УДК 681.325.518.5

# ПОВЫШЕНИЕ ЭФФЕКТИВНОСТИ ЦИФРОВОЙ ОБРАБОТКИ СИГНАЛОВ НА ОСНОВЕ СПЛАЙН-ФУНКЦИЙ

***А.Э.Мирзаев***
*PhD, Ташкентского Университета Информационных Технологий имени Мухаммада Аль-Хоразмий ,доцент кафедры Информационные технологии*

***С.П.Халилов***
*Старший преподаватель "Информационные технологии" Ташкентского Университета Информационных Технологий имени Мухаммада Аль-Хоразмий.*

**Аннотация.** Современные этапы развития структуры машин, комплексов и систем, установленных на объектах, которые входят в структуру устройств, специализированных для ведения научных исследований или расположенные на подвижных составах характеризуются оперативным анализом сложных процессов и полей и повышенными требованиями к скорости обработки больших объемов данных в режиме реального времени. Особое внимание уделяется разработке методов решения проблем обработки изображений и сигналов путем использования современных методов, алгоритмов и структурных средств, архитектуры вычислительных и программных средств. В данной работе результате исследования методов приближения функций и функциональных зависимостей, полученных в ходе экспериментов, для выбранного класса сигналов усовершенствован метод сплайн-функцийна основе аналитического анализа, разработаны параллельные алгоритмы цифровой обработки сигналов, разработаны эффективные алгоритмы для цифровой обработки вибро сигналов в многоядерных процессорах на основе кубических и бикубических базисных сплайнов.

**Ключевые слова:** интерполяцион, сплайн, сплайн-функций, кубических, базисных, аппроксимации, параллельный, алгоритм.

**Введение.** Современные методы цифровой обработки сигналов во многом зависят от алгоритма и структурных средств, развития программных средств и архитектуры вычислительных средств. Наиболее простой и широко используемой частью задачи восстановления аналитического вида функций на основе табличных данных функций является вопрос об интерполяции данных функций.

В классической интерполяции многочлены строятся в самом интервале $[a,b]$. Чем больше мы увеличиваем узловые точки, тем лучше приближение. Однако степень создаваемого многочлена зависит от количества узловых точек, увеличение числа узлов ведет к увеличению коэффициента многочлена, что затрудняет задачу решения системы алгебраических уравнений высокого порядка. Возможности классических интерполяционных многочленов частично ограничены. Поскольку число системы составленных алгебраических уравнений зависият от количества узловых точек, повышается и порядок систем алгебраических уравнений. В результате при построении классических полиномов возникает ряд недостатков:

–поскольку интерполяционный многочлен имеет высокую степень, то формула получается неудобной;

–в процессе решения системы алгебраических уравнений высших степеней возникают определенные методические ошибки;

–усложняется процесс вычисления, в результате появляется ошибка вычисления.

Создаваемый многочлен может плохо приближаться к восстанавливаемому многочлену. Поэтому в целях избавления от этих недостатков, использование в задачах интерполяции для приближения с помощью сплайн-функций вместо классических полиномов имеет большие возможности и уже нашло отражение в науке.

Локальные интерполяционные сплайны хорошо приближаются к интерполируемому объекту и имеют простой вид. Степень сплайна, который строится, не зависит от узловых точек. Создаваемая сплайн-функция строится не на интервале $[a,b]$, а в интерваре $[x_i, x_{i+1}]$ $i = (\overline{0, n-1})$ и данная сплайн-функция на каждом интервале будет состоять из многочленов одинаковой структуры.

В классической интерполяции на всем интервале $[a,b]$ строилась одна функция. Поэтому интерполяция с помощью сплайн-функций по сравнению с классической интерполяцией имеет высокую степень точности и более простую конструкцию. Кусочно-гладкие многочленные функции, построенные на интервалах $[x_i, x_{i+1}]\left(i = \overline{0, n-1}\right)$ называются *сплайн- функциями*.

Интерполяция функций показывает, что интерполяция сплайн-функциями более эффективна, чем интерполяция посредством классических полиномов.

Собственно полиномиальная интерполяционная сплайн-функция:

1) обеспечивает хорошее приближение к объекту;

2) имеет простую конструкцию и отличается простотой при составлении компьютерного алгоритма.

На практике мы широко используем функции третьей степени, то есть кубические сплайны. В формуле описания сплайна значение коэффициента сплайна выражается посредством узлов функции и расстояния между узлами (1). Для сплайнов с $d$ = 2 дефектом алгоритмы считаются абсолютно устойчивыми. Однако при $d$ = 1 сглаживающие реккурентные сплайны отнюдь не устойчивы. Кубические В-сплайны выражаются следующим образом.

$$B_3(x) = \begin{cases} x \geq 2, & \\ (2 - x)^3/6, & 1 \leq x < 2, \\ 1/6(1 + 3(1 - x) + 3(1 - x)^2 - 3(1 - x)^3), & 0 \leq x < 1, \\ B_3(-x), & x < 0. \end{cases} \qquad (1)$$

На рис. 1 приведен один базисный сплайн. На рис. 2 же приведен комплекс кубических базисных сплайнов, сдвинутых на неизменяемый шаг h=1.

Для сплайнов 3 степени локальные формулы имеют следующий вид:

- 3-точечная формула:

$b_i = (1/6)(-f_{i-1} + 8f_i - f_{i+1});$

- 5-точечная формула:

$b_i = (1/36)(f_{i-2} - 10f_{i-1} + 54f_i - 10f_{i+1} + f_{i+2});$

- 7-точечная формула

$b_i=(1/216)(-f_{i-3}+12f_{i-2}-75f_{i-1}+344f_i-75f_{i+1}+12f_{i+2}-f_{i+3})$

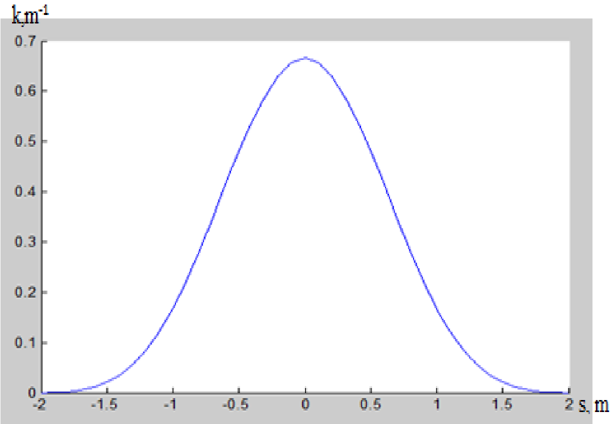


Рисунок *1.* – Кубический базисный сплайн

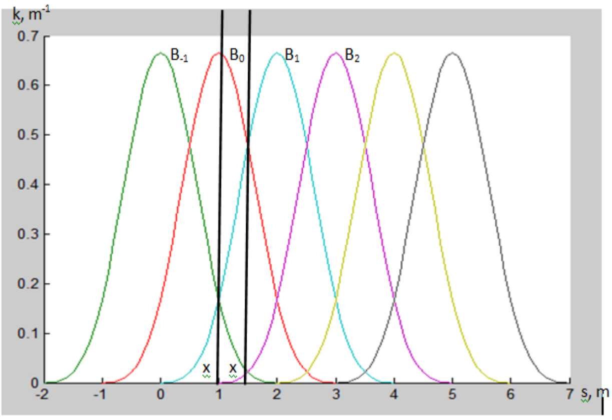


Рисунок *2.* –Комплекс кубических базисных сплайнов

$S_m(x)$ сплайн степени m с дефектом 1, который интерполирует функцию $f(x)$ можно представить только с помощью суммы В-сплайнов:

$$f(x) \cong S_m(x) = \sum_{i=-1}^{m+1} b_i \cdot B_i(x), \quad a \le x \le b, \tag{2}$$

где $b_i$ – коэффициенты.

Таким образом, исследование методов приближения функций и сведений, полученных в ходе эксперимента (в виде таблиц) с помощью кубических сплайнов, показало следующее:

1. Использование кубических базисных сплайнов для решения ряда задач, особенно при приближении функций, имеющих резонансные высокоградиентные точки, дает лучшие результаты по точности относительно других многочленов.

2. При приближении функций и сведений, полученных в ходе эксперимента (в виде таблиц), с помощью формулы (2) проявляется локальное свойство В-сплайнов. Это указывает на то, что значение этой функции в произвольной точке можно представить только в виде $m+1$ (здесь $m$ - степень сплайна), т.е. коэффициенты можно определить путем линейной формы в виде суммы произведений базисных элементов. Приведенный выше многочлен (2) является основой для распараллеливания вычислений и создания параллельных архитектур специализированных процессоров.

В последнее время получила развитие теория многомерных сплайнов функций приближения со многими переменными. Если иметь в виду только область интерполяционных полиномиальных сплайнов, то определение одномерных сплайнов расширится до состояния многих аргументов. При этом функция $S_m(x,y)$ будет двумерным сплайном степени *m*относительно сетки $\{x_i, y_i\}$. Если он совпадет с полиномом степени *m* , то по *x*и*y*для каждого прямого угла D будет справедливо подобное.

По каждому аргументу многомерные полиномиальные *B*-сплайны равной степени *m* будут определяться как тензорное произведение одномерных *B*-сплайнов:

$$B_m(x, y, .....,u) = B_m(x) \otimes B_m(y) \otimes .... \otimes B_m(u)$$

В частности, для двумерного сплайна $S_m(x,y)$ степени *m* будет применима формула:

$$S_m(x, y) = \sum \sum b_{ij} B_{m,i}(x) B_{m,j}(y),$$

В данной сумме вторичных кратких произведений коэффициенты и одномерные B-сплайны будут знаменателем, выражение $[x_i,x_{i+1}; y_j,y_{j+1}]$ для определения ненулевых значений двумерного базисного сплайна

$$B(x, y) = B(x) \otimes B(y)$$

будет представлять собой прямоугольник, который получается посредством размельчения сетки:

$$\Delta x: x0 < x1 < x2 < \ldots < x_{n1-1} < x_{n1};$$

$$\Delta y: y0 < y1 < y2 < \ldots < y_{n2-1} < y_{n2}.$$

Таким образом, локальные свойства одномерных сплайнов полностью распространены для многомерных сплайнов. На одном и том же шаге аппроксимации двумерный сплайн можно выразить посредством двух одномерных сплайнов.

В результате анализа существующих методов приближения функций была рассмотрена задача интерполяции, при этом если в начале под интерполяцией понимался процесс поиска значений функций для значений аргумента, не представленных в таблице, то теперь понятие интерполяции понимается шире. Кроме того, в данном разделе были рассмотрены вопросы приближения интерполяционным многочленом Лагранжа, интерполяционным многочленом Ньютона, сплайн-функциями, были выявлены преимущества сплайн-функций по сравнению с другими многочленами (см. таблицу).

Архитектура специализированных процессоров для цифровой обработки сигналов рассматриваются как основные понятия цифровой обработки сигналов, традиционная и многоядерная архитектура цифровых сигнальных процессоров, параллельные алгоритмы, предназначенные для многоканальной архитектуры цифровой обработки сигналов. В настоящее время актуальными остаются вопросы анализа многих существующих методов, алгоритмов и архитектур, применяемых в цифровой обработке сигналов, а также изучения их преимуществ.

*Таблица 1.* – Сравнение функций приближения многочленами

| Параметры сравнения | Многочлен Лагранжа | Многочлен Ньютона | Сплайн |
|---|---|---|---|
| Ошибка вычисления $f(x)=\begin{cases} x^2, & x<2 \\ \ln(x), & x\geq 2 \end{cases}$ | $1{,}08{*}10^{-8}$ | $1{,}88{*}10^{-8}$ | $0{,}20{*}10^{-8}$ |
| Интерполяция | Решается система уравнений | Решается система уравнений | Решается система уравнений, но матрица уравнений не полная, 3-5-диагональная. Существует эффективный метод их решения – метод прогонки. |
| Аппроксимация | С ростом количества узловых точек возрастает и степень многочлена, в результате чего повышается значение ошибки. | С ростом количества узловых точек возрастает и степень многочлена, в результате чего повышается значение ошибки. | Можно использовать “точечные” формулы. Степень многочлена не возрастет с увеличением числа узловых точек. |

Цифровые сигнальные процессоры (ЦСП) (англ. DSP - Digital Signal Processor) появились намного позже универсальных микропроцессов (МП). Их возникновение связано со спецификой алгоритмов цифровой обработки сигналов (ЦОС). В алгоритмах ЦОС наиболее распространненой операцией является вычисление суммы произведений, которая получила название базовой операции ЦОС.

Впервые ЦСП появились на мировом рынке в начале 80 гг. В последующие годы такие фирмы как Texas Instruments (TI), Freescale (Motorola), Analog Devices (ADI) непрерывно развивали производство ЦСП для различных отраслей. На сегодня технологии производства ЦСП динамично развиваются.

Для достижения необходимой скорости в ЦСП осуществлены следующие архитектурные решения:

– Гарвардская архитектура. В данной архитектуре память разделена на две области: программная память (ПП) и память данных (ПД). При этом из памяти считываются и команда и информация.

– Модифицированная Гарвардская архитектура. В данной архитектуре имеется возможность непосредственного обмена данными между ПП и ПД. Это позволяет сформировать команды в виде эффективного конвейера.

– Распараллеливание команд по одновременно работающим функциональным модулям.

– Внедрение ЦОС, выполняемого за один цикл, и ориентирование базовых операций на устройство.

Фирма Analog Device в 2005 году запустила производство двухядерных ЦСП марки ADSP BF 561.

Развитие микропроцессорной техники позволило перейти от многоядерной и многопроцессорной архитектуры к многоядерной, в которой каждое ядро выполняет функции самостоятельно работающих процессоров. Это не упрощает процесс производства программ подготовки и записи алгоритмов, но дает возможность не увеличить объем нерешенных задач, а расширить область паралельных вычислений.

Рассмотрим алгоритм параллелизации, процесс восстановления данных, полученных в ходе эксперимента и с помощью кубических базисных сплайнов, разделения на потоки посредством OpenMP. Если формулу (2), приведенную в первой главе диссертационной работы, применим к кубической базисной функции, то получим следующую функцию:

$$f(x) \cong S_3(x) = b_{-1}B_{-1}(x) + b_0B_0(x) + b_1B_1(x) + b_2B_2(x)$$

В результате анализа традиционной и многоядерной архитектуры цифровых сигнальных процессоров разработаны параллельные алгоритмы, предназначенные для многоядерной архитектуры цифровой обработки сигналов. В последние годы произошли фундаментальные сдвиги в развитии микропроцессоров. Данные сдвиги характеризуются переходом от одноядерной архитектуры к многоядерной архитектуре. В частности, широкое распространение получили архитектуры специальных процессоров, Гарвардская, фон Неймана, а также компаний Блекфин и ADSP.

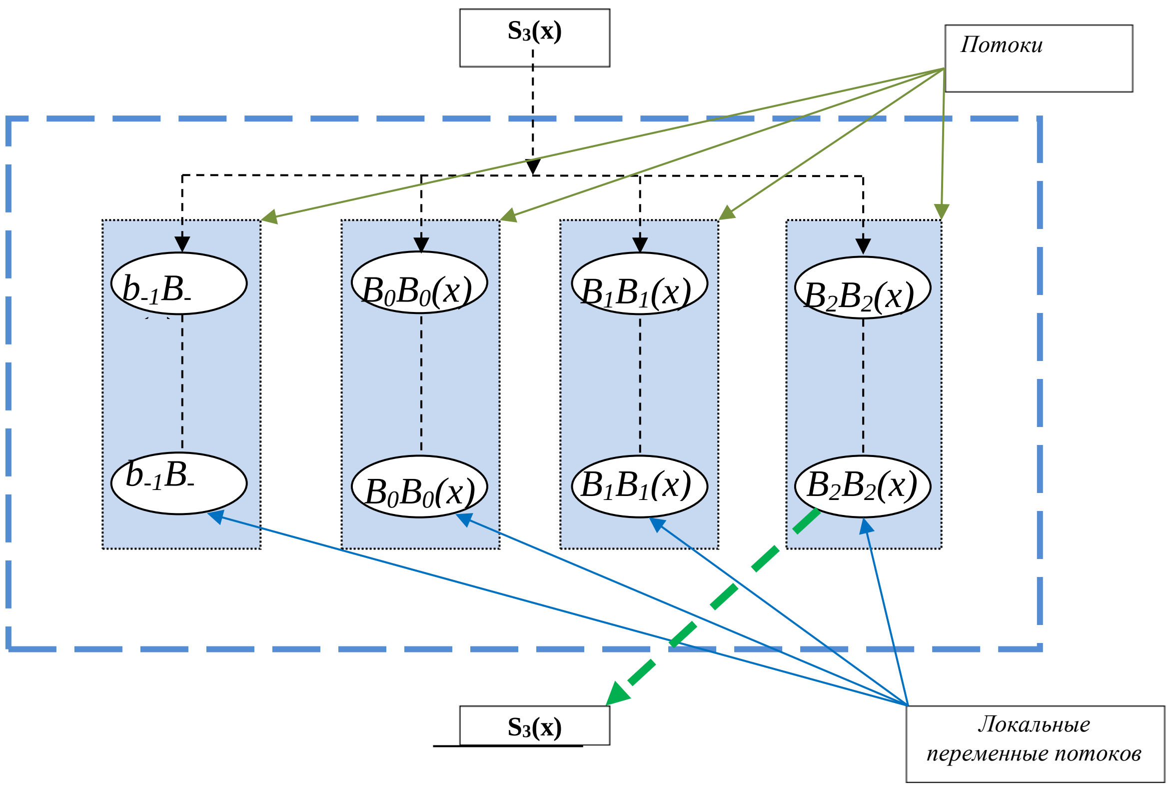


Рисунок 3. – Алгоритм формирования потоков в четырехядерной архитектуре

Если каждое из четырех операций умножений разделить на параллельные потоки, то параллельный алгоритм можно представить следующим образом. Данный алгоритм можно осуществить с помощью четырехядерной архитектуры. При передаче потоков в первую очередь выполняются последовательно, затем параллельно, потом опять последовательно. Это позволяет значительно сократить время вычислений (рис. 3).

Процесс перехода к многоядерной архитектуре стал возможным в результате за счет понижения некоторых технологических норм, только повышения тактической частоты одноядерной архитектуры, которая себя физически исчерпала. В результате применения многоядерных процессоров возможна параллелизация процессов выполнения операций, что позволяет сократить время цифровой сигналов и повысить общую производительность.

Параллельные алгоритмы цифровой обработки сигналов на основе кубических и бикубических сплайнов описывается архитектура традиционных и многоядерных специальных процессоров на основе кубических сплайнов, многоядерные архитектуры на основе бикубических сплайнов, используемых в восстановлении двумерных функциональных связей.

Задача построения сплайнов на основе экспериментальных данных, представленных в аналититическом и табличном виде, сводится к вычислению коэффициентов $b_i$. В общих случаях следует определить сетку Δ-сплайна.

Локальные формулы сохраняют свойства сглаженности приближения. Значения же параметров не зависят от индекса i и учета точек, значительно удаленных от текущей точки. Он бывают симмметричными. Однако примены только для двух внутренних точек области.

При обнаружении ошибок в экспериментальных результатах, построение интерполяционного сплайна теряет смысл. В таких случаях в целях уменьшения ошибок возникает необходимость в применении сглаживающих сплайнов.

К сглаживающему сплайному относится сплайн, который является «более гладким», чем интерполируюший сплайн, и проходит вблизи точки экспериментальных значений.

Минимизируем функционал:

$$J(f)=\int_a^b \left|S''(x)\right|^2 dx+\sum_{i=0}^{N} 1/R_i\left(f-S_i\right)^2 , \tag{3}$$

где $R_i>0$ – заданная величина. Чем меньше коэффициент $R_i$, тем более ближе проходит сплайн-функция относительно заданного значения $f_i$.

Для минимизации функционала (3) следует решить матричное линейное уравнение с пятью диагоналями. На основе построенного сплайна излишние множители заново вычисляются и строится новый сплайн на основе нового $R_i$. Процесс итерации должен продолжаться до соответствия значения сплайна заданному «коридору». Недостатком данного метода является исключение сжатия результатов эксперимента.

При использовании метода наименьших квадратов для приближения узел функций размещается больше, чем узел сплайнов.

Вместе с тем, следует минимизировать следующий функционал:

$$I(f)=\sum_{i=1}^{N}\left(f_i-S_i\right)^2 ,$$

где $S_i$ – сплайн-функция, $f_i$ - заданная функциональная зависимость.

Таким образом, анализ методов вычисления коэффициентов приближения на основе сплайнов показал, что проблема построения сплайн-функций на основе экспериментальных результатов сводится к проблеме вычисления коэффициентов *b.* Для систем, работающих в режиме реального времени, предлагаются формулы «точечного» вычисления коэффициентов. Выражение функций в виде базисных сплайнов является удобным для осуществления в аппаратах, структура вычисления которых предполагает применение таблично-алгоритмического метода.

Таким образом, основным преимуществом структуры является высокоебыстродействие для таблично-алгоритмических методов. Поскольку сумма вычислений B-сплайнов равна сумме в одномерной области $m+1$.

В результате проведенных исследований «Повышение эффективности цифровой обработки сигналов на основе сплайн-функций» получены следующие результаты:

1. В результате исследования сплайн-методов создан метод приближения большего числа используемых на практике элементарных функций с помощью базисных сплайнов. Данный метод позволяет выразить функциональные зависимости математического аппарата базисных сплайнов в виде суммы значений произведений постоянных коэффициентов и базисных функций.

2. В результате сочетания возможностей теории базисных сплайнов и таблично-алгоритмических методов созданы параллелные архитектуры специализированных процессоров, обладающих высокой эффективностью. Это позволяет в значительной мере распараллеливать вычисления.

3. Процесс перехода к многоядерной архитектуре появился в результате физического исчерпания возможностей и повышения производительности за счет снижения тактовой частоты и некоторых технологических норм одноядерных процессоров. Применение многоядерных процессоров позволило распараллелить выполнение операций, в результате чего появляется возможность сократить время цифровой обработки сигналов и повысить общую производительность.

***Список литературы***

[1] Singh, D., Singh, M., & Hakimjon, Z. (2019). B-Spline approximation for polynomial splines. In SpringerBriefs in Applied Sciences and Technology. https://doi.org/10.1007/978-981-13-2239-6_2

[2] Singh, D., Singh, M., & Hakimjon, Z. (2019). Parabolic Splines based One-Dimensional Polynomial. In SpringerBriefs in Applied Sciences and Technology. https://doi.org/10.1007/978-981-13-2239-6_1

[3] Khamdamov, U., & Zaynidinov, H. (2018). Parallel Algorithms for Bitmap Image Processing Based on Daubechies Wavelets. 2018 10th International Conference on Communication Software and Networks, ICCSN 2018. https://doi.org/10.1109/ICCSN.2018.8488270

[4] Singh, D., Singh, M., & Hakimjon, Z. (2019). Spline evaluation for railways. In SpringerBriefs in Applied Sciences and Technology. https://doi.org/10.1007/978-981-13-2239-6_8

[5] Zaynidinov, H. (2009). Digital Signal Processing With Application of Basic Splines. Journal of Convergence Information Technology. https://doi.org/10.4156/jcit.vol4.issue1.zaynidinov

[6] Singh, D., Singh, M., & Hakimjon, Z. (2019). Requirements of MATLAB/Simulink for signals. In SpringerBriefs in Applied Sciences and Technology. https://doi.org/10.1007/978-981-13-2239-6_6

[7] Jiyanbekov, K., Usmonov, J., & Azimov, S. (2019). The probability model of railway transport system activity. Transport Means - Proceedings of the International Conference.

[8] D. Singh, H. Zaynidinov, H.J. Lee, Piecewise-quadratic Harmut basis funictions and their application to problem in digital signal processing. Int. J. Commun. Syst. 23, 751–762 (2010). (www.interscience.wiley.com). https://doi.org/10.1002/dac.1093

[9] O. Hidayov, D. Singh, B. G.B. Gwak, S-Y. Young, A Simulink-model of specialized processor on the piecewise-polynomial bases. International Conference on Advanced Communication Technology, ICACT (2011) Zaynidinov, H.

[10] Mirzayev A, Khalilov S, P. (2019). The use of the Spectral Properties of the Basis Splines in Problems of Signal Processing. Xindiston.

# INCREASING THE EFFICIENCY OF DIGITAL SIGNAL PROCESSING BASED ON SPLINE FUNCTIONS

***A.E.Mirzaev***
*PhD, Tashkent University of Information Technology named after Muhammad Al-Khwarizmi, Associate Professor of the Department of Information Technology*

***S.P. Halilov***
*PhD, Tashkent University of Information Technology named after Muhammad Al-Khwarizmi, Associate Professor of the Department of Information Technology*

**Abstract.** The development of the modern world's information and communication technologies and their implementation in various industries are important, are essential to the creation of parallel algorithms for solving problems of the recovery and digital signal processing, on the basis of the treatment processes a multi-core architecture and the search for optimal solutions. The current stages of development of the structure of machines, complexes and systems installed at facilities that are part of the structure of devices specialized for conducting scientific research or located on rolling stock are characterized by on-line analysis of complex processes and fields and increased demands on the speed of processing large amounts of data in real time . Particular attention is paid to the development of methods for solving problems of image and signal processing by using modern methods, algorithms and structural tools, architecture of computing and software. In that work the result of the study of methods of approximation of functions and functional dependencies obtained in the course of experiments for the selected class of signals improved method of spline functions on the basis of analytical analysis, parallel algorithms for digital signal processing have been developed, efficient algorithms have been developed for digital processing of vibrio signals in multi-core processors based on cubic and bi cubic basis splines.

**Keywords:** multi-core architecture, splines, differential, polynomial spline, cubic and bicubic spline.