоритма [7].

Шаг 9. Вычисляются матричные дискреты псевдообратной Дразина

$$A^D(K) = P(K) * \begin{bmatrix} C^{(-1)}(K) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} * P^{(-1)}(K). \qquad (8)$$

Таким образом, имея матричные дискреты (8), в соответсвии с некоторым обратным дифференциальным преобразованием $\aleph(\bullet)$ можно восстановить оригинал обобщенной обратной матрицы Дразина $A^D(t)$.

Пример

Пусть имеется параметрическая матрица $A(t) = \begin{bmatrix} 2t & 0 & 0 \\ -t & t & t \\ t & -t & -t \end{bmatrix}_{3x3}$.

Так как индекс матрицы неизвестен, выберем $p = n = 3$. Вычислим матричные дискреты (6) при $t_v = 1, H = 1, K = 4$:

$$A^3(0) = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 \\ -8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, A^3(1) = \begin{bmatrix} 16 & 0 & 0 \\ -16 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, A^3(2) = \begin{bmatrix} 16 & 0 & 0 \\ -16 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, A^3(K) = [0], K \geq 3.$$

Дискреты нормальной эрмитовой формы $A^p(K)$, т.е. $H_{A^p}(K)$ будут равны [5]:

$$H_{A^p}(0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, H_{A^p}(K) = [0], K \geq 1.$$

Следовательно, первый столбец матричного дискрета $P(K)$ будет равен первому столбцу матричного дискрета $A^p(K)$. Вычисляется шаг 4:

$$[I - H_{A^p}](0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, H_{A^p}(K) = [0], K \geq 1.$$

Следовательно, матричные дискреты $P(K), K = \overline{0,\infty}$ будут равны:

$$P(0) = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 \\ -8 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, P(1) = \begin{bmatrix} 16 & 0 & 0 \\ -16 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, P(2) = \begin{bmatrix} 16 & 0 & 0 \\ -16 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, P(K) = [0], K \geq 3.$$

Вычисляются матричные дискреты $P^{(-1)}(K)$ с помощью алгоритма, предложенного в [5]:

$$P^{(-1)}(0) = \begin{bmatrix} \frac{1}{8} & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, P^{(-1)}(1) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, P^{(-1)}(2) = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, P^{(-1)}(K) = [0], K \geq 3.$$

Вычисляются матричные дискреты (7):

$$T(0) = \left[\begin{array}{c|cc} 2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{array}\right], T(1) = \left[\begin{array}{c|cc} 2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{array}\right], T(K) = [0], K \geq 2.$$

Следовательно, $C(0) = [2], C(1) = [2], C(K) = [0], K \geq 2.$ Вычисляются матричные дискреты $C^{(-1)}(K)$

$$C^{(-1)}(0) = \left[\frac{1}{2}\right], C^{(-1)}(1) = \left[-\frac{1}{2}\right], C^{(-1)}(2) = \left[\frac{1}{2}\right], C^{(-1)}(3) = \left[-\frac{1}{2}\right], \ldots$$

Отсюда матричные дискреты псевдообратной Дразина будут выглядеть так:

$$A^D(0) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, A^D(1) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, A^D(2) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, A^D(3) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \ldots$$

Используя обратные дифференциально-падеевские преобразования [5], для оригинала обобщенной обратной матрицы Дразина получим:

$$A^D(t) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2t} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$, который точно удовлетворяет условиям (1).

Заключение

Предложен достаточно простой численно-аналитический метод определения обобщенной обратной однопараметрической матрицы Дразина. Метод легко реализуем средствами современных информационных технологий [8], и может использоваться при моделировании ТЭС.

Список литературы

1. *Campbell S. L., Meyer C.D.* Generalized Inverses of Linear Transformations. Philadelphia, 2008.
2. *Орлова И.В*, // Вестник Красноярского государственного университета. Физико-математические науки. 2006. №4. С. 125–134.
3. *Логинов А.А., Таиров Э.А., Чистяков В.Ф.* // Труды XI межд Байкальской школы-семинара "Методы оптимизации и их приложения", т. 4. Иркутск, 1998. С. 119–122.
4. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. М., 1967.
5. *Симонян С.О., Аветисян А.Г.* Прикладная теория дифференциальных преобразований. Ереван, 2010.
6. *Пухов Г.Е.* Дифференциальные преобразования функций и уравнений. Киев, 1984.
7. *Симонян С.О., Тамазян М.Д.* // Вестник ГИУА. Серия «Информационные технологии, электроника, радиотехника». 2012. № 1. С. 35–41.
8. *Stroustrup B.* The C++ Programming Language, 4th Edition. Boston, 2013.