Министерство образования Республики Беларусь
Учреждение образования
«Белорусский государственный университет
информатики и радиоэлектроники»

Кафедра экономической информатики

В. А. Журавлев, С. А. Поттосина

ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ И МЕТОДЫ

Лабораторный практикум

для студентов экономических специальностей БГУИР
всех форм обучения

Минск 2005

УДК 338.2:.519 (075.8)
ББК 65.050 я 73
Ж 91

Журавлев В. А.

Ж 91 Экономико-математические модели и методы: Лаб. практикум для студ. экон. спец. БГУИР всех форм обучения / В.А. Журавлев, С. А. Поттосина. – Мн.: БГУИР, 2005. – 79 с.

ISBN 985-444-743-х

В работе рассмотрены примеры математического моделирования экономических процессов на базе компьютерных технологий подготовки и принятия решений. В качестве инструментального средства моделирования и решения задач используется стандартная офисная программа EXCEL. Приведены задания для выполнения лабораторных работ.

УДК 338.2:.519 (075.8)
ББК 65.050 я 73

ISBN 985-444-743-х

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Данный практикум содержит материал для подготовки и проведения лабораторных работ по дисциплине «Экономико-математические модели и методы» в соответствии с образовательным стандартом экономических специальностей в системе Excel. На основании опыта проведения занятий по данной дисциплине выделены разделы, каждый из которых посвящен отдельному классу задач. По каждому из этих классов задач приведен теоретический материал, содержащий основные понятия по соответствующей теме.

Во всех разделах дано подробное описание постановки и решения задач в системе Excel. Система Excel в настоящее время является основным инструментом для проведения аналитической работы, выполнения сложных расчетов и решения экономистами-практиками типовых задач в области анализа и прогнозирования показателей, характеризующих социально-экономические объекты и системы.

В этой системе имеются также возможности решения относительно небольших задач оптимизации производственных планов предприятий, расчета сетевых графиков, выполнения балансовых расчетов и решения других задач.

Для активизации самостоятельной работы в практикум включены задания для лабораторных и самостоятельных работ. Большинство заданий заимствовано из литературы, часть заданий является авторскими.

1. ВЫПОЛНЕНИЕ ОПЕРАЦИЙ С МАТРИЦАМИ И ДИАПАЗОНАМИ В СРЕДЕ EXCEL

В Microsoft Excel есть много функций для выполнения операций с матрицами, которые применяются для решения систем линейных уравнений и др. Для этой цели используются функции:

МУМНОЖ – умножение матриц;

ТРАНСП – транспонирования матриц;

МОПРЕД – вычисление определителя матриц;

МОБР – вычисление обратной матрицы.

Кнопка «Мастер функций» $\boldsymbol{f_x}$ служит для вызова этих функций и расположена на панели инструментов. Функции для выполнения операций с матрицами находятся в категории ***математические,*** а функции, необходимые для выполнения статистических расчетов – в категории ***статистические***.

Все функции, которые возвращают массив, в том числе МУМНОЖ, ТРАНСП, МОБР, завершаются нажатием комбинации трех клавиш: CTRL+SHIFT+ENTER. Предварительно должен быть выделен диапазон для записи возвращаемых значений.

Функции, возвращающие число, завершаются нажатием кнопки ОК или клавиши Enter.

Если функции не могут быть выполнены по причине несоответствия данных выполняемой операции, то функция возвращает ошибку вида #ЧИСЛО! Ниже рассматриваются операции в среде Excel.

1.1. Умножение матриц с помощью функции МУМНОЖ (массив 1, массив 2)

Массив 1 и массив 2 – это перемножаемые матрицы. Все ячейки массивов должны содержать только числа. Можно умножать как квадратные, так и прямоугольные матрицы. Количество столбцов массива 1 должно совпадать с количеством строк массива 2.

Необходимо выполнить следующие действия (рис. 1.1): в таблицу Excel ввести массивы 1 и 2; выделить диапазон для возвращения результата; из вставки функции ***fx*** вызвать функцию МУМНОЖ; ввести в нее массивы 1 и 2; нажать комбинацию клавиш ***CTRL+SHIFT+ENTER.***

Пример 1.1. Ателье выпускает три вида изделий: брюки, юбки, жилеты, используя два вида тканей: шерстяную и подкладочную. Нормативы расхода тканей характеризуются матрицей *A*:

Брюки, юбки, жилеты	Ткань	Цена за 1 м, (руб.)
$A=\begin{pmatrix} 1{,}2 & 0{,}9 & 0{,}75 \\ 0{,}7 & 0{,}6 & 0{,}5 \end{pmatrix}$	Шерстяная Подкладочная	450 130

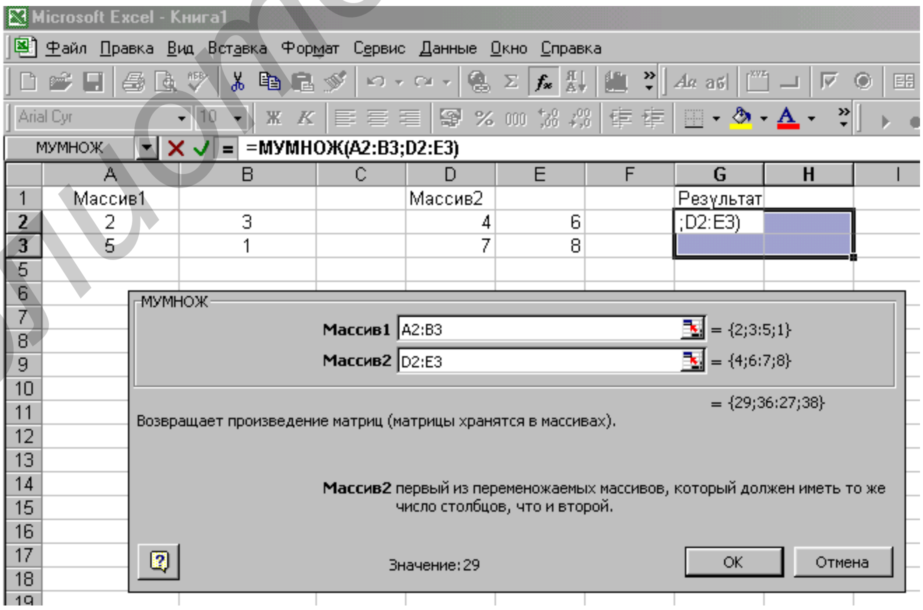


Рис. 1.1. Окно функции МУМНОЖ (выделен диапазон G2:H3 для возвращаемого значения произведения матриц)

Определить:

а) количество метров тканей (D), необходимое для выпуска изделий

$B=\begin{pmatrix}150\\160\\40\end{pmatrix}$	Брюки Юбки Жилеты

б) общую стоимость используемых тканей (S).

Решение

Количество метров ткани:

$$D=A*B=\begin{pmatrix}1{,}2 & 0{,}9 & 0{,}75\\0{,}7 & 0{,}6 & 0{,}5\end{pmatrix}*\begin{pmatrix}150\\160\\40\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}354\\221\end{pmatrix}.$$

Общая стоимость тканей:

$$S=C*D=(450 * 130) * \begin{pmatrix}354\\221\end{pmatrix}= 188\ 030 \text{ руб.}$$

Задача решается с применением функции МУМНОЖ для определения вектора D и числа S (рис. 1.2).

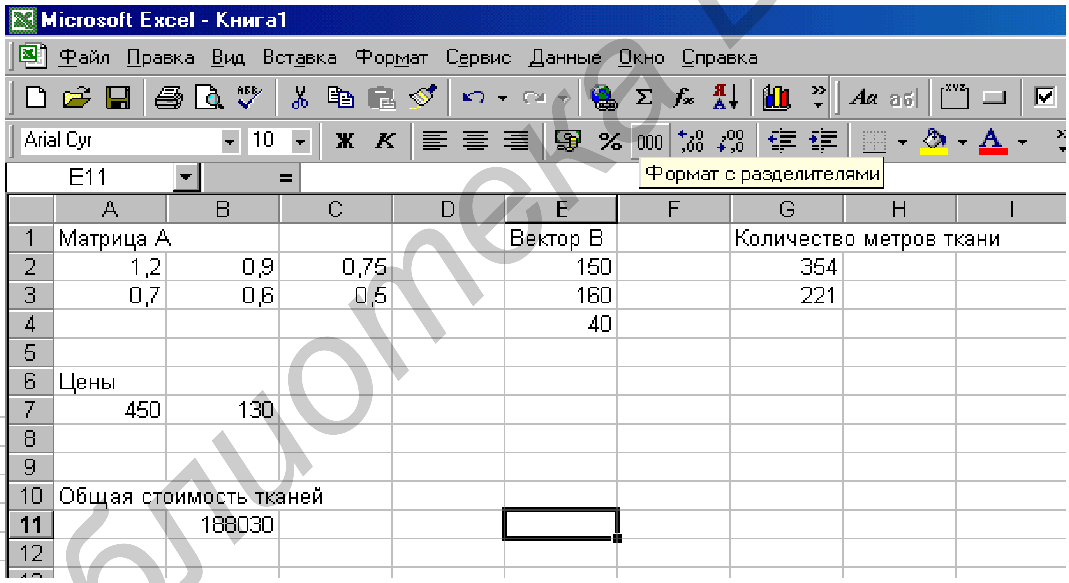


Рис. 1.2. Результаты решения примера 1.1 в таблице Excel

1.2. Транспонирование матриц с помощью функции ТРАНСП (массив)

Функция преобразует массив, переписывая строки в столбцы и наоборот. Последовательность действий такая же, как и при перемножении матриц: ввод исходной таблицы, выделение диапазона для транспонированной матрицы, вызов функции ТРАНСП.

Пример 1.2. Пусть в ячейках A1:C1 содержатся числа 1, 2, 3. Если выделен возвращаемый диапазон A3:A5, то ТРАНСП(A1:C1) записывает числа 1, 2, 3 в диапазон A3:A5.

1.3. Вычисление определителей матриц с помощью функции МОПР(массив)

Массив должен быть квадратной матрицей с равным количеством строк и столбцов. Функция возвращает число, поэтому завершается нажатием кнопки ОК.

Последовательность действий такая же, как и у предыдущих функций (рис. 1.3).

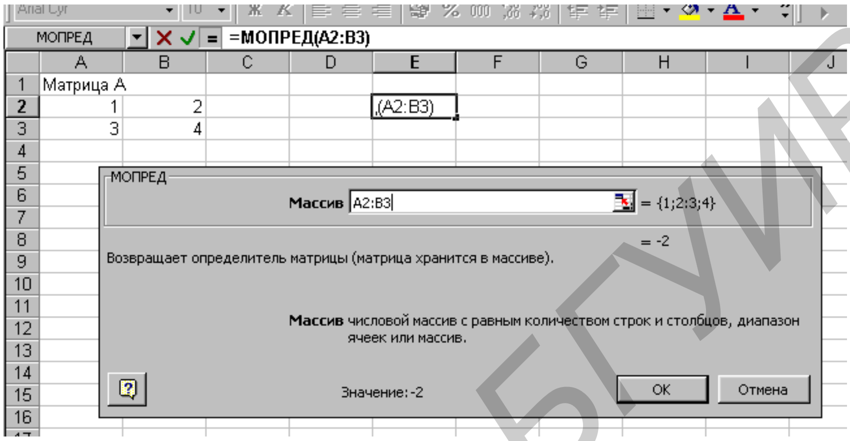


Рис. 1.3. Вычисление определителя матрицы с помощью функции МОПР

1.4. Вычисление обратной матрицы с помощью функции МОБР (массив)

Массив должен быть квадратной матрицей с определителем не равным нулю. Функция возвращает массив обратной матрицы. Если определитель исходной матрицы равен нулю, то она не имеет обратной матрицы, и функция возвращает ошибку вида #ЧИСЛО! (рис. 1.4).

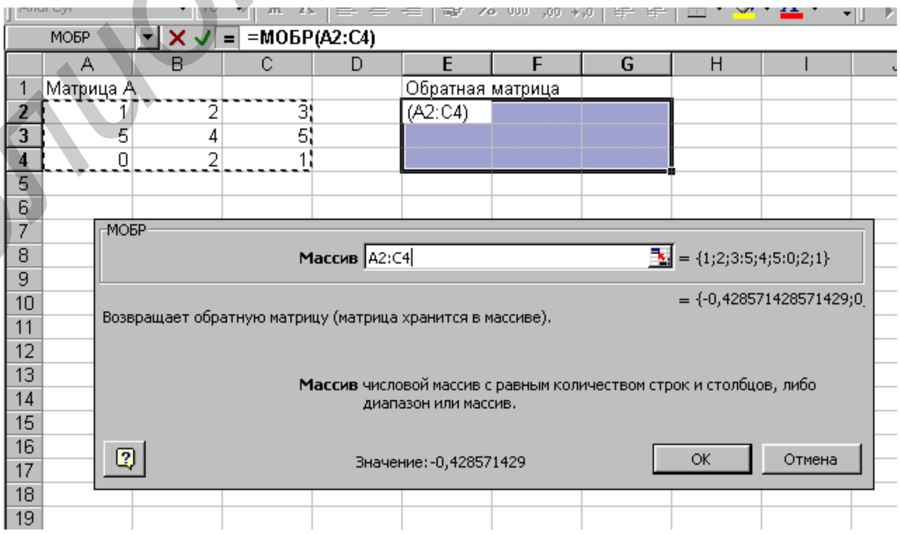


Рис. 1.4. Вычисление обратной матрицы с помощью функции МОБР

1.5. Решение систем уравнений с квадратной матрицей с помощью обратной матрицы

Решение выполняется в два этапа: сначала вычисляют определитель матрицы с помощью функции МОПР и, если он не равен нулю, находят обратную матрицу с помощью функции МОБР, а затем ее умножают на вектор правой части системы уравнений с помощью функции МУМНОЖ (рис. 1.5).

Пример 1.3. Решить систему уравнений:

$$X_1 - X_2 = 1,$$
$$2X_1 + X_2 + 5X_3 = -5,$$
$$3X_1 - 2X_2 + 3X_3 = 8.$$

Представим данную систему в матричном виде:

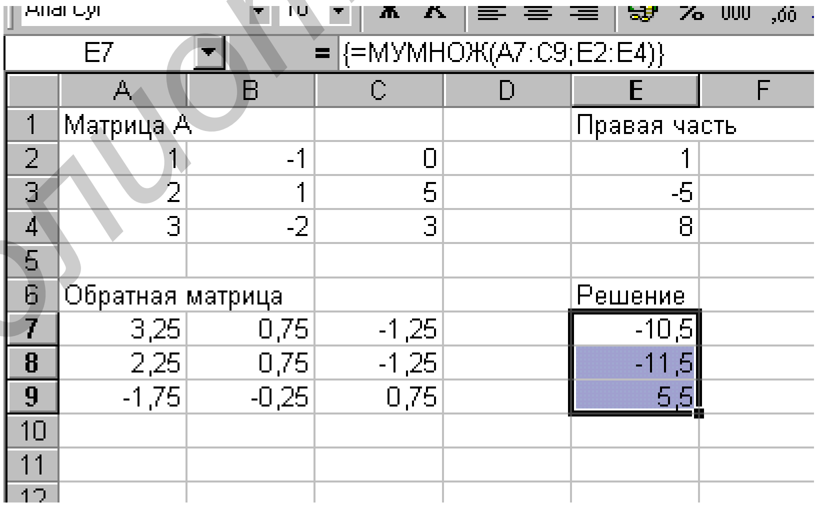
$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 5 \\ 3 & -2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

Решение находится из выражения

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 5 \\ 3 & -2 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

Для решения применяется две функции: сначала находится обратная матрица с помощью функции МОБР, а затем используется функция МУМНОЖ.

Таким образом, $X_1 = -10{,}5$; $X_2 = -11{,}5$; $X_3 = 5{,}5$.



E7 = {=МУМНОЖ(A7:C9;E2:E4)}

	A	B	C	D	E	F
1	Матрица А				Правая часть	
2	1	-1	0		1	
3	2	1	5		-5	
4	3	-2	3		8	
5						
6	Обратная матрица				Решение	
7	3,25	0,75	-1,25		-10,5	
8	2,25	0,75	-1,25		-11,5	
9	-1,75	-0,25	0,75		5,5	
10						
11						

Рис. 1.5. Решение системы уравнений с квадратной матрицей с помощью функции МОБР

1.6. Решение систем уравнений с прямоугольной матрицей методом Жордана–Гаусса

Метод Жордана–Гаусса применяется для решения систем уравнений вида

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \,, i = 1, 2, ..., m \qquad (1.1)$$

или в матричном виде

$$A \cdot X = B,$$

где

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21} a_{22} \dots a_{2n} \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1} a_{m2} \dots a_{mn} \end{pmatrix}, \qquad (1.2)$$

$$X = (X_1, X_2, \dots, X_n)^T,$$

$$B = (b_1, b_2, \dots, b_m)^T.$$

При этом считается, что количество неизвестных больше количества уравнений, т.е. $n>m$. Общее решение системы (1.1) зависит от некоторых (n-m) свободных переменных вектора X.

Общее решение системы уравнений находится следующим образом: среди столбцов матрицы A находятся такие, которые образуют квадратную матрицу A_1 с ненулевым определителем. Тогда систему (1.2) можно записать в виде

$$A_1 \cdot X_1 + A_2 \cdot X_2 = B, \qquad (1.3)$$

откуда

$$X_1 = A_1^{-1} \times B - A_1^{-1} \times A_2 \times X_1, \qquad (1.4)$$

где A_1 – квадратная подматрица матрицы A с ненулевым определителем;
A_2 – дополнение матрицы A_1 в матрице A;
X_1 – вектор переменных X соответствующих столбцам матрицы A_1;
X_2 – вектор переменных X соответствующих столбцам матрицы A_2.

Переменные X_1 называются *основными,* или *базисными*, а переменные X_2 – *свободными*. Любое частное решение получается из общего путем придания конкретных значений свободным переменным.

Для получения общего решения с помощью Excel надо найти с помощью функции МОПР квадратную подматрицу A_1 матрицы A, имеющую ненулевой определитель, затем с помощью функции МОБР найти обратную матрицу для матрицы A_1 и с помощью функции МУМНОЖ провести вычисления согласно формуле (1.4).

Без использования компьютера для приведения системы (1.2) к виду (1.4) применяют преобразования Гаусса:

1. Формируют расширенную матрицу B добавлением к матрице коэффициентов системы A справа от вектора правой части системы уравнений.

2. Умножают (делят) любую строку матрицы B на ненулевое число.

3. Прибавляют (вычитают) из любой строки другую строку, умноженную на ненулевое число.

4. Вычеркивают нулевую строку матрицы B.

5. Если в результате преобразования получится строка, в которой только элемент правой части не будет равен нулю, а остальные элементы строки – нули, то система уравнений не имеет решения.

Целью преобразований является получение матрицы B, у которой будут единичными столбцы, соответствующие базисным переменным.

Пример 1.4. Решить систему уравнений:

$$\begin{aligned} &X_1 + 2X_2 + 2X_3 + 22X_4 - 4X_5 = 11, \\ &X_1 + 2X_2 + X_3 + 16X_4 - 4X_5 = 9, \\ &X_1 + X_2 + X_3 + 12X_4 - 2X_5 = 6 \end{aligned} \tag{1.5}$$

или в матричном виде

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 22 & -4 \\ 1 & 2 & 1 & 16 & -4 \\ 1 & 1 & 1 & 12 & -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \\ X_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 9 \\ 5 \end{pmatrix}. \tag{1.6}$$

Матрица A системы уравнений (1.5) равна

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 22 & -4 \\ 1 & 2 & 1 & 16 & -4 \\ 1 & 1 & 1 & 12 & -2 \end{pmatrix}.$$

С помощью функции МОПР находим, что подматрица A_1, образованная столбцами 1,2 и 3, имеет ненулевой определитель, равный -1.

Таким образом,

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 22 & -4 \\ 16 & -4 \\ 12 & -2 \end{pmatrix},$$

$$X1 = (X_1, X_2, X_3), \; X2 = (X_4, X_5).$$

Тогда систему уравнений (1.6) можно записать в виде

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 22 & -4 \\ 16 & -4 \\ 12 & -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} X_4 \\ X_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 9 \\ 6 \end{pmatrix}. \tag{1.7}$$

Откуда находим **решение:**

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 11 \\ 9 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 22 & -4 \\ 16 & -4 \\ 12 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X_4 \\ X_5 \end{pmatrix}. \tag{1.8}$$

С помощью функции МОБР находим обратную матрицу к матрице A_1, а с помощью функции МУМНОЖ находим общее решение системы уравнений (1.5) согласно выражению (1.8) (рис. 1.6).

Вычисления представлены в таблице Excel.

B18 =

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	Матрица А1				Матрица А2			Правая часть (В)	
2	1	2	2		22	-4		11	
3	1	2	1		16	-4		9	
4	1	1	1		12	-2		6	
5									
6	Определитель А1								
7	-1,0								
8	Матрица А1^{-1}				Матрица А1^{-1} * А2				
9	-1,0	0,0	2,0		2,0	0,0			
10	0,0	1,0	-1,0		4,0	-2,0			
11	1,0	-1,0	0,0		6,0	0,0			
12									
13	Вектор А1^{-1} * В			Решение					
14	1			X1=1 - 2*X4					
15	3			X2=3 - 4*X4 + 2*X5					
16	2			X3=2 - 6*X4					
17									

Рис. 1.6. Решение системы уравнений (1.5) с прямоугольной матрицей с помощью функций МОБР и МУМНОЖ

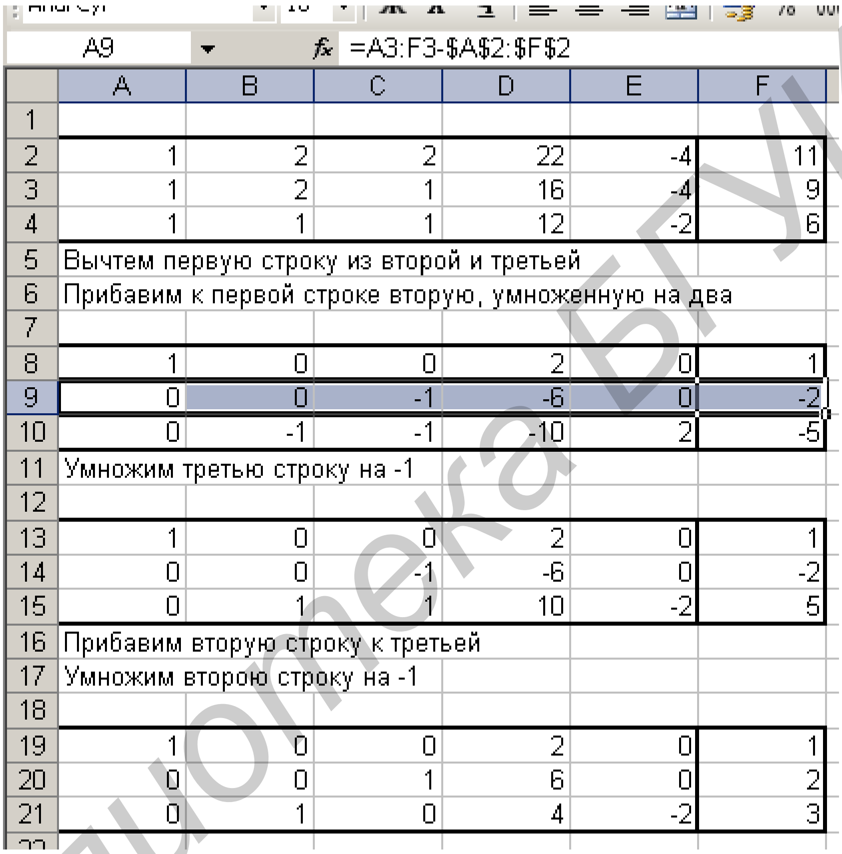
Таким образом, общее решение системы уравнений (1.5) имеет вид

$$\begin{aligned} X_1 &= 1 - 2 \cdot X_4, \\ X_2 &= 3 - 4 \cdot X_4 + 2 \cdot X_5, \\ X_3 &= 2 - 6 \cdot X_4. \end{aligned} \tag{1.9}$$

Переменные X_1, X_2, X_3 являются *основными,* или *базисными,* переменные X_4, X_5 являются *свободными*. Любое частное решение получается из общего путем придания конкретных значений свободным переменным. Если положить $X_4 = X_5 = 0$, то получим базисное решение: $X_1 = 1$, $X_2 = 3$, $X_3 = 2$, $X_4 = 0$, $X_5 = 0$.

Система уравнений (1.5), (1.6) может быть решена и преобразованиями Гаусса. Для этого надо воспользоваться арифметическими операциями над диапазонами. Выделим диапазон результата, в него введем формулу операции над диапазонами аргументов, для получения результата в виде массива ввод завершается нажатием комбинации клавиш ***CTRL+SHIFT+ENTER.*** В результате получается решение системы (1.5) в виде (1.9).

На рис. 1.7 показана последовательность преобразований Гаусса над матрицей системы уравнений (1.6).



	A	B	C	D	E	F
1						
2	1	2	2	22	-4	11
3	1	2	1	16	-4	9
4	1	1	1	12	-2	6
5	Вычтем первую строку из второй и третьей					
6	Прибавим к первой строке вторую, умноженную на два					
7						
8	1	0	0	2	0	1
9	0	0	-1	-6	0	-2
10	0	-1	-1	-10	2	-5
11	Умножим третью строку на -1					
12						
13	1	0	0	2	0	1
14	0	0	-1	-6	0	-2
15	0	1	1	10	-2	5
16	Прибавим вторую строку к третьей					
17	Умножим второю строку на -1					
18						
19	1	0	0	2	0	1
20	0	0	1	6	0	2
21	0	1	0	4	-2	3

Рис.1.7. Решение системы уравнений преобразованиями Гаусса

Метод Гаусса является общим методом решения систем уравнений с прямоугольной матрицей. Он позволяет установить неразрешимость системы уравнений и решить систему уравнений, в которой количество уравнений больше количества неизвестных.

1.7. Выполнение операций над диапазонами

Над диапазонами одинаковой размерности можно производить все арифметические операции, а также определять значения любых функций как и над числами. При этом операции производятся над каждым элементом диапазонов аргументов. Количество диапазонов аргументов может быть любым. Возвращаемый результат будет диапазоном той же размерности, что и у диапазонов аргументов.

На рис. 1.8 показано деление диапазона B2:E4 на диапазон B6:E8, результатом будет диапазон B10:E12, элементы которого являются частными от деления соответствующих элементов двух диапазонов аргументов.

Для выполнения операций над диапазонами надо ввести числовые значения в диапазоны аргументы, выделить диапазон для возврата результата операции и нажать три клавиши: ***CTRL+SHIFT+ENTER.***

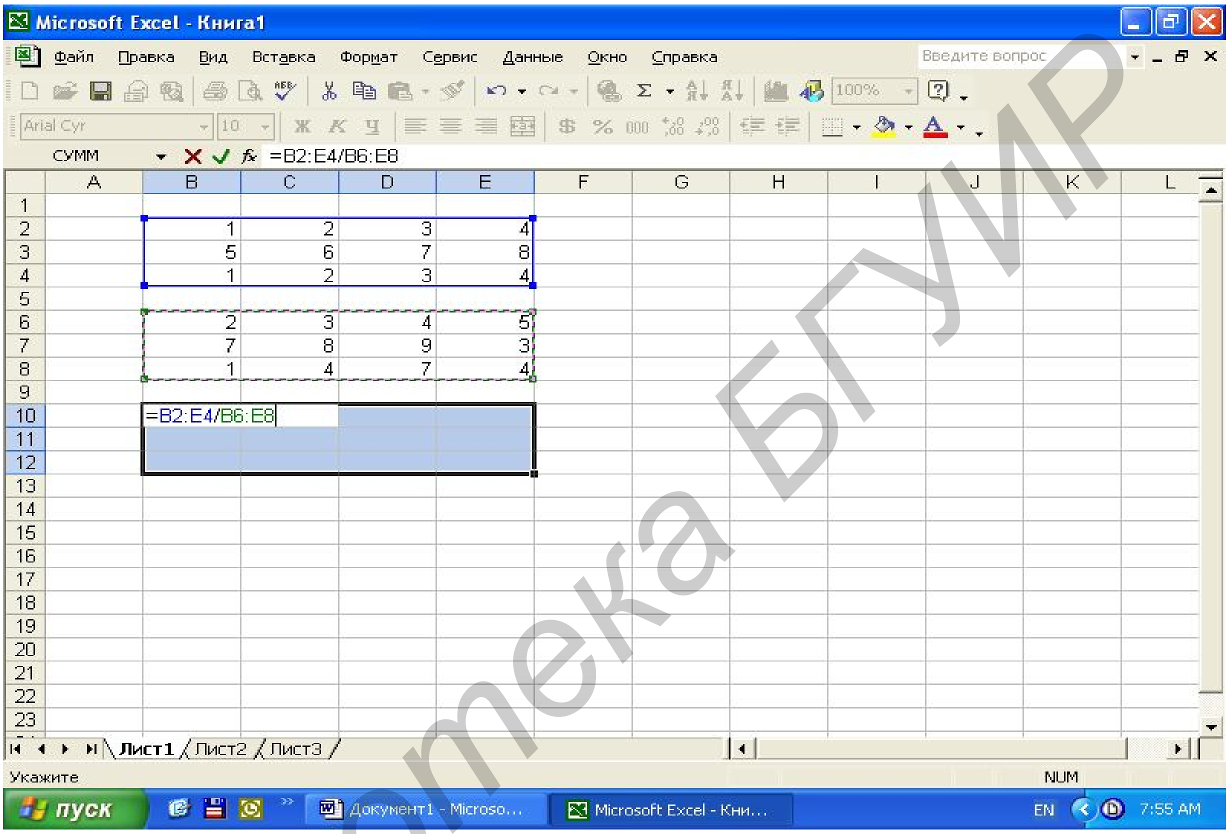


Рис. 1.8. Деление диапазонов

Результат операции приведен на рис. 1.9.

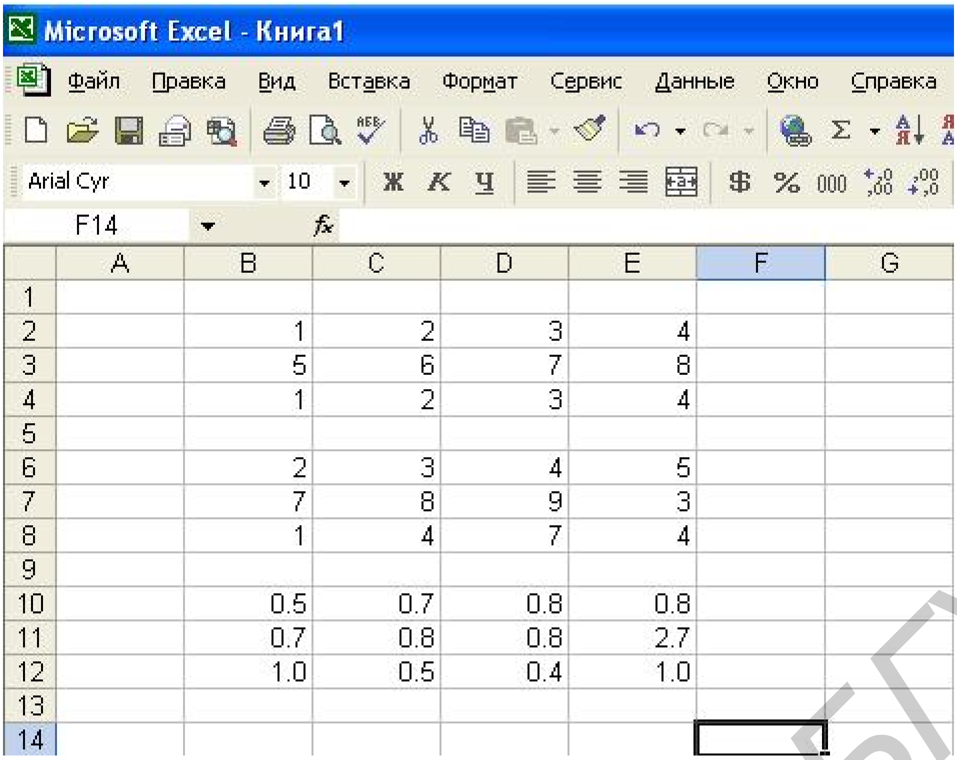


Рис. 1.9. Результат деления двух диапазонов

На рис. 1.10 приведен пример вычисления функции sin от диапазона.

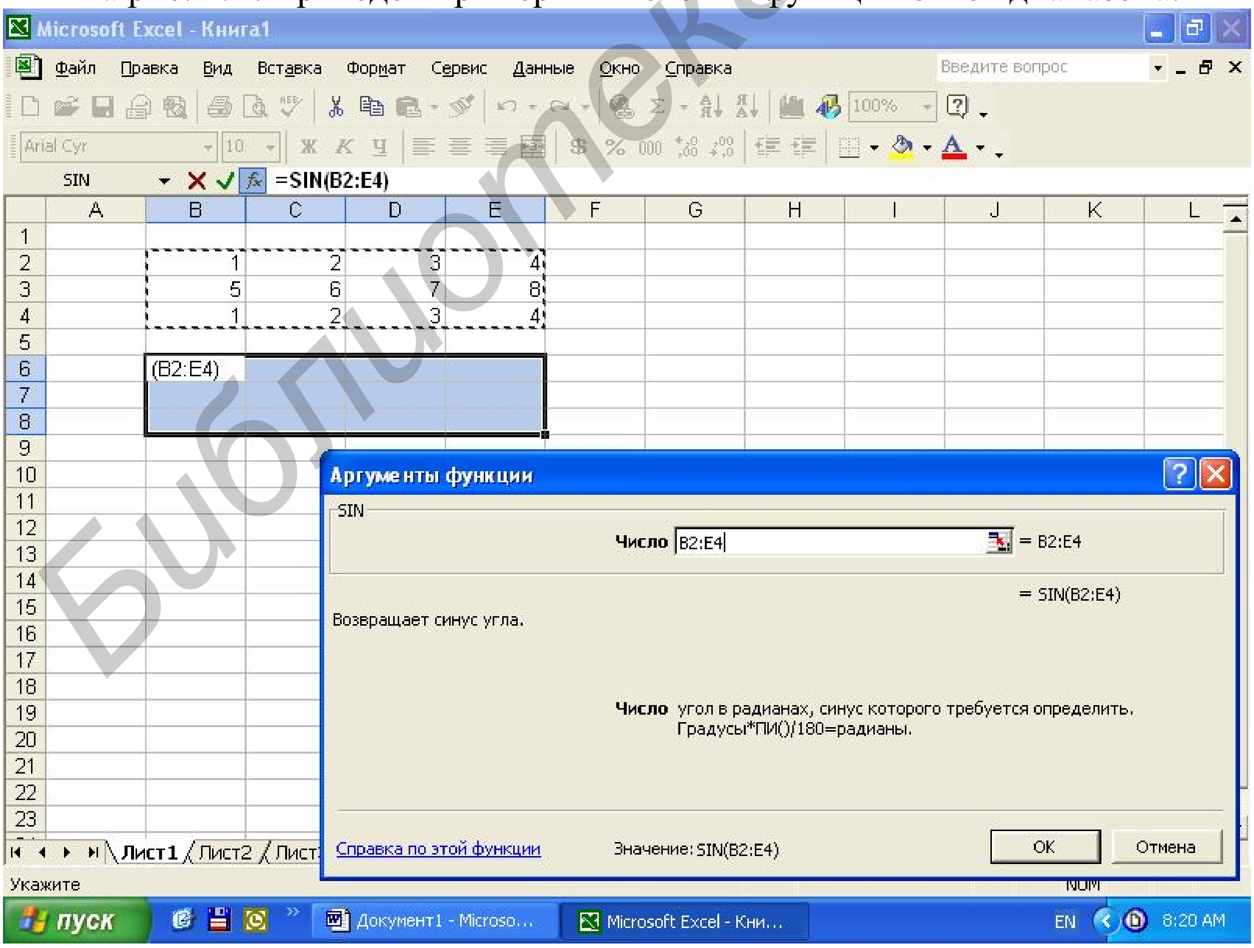


Рис. 1.10. Вычисление функции sin от диапазона

Нажимается три клавиши CTRL+SHIFT+ENTER. Результат операции приведен на рис. 1.11.

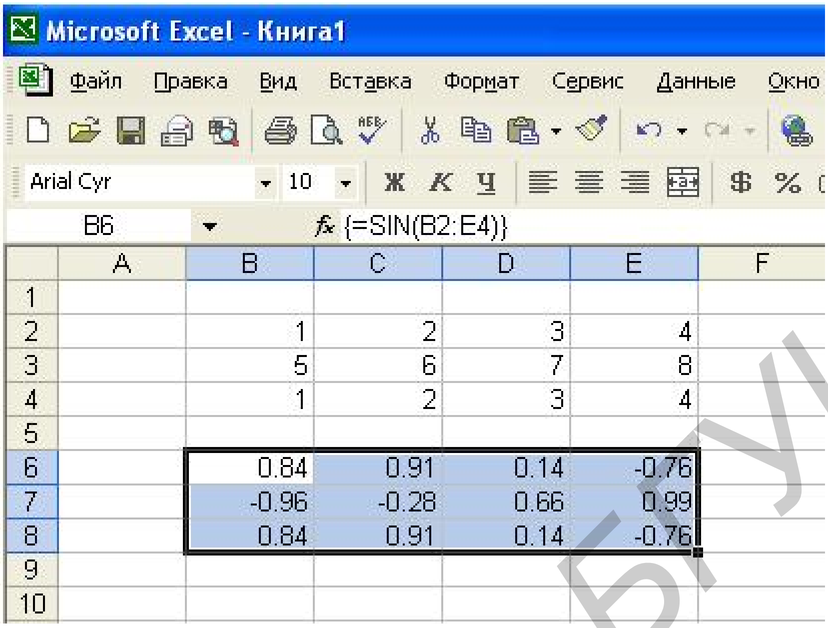


Рис. 1.11. Результат вычисления функции sin от диапазона B2:E4

2. ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ МЕЖОТРАСЛЕВОГО БАЛАНСА (МОДЕЛЬ ЛЕОНТЬЕВА «ЗАТРАТЫ-ВЫПУСК»)

Межотраслевой баланс (МОБ) – это макроэкономическая модель, характеризующая производство и потребление продукции в отраслях и секторах экономики в стоимостном выражении. МОБ отражает межотраслевые поставки и конечное потребление продукции, произведенной в отраслях в течение года. Межотраслевой баланс представляется в виде табл. 2.1.

Таблица 2.1

Межотраслевой баланс производства и потребления продукции

Производящие отрасли	Потребляющие отрасли				Конечный продукт Y	Валовой продукт X
	1	2	…	n		
1	X_{11}	X_{12}	…	X_{1n}	Y_1	X_1
2	X_{21}	X_{22}	…	X_{2n}	Y_2	X_2
…	…	…	…	…	…	…
n	X_{n1}	X_{n2}	…	X_{nn}	Y_n	X_n
Добавленная стоимость	Z_1	Z_2	…	Z_n	$\sum_{i=1}^{n} Y_i = \sum_{j=1}^{n} Z_j$	
Валовой продукт	X_1	X_2	…	X_n		$\sum_{i=1}^{n} X_i = \sum_{j=1}^{n} X_j$

В табл. 2.1 представлены объемы производства продукции n отраслей $X_1, X_2,\ldots,X_n$; X_{ij} – стоимость продукции i-й отрасли, потребленное в j-й отрасли в течение года; Y_i – объем потребления продукции i-й отрасли в непроизводственной сфере; Z_j – добавленная стоимость в j-й отрасли, которая включает оплату труда, чистый доход, амортизацию.

В межотраслевом балансе имеют место следующие балансовые соотношения:

$$
\begin{aligned}
&X_i = \sum_{j=1}^{n} X_{ij} + Y_i, \quad i = 1,2,\ldots,n,\\
&Z_j = X_j - \sum_{i=1}^{n} X_{ij},\\
&\sum_{i=1}^{n} Y_i = \sum_{j=1}^{n} Z_j,\\
&\sum_{i=1}^{n} X_i = \sum_{j=1}^{n} X_j.
\end{aligned}
\qquad (2.1)
$$

Основу экономико-математической модели МОБ составляет матрица коэффициентов прямых затрат $A=(a_{ij})$.

Коэффициенты прямых затрат определяются по формуле

$$a_{ij}=X_{ij}/X_j\,,\ \mathrm{i,j}=1,2,\ldots,n. \qquad (2.2)$$

Эти коэффициенты показывают, какое количество продукции i-й отрасли необходимо для производства единицы валовой продукции j-й отрасли.

Предполагается, что коэффициенты прямых затрат отражают технологию производства и не зависят от переменных X_{ij}, X_i, Y_j.

Из (2.2) следует, что

$$X_{ij} = a_{ij} X_j\,. \qquad (2.3)$$

Подставляя (2.3) в (2.1), получаем

$$X_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j + Y_i\,, \qquad (2.4)$$

или в матричном виде

$$X = AX + Y. \qquad (2.5)$$

Откуда следует

$$
\begin{aligned}
&Y = (E - A)\,X\,,\\
&X = (E - A)^{-1}\,Y.
\end{aligned}
\qquad (2.6)
$$

Матрица $B = (E - A)^{-1}$ называется матрицей коэффициентов полных затрат, для ее существования необходимо, чтобы определитель матрицы (E-A) не был равен нулю.

Система уравнений (2.4), (2.5), (2.6) называется статической моделью Леонтьева. С помощью этой системы можно решать три типа задач (рис. 2.1):

1) по заданным величинам валовых выпусков X_j надо определить объемы конечной продукции каждой отрасли Y_i и построить таблицу межотраслевого баланса;

2) по заданным величинам конечной продукции Y_i надо определить величины валовых выпусков X_j каждой отрасли и построить таблицу межотраслевого баланса;

3) для нескольких отраслей заданы величины валовых выпусков X_j, а для остальных отраслей заданы величины конечной продукции Y_i, надо определить объемы конечной продукции первых отраслей и валовых выпусков вторых отраслей и построить таблицу межотраслевого баланса;

4) по матрице прямых затрат A, найти матрицу полных затрат B.

Пример 2.1. Даны матрица коэффициентов прямых затрат A и вектор конечной продукции Y:

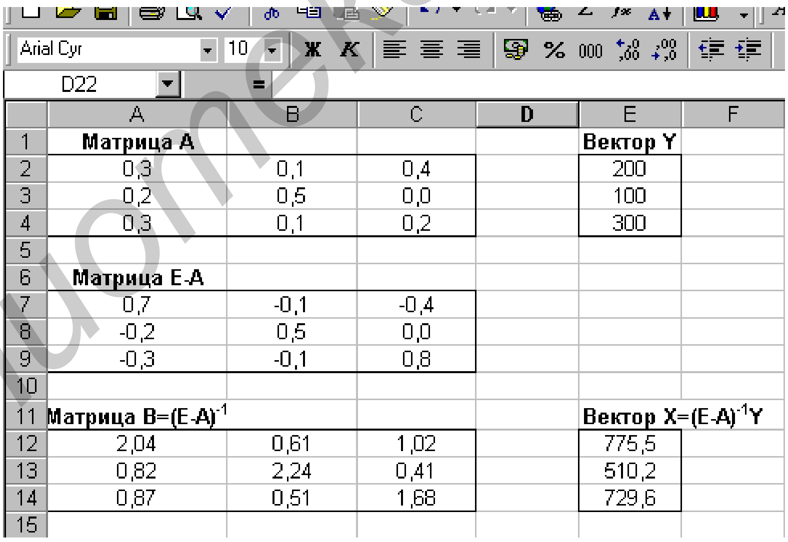
$$A = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.1 & 0.4 \\ 0.2 & 0.5 & 0.0 \\ 0.3 & 0.1 & 0.2 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 200 \\ 100 \\ 300 \end{pmatrix}.$$

Требуется определить:

1. Матрицу коэффициентов полных затрат $B=(E–A)^{-1}$.

2. Вектор валовых выпусков $X=(Xj)$.

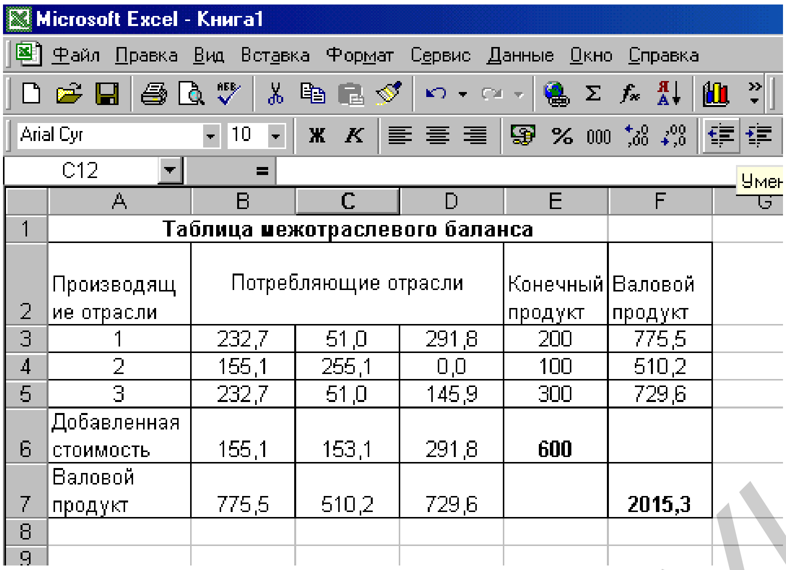
Построить таблицу межотраслевого баланса.



	A	B	C	D	E	F
1	**Матрица A**				**Вектор Y**	
2	0,3	0,1	0,4		200	
3	0,2	0,5	0,0		100	
4	0,3	0,1	0,2		300	
5						
6	**Матрица E-A**					
7	0,7	-0,1	-0,4			
8	-0,2	0,5	0,0			
9	-0,3	-0,1	0,8			
10						
11	**Матрица B=(E-A)$^{-1}$**				**Вектор X=(E-A)$^{-1}$Y**	
12	2,04	0,61	1,02		775,5	
13	0,82	2,24	0,41		510,2	
14	0,87	0,51	1,68		729,6	
15						

Рис. 2.1. Решение примера 2.1 по модели межотраслевого баланса

По полученным значениям с помощью соотношений (2.3) и (2.1) строится таблица межотраслевого баланса (рис 2.1).



	A	B	C	D	E	F
1	Таблица межотраслевого баланса					
2	Производящие отрасли	Потребляющие отрасли			Конечный продукт	Валовой продукт
3	1	232,7	51,0	291,8	200	775,5
4	2	155,1	255,1	0,0	100	510,2
5	3	232,7	51,0	145,9	300	729,6
6	Добавленная стоимость	155,1	153,1	291,8	**600**	
7	Валовой продукт	775,5	510,2	729,6		**2015,3**

Рис.2.2. Таблица межотраслевого баланса для примера 2.1

В ячейках таблицы (рис. 2.2) находятся значения показателей МОБ, вычисляемые по формулам (2.1), (2.3).

3. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Для решения оптимизационных задач в среде Excel применяется команда «Поиск решения», которая находится в меню «Сервис». Если ее здесь нет, то в меню «Сервис» надо выбрать раздел «Надстройки» и в списке надстроек установить флажок для элемента «Поиск решения». Если этот элемент отсутствует, то необходима полная инсталляция пакета Excel.

Задача линейного программирования (ЗЛП) в произвольной форме имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}
&\max\ (\min) \sum_{j=1}^{n} c_j \cdot x_j,\\
&\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_j \le b_i, \quad (i = 1,\ldots,m_1),\\
&\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_j \ge b_i, \quad (i = m_1+1,\ldots,m_2),\\
&\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_j = b_i, \quad (i = m_2+1,\ldots,m),\\
&x_j \ge 0, \quad (j = 1,\ldots,n_1),\\
&x_j - \textit{произвольные}, \quad (j = n_1+1,\ldots,n).
\end{aligned} \tag{3.1}$$

Выражение $\sum_{j=1}^{n} c_j \cdot x_j$ называется *целевой функцией (или критерием)* задачи, величины (X_1, X_2, …, X_n) – переменные задачи. Система неравенств в задаче (3.1) определяет *область допустимых значений (планов) задачи* D, которая имеет форму выпуклого многогранника.

Неравенства и равенства в задаче (3.1) называются *ограничениями*. Каждое неравенство определяет полупространство, а равенство – плоскость в пространстве переменных (X_1, X_2, …, X_n).

Решение задачи (3.1) называется *оптимальным решением (или оптимальным планом)* и обозначается как $X^* = (X^*_1, X^*_2, \ldots, X^*_n)$. Оптимальные решения лежат на границе области D. Если область D ограничена, то ЗЛП имеет либо единственное, либо бесконечно много решений. Если решение единственно, то оно совпадает с одной из вершин многогранника D. Если ограничения несовместны или целевая функция не ограничена, то задача (3.1) не имеет решения. Если область D не ограничена, то решение может существовать либо быть неограниченным.

Всякая задача на минимум может быть сведена к задаче на максимум и, наоборот, умножением целевой функции на –1. Оптимальный план задачи при этом не изменится, а значение целевой функции изменит знак. После решения надо снова изменить знак целевой функции.

В следующем примере дается экономическая постановка задачи линейного программирования .

Пример 3.1. Необходимо найти месячный оптимальный производственный план предприятия, выпускающего четыре вида продукции (П1, П2, П3, П4). Цены реализации каждого вида продукции известны и нет ограничения на объемы реализации.

Оптимальным планом предприятия будем называть план, обеспечивающий максимальную прибыль при заданных ограничениях на имеющиеся ресурсы. Задача может быть поставлена также на минимум затрат.

В табл. 3.1 записываются необходимые для задачи данные: нормативы затрат ресурсов на производство единицы продукции, прибыль от реализации единицы продукции и запасы каждого вида ресурса. Если в последней строке задать цены реализации, то задача будет поставлена на максимум выручки от реализации продукции.

Таблица 3.1

Наименование ресурса	Нормативы затрат				Запасы ресурсов, тыс.ед.
	П1	П2	П3	П4	
Труд, чел./дней	0,6	1	2	2,5	20
Сырье, т	3	5	2	3	50
Оборудование, станко/ч	5	4	3	4	45
Прибыль на единицу продукции, тыс.руб.	20	25	40	50	

Экономико-математическая модель задачи имеет вид

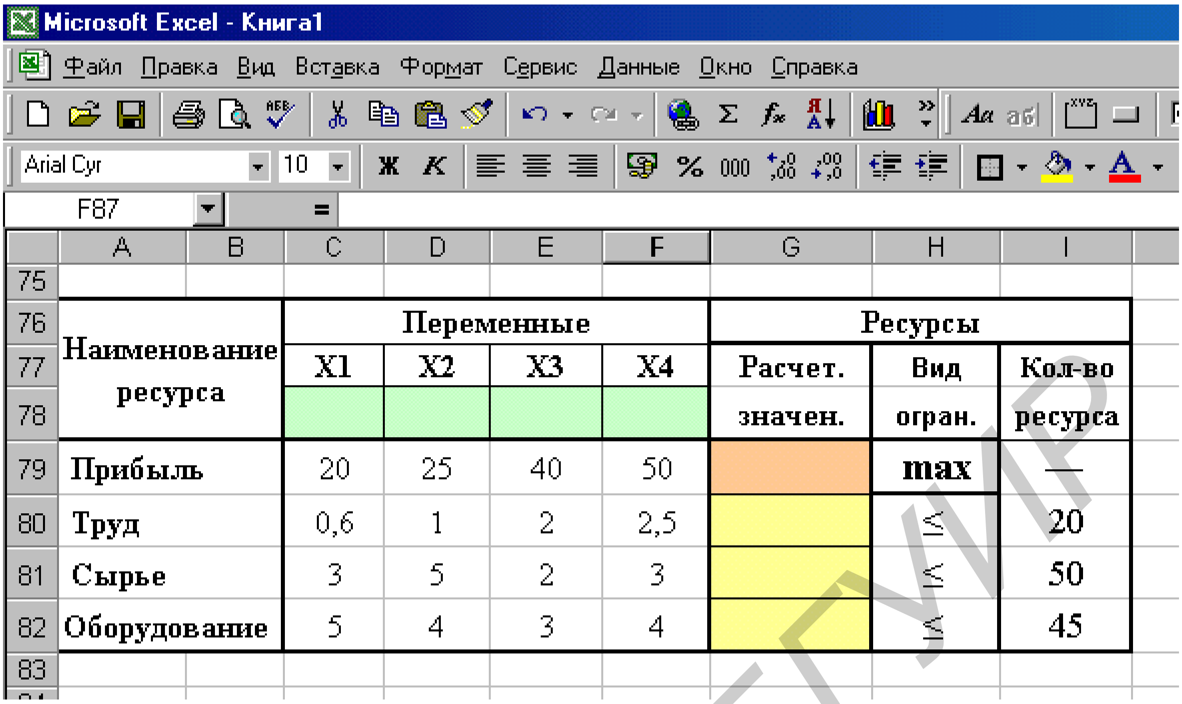
$$
\begin{aligned}
&\max Z = 20x_1 + 25x_2 + 40x_3 + 50x_4\,;\\
&0{,}6x_1 + x_2 + 2x_3 + 2{,}5x_4 \le 20\,;\\
&3x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 3x_4 \le 50\,;\\
&5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 4x_4 \le 45\,;\\
&x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0\,,
\end{aligned}
$$

где переменные (x_1, x_2, x_3, x_4) обозначают объемы производства соответствующих видов продукции (тыс.т), Z – выручка от реализации продукции при заданных ценах (20, 25, 40, 50) в тыс.руб. и заданных ограничениях на используемые ресурсы труда, сырья и оборудования (20, 50, 45) в ед.

Решение задачи осуществляется при помощи пакета EXCEL с помощью функции «**Поиск решения**» (рис. 3.1).

Решение задачи состоит из следующих шагов**:**

1. *Создать форму* с данными задачи (3.1) (рис. 3.1).



Наименование ресурса	Переменные				Ресурсы		
	X1	X2	X3	X4	Расчет. значен.	Вид огран.	Кол-во ресурса
Прибыль	20	25	40	50		max	—
Труд	0,6	1	2	2,5		≤	20
Сырье	3	5	2	3		≤	50
Оборудование	5	4	3	4		≤	45

Рис 3.1. Таблица EXCEL решения задачи линейного программирования с помощью функции «**Поиск решения»**

2. *Осуществить абсолютную адресацию* к блоку (диапазону) переменных (X_1, X_2, X_3, X_4), которому надо дать уникальное имя (например «Переменные») (рис. 3.2).

Чтобы не повторять имена, надо щелкнуть по кнопке рядом с полем для ввода имени блока. После этого увидите список имен. Можно щелчком по имени в этом списке переместиться к соответствующему блоку, на каком бы листе книги он не находился.

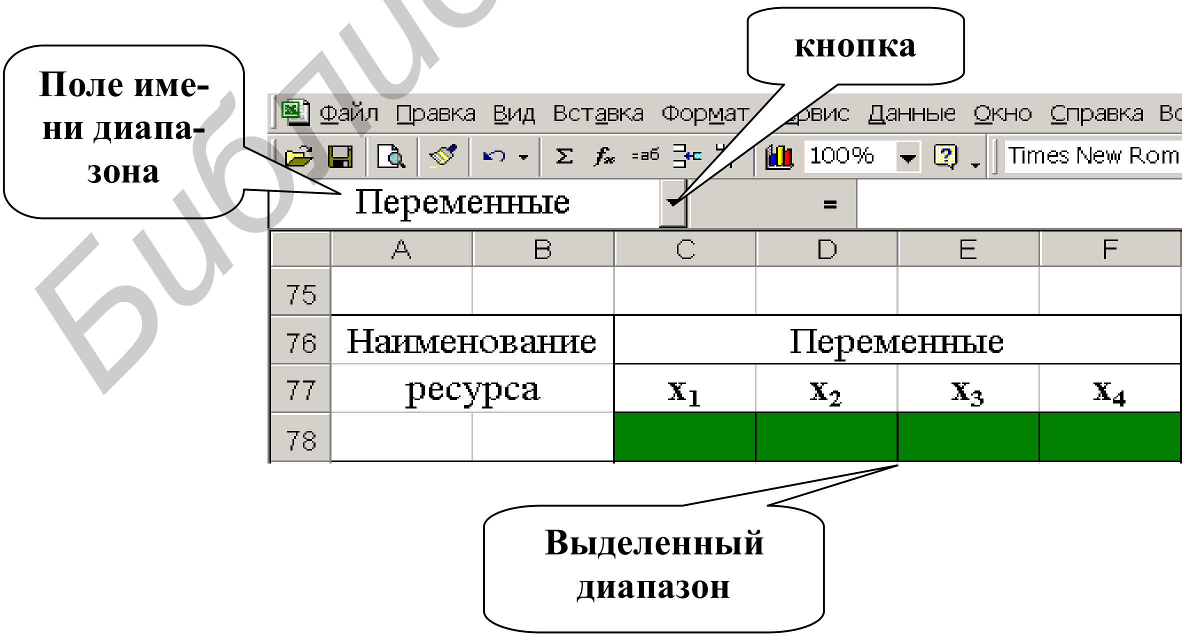


Рис. 3.2. Ввод наименования диапазона

В ячейки, выделенные цветом, надо ввести формулы для вычисления значений прибыли и используемых ресурсов, умножая и складывая диапазон **«Переменные»** с коэффициентами, находящимися в соответствующих строках. Для этой цели используется функция СУММПРОИЗВ (сумма произведений).

3. *Вычислить значения прибыли.* Выделим ячейку G79 (рис. 3.3), в которую нужно занести расчетное значение прибыли. Нажмем вставку функции ***(кнопка f_x)*** и далее выберем функцию ***СУММПРОИЗВ*** среди математических функций пакета.

В качестве первого аргумента выделим указателем диапазон переменных (X_1, X_2, X_3, X_4). Имя блока **(«Переменные»)** будет вставлено автоматически. Щелкнем по полю для ввода второго массива и выделим блок ячеек, содержащий значения прибыли. В этом случае в качестве второго аргумента будут вставлены адреса соответствующих ячеек (см. рис. 3.3).

Закончим ввод формулы нажатием на кнопку ОК.

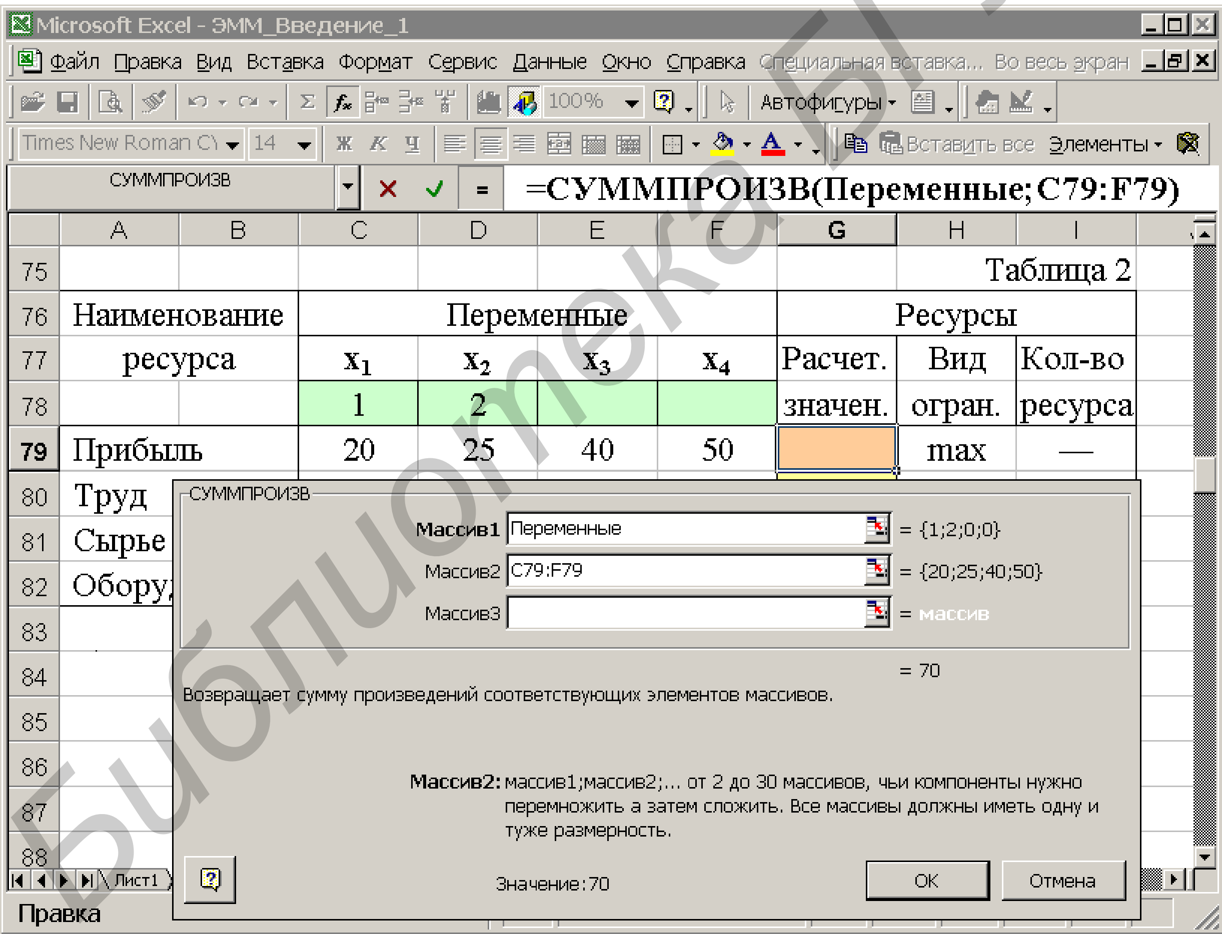


Рис. 3.3. Вычисление значения прибыли

Для контроля правильности формулы в диапазон переменных (x_1, x_2, x_3, x_4) надо ввести произвольные значения, например x_1=1, x_2=2, тогда в ячейке прибыли должно получиться значение 70.

4. *Вычислить значения расхода ресурсов.* Чтобы записать формулы для вычисления расчетных значений расхода ресурсов, надо скопировать формулу для расчета прибыли в ячейки, предназначенные для расчета ресурсов.

Выделим ячейку со значением прибыли и переместим указатель в ее правый нижний угол. Он примет вид перекрестия (рис. 3.4.) Удерживая в нажатом положении левую клавишу мыши, протащим указатель по заполняемым ячейкам. Адреса ячеек со значениями прибыли (строка 79) автоматически будут заменены на адреса ячеек со значениями коэффициентов расхода ресурсов.

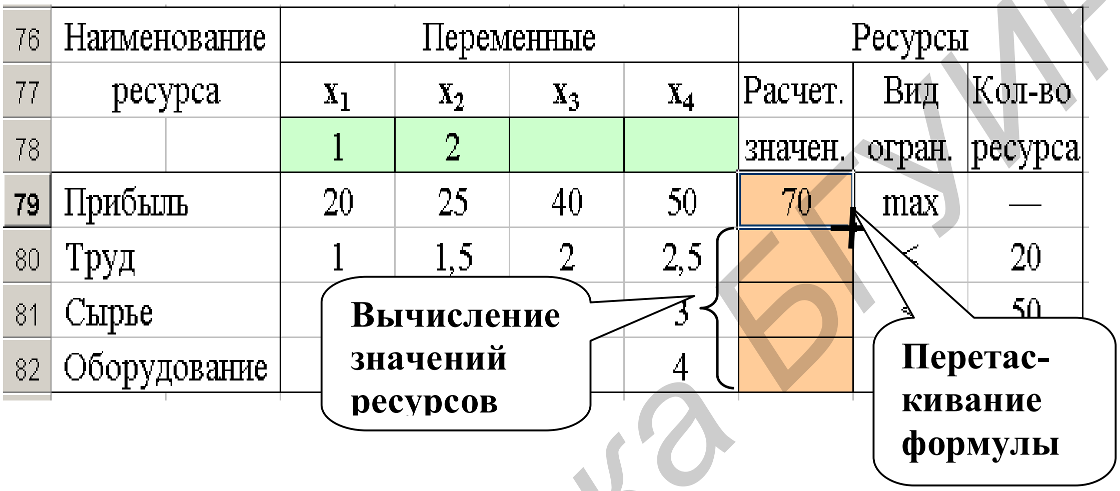


Рис. 3.4. Вычисление значений расхода ресурсов

Теперь для любых назначенных нами значений переменных (x_1, x_2, x_3, x_4) (в нашем случае x_1=1, x_2=2) в соответствующих ячейках можно видеть значения прибыли и объемы затраченных ресурсов.

5. *Решить задачу оптимизации.* В пункте меню **Сервис** выберите команду «**Поиск решения».** В поле **Установить целевую ячейку** команды «**Поиск решения»** выделите ячейку со значением целевой функции модели (рис. 3.5).

Если эта команда уже использовалась, то ее входные поля могут быть заполненными. Надо заменить или удалить устаревшие поля. Чтобы максимизировать (минимизировать) значение целевой ячейки, установите соответствующее положение переключателя (см. рис. 3.5). В поле **Изменение ячейки** введите имена или адреса переменных модели, выделяя блок этих ячеек («Переменные»). Если они несмежные, то удерживайте в нажатом положении клавишу Ctrl. Имя **«Переменные»** блока будет вставлено автоматически.

Щелкните по полю **Ограничения**, после чего введите ограничения, накладываемые на решение задачи. Для этого нажмите кнопку **Добавить**. В поле **Ссылка на ячейку** выберите ячейку или диапазон ячеек, на значения которых накладываются ограничения (рис. 3.6).

В примере левые части ограничений это – блок ячеек **$G$80:$G$82**, а правые части ограничений соответственно **$I$80:$I$82.**

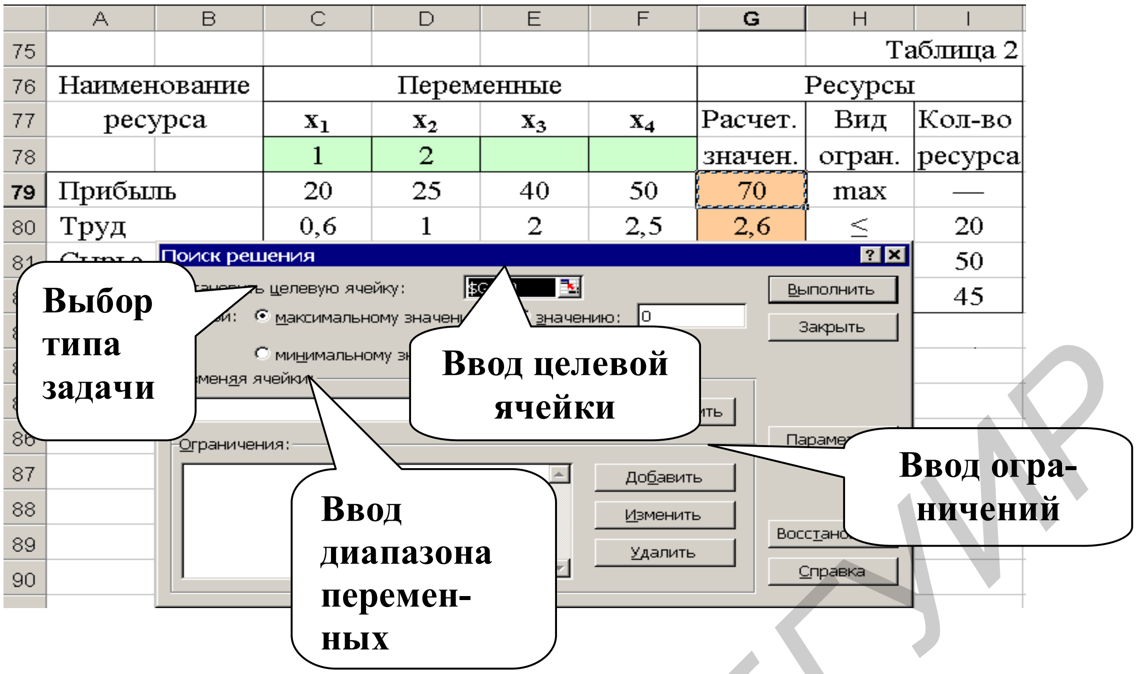


Рис. 3.5. Использование команды **Поиск решения**

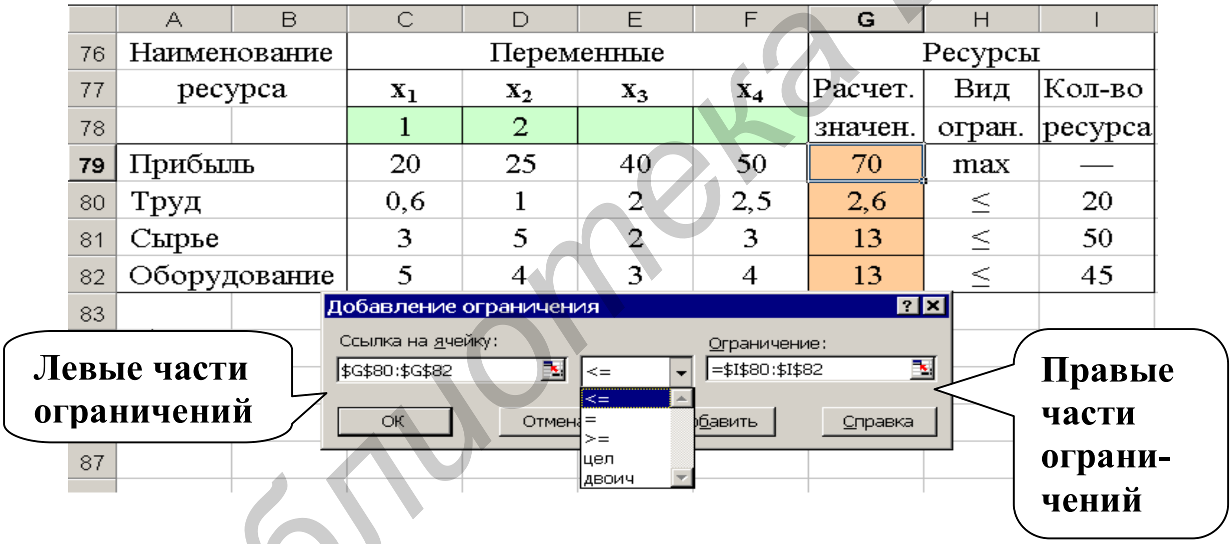


Рис. 3.6. Ввод ограничений при нажатии кнопки **Добавить**

Для ограничений одного вида при вводе левых и правых частей можно ввести сразу весь диапазон, выделяя соответствующие ячейки.

Выберите требуемый вид ограничения (<=, =, >=, цел., двоич.) из раскрывающегося списка, который находится между ссылкой и ограничением. (Если выбрано «цел.» или «двоич.», в поле **Ограничение** появятся значения типа «целого» или «двоичного» типа. Последнее означает, что результат может быть только нулем или единицей).

В поле для величины ограничения можно вводить и число, но тогда не так удобно анализировать модель на экране.

Чтобы ввести ограничение и приступить к набору нового, нажмите кнопку **Добавить**, а чтобы вернуться в диалоговое окно **Поиск решения,** нажмите кнопку ОК. В окне **Параметры поиска решения** (рис. 3.7) для решения линейных задач надо установить флажки **Линейная модель** и **Неотрицательные значения.** Остальные величины, которые определяют точность и сходимость решения, как правило, нет необходимости изменять.

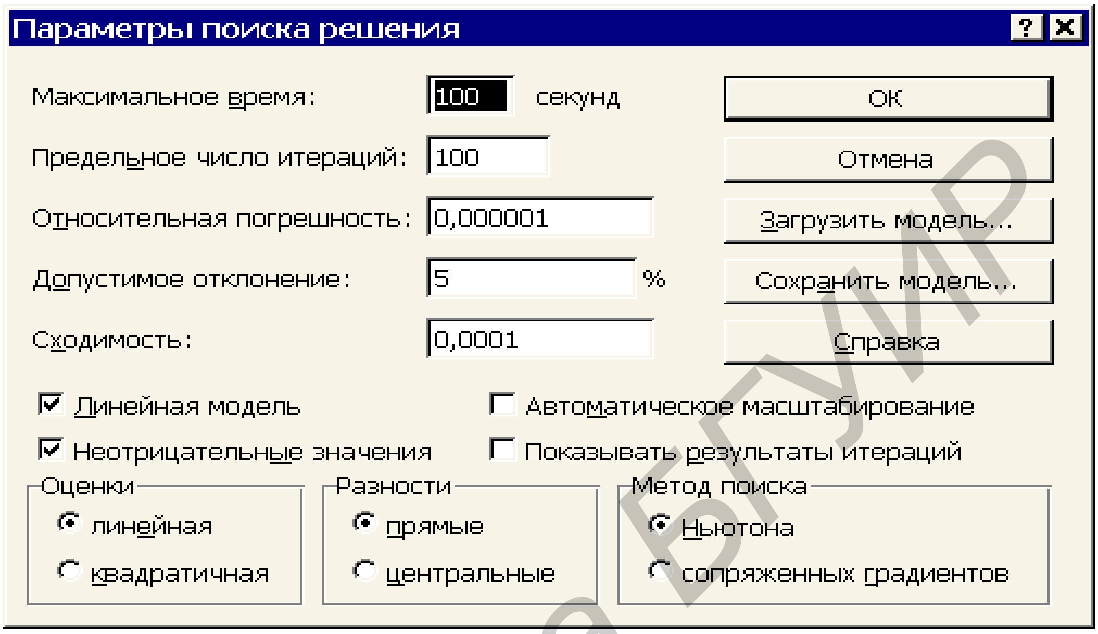
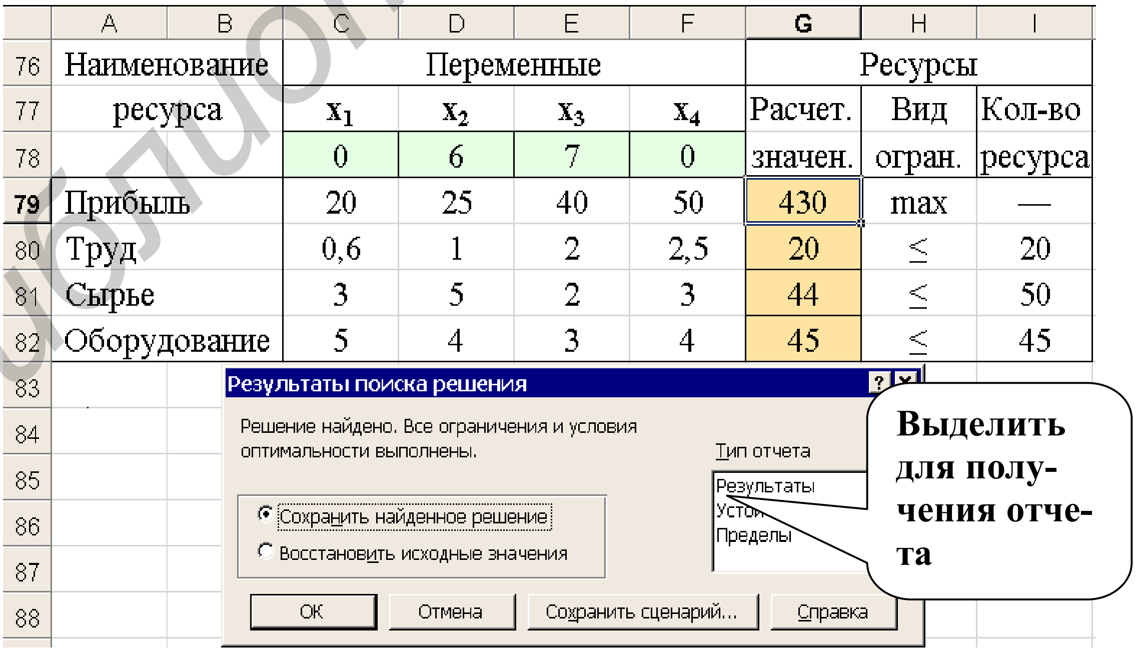


Рис. 3.7. Ввод параметров поиска решения

Нажмем кнопку ОК и вернемся в окно команды **Поиск решения.** Затем нажмем кнопку **Выполнить,** и, если все сделано правильно, то в таблице данных получим результаты решения задачи (рис. 3.8.), где можно задать тип отчета.



	A–B	C	D	E	F	G	H	I
76	Наименование	Переменные				Ресурсы		
77	ресурса	x_1	x_2	x_3	x_4	Расчет.	Вид	Кол-во
78		0	6	7	0	значен.	огран.	ресурса
79	Прибыль	20	25	40	50	430	max	—
80	Труд	0,6	1	2	2,5	20	≤	20
81	Сырье	3	5	2	3	44	≤	50
82	Оборудование	5	4	3	4	45	≤	45

Рис. 3.8. Результаты решения задачи и выбор типа отчета

Оптимальный план задачи **(x_1*= 0, x_2*= 6, x_3*= 7, x_4*= 0)**. Максимальная прибыль равна 430 ед. Ресурсы использованы следующим образом: труд полностью – 20 ед., сырье не полностью – 44 ед., оборудование полностью – 45 ед.

Анализ устойчивости решения

Рассмотрим отчет по устойчивости (табл. 3.2). Этот отчет содержит сведения о чувствительности решения к малым изменениям в формуле для целевой функции и в формулах ограничений. Поясним смысл столбцов табл. 3.2.

Таблица 3.2

Изменяемые ячейки						
Ячейка	Имя	Результ. значение	Нормир. Стоим.	Целевой Коэфф.	Допустимое	
					увелич.	уменьш.
\$C\$78	X_1	0	-0,2	20	0,20	1E+30
\$D\$78	X_2	6	0	25	28,33	0,12
\$E\$78	X_3	7	0	40	0,38	0,42
\$F\$78	X_4	0	-0,5	50	0,50	1E+30
Ограничения						
Ячейка	Имя	Результ. значение	Теневая цена	Огранич. пр. часть	Допустимое	
					увелич.	уменьш.
\$G\$80	Труд	20	17	20	10	4,29
\$G\$81	Сырье	45	0	50	1E+30	6
\$G\$82	Оборуд.	45	2	45	3,75	15

Нормированная стоимость показывает изменение целевой функции при увеличении соответствующей переменной на единицу. Например, если ввести $x_4 = 1$, то x_2 и x_3 станут меньше, а величина целевой функции изменится на -0,5.

Допустимое увеличение и уменьшение определяют интервал изменений коэффициентов целевой функции, внутри которого сохраняются значения переменных оптимального плана.

В разделе отчета **Ограничения** теневые цены – это двойственные оценки ресурсов, а **Допустимое увеличение и уменьшение** показывает допустимые диапазоны изменения правых частей ограничений, в пределах которых в оптимальный план входят те же переменные, хотя возможно и с другими значениями.

Любое увеличение ресурса сырья, поскольку этот ресурс недефицитный (величина 1E+30 выполняет роль бесконечности), не влияет на оптимальный план, однако уменьшение этого ресурса более чем на 6 единиц приведет к изменению структуры решения. При увеличении ресурса труда в оптимальном плане будет возрастать переменная X_3 и убывать X_2, но если прирост превысит 10 ед., то останется только переменная X_3. А при уменьшении ресурса труда более чем на 4,29 в оптимальный план войдет переменная X_1.

Такой отчет не создается для целочисленных моделей. В случае нелинейных моделей, которые будут рассмотрены в дальнейшем, отчет содержит данные для градиентов и множителей Лагранжа.

Изменение условий задачи

Пусть необходимо учесть ограничения на производственные мощности при производстве каждого вида продукции, иначе говоря, требуется предусмотреть возможность задания максимального значения для каждой переменной модели.

Чтобы удобно разместить в таблице величины задаваемых границ, вставим две строки перед строкой со значениями функционала. Для этого выделим ее (щелчком **левой клавиши мыши** по номеру строки) и дважды используем раздел меню **Вставка** пункта **Строки**. Назовем эти строки «Минимум» и «Максимум». В задаче введены только ограничения «Максимум».

Для простоты введем ограничения сразу по всем переменным, принимая в качестве верхней границы некоторое значение, например 6 единиц (рис. 3.9). Можно задать и разные значения ограничений для каждой переменной. В этой задаче диапазону переменных надо дать новое имя **Переменные1**, чтобы сохранить решение предыдущей задачи.

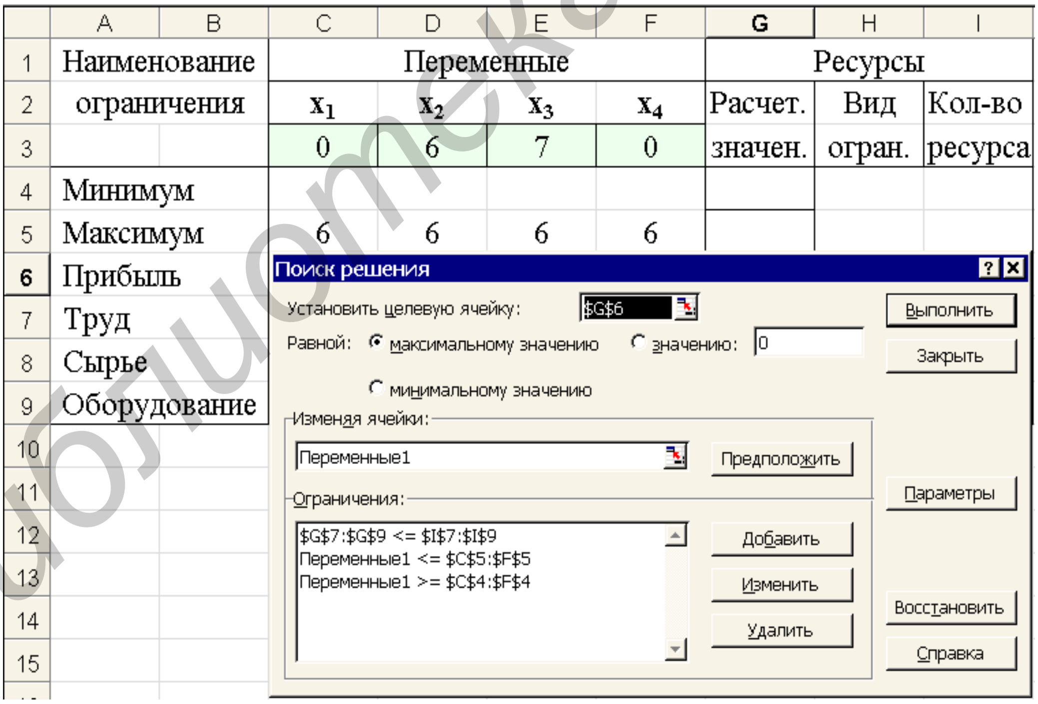


Рис. 3.9. Введение новых ограничений

Из рис. 3.9 видно, что новые ограничения заданы в виде диапазонов. Результаты оптимизации показывают уменьшение прибыли, что естественно, так как любые дополнительные ограничения могут только уменьшать область допустимых решений (рис. 3.10). Кроме того, в оптимальный план вошел новый продукт X_4=0,833.

Наименование ограничения	Переменные				Ресурсы		
	x_1	x_2	x_3	x_4	Расчет. значен.	Вид огран.	Кол-во ресурса
	0	5,9167	6	0,8333			
Минимум							
Максимум	6	6	6	6			
Прибыль	20	25	40	50	429,58	max	—
Труд	0,6	1	2	2,5	20	≤	20
Сырье	3	5	2	3	44,083	≤	50
Оборудование	5	4	3	4	45	≤	45

Рис. 3.10. Оптимальное решение задачи с дополнительными ограничениями

Предположим, что ограничений по реализации нет, а минимальные объемы производства заданы и равны 3 по каждой переменной (они могут быть и разными). В этом случае команда Поиск решения не может найти решения (рис. 3.11). В этом случае надо ослабить требования к минимальным объемам производства или привлечь дополнительные объемы ресурсов.

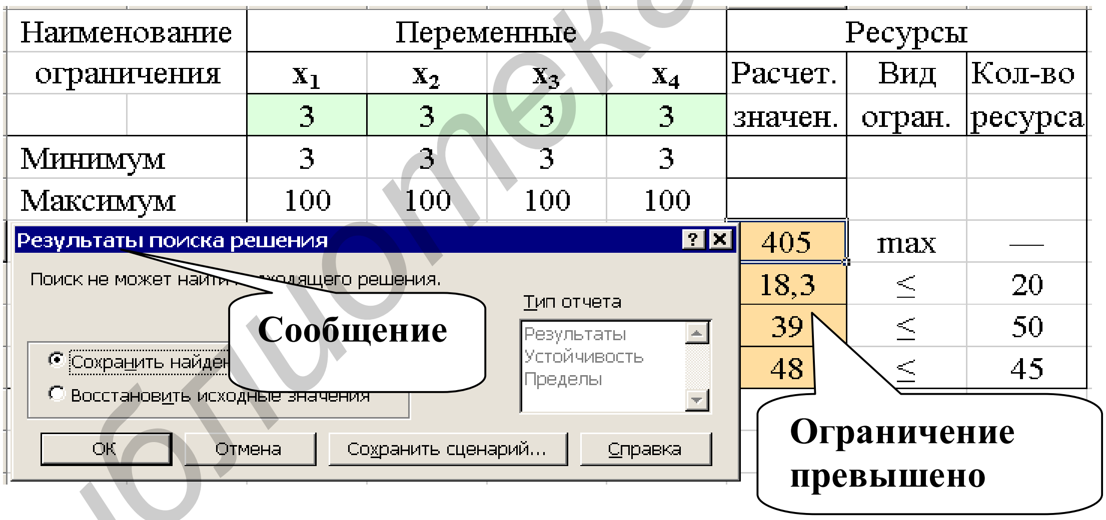


Рис. 3.11. Отсутствие решения

Для определения необходимых дополнительных объемов ресурсов задача решается введением дополнительных переменных, соответствующих ограничениям задачи, которым в целевой функции соответствуют отрицательные коэффициенты, т.е. в обычных условиях их использование будет убыточным. Такие переменные называются ***штрафными.***

Введем отрицательные цены новых переменных –10 ед. (рис. 3.12), что означает, что за их привлечение надо платить.

Диапазон переменных x_1, x_2 ..., x_7 должен получить новое имя, и формулы для расчетных значений прибыли и используемых ресурсов исправлены.

Наименование ограничения	Переменные				Штрафные переменные			Ресурсы		
					Труд	Сырье	Оборуд.			
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	Расчет. значен.	Вид огран.	Кол-во ресурса
	3	3	3,85	3	0	0	5,55			
Минимум	3	3	3	3						
Максимум	100	100	100	100						
Прибыль	20	25	40	50	-10	-10	-10	383,5	max	—
Труд	0,6	1	2	2,5	-1			20	≤	20
Сырье	3	5	2	3		-1		40,7	≤	50
Оборудование	5	4	3	4			-1	45	≤	45

Рис. 3.12. Введение штрафных переменных

Результаты расчета показывают, что надо привлечь дополнительное оборудование в количестве 5,55 ед. (см. рис. 3.12).

Таким образом, если 10 – цена за оплату дополнительной единицы оборудования, то найдено оптимальное решение задачи. Если же надо определить, сколько и каких ресурсов не хватает, то достаточно установить коэффициенты при штрафных переменных, например по -99.

Также можно решать и другие задачи. Например, учесть взаимосвязи между объемами реализуемой продукции, определять динамику изменения объемов производства при изменении располагаемых объемов ресурсов и т.д.

4. РЕШЕНИЕ ТРАНСПОРТНОЙ ЗАДАЧИ

Транспортная задача является специальным типом задач линейного программирования. Экономическая постановка этой задачи следующая: имеется *m* поставщиков и *n* потребителей некоторой продукции. Заданы тарифы (стоимость) перевозок единицы продукции от поставщиков к потребителям, известны объемы запасов у поставщиков и потребности каждого потребителя в продукции. Требуется составить план поставок продукции от поставщиков к потребителям так, чтобы суммарная стоимость перевозок была минимальной.

Математическая постановка этой задачи имеет вид

$$\begin{aligned}
&\min \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} X_{ij}, \\
&\sum_{i=1}^{m} X_{ij} = b_j,\ j = 1, 2, ..., n, \\
&\sum_{j=1}^{n} X_{ij} = a_i,\ i = 1, 2, ..., m, \\
&X_{ij} \geq 0.
\end{aligned} \qquad (4.1)$$

Здесь X_{ij} – объем; c_{ij} – тариф поставки продукции от i-го поставщика к j-му потребителю; b_j – потребности потребителей в продукции; a_i – запасы продукции у поставщиков.

Пример 4.1. Исходные данные транспортной задачи оформляются в виде табл.4.1, где заданы мощности поставщиков и потребности потребителей, а также транспортные затраты на перевозку единицы продукции от поставщиков к потребителям.

Таблица 4.1

Исходные данные транспортной задачи

Мощности поставщиков	Мощности потребителей			
	250	100	150	50
80	6	6	1	4
320	8	30	6	5
100	5	4	3	30
50	9	9	9	9

При решении транспортной задачи в системе Excel исходные данные записываются в две таблицы и формируется вычисляемая ячейка значения целевой функции. В изменяемую таблицу **Объемы перевозок** первоначально для контроля вводятся единицы. В таблицу исходных данных задачи (рис. 4.1) вводятся данные табл. 4.1.

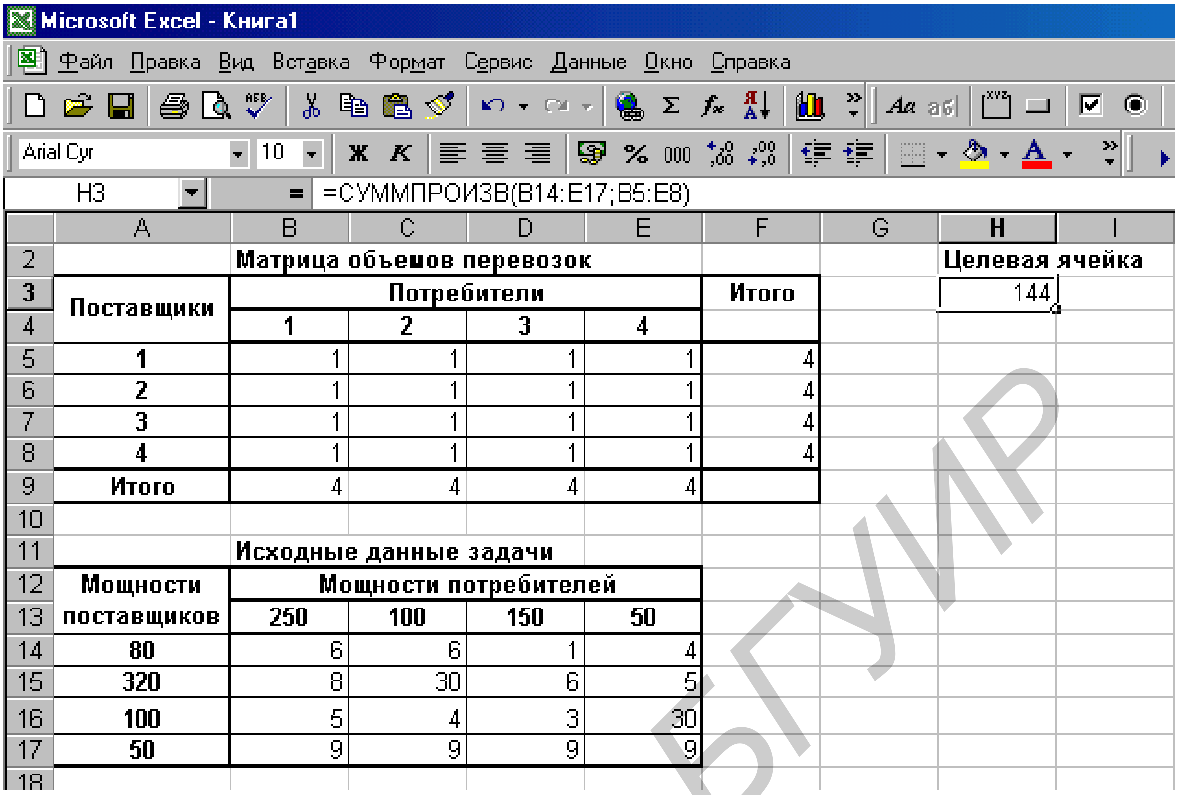


Рис. 4.1. Таблицы Excel для решения транспортной задачи

В целевую ячейку записана функция СУММПРОИЗ(B14:E17;B5:E8), которая вычисляет совокупные затраты на перевозку грузов от поставщиков к потребителям. В ячейках **Итого** помещены формулы сумм объемов перевозок по строкам и столбцам, затем вызывается функция **Поиск решения** и осуществляется ввод данных в окно функции (рис. 4.2).

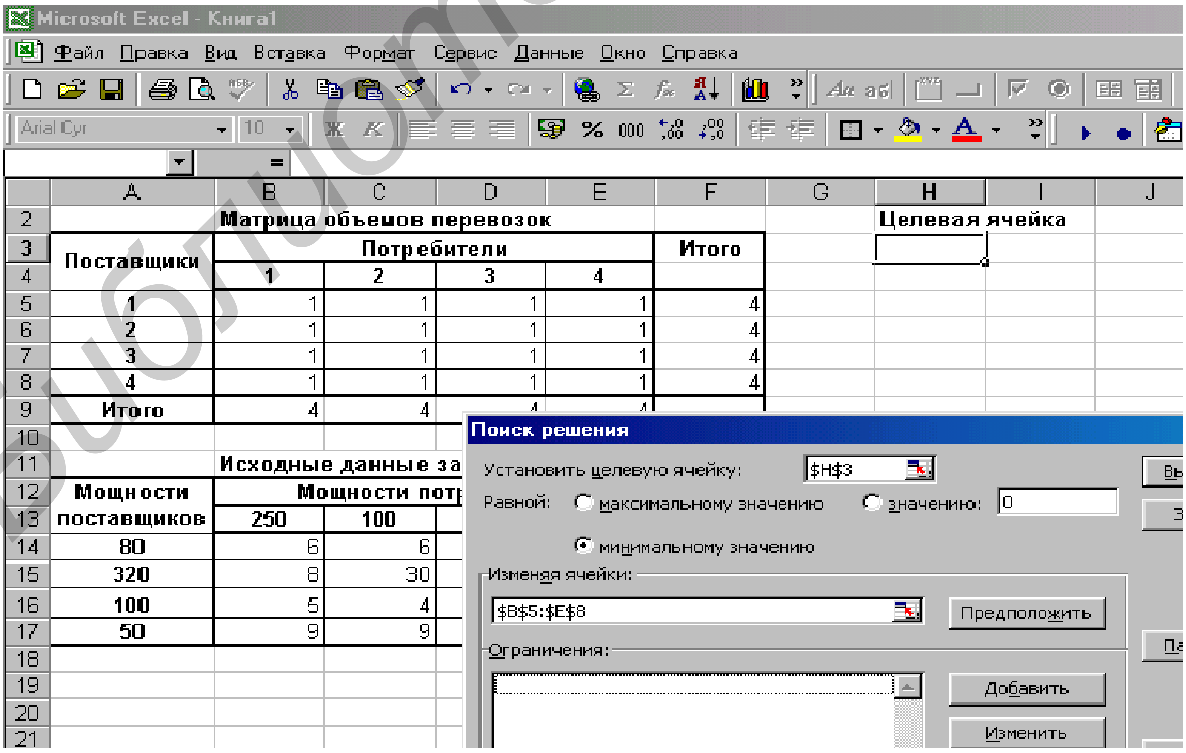


Рис. 4.2. Ввод данных в окно функции **Поиск решения** при решении транспортной задачи

Затем вводятся ограничения по мощностям поставщиков и потребителей (рис. 4.3).

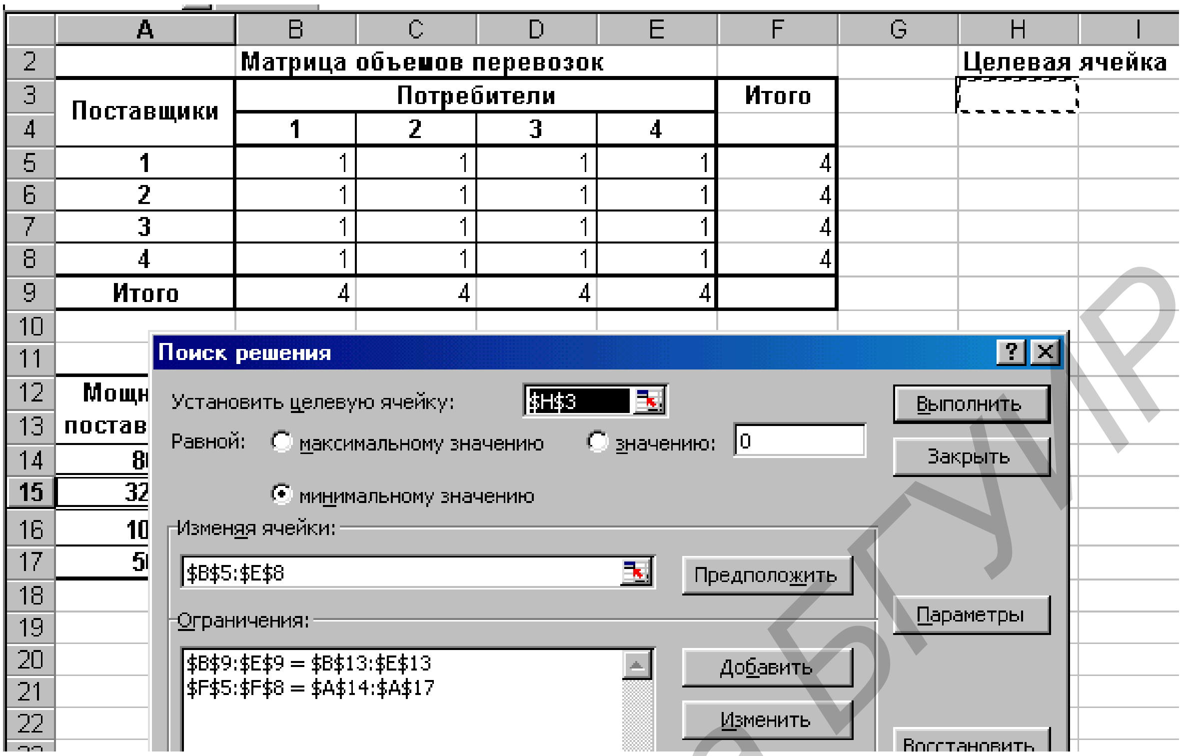


Рис. 4.3. Ввод ограничений транспортной задачи

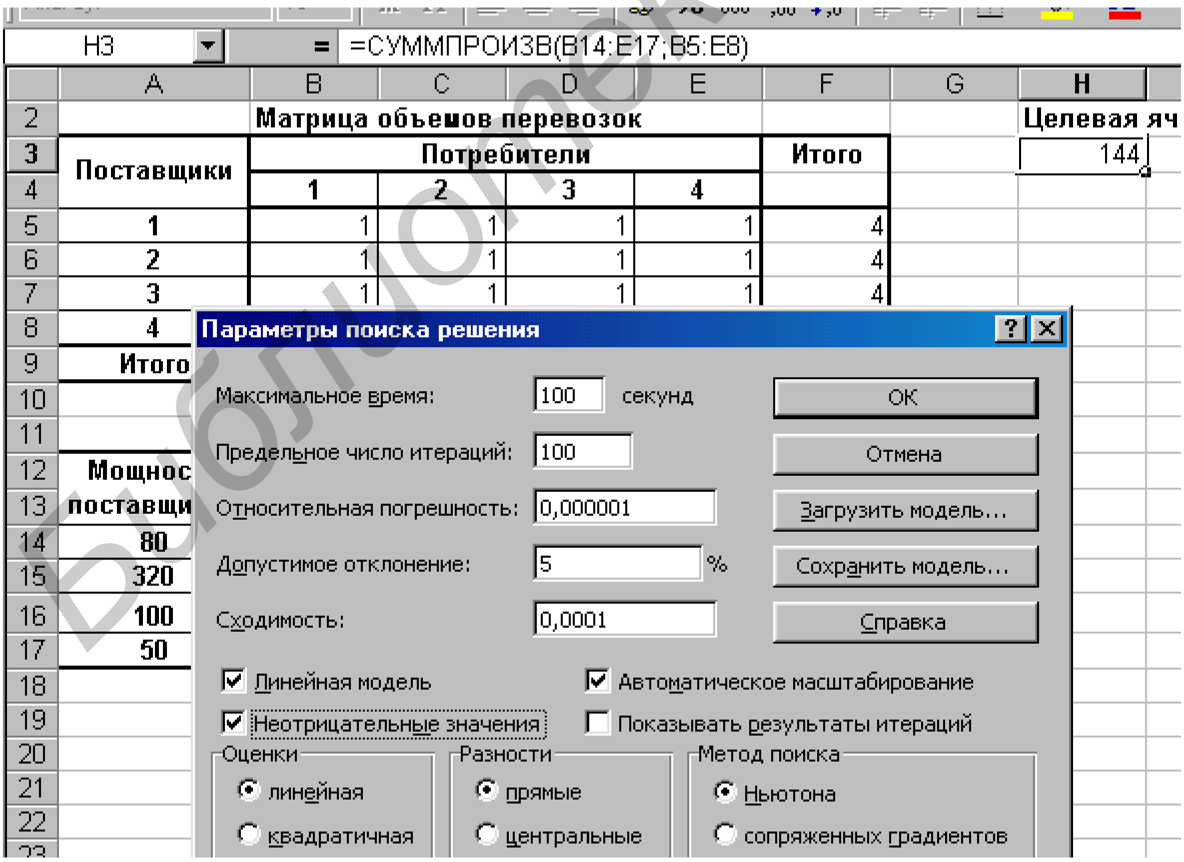


Рис. 4.4. Ввод параметров решения транспортной задачи

В окне **Параметры поиска решения** устанавливаются параметры решения задачи (рис. 4.4). После этого выполняется возврат в окно **Поиск решения**, где нажимается кнопка **Выполнить** (рис. 4.5).

Анализ содержания таблицы позволяет сделать вывод, что минимальные затраты на перевозку всех грузов равны 3200 ед. Объемы перевозок отражены в таблице **Матрица объемов перевозок** на том же рисунке. Таким образом, решение найдено.

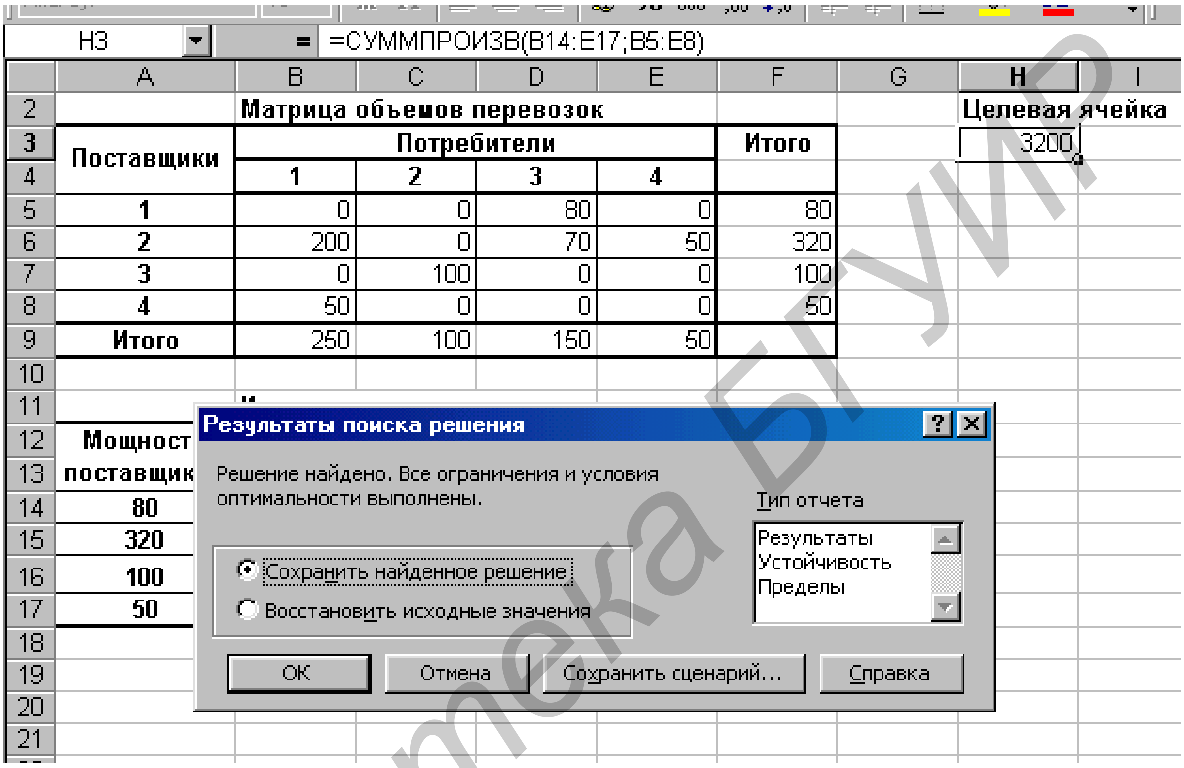


Рис. 4.5. Решение транспортной задачи

5. КОРРЕЛЯЦИОННЫЙ АНАЛИЗ

Для решения сложных статистических задач в Excel применяется команда «Анализ данных», которая также находится в меню «Сервис». Если ее здесь нет, то в меню «Сервис» надо выбрать раздел «Надстройки» и в списке надстроек установить флажок для элемента «Анализ данных». Если этот элемент отсутствует, то необходима полная инсталляция пакета Excel.

Корреляционный анализ используется для определения тесноты связи между исследуемыми показателями. Такая задача возникает, когда необходимо оценить степень влияния некоторых факторов на исследуемый показатель.

Постановка задачи состоит в следующем. Пусть имеется некоторый показатель Y. На основе содержательного экономического анализа производится отбор факторов X, которые влияют на исследуемый показатель. Необходимо на основе наблюдаемых значений (временных рядов) показателей Y и X определить уровень (величину) влияния каждого фактора X на показатель Y.

Для оценки влияния факторов используются коэффициенты корреляции между показателями Y и X. Для получения надежных оценок должно выполняться следующее условие: $m \le n/3$, где m – количество факторов, n – количество наблюдений, т. е. длина временного ряда [1].

Значения наблюдаемых переменных Y и X записываются в табл. 5.1.

Таблица 5.1

Исходные данные для корреляционного анализа

№ п/п	Y	X_1	X_2	...	X_m
1	Y_1	X_{11}	X_{12}		X_{1m}
…	...	...	...	...	...
n	Y_m	Y_{1n}	X_{2n}	...	X_{nm}

Коэффициенты корреляции между показателями определяются по формулам

$$r_{YX} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \overline{Y})(X_i - \overline{X})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \overline{Y})^2 \cdot \sum (X_i - \overline{X})^2}}, \tag{5.1}$$

$$\overline{Y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i, \qquad \overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i.$$

Коэффициенты корреляции заносятся в табл. 5.2.

Таблица 5.2

Матрица коэффициентов корреляции между показателями *Y* и *X*

№ п/п	Y	X_1	X_2	…	X_m
Y	1	$R_{y\,x1}$	$R_{y\,x2}$	…	$R_{y\,xm}$
X_1	$R_{x1\,y}$	1	$R_{x1\,x2}$	…	
X_2	$R_{x2\,y}$	$R_{x2\,x1}$	1	…	$R_{x2\,xm}$
…	…	…	…	…	…
X_n	$R_{xn\,y}$	$R_{xn\,x1}$	$R_{xn\,x2}$	…	1

Значения коэффициентов корреляции лежат в интервале [-1,1]. Положительное значение коэффициента свидетельствует о положительной связи между показателями, т.е. при увеличении одного из показателей второй показатель также статистически возрастает. Отрицательное значение коэффициента свидетельствует об отрицательной связи между показателями, т.е. при увеличении одного показателя второй статистически уменьшается. Чем ближе абсолютное значение коэффициента к 1, тем теснее связь между показателями.

Связь считается достаточно сильной, если коэффициент корреляции по абсолютной величине больше 0,7, и слабой, если меньше 0,4. Если значение коэффициента равно нулю, то связь между показателями отсутствует. Этот коэффициент дает объективную статистическую оценку тесноты связи между показателями.

Значимость коэффициента корреляции определяется с помощью t-критерия Стьюдента:

$$t_{набл}=\sqrt{\frac{r^2}{1-r^2}(n-2)}. \qquad (5.2)$$

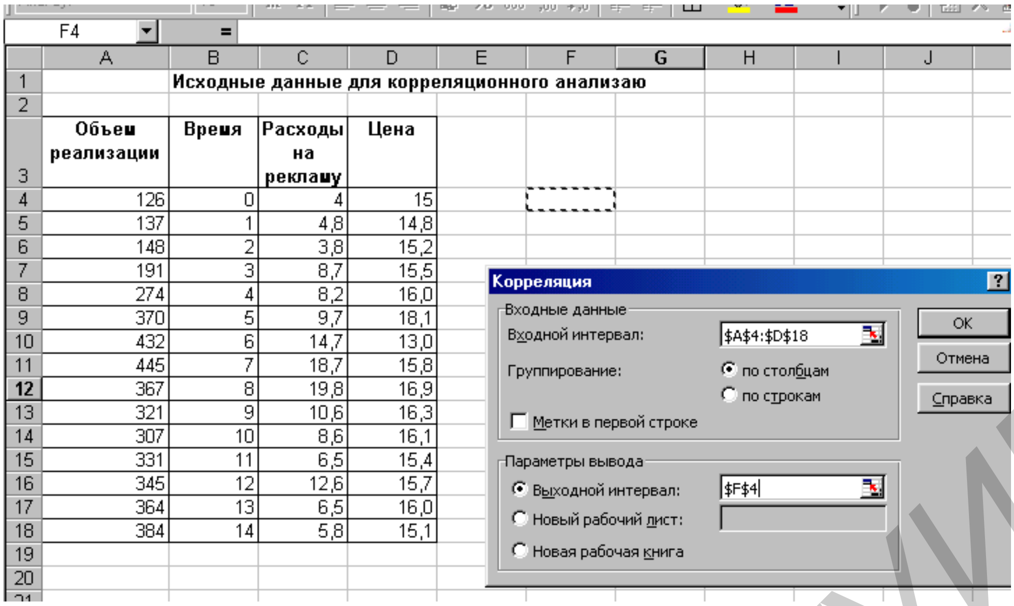
Вычисленное по этой формуле значение сравнивается с критическим табличным значением t-критерия, которое берется с учетом заданного уровня значимости $\alpha = 0{,}05$ и числа степеней свободы (n–2). Если $t_{набл}>t_{кр}$, то значение коэффициента корреляции считается значимым.

В факторную модель показателя *Y* относительно факторов *X* включаются только те факторы, связь которых с переменной *Y* является сильной. Кроме того, в модель включают факторы *X*, между которыми нет мультиколлинеарности, т.е. у которых R_{xx}<0,8.

С помощью системы Excel решение этой задачи показано на следующем примере.

Пример 5.1. Определить степень влияния на объем реализации продукции расходов на рекламу, цены и времени.

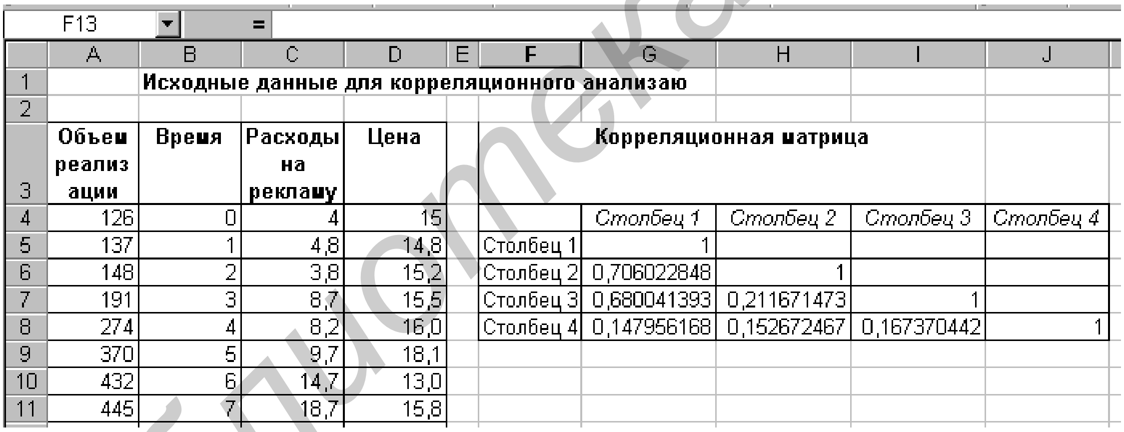
В таблицу Excel вводятся исходные данные. Для решения этой задачи с помощью системы Excel применяется команда **Анализ данных…**, которая находится в меню **Сервис**. В команде выбирается функция **Корреляция** (рис.5.1).



	A	B	C	D
1	Исходные данные для корреляционного анализаю			
2				
3	Объем реализации	Время	Расходы на рекламу	Цена
4	126	0	4	15
5	137	1	4,8	14,8
6	148	2	3,8	15,2
7	191	3	8,7	15,5
8	274	4	8,2	16,0
9	370	5	9,7	18,1
10	432	6	14,7	13,0
11	445	7	18,7	15,8
12	367	8	19,8	16,9
13	321	9	10,6	16,3
14	307	10	8,6	16,1
15	331	11	6,5	15,4
16	345	12	12,6	15,7
17	364	13	6,5	16,0
18	384	14	5,8	15,1

Рис. 5.1. Использование команды **Анализ данных** для построения корреляционной матрицы

После нажатия кнопки **ОК** определяется корреляционная матрица рассматриваемых показателей (рис.5.2).



	A	B	C	D
1	Исходные данные для корреляционного анализаю			
2				
3	Объем реализ ации	Время	Расходы на рекламу	Цена
4	126	0	4	15
5	137	1	4,8	14,8
6	148	2	3,8	15,2
7	191	3	8,7	15,5
8	274	4	8,2	16,0
9	370	5	9,7	18,1
10	432	6	14,7	13,0
11	445	7	18,7	15,8

Корреляционная матрица

	Столбец 1	Столбец 2	Столбец 3	Столбец 4
Столбец 1	1			
Столбец 2	0,706022848	1		
Столбец 3	0,680041393	0,211671473	1	
Столбец 4	0,147956168	0,152672467	0,167370442	1

Рис. 5.2. Корреляционная матрица для данных примера 5.1

Из корреляционной матрицы следует, что на объем реализации наибольшее влияние оказывают время (коэффициент корреляции равен 0,706) и расходы на рекламу (коэффициент корреляции равен 0,68). Цена в рассматриваемом интервале изменения практически не влияет на объем реализации (коэффициент корреляции равен 0,148). Из корреляционной матрицы также следует, что между факторами отсутствует мультиколлинеарность.

В данном примере, таким образом, необходимо рассматривать влияние на объемы реализации только времени и расходов на рекламу.

6. РЕГРЕССИОННЫЙ АНАЛИЗ

Основная задача, которая решается с помощью регрессионного анализа – построение статистических моделей экономических процессов на основе наблюдаемых значений экономических показателей. Такие модели представляют собой математические соотношения между показателями объекта.

Задача построения простой регрессионной модели ставится следующим образом. Есть два экономических показателя X и Y, характеризующих экономический объект. Показатель Y называется объясняемым (выходным или эндогенным), показатель X – объясняющим (входным, фактором или экзогенным).

Пример 6.1. Пусть Y – рентабельность продукции, X – уровень инфляции (или курс рубля) за месяц (квартал, год).

Имеется ряд наблюдаемых значений показателей (Y, X), полученных либо:

1) в разные периоды времени для одного объекта;

2) в один период времени для разных однотипных объектов.

Данные сведены в таблицу:

Таблица 6.1

№ п/п	1	2	3	….	n
Показатель X	X_1	X_2	X_3	...	X_n
Показатель Y	Y_1	Y_2	Y_3	...	Y_n

В первом случае значения (X_i, Y_i), i =1, 2, …, n называются временными рядами, n – количество наблюдений, во втором случае – пространствен-ными наблюдениями.

По значениям табл. 6.1 строится график, называемый корреляционным полем (рис. 6.1):

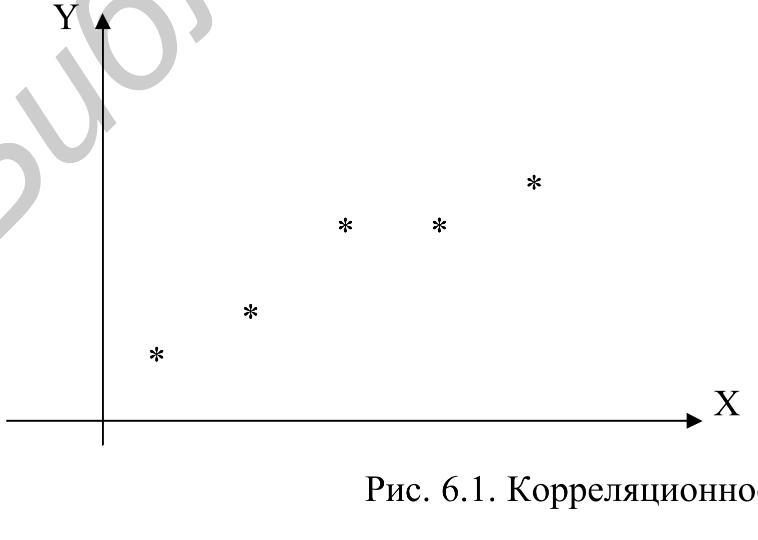


Рис. 6.1. Корреляционное поле

Если между показателями X и Y нет функциональной зависимости, то предполагается, что связь между X и Y выражается стохастической моделью вида

$$Y = f(X) + U_t, \qquad \ldots\ldots \tag{6.1}$$

где $f(X)$ – некоторая функция, выражающая зависимость переменной Y от фактора X,

U_t – случайная функция, характеризующая влияние неучтенных факторов,

t – время наблюдения.

Обычно считают, что U_t – нормально распределенная случайная величина с нулевым математическим ожиданием $M(U_t)=0$, постоянной дисперсией $D(U_t)$ = const и ковариацией $cov(U_t,U_t+s) = 0$, $s>0$. В этом случае уравнение

$$\hat{Y} = f(X) \tag{6.2}$$

называется уравнением *простой регрессии,* а функция $f(X)$ – *функцией регрессии.*

Если $f(X)$ – линейная функция, то уравнение (6.2) примет вид

$$\hat{Y} = a_0 + a_1 X \tag{6.3}$$

и называется уравнением *простой (однофакторной) линейной регрессии.*

Если $f(X)$ – нелинейная функция, то уравнение (6.2) называется уравнением *нелинейной регрессии.*

При рассмотрении модели (6.3) коэффициенты a_0 и a_1 выбирают так, чтобы функция (6.3) наилучшим (в некотором смысле) образом приближала значения из табл. 6.1.

Общепринятым методом оценки коэффициентов модели (6.3) является метод наименьших квадратов (МНК), при котором коэффициенты a_0 и a_1 определяются из задачи:

$$\min_{a_0, a_1} \sum_{i=1}^{n} (Y_i - (a_0 + a_1 X))^2, \tag{6.4}$$

где Y_i, X_i – значения из табл. 6.1.

Величины

$$\begin{gathered} e_i = Y_i - \hat{Y}_i = Y_i - (a_0 + a_1 X_i), \\ i = 1, 2, \ldots, n \end{gathered} \tag{6.5}$$

называются *остатками регрессии,* они показывают, на какую величину регрессия $\hat{Y}_i$ отличается от реального значения Y_i.

Из (6.4) следует, что у линейной регрессии, определяемой по МНК, значение суммы квадратов остатков минимально.

Если ввести выборочные средние:

$$\overline{Y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i, \quad \overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i,$$

$$\overline{XY} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i Y_i, \quad \overline{X^2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2, \tag{6.6}$$

$$\text{cov}\ (X,Y) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})(Y_i - \overline{Y}),$$

$$\text{var}\ (X) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})^2,$$

то из (6.4) следует, что

$$a_0 = \overline{Y} - a_1 \overline{X},$$

$$a_1 = \frac{\overline{XY} - (\overline{X})(\overline{Y})}{\overline{X^2} - (\overline{X})^2}. \tag{6.7}$$

Можно показать, что

$$a_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})(Y_i - \overline{Y})}{\sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})^2} = \frac{\text{cov}(X,Y)}{\text{var}(X)}. \tag{6.8}$$

Из (6.7) видно, что решение задачи МНК существует, если $\overline{X^2} \neq (\overline{X})^2$, в противном случае линейная регрессия не может быть построена.

Коэффициенты a_0 и a_1, определенные по формулам (6.7) или (6.8), называются коэффициентами простой линейной регрессии.

График функции (6.3) наносят на корреляционном поле (рис. 6.2).

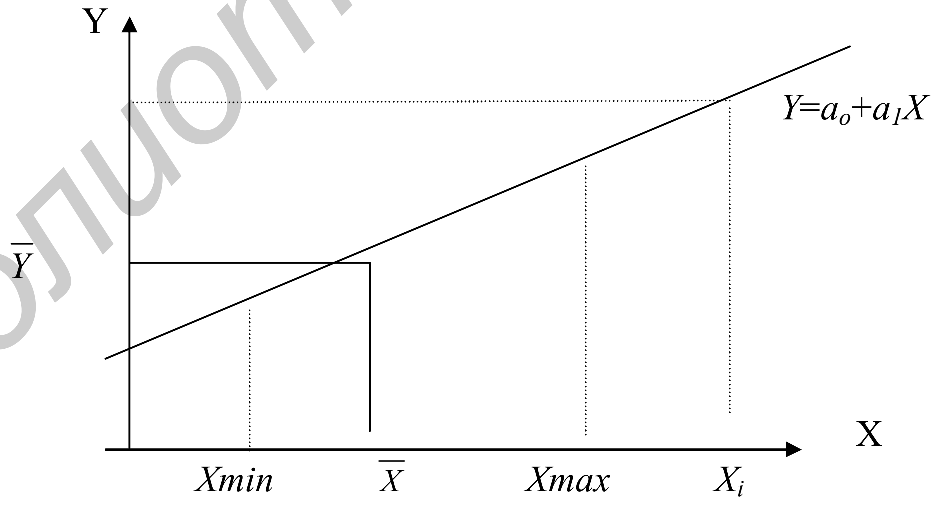


Рис. 6.2. График регрессии

Как видно из уравнений (6.7), средние значения показателей $\overline{X}$ и $\overline{Y}$ лежат на линии регрессии.

Одной из основных задач регрессионного анализа является получение *прогнозных* значений показателей X и Y. Если значения Xj, $j = n + 1$, $n + 2$, …, N являются прогнозными (ожидаемыми) значениями фактора X, то определяемые из уравнений регрессии (6.3) значения $\hat{Y}_j$ будут соответствующими прогнозными значениями показателя Y.

Точность и надежность модели простой линейной регрессии

Для оценки точности и надежности модели (6.3) используется несколько критериев (называемых статистиками или статистическими характеристиками).

1. ***Коэффициент корреляции r_{xy}*** – используется для оценки тесноты связи между показателями X и Y:

$$r_{xy} = \frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sigma_x \sigma_y},$$

$$\operatorname{cov}(X,Y) = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})(Y_i - \overline{Y})}{n}, \tag{6.9}$$

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2}{n}}, \sigma_y = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \overline{Y})^2}{n}}.$$

Известно, что $|r_{xy}| \le 1$. При этом, чем ближе $|r_{xy}|$ к 1, тем сильнее статистическая связь между X и Y; если $r_{xy} = 0$, то связь между X и Y отсутствует. Если $r_{xy} > 0$, то имеется положительная корреляция, т.е. при возрастании X статистически возрастает Y; если $r_{xy} < 0$, то имеется отрицательная корреляция – при возрастании X показатель Y статистически убывает.

Считается, что если $|r_{xy}| > 0,7$, то связь между показателями X и Y высокая и можно строить простую регрессию; если $|r_{xy}| < 0,5$, то связь между показателями слабая и вместо X необходимо выбрать другой фактор для построения простой регрессии показателя Y или увеличить количество наблюдений.

2. Значимость (надежность) вычисленного значения r_{xy} определяется с помощью ***t-критерия Стьюдента.*** По наблюдаемым значениям вычисляется t- статистика:

$$t_{набл} = \sqrt{\frac{r_{xy}^2}{1-r_{xy}^2}(n-2)}. \tag{6.10}$$

Вычисленное значение $t_{набл}$ сравнивается с критическим (табличным) значением t-критерия Стьюдента $t_{кр} = t_{табл}\,(a,\, n\text{-}2)$ при уровне значимости a

= 0,05 (или 0,01) (тогда уровни доверительной вероятности p = 1–a равны 0,95 или 0,99) и числе степеней свободы (n-2), где n – количество наблюдений.

Если $t_{набл} > t_{кр}$, то полученное значение r_{xy} считается значимым и принимается гипотеза о наличии статистической связи между показателями, иначе принимается гипотеза об отсутствии связи между показателями и надо выбрать другой показатель X. Обычно при a = 0,3 принимают $t_{кр}$ =1,05 (70%-ная доверительная вероятность); при a = 0,05 $t_{кр}$ = = 1,96 (95%-ная доверительная вероятность); при a = 0,01 $t_{кр}$ =2,65 (99%-ная доверительная вероятность).

3. ***Коэффициент детерминации R^2*** (R-квадрат) служит для оценки степени соответствия модели фактическим данным:

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^{n} e_i^2}{\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \overline{Y})^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(\hat{Y}_i - \overline{Y})^2}{\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \overline{Y})^2}. \qquad (6.11)$$

Величина $\sum_{i=1}^{n}(\hat{Y}_i - \overline{Y})^2$ называется вариацией регрессии, а $\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \overline{Y})^2$ – вариацией наблюдений относительно среднего. Здесь имеет место неравенство 0< R^2<1. Коэффициент детерминации R^2 показывает, какую часть фактической вариации переменной Y составляет вариация регрессии. Если R^2 = 0,85, то модель объясняет наблюдаемые значения переменных на 85%.

Чем ближе R^2 к 1, тем точнее модель линейной регрессии; если R^2>0,8, то модель линейной регрессии считается точной; если R^2<0,5, то модель является неудовлетворительной, надо строить нелинейную регрессию или выбирать другой фактор X.

4. Вычислить ***стандартную ошибку регрессии:***

$$SE = \sqrt{\frac{\sum_{t=1}^{n}(Y_t - \hat{Y}_t)^2}{n-2}}. \qquad (6.12)$$

5. Проверка значимости простой линейной регрессии осуществляется по ***F-критерию Фишера***. По наблюдаемым значениям вычисляется F-статистика:

$$F_{набл} = \frac{R^2(n-2)}{(1-R^2)}. \qquad (6.13)$$

Если вычисленное значение $F_{набл}$ больше табличного $F_{таб}$ при заданном уровне значимости 0,05 (или уровне доверительной вероятности 0,95) и числе степеней свободы (n-2), то принимается гипотеза о наличии линейной регрессии между показателями X и Y, иначе эта гипотеза отвергается и необходимо строить нелинейную регрессию или выбирать другой фактор X.

6. При уровне значимости α определяются ***доверительные интервалы коэффициентов регрессии*** по формулам

$$(a_0 - SEa_0 \cdot t(\alpha/2, n-2),\ a_0 + SEa_0 \cdot t(\alpha/2, n-2)),$$

$$(a_1 - SEa_1 \cdot t(\alpha/2, n-2),\ a_1 + SEa_1 \cdot t(\alpha/2, n-2)). \qquad (6.14)$$

Стандартные ошибки коэффициентов определяются формулами

$$SEa_0 = \sqrt{\frac{\sum X_t^2 \sum (Y_t - \overline{Y})^2}{n(n-2)\sum (X_t - \overline{X})^2}},$$

$$\ldots \qquad (6.15)$$

$$SEa_1 = \sqrt{\frac{\sum (Y_t - \overline{Y})^2}{(n-2)\sum (X_t - \overline{X})^2}}.$$

7. ***Доверительный интервал*** для прогнозных значений X^*_t регрессии определяется по формуле

$$(\hat{Y}_t - V_t, \hat{Y}_t + V_t), \qquad (6.16)$$

где

$$V_t = SE \cdot t(\alpha, n-2) \sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{(X_t^* - \overline{X})^2}{\sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})^2}}, \qquad (6.17)$$

Здесь $t(a, n-2)$ – табличное значение критерия Стьюдента при заданном уровне значимости б и числе степеней свободы (n–2). Формулы (6.16) и (6.17) применяются для прогнозных значений X и Y.

Ложная регрессия

Если каждая из наблюдаемых величин имеет тенденцию к росту или снижению с течением времени, то между ними возникает ложная регрессия (корреляция), которая может превысить причинную связь между этими величинами. Такая проблема возникает в случае построения модели регрессии цен и показателей, определяемых с нарастающим итогом. Чтобы избежать ложной регрессии, обычно переходят к анализу индексов величин, например: $(P_1 - P_0)/P_0$ или P_1/P_0, где P_0 базовое значение показателя P.

Нелинейная регрессия

В случае, если корреляционное поле показывает явно нелинейную связь между показателями или когда (согласно F-критерию) отвергнута гипотеза о линейной связи между X и Y, надо строить нелинейную регрессию.

Обычно рассматривают следующие уравнения нелинейной регрессии:

$Y = a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3 + \ldots + a_nX^n$ – полиномиальная регрессия,

$Y = a_0 + a_1 Ln\, X$ – логарифмическая регрессия,

$Y = aExp(bX)$ – экспоненциальная регрессия,

$Y = aX^b$ – степенная регрессия.

Полиномиальная регрессия выбирается, когда имеет место немонотонная зависимость между X и Y. Если на корреляционном поле есть n точек максимума и минимума, то выбирается полиномиальная регрессия (n+1)-го порядка.

Во многих случаях (кроме полиномиальной регрессии) нелинейная регрессия сводится к простой линейной с помощью замены переменных. Данная процедура состоит в следующем. Пусть, исходя из экономических соображений или из вида корреляционного поля, выбрана степенная регрессионная модель:

$$Y = aX^b . \tag{6.18}$$

Логарифмируя (22) – получим соотношение

$$Ln(Y) = Ln(a) + bLn(X). \tag{6.19}$$

На основе наблюдаемых данных строится таблица:

Таблица 6.2

№ n/n	1	2	3	….	N
$Ln\ (X)$	$Ln\ (X_1)$	$Ln\ (X_2)$	$Ln\ (X_3)$	…	$Ln\ (X_n)$
$Ln\ (Y)$	$Ln\ (Y_1)$	$Ln\ (Y_2)$	$Ln\ (Y_3)$	…	$Ln\ (Y_n)$

Делается замена переменных:

$$V = Ln(Y),\ Z = Ln(X).$$

По данным табл. 6.2 строится линейная регрессия:

$$V = a_0 + a_1Z = a_0 + a_1Ln(X). \tag{6.20}$$

Сравнивая (6.20) с (6.19), получаем $a_0 = Ln(a)$, $a_1 = b$. Откуда нелинейная регрессия (6.18) будет иметь вид

$$Y = Exp(a_0)X^{a1}. \tag{6.21}$$

Этот же метод используется при построении других видов нелинейной регрессии. Для полиномиальной регрессии есть формулы расчета коэффициентов.

Построение простой регрессии в системе Excel выполняется следующим образом:

1. Строится корреляционное поле.
2. Наблюдаемые значения показателей вводятся в таблицу Excel.
3. Вычисляется коэффициент корреляции между показателями. Если он по абсолютной величине меньше 0,5, то связь между показателями слабая и для построения модели надо взять другие показатели или увеличить период наблюдения.
4. В пункте меню **Сервис** выбирается функция **Анализ данных,** где выбирается пункт **Регрессия.**
5. Для построения лучшей модели строятся линейная и несколько нелинейных моделей регрессии и по максимальному коэффициенту детерминации R^2 выбирается лучшая.
6. Оцениваются значимость и надежность модели.
7. Вычисляются прогнозные значения показателей и их доверительные интервалы.

Пример 6.2. Наблюдения за 11 месяцев для объемов реализованной продукции и балансовой прибылью предприятия представлены в табл. 6.3. Необходимо построить модель линейной регрессии и определить ее значимость, коэффициент детерминации и другие статистики, дать прогноз балансовой прибыли при объемах реализации, равных 82; 86 и 92.

Таблица 6.3

Y	1,2	1,8	2,0	2,5	3,0	3,2	3,5	4,9	5,0	6,2	7,3
X	20	25	34	30	36	37	40	46	58	69	80

Рассмотрим решение этой задачи с помощью системы Excel. Найдем коэффициент корреляции между переменными *X* и *Y,* введем данные в таблицу Excel и вызовем пакет **Анализ данных**, где выберем режим **Корреляция** (рис. 6.3 и 6.4).

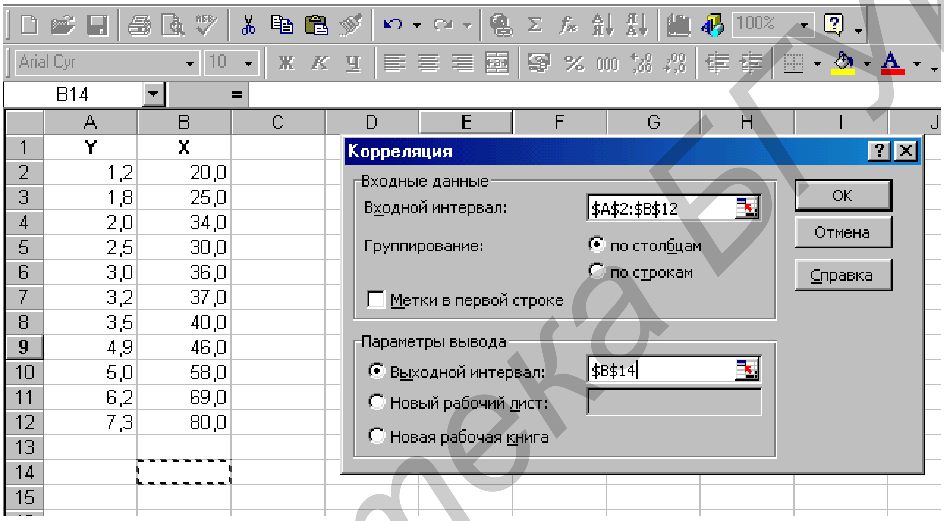


Рис. 6.3. Определение коэффициента корреляции между показателями

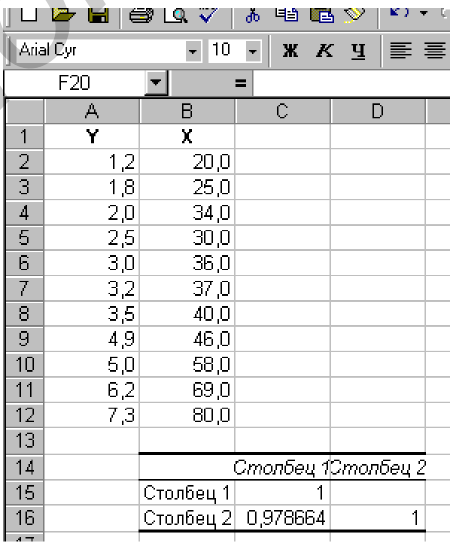


Рис.6.4. Значения коэффициента корреляции между показателями

Если коэффициент корреляции равен 0,978664, это говорит о высоком уровне положительной статистической связи между анализируемыми показателями. Далее в пакете **Анализ данных** выберем режим **Регрессия** (рис. 6.5).

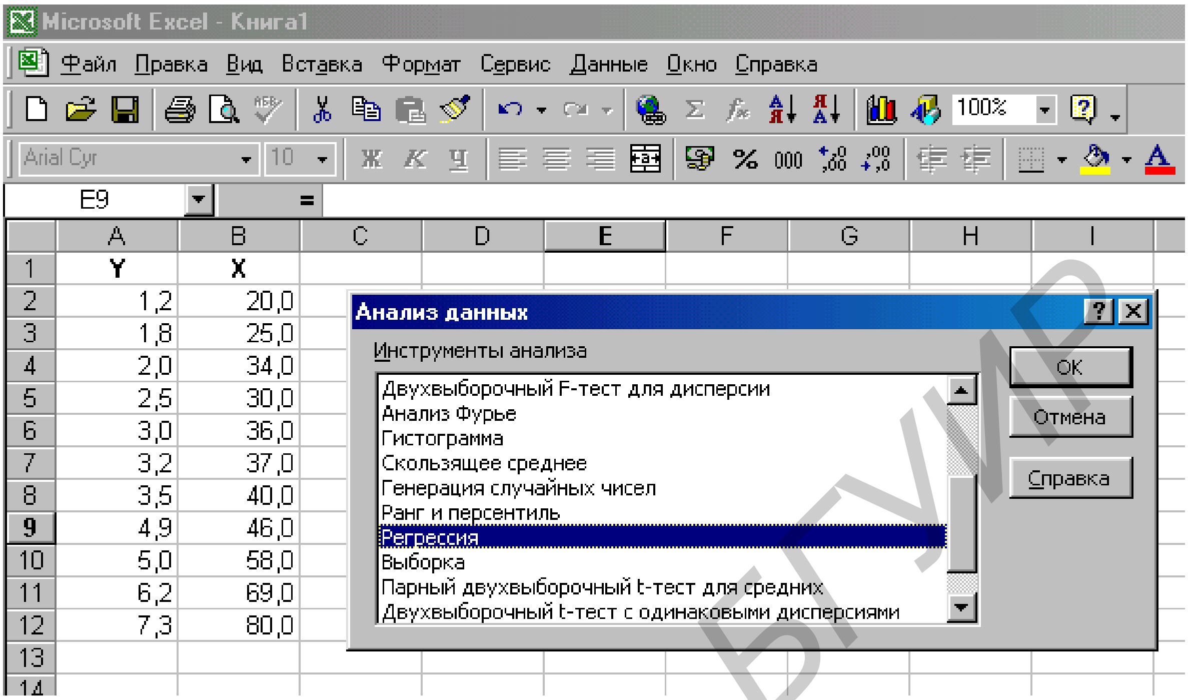


Рис. 6.5. Выбор режима **Регрессия**

Введем исходные данные в диалоговое окно режима **Регрессия** (рис. 6.6).

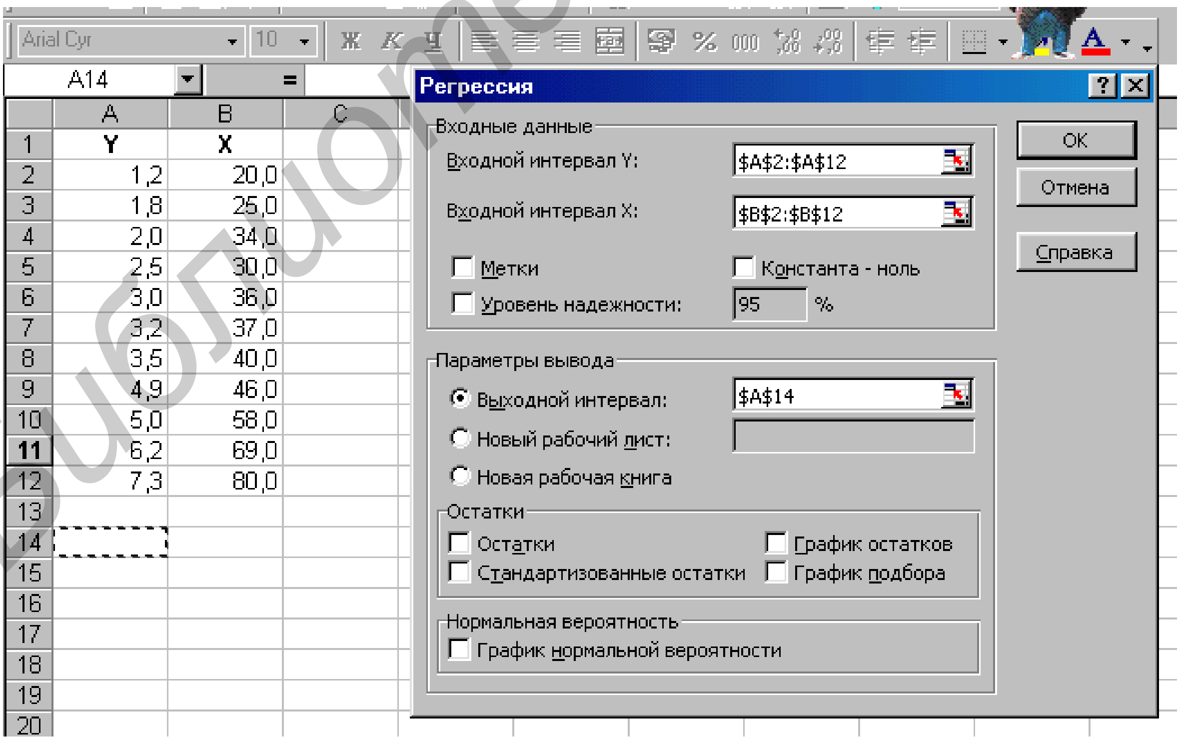


Рис. 6.6. Ввод данных в режиме **Регрессия**

После нажатия кнопки ОК получаем итоги расчетов (рис 6.7).

1	6,2	69,0					
2	7,3	80,0					
3							
4	ВЫВОД ИТОГОВ						
5							
6	*Регрессионная статистика*						
7	Множественный R	0,978664436					
8	R-квадрат	0,957784078					
9	Нормированный R-квадр	0,95309342					
0	Стандартная ошибка	0,418335015					
1	Наблюдения	11					
2							
3	Дисперсионный анализ						
4		*df*	*SS*	*MS*	*F*	*Значимость F*	
5	Регрессия	1	35,73405324	35,73405324	204,1897069	1,71816E-07	
6	Остаток	9	1,575037665	0,175004185			
7	Итого	10	37,30909091				
8							
9		*Коэффициенты*	*Стандартная ошибка*	*t-статистика*	*P-Значение*	*Нижние 95%*	*Вер*
0	Y-пересечение	-0,687586315	0,331358928	-2,075049917	0,067806978	-1,437172858	0,
1	Переменная X 1	0,101396736	0,007095893	14,28949639	1,71816E-07	0,085344699	0,
2							
3							

Рис. 6.7. Итоги расчетов по модели линейной регрессии

Таким образом, модель линейной регрессии имеет вид

$$Y = -0{,}688 + 0{,}101 \cdot X. \qquad (6.22)$$

В модели коэффициент детерминации является высоким (R^2 = 0,958), т.е. почти на 96 % модель объясняет зависимость между переменными. Модель линейной регрессии является значимой, так как расчетное значение F-статистики $F_{набл}$ = 204,1189, что больше табличного значения равного $F_{таб}$ = 7181*10^{-7}. Стандартная ошибка модели *SE* равна 0,41833, стандартные ошибки коэффициентов равны $SE(a_0)$ = 0,331 и $SE(a_1)$ = 0,007. Доверительные интервалы коэффициентов (с уровнем доверительной вероятности 0,95) равны (-1,437; 0,062) для a_0 и (0,085; 0,117) для a_1.

Прогнозные значения находятся путем ввода формулы (6.20) в таблицу Excel (рис. 6.8).

Arial Cyr 10

A14 = =-0,688+0,101*B14

	A	B	C	D
1	Y	X		
2	1,2	20,0		
3	1,8	25,0		
4	2,0	34,0		
5	2,5	30,0		
6	3,0	36,0		
7	3,2	37,0		
8	3,5	40,0		
9	4,9	46,0		
10	5,0	58,0		
11	6,2	69,0		
12	7,3	80,0		
13	Прогноз			
14	7,6	82,0		
15	8,0	86,0		
16	8,6	92,0		
17				

Рис.6.8. Расчет прогнозных значений балансовой прибыли с помощью регрессионной модели

Точно так же строится модель нелинейной регрессии путем ее сведения к линейной (6.18) – (6.20). Затем выбирается лучшая модель по максимуму коэффициента детерминации R^2 или, что то же самое, по минимуму остаточной дисперсии (стандартной ошибки).

Выделение тренда временных рядов

В экономике часто надо принимать решения на основе прогнозов развития той или иной ситуации. Такие прогнозы обычно осуществляются на основе знания динамики экономических показателей в предыдущие периоды времени. Такими показателями могут быть курсы валют, уровни цен, прибыль и рентабельность производства и т.д. Они обычно рассматриваются с периодичностью в месяц, квартал, год. Такие ряды показателей называются временными рядами. Временной ряд – это набор значений показателей, определенных через равные промежутки времени.

Элементы временного ряда обычно нумеруются моментом времени (или его номером): Y_1, Y_2, …, Y_n или Y_t , где t – месяц, квартал или год. Задача прогнозирования тогда состоит в том, чтобы получить оценки возможных значениях рассматриваемых показателей на заданном будущем промежутке времени: Y_t, $t = n+1,\ n+2,\ \dots\ ,\ n+k$. Промежуток времени от (n+1) до (n+k) называется периодом прогнозирования.

Модели временных рядов можно рассматривать как частный случай простой регрессии, когда фактор X является временем.

Статистические методы прогнозирования временных рядов основаны на представлении динамики показателя с помощью модели

$$Y(t) = F_0(t) + F_1(t) + F_2(t) + U(t), \tag{6.23}$$

где $F_0(t)$ – обычно монотонная функция (называемая трендом);

$F_1(t)$ – периодическая функция с периодом один год, называемая сезонной компонентой, в этом случае t – месяцы или кварталы;

$F_2(t)$ – периодическая функция с периодом несколько лет, называемая циклической компонентой;

$U(t)$ – случайная составляющая, обычно имеющая нормальное распределение с нулевым средним.

Тренд характеризует устойчивую динамику показателя в течение предыдущего периода времени. Сезонная составляющая характеризует внутригодичные колебания значений показателя, обычно связанные с сезонностью (зима, весна, лето, осень) экономической конъюнктуры. Циклическая компонента рассматривается только для временных рядов, охватывающих периоды более десяти лет, и характеризует долгосрочные колебания экономической конъюнктуры, связанные с обновлением основных средств, изменениями технологий и т.д. Эти колебания рассматриваются обычно в макроэкономических исследованиях.

При прогнозировании временных рядов случайную составляющую не рассматривают, ограничиваясь оценкой ее дисперсии, для получения доверительного интервала прогнозных значений рассматриваемого показателя.

Методы экстраполяции динамики временных рядов основаны на предположении, что закономерности изменения показателя в прошлом сохранятся и на период прогнозирования.

Анализ временных рядов с использованием Excel выполняется с помощью **Мастера диаграмм,** который позволяет построить различные функции тренда временного ряда. При анализе временного ряда строятся таблица и график значений показателя.

Пример 6.3. Построить график временного ряда ***Индекс цен продукции***, выделить его тренд и построить прогноз на два периода вперед.

Решение. Исходные данные заносятся в таблицу Excel, вызывается **Мастер диаграмм** и выбирается тип диаграммы ***График*** (рис. 6.9).

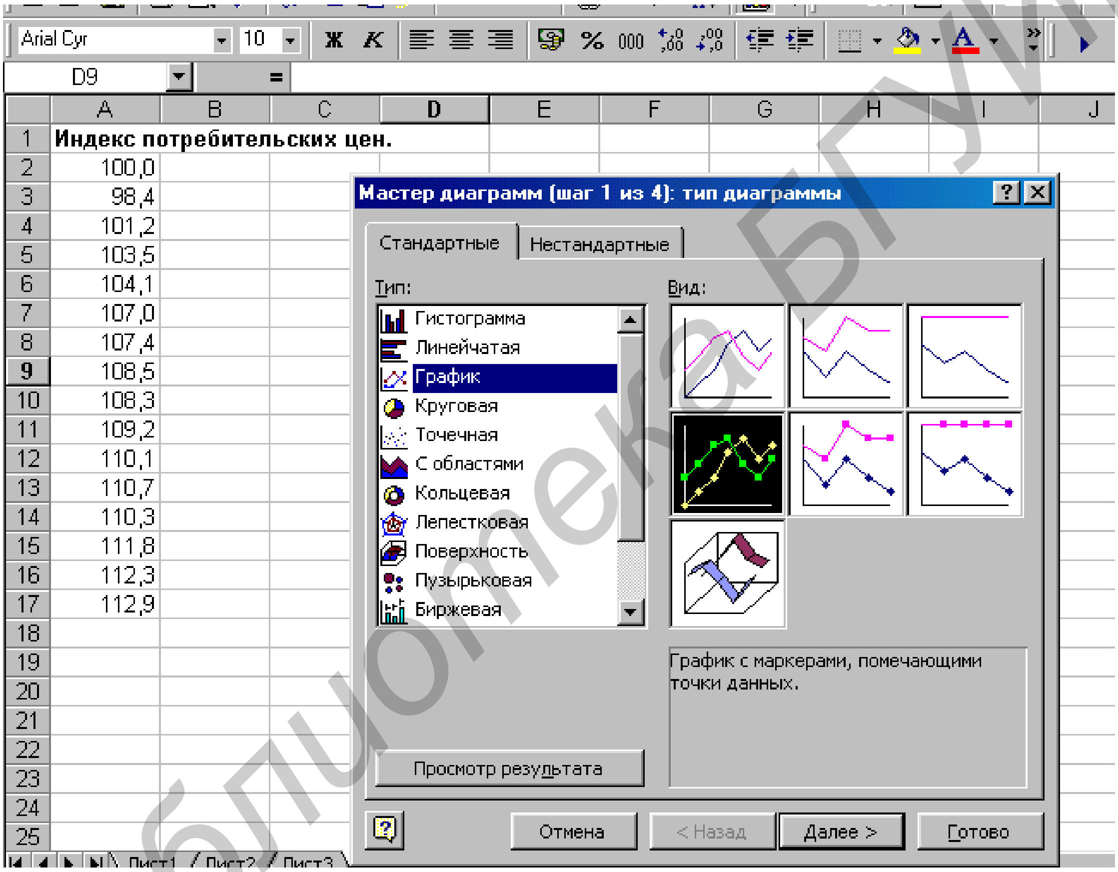


Рис. 6.9. Выбор типа диаграммы с помощью **Мастера диаграмм**

Нажатием кнопки **Далее>** строится график временного ряда (рис. 6.10).

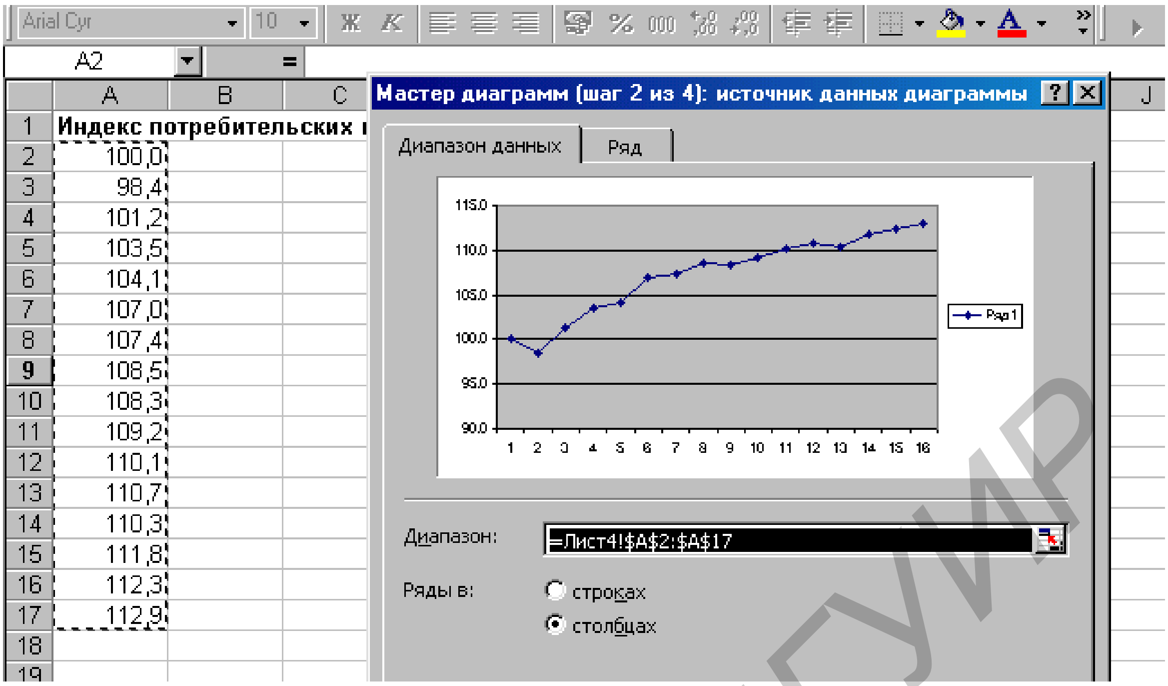


Рис. 6.10. Построение графика временного ряда
с помощью **Мастера диаграмм**

На вкладке **Ряд** устанавливаются параметры каждого временного ряда: добавляются или удаляются ряды, присваиваются имена, выделяются данные для построения рядов, определяются подписи (рис. 6.11).

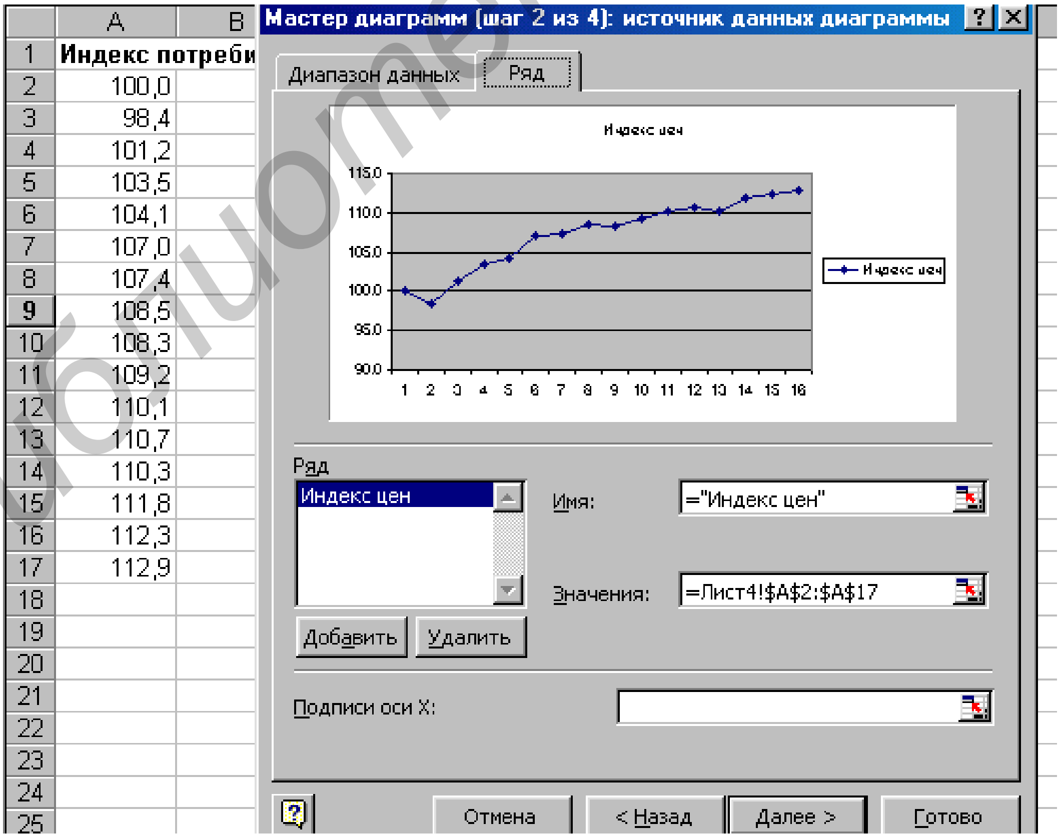


Рис. 6.11. Задание параметров графика временного ряда

Задав на вкладке **Ряд** название ряда «Индекс цен», нажмем кнопку **Далее>** (рис. 6.12).

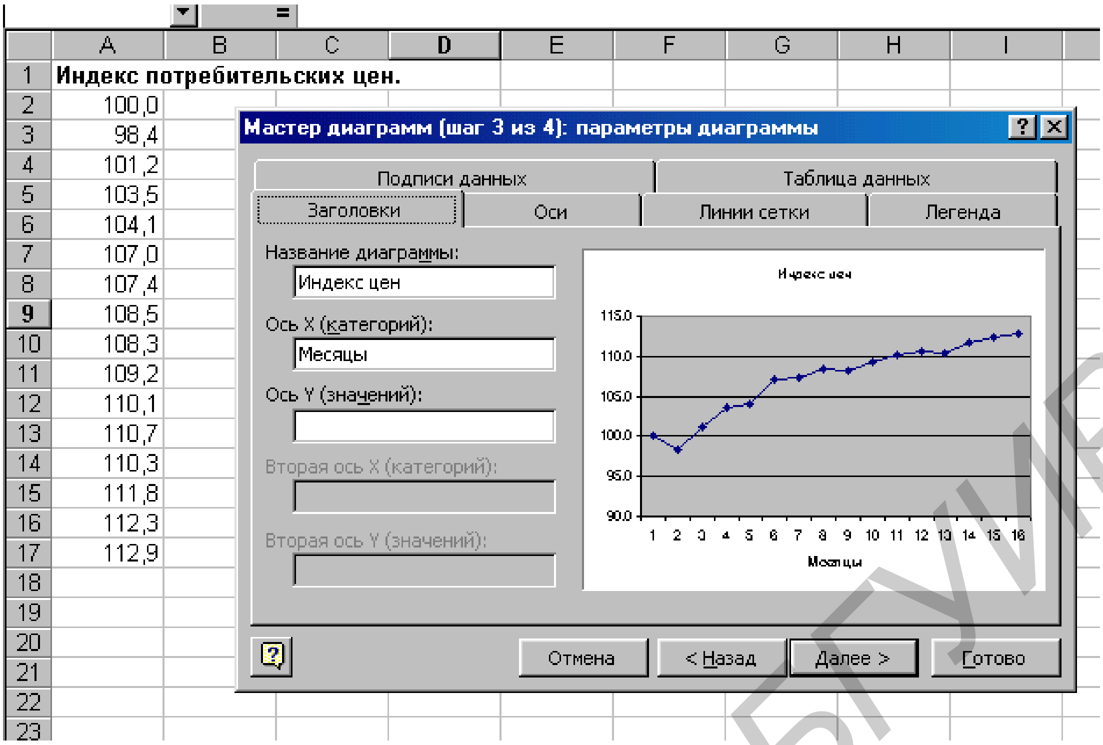


Рис. 6.12. Задание параметров диаграммы

Нажав **Готово,** получаем в таблице Excel график временного ряда (рис.6.13).

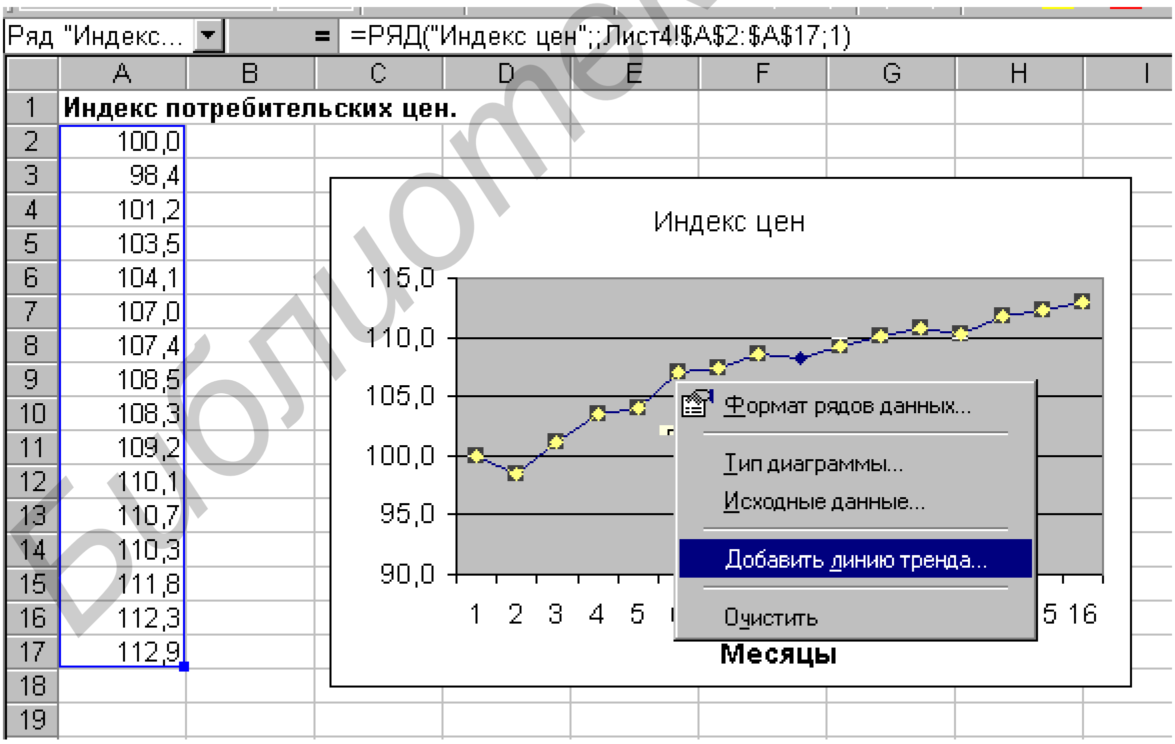


Рис. 6.13. Построение линии тренда временного ряда

Чтобы построить функцию и линию тренда, надо установить курсор на линии графика и щелкнуть правой кнопкой мыши, затем в появившемся окне выбрать пункт меню **Добавить линию тренда** (рис. 6.14**).**

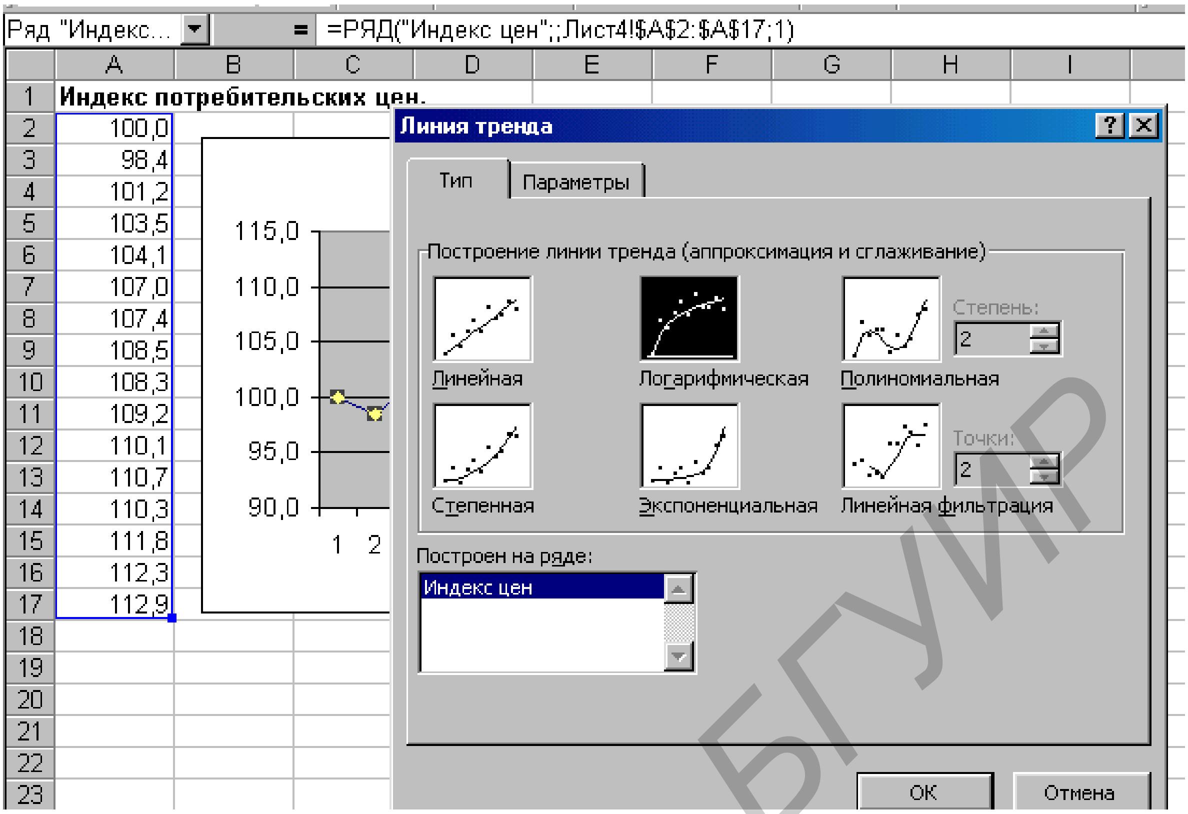


Рис. 6.14. Выбор типа тренда

В появившемся окне выбрать тип тренда и нажать вкладку **Параметры,** задать период прогнозирования и показать на диаграмме уравнение тренда и коэффициент детерминации модели R^2 (рис. 6.15).

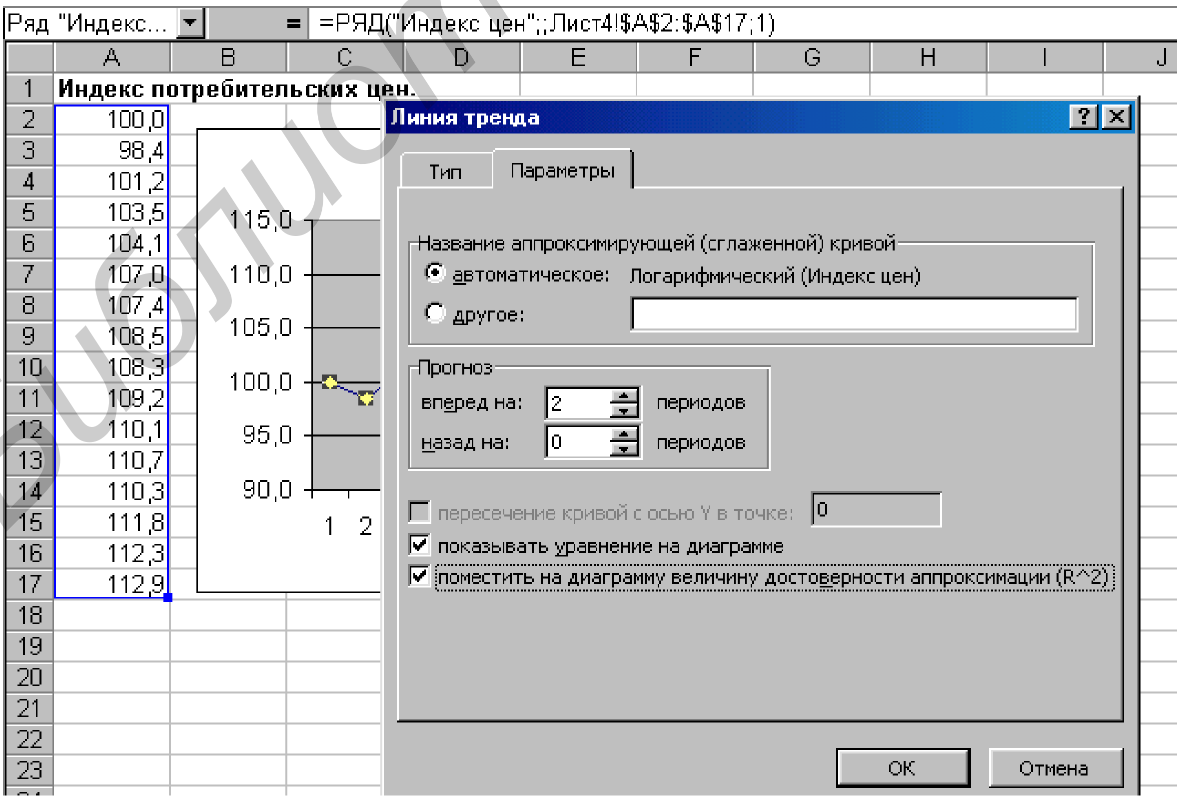


Рис. 6.15. Задание параметров тренда

Нажав кнопку ОК, получим на диаграмме график временного ряда, линию тренда, уравнение тренда и значение коэффициента детерминации. Полученное значение коэффициента R^2 = 0,9238 свидетельствует о достаточно высокой точности модели (рис. 6.16).

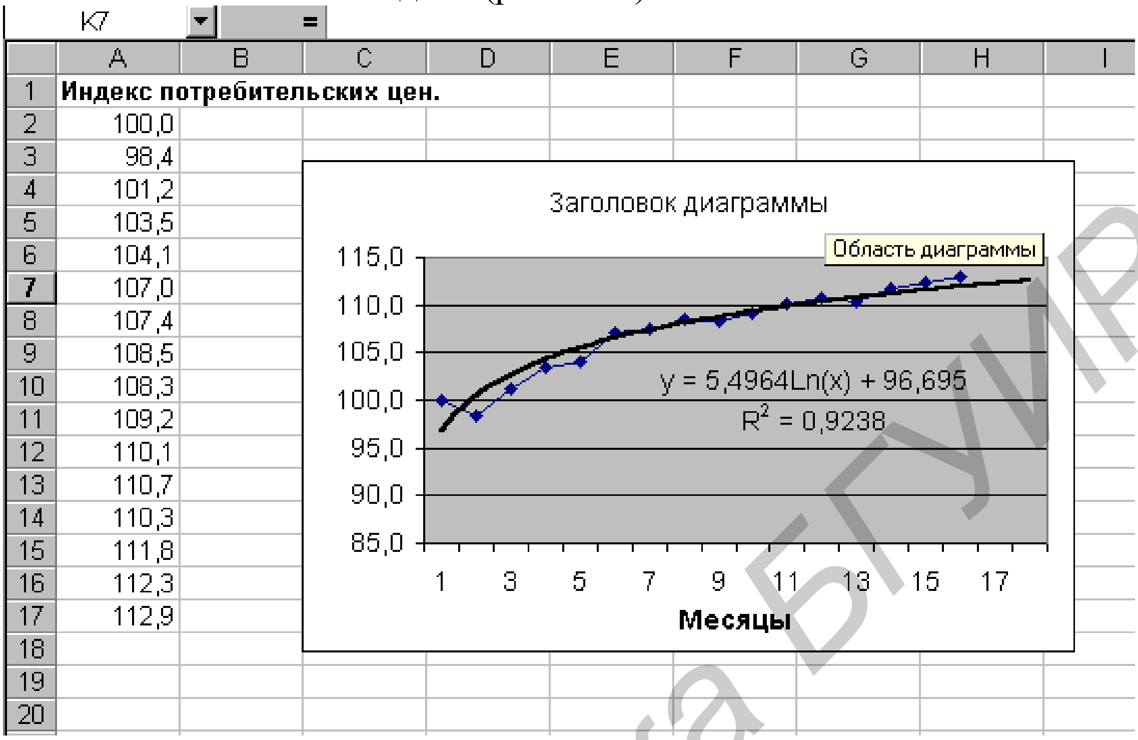


Рис. 6.16. Диаграмма временного ряда с линией тренда

На основе полученной функции тренда вычисляются прогнозные значения рассматриваемого показателя (рис. 6.17).

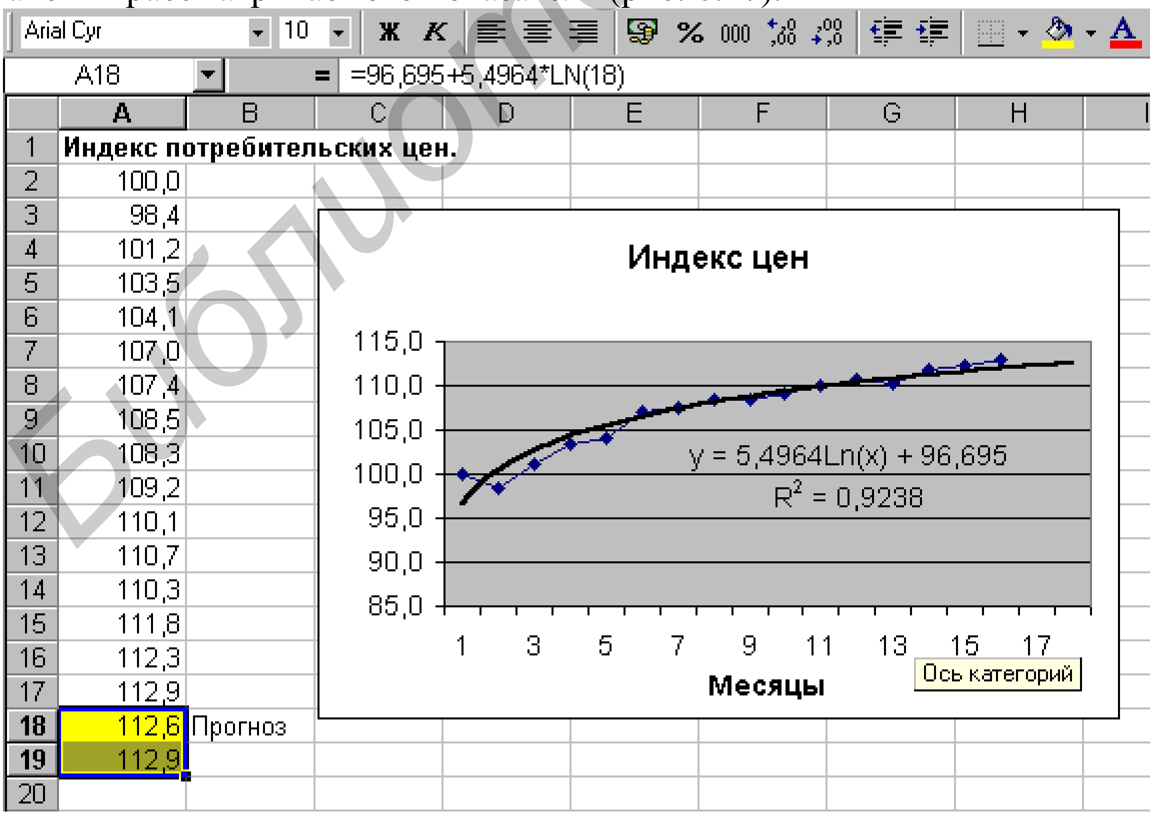


Рис. 6.17. Определение прогнозных значений временного ряда по функции тренда

Трендовая модель и прогноз индекса цен построены. Для получения лучшей модели надо из предлагаемых **Мастером диаграмм** трендов выбрать тренд, у которого R^2 имеет максимальное значение. Для этого на диаграмме надо задать несколько функций тренда.

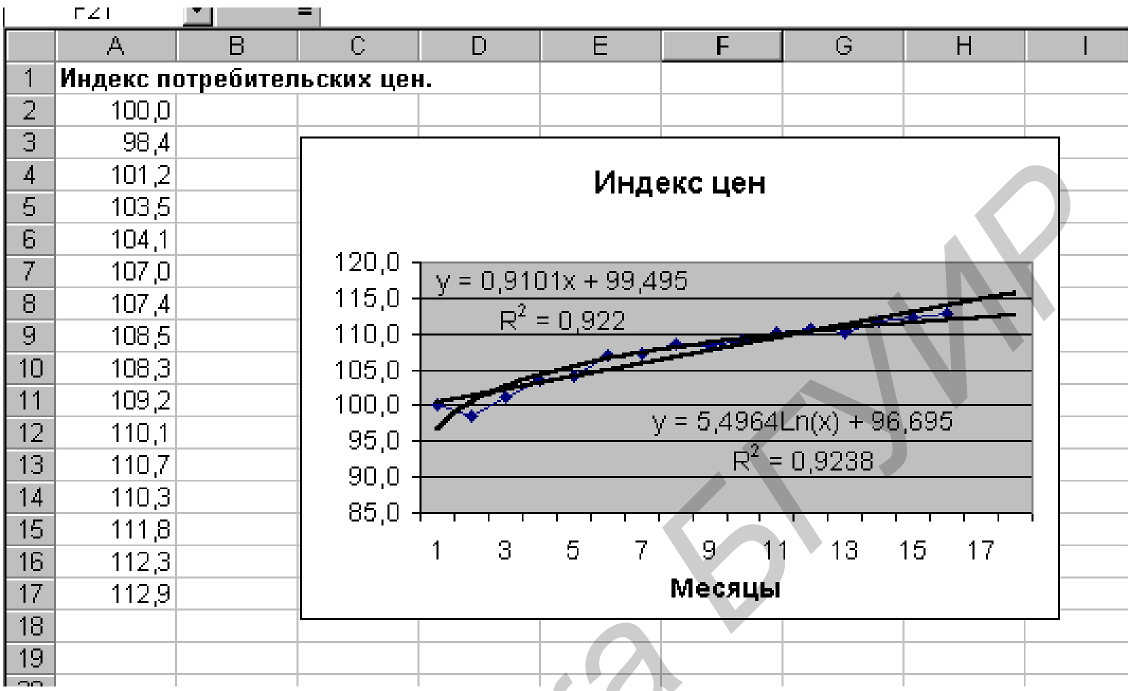


Рис. 6.18. Выбор лучшей функции тренда из нескольких

На рис. 6.18 показаны две линии тренда: линейная и логарифмическая. Так как R^2 логарифмической модели больше, чем у линейной, то логарифмическая модель считается более точной.

Как видно из графика, линейная модель дает завышенные, а логарифмическая – заниженные значения по сравнению с наблюдаемыми значениями в конце периода наблюдения. Поэтому прогнозные значения индекса цен можно взять как средние между линейной и логарифмической моделями. Таким же образом можно строить функции тренда и для таблиц, содержащих несколько временных рядов.

Модели регрессии и временных рядов могут быть объединены в одну модель, когда показатель X прогнозируется с помощью модели временных рядов, а показатель Y – с помощью модели регрессии. Так, в примере 6.2 прогноз показателя объемов реализации может быть сделан с помощью модели временного ряда, а прогноз балансовой прибыли – с помощью модели регрессии по данным прогноза временного ряда объемов реализации.

7. МОДЕЛИ УПРАВЛЕНИЯ ПРОЕКТАМИ

7.1. Построение сетевых графиков и расчет их временных параметров

Методы сетевого планирования и управления (СПУ) активно используются при управлении проектами, прежде всего для расчета планов и их оптимизации по различным критериям. Основным элементом систем СПУ является сетевая модель, которая моделирует процесс выполнения комплекса работ для достижения определенной цели. Графическое изображение сетевой модели называется сетевым графиком. Сетевой график с математической точки зрения представляет собой ориентированный граф без петель и контуров. Обозначим его $G = (E, U)$, где E – множество вершин, U – множество дуг.

Дугам на сетевом графике соответствуют работы, а вершинам – события. Работой называется любой процесс, происходящий во времени. Все работы можно разделить на действительные, ожидания, фиктивные (зависимости). Под действительными работами следует понимать любой трудовой процесс, требующий ресурсов и имеющий некоторую продолжительность. Ожидание – это некоторый процесс, не требующий ресурсов, но имеющий некоторую продолжительность. Фиктивные работы (зависимости) не требуют ресурсов и имеют нулевую продолжительность, они используются для обозначения логических зависимостей между действительными работами.

Событие – это результат выполнения работ, в него входящих; оно не имеет продолжительности и не потребляет ресурсов. На любом сетевом графике можно выделить исходное, промежуточное и завершающее события. Любая работа сетевой модели соединяет два события: начальное событие работы и конечное событие работы. Для однозначного обозначения работ используют идентификаторы (i, j), где i – номер начального события работы, j – номер конечного события работы. Обычно на сетевых графиках события упорядочены, т.е. $i < j$.

Любая последовательность работ, в которой конечное событие предыдущей работы является начальным событием последующей, называется путем. Под длиной пути будем понимать продолжительность выполнения всей последовательности работ, составляющих этот путь. На сетевой модели следует различать: полный путь; путь, предшествующий событию; путь, следующий за событием; путь между событиями. Среди полных путей особое значение придается критическому пути.

Критический путь – это наиболее протяженный по времени полный путь; его продолжительность определяет минимальное время выполнения проекта (критический срок $t_{Кр}$). Критических путей на сетевом графике может быть несколько.

При анализе сетевых графиков прежде всего вычисляют их временные параметры. К основным временным параметрам относятся:

- продолжительность критического пути (критический срок);
- сроки свершения и резервы событий;

- сроки выполнения отдельных работ и их резервы времени.

Продолжительность выполнения работы (i,j) обозначим t_{ij}.

Ранний срок $t_p(j)$ свершения события j – это самый ранний момент, к которому завершаются все работы, предшествующие этому событию:

$$t_p(1) = 0,$$

$$t_p(j) = \max\,(t_p(i) + t_{ij}) \text{ по } (i,j) \in E_j^*,$$

где E_j^*– множество работ, заканчивающихся j-м событием;

$t_p(i)$ – ранний срок свершения начального события работы (i, j);

t_{ij}– продолжительность работы (i, j).

Тогда

$$t_p(S) = t_{Kp}.$$

Поздний срок $t_n(i)$ свершения события i – такой предельный момент, после которого остается ровно столько времени, сколько необходимо для выполнения всех работ, следующих за этим событием. Для завершающего события S предполагается, что

$$t_n(S) = t_p(S) = t_{Kp}.$$

Тогда $t_n(i) = \min\,(t_n(j) - t_{ij})$ по $(i,j) \in E_i^*$, где E_{ij}^* – множество работ, начинающихся i-м событием; $t_n(i)$ – поздний срок свершения конечного события работы (i, j).

Резерв времени $R(i)$ события i показывает, на какой предельно допустимый срок может задержаться свершение события i без нарушения срока наступления завершающего события: $R(i) = t_n(i) - t_p(i)$.

Ранний срок начала работы (i, j): $t_{p,н}(i,j) = t_p(i)$.

Ранний срок окончания работы (i, j): $t_{p,o}(i,j) = t_p(i)$.

Поздний срок окончания работы (i, j): $t_{n,\,o}(i,j) = t_n(j)$.

Поздний срок начала работы (i, j): $t_{n,н}(i,j) = t_n(j) - t_{ij}$.

Ранний срок свершения события j часто находят по формуле

$$t_p(i) = \max t_{p,o}(i,j) \text{ по } (i,j) \in E_j^*,$$

а поздний срок свершения события i – по формуле

$$t_n(i) = \min t_{p,н}(i,j) \text{ по } (i,j) \in E_i^*.$$

Полный резерв времени $R_n(i, j)$ работы (i, j) – это максимальный запас времени, на которое можно задержать начало работы или увеличить ее продолжительность при условии, что весь комплекс работ будет завершен в критический срок:

$$R_n(i, j) = t_n(j) - t_p(i) - t_{ij} = t_n(j) - t_{p,o}(i,j).$$

Свободный резерв времени $R_c(i,j)$ работы (i,j) – это максимальный запас времени, на которое можно отсрочить или (если она началась в свой ранний срок) увеличить ее продолжительность при условии, что не нарушаются ранние сроки начала всех последующих работ:

$$R_c(i,j) = t_p(j) - t_p(i) - t_{ij} = t_p(j) - t_{p,o}(i,j).$$

Критические работы, как и критические события, резервов не имеют.

7.2. Оптимизация проекта по времени

Общие сведения

Сокращение времени завершения проекта, как правило, связано с привлечением дополнительных средств (количество рабочих, сверхурочные работы). Рассмотрим два примера задачи оптимизации проекта по времени с привлечением дополнительных средств.

Постановка задачи 1. Для сокращения времени выполнения проекта выделяется некоторая сумма дополнительных средств *B*. Задан сетевой график *G*=(*E*,*U*) выполнения проекта, где *E* – множество событий, *U* – множество работ. Продолжительность каждой работы равна t_{tj} . Известно, что вложение дополнительных средств $x_{tj;}$ в работу (*i*,*j*) сокращает время ее выполнения от *t* до t'_{ij}, причем эта зависимость выражается как $t'_{ij} = (x_{ij}) \le t_{ij}$ (f_{ij} – известные функции). Для каждой работы существует минимально возможное время ее выполнения d_{ij}.

Требуется определить время начала t^H_{ij} и окончания t°_{ij} выполнения работ, а также количество дополнительных средств x_{tj}, которые необходимо вложить в работы (*i*, *j*), чтобы общее время выполнения проекта было минимальным, а сумма вложенных дополнительных средств не превышала величины *B*, время выполнения каждой работы было не меньше минимально возможного времени.

Математически условия задачи можно записать следующим образом:

$$t_{кр} = t^0_{n-1,n}; \qquad (7.1)$$

$$\sum_{(i,j)} x_{ij} \le B; \qquad (7.2)$$

$$t^\circ_{ij} - t^H_{ij} \ge d_{ij}, \ (i,j) \in U; \qquad (7.3)$$

$$t^\circ_{ij} - t^H_{ij} = f_{ij}, \ (i,j) \in U; \qquad (7.4)$$

$$t^H_{rj} \ge t^\circ_{ir}, \text{ для всех } r, i, j \in U; \qquad (7.5)$$

$$t^\circ_{ij} \ge 0, \ 0 \ t^H_{ij} \ge 0, \ (i,j) \in U. \qquad (7.6)$$

Ограничение (7.2) определяет сумму вложенных дополнительных средств: она не должна превышать величины *B*. Ограничения (7.3) показывают, что продолжительность каждой работы должна быть не менее минимально возможной ее продолжительности. Ограничения-равенства (7.4) показывают зависимость продолжительности каждой работы от вложенных в нее дополнительных средств. Ограничения (7.5) обеспечивают выполнение условий предшествования работ в соответствии с топологией сети: время начала выполнения каждой работы должно быть не меньше времени окончания непосредственно предшествующих ей работ. Ограничение (7.6) – условие неотрицательности.

Если в последнее событие сети п входят сразу несколько работ, то необходимо добавить фиктивную работу (*n*, *n* + 1), время выполнения которой равно нулю ($t^\circ_{njl+1} - t^H_{nn+1} = 0$) добавить в ограничение (7.4). Тогда целевая функция запишется так : $t_{кр} = t^0_{\ n-1,n}$ (min).

Постановка задачи 2. Пусть задан срок выполнения проекта t_0, а расчетное время $t_{кр} \geq t_о$. В этом случае оптимизация комплекса работ сводится к сокращению продолжительности критического пути. Задача заключается в определении величины дополнительных вложений x_{ti} в отдельные работы проекта с тем, чтобы общий срок его выполнения не превышал заданной величины t_Q , а суммарный расход дополнительных средств был минимальным. Время выполнения каждой работы должно быть не меньше минимально возможного времени d_{tj}.

Математическая запись этой задачи имеет вид

$$F(x)= \sum_{(i,j)} x_{ij} \ (\min)$$

$$t_{nj} \leq t_Q,$$

$$t^{\circ}_{ij} - t^{H}_{ij} \geq d_{ij},\ (i,j) \in U;$$

$$t^{\circ}_{ij} - t^{H}_{ij} = f_{ij}\ ,\ (i,j) \in U;$$

$$t^{H}_{rj} \geq t^{\circ}_{ir}\ ,\text{для всех } r,\ i,j \in U;$$

$$t^{\circ}_{ij} \geq 0,\ \ t^{H}_{ij} \geq 0,\ (i,j) \in U.$$

Смысл ограничений аналогичен соответствующим ограничениям постановки задачи 1 (7.1) – (7.6).

Приведенные постановки задачи относятся к классу задач математического программирования и могут быть решены известными методами в зависимости от вида функций $f_{ij}\ (x_{ij})$. Если предположить, что продолжительность выполнения работ линейно зависит от дополнительно вложенных средств и выражается соотношением $t'_{ij} = t_{ij} - k_{ij}\, x_{ij}$, где k_{ij} – технологические коэффициенты использования дополнительных средств, то будем иметь задачу линейного программирования.

Пример7.1. Для сокращения срока реализации проекта, представленного сетевым графиком (рис.7.1), заказчик выделил 14 ед. дополнительных средств. Продолжительность выполнения работ линейно зависит от дополнительно вложенных средств и выражается соотношением

$$t'_{ij} = t_{ij} - k_{ij}\, x_{ij}\ .$$

Известно, что $k_{12} = 0{,}1$; $k_{13} = 0{,}2$; $k_{23} = 0{,}5$; $k_{24} = 0{,}3$; $k_{35} = 0{,}6$; $k_{45} = 0{,}1$. Над каждой работой поставлены ее продолжительность t_{ij} и минимально возможное время выполнения d_{ij}.

Рис. 7.1. Сетевой график примера 7.1

Требуется оптимизировать сетевой график по времени, т.е. найти такие значения переменных $t^{н}_{ij}$, t°_{ij} , x_{ij}, чтобы:

а) время выполнения всего проекта было минимальным;

б) сумма дополнительно вложенных средств не превышала 14 ед.;

в) продолжительность выполнения каждой работы была не меньше заданной величины d_{tj}.

Добавим на сетевом графике фиктивную работу (5, 6), как показано на рис. 7.2.

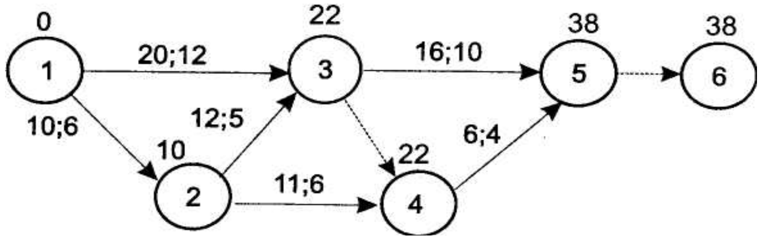


Рис. 7.2. Сетевой график с фиктивной работой (5,6)

Тогда целевая функция запишется в виде $t_{кр} = t^{\circ}_{5,6}\ (min)$

Запишем ограничения задачи:

а) сумма вложенных средств не должна превышать их наличного количества:

$$x_{12} + x_{13} + x_{45} + x_{23} + x_{24} + x_{35} \le 14;$$

б) продолжительность выполнения каждой работы должна быть не меньше минимально возможного времени:

$$t^{0}_{12}-t^{н}_{12} \ge 6;\ t^{0}_{13}-t^{н}_{13} \ge 12;\ t^{0}_{23}-t^{н}_{23} \ge 5;\ t^{0}_{24}-t^{н}_{24} \ge 6;$$

$$t^{0}_{34}-t^{н}_{34} = 0;\ t^{0}_{35} - t^{н}_{35} \ge 10;\ t^{0}_{45} - t^{н}_{45} \ge 4;\ t^{0}_{56}-t^{н}_{56} = 0,$$

в) зависимость продолжительности работ от вложенных средств:

$$t^{0}_{12}-t^{н}_{12} = 10–0{,}1x_{12};\ t^{0}_{13}-t^{н}_{13} = 20-0{,}2x_{13};\ t^{0}_{24}-t^{н}_{24} = 11-0{,}3x_{24};$$

$$t^{0}_{35} - t^{н}_{35} = 16–0{,}6x_{35};\ t^{0}_{45}-t^{н}_{45} = 6 – 0{,}1x_{45};\ t^{0}_{23}-t^{н}_{23} = 12 – 0{,}5x_{23}$$

г) время начала выполнения каждой работы должно быть не меньше времени окончания непосредственно предшествующей ей работы:

$$t^{н}_{12} = 0;\ t^{н}_{13} = 0;\ t^{н}_{23} \ge t^{0}_{12};\ t^{н}_{34} \ge t^{0}_{13};\ t^{н}_{34} \ge t^{0}_{23};\ t^{н}_{24} \ge t^{0}_{12};\ t^{н}_{35} \ge t^{0}_{13};$$

$$t^{н}_{35} \ge t^{0}_{23};\ t^{н}_{45} \ge t^{0}_{24};\ t^{н}_{56} \ge t^{0}_{35};\ t^{н}_{56} \ge t^{0}_{45};\ t^{н}_{45} \ge t^{0}_{34},$$

д) условие неотрицательности неизвестных:

$$t^{H}_{ij} \ge 0;\ t^{\circ}_{ij} \ge 0;\ t^{\circ}_{ij} \ge 0,\ (i, j) \in U.$$

Решив данную задачу симплекс-методом на ПЭВМ, получаем:

$$t^{н}_{12} = 0;\ t^{\circ}_{12} = 10;\ t^{н}_{13} = 0;\ t^{0}_{13} = 20;\ -t^{н}_{23} = 10;\ t^{0}_{23} = 20;$$

$$t^{н}_{24} = 10;\ t^{\circ}_{24} = 21;\ t^{н}_{34} = 20;\ t^{0}_{34} = 20;\ t^{н}_{35} = 20;\ t^{\circ}_{35} = 30;$$

$$t^{н}_{45} = 24;\ t^{\circ}_{45} = 30;\ t^{H}_{56} = 30;\ t^{0}_{56} = 30; x_{12} = 0;\ x_{13} = 0;\ x_{23} = 4;$$

$$x_{24} = 0;\ x_{35} = 10;\ x_{45} = 0; t_{KP} = 30.$$

Таким образом, при дополнительном вложении 14 ед. комплекс работ может быть выполнен за 30 ед. времени. При этом средства распределятся следующим образом: 4 ед. в работу (2, 3) и 10 ед. в работу (3, 5) (рис.7.3).

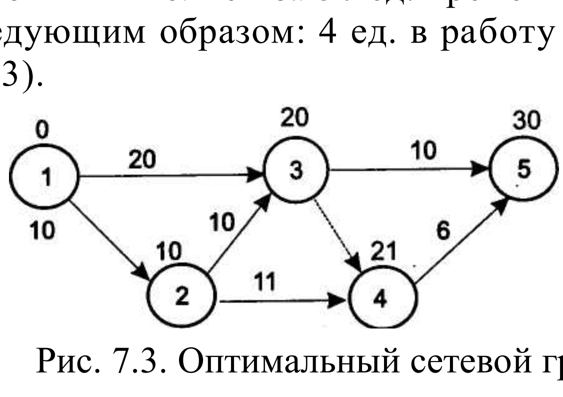


Рис. 7.3. Оптимальный сетевой график

8. ЗАДАНИЯ К ЛАБОРАТОРНЫМ РАБОТАМ

8.1.Балансовые модели

Номер варианта соответствует последним двум цифрам зачетной книжки.

***Задача* 1**

Даны коэффициенты прямых поставок a_{ij} и конечный продукт y_i (табл.8.1). Требуется определить:

1) межотраслевые поставки продукции;

2) проверить продуктивность матрицы *A*.

Указания

В соответствии с вариантом из табл. 8.2 выбрать числовые значения для заполнения табл. 8.1.

Таблица 8.1

Отрасли	Коэффициенты прямых поставок $a_{№}$			Конечный продукт Y_i
	1	2	3	
1 2 3	1*А* 1*Б* 1*В*	2*А* 2*Б* 2*В*	3*А* 3*Б* 3*В*	4*А* 4*Б* 4*В*

Таблица 8.2

№	*Для 1-й строки*				*Для 2-й строки*				*Для 3-й строки*			
вар.	1*А*	2*А*	3*А*	4*А*	1*Б*	2*Б*	3*Б*	4*Б*	1*В*	2*В*	3*В*	3*В*
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
1	0,1	0,2	0,1	200	0,2	0,1	0,0	150	0,0	0,2	0,1	250
2	0,0	0,1	0,2	180	0,1	0,2	0,1	200	0,2	0,1	0,2	200
3	0,2	0,1	0,2	150	0,0	0,1	0,2	180	0,1	0,0	0,1	100
4	0,1	0,0	0,1	100	0,1	0,0	0,2	300	0,2	0,1	0,0	160
5	0,2	0,3	0,0	120	0,3	0,1	0,2	250	0,1	0,0	0,3	180
6	0,3	0,4	0,1	200	0,1	0,2	0,4	300	0,3	0,4	0,1	200
7	0,1	0,2	0,4	100	0,0	0,4	0,1	200	0,1	0,3	0,4	100
8	0,0	0,4	0,1	160	0,4	0,1	0,0	180	0,3	0,0	0,1	150
9	0,4	0,2	0,3	180	0,2	0,1	0,0	200	0,2	0,1	0,0	160
10	0,1	0,1	0,2	160	0,1	0,2	0,3	180	0,1	0,2	0,3	170
11	0,0	0,1	0,2	170	0,0	0,1	0!4	170	0,4	0,3	0,1	180
12	0,1	0,0	0,3	150	0,1	0,0	0,3	160	0,2	0,1	0,0	190
13	0,2	0,3	0,0	140	0,3	0,1	0,0	170	0,1	0,1	0,4	200
14	03	0,4	0,1	100	0,2	0,2	0,1	150	0,3	0,2	0,1	190
15	0,1	0,2	0,2	200	0,1	0,4	0,2	140	0,1	0,0	0,3	180
16	0,0	0,4	0,1	150	0,4	0,1	0,1	130	0,3	0,0	0,2	170
17	0,4	0,2	0,1	130	0,2	0,1	0,3	120	0,2	0,3	0,1	160
18	0,3	0,1	0,0	120	0,1	0,2	0,1	110	0,4	0,0	0,1	150

Окончание табл. 8.2

№	*Для 1-й строки*				*Для 2-й строки*				*Для 3-й строки*			
вар.	1*А*	2*А*	3*А*	4*А*	1*Б*	2*Б*	3*Б*	4*Б*	1*В*	2*В*	3*В*	3*В*
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
19	0,1	0,1	0,3	110	0,0	0,3	0,1	100	0,3	0,2	0,1	140
20	0,4	0,0	0,2	180	0,2	0,4	0,0	110	0,2	0,1	0,0	130
21	0,0	0,3	0,1	160	0,3	0,1	0,1	170	0,0	0,4	0,3	120
22	0,2	0,4	0,0	100	0,4	0,0	0,3	200	0,1	0,3	0,1	100
23	0,0	0,1	0,3	100	0,4	0,1	0,0	80	0,2	0,1	0,2	180
24	0,2	0,0	0,2	110	0,3	0,2	0,1	90	0,2	0,0	0,1	190
25	0,1	0,3	0,1	120	0,2	0,1	0,3	100	0,2	0,1	0,3	200
26	0,2	0,4	0,0	130	0,1	0,2	0,0	110	0,2	0,2	0,2	100
27	0,3	0,2	0,2	140	0,1	0,1	0,4	120	0,1	0,2	0,0	110
28	0,1	0,4	0,1	150	0,1	0,4	0,3	130	0,1	0,1	0,2	120
29	0,0	0,2	0,4	160	0,4	0,2	0,1	140	0,1	0,3	0,0	130
30	0,4	0,1	0,1	170	0,3	0,1	0,2	150	0,1	0,4	0,1	140
31	0,1	0,2	0,2	180	0,3	0,2	0,4	160	0,1	0,0	0,3	150
32	0,1	0,4	0,2	190	0,3	0,3	0,3	170	0,1	0,3	0,4	160
33	0,2	0,2	0,0	200	0,2	0,3	0,3	180	0,3	0,0	0,0	170
34	0,3	0,1	0,3	100	0,2	0,1	0,3	190	0,3	0,1	0,0	180
35	0,0	0,2	0,0	110	0,2	0,2	0,2	210	0,3	0,1	0,1	190
36	0,4	0,2	0,2	120	0,2	0,4	0,2	210	0,3	0,2	0,1	200
37	0,2	0,1	0,3	130	0,3	0,0	0,0	220	0,3	0,2	0,3	100
38	0,3	0,1	0,2	140	0,3	0,1	0,0	80	0,3	0,3	0,4	100
39	0,1	0,1	0,4	150	0,3	0,1	0,1	90	0,3	0,4	0,0	110
40	0,3	0,4	0,0	160	0,3	0,2	0,1	100	0,3	0,0	0,4	120
41	0,4	0,0	0,1	170	0,3	0,3	0,2	110	0,4	0,0	0,1	130
42	0,1	0,3	0,1	180	0,3	0,3	0,4	120	0,4	0,1	0,0	140
43	0,1	0,2	0,3	190	0,4	0,0	0,0	130	0,4	0,1	0,2	150
44	0,2	0,3	0,2	200	0,4	0,1	0,0	140	0,4	0,2	0,2	160
45	0,2	0,3	0,4	100	0,4	0,0	0,1	150	0,4	0,2	0,3	170
46	0,0	0,4	0,4	ПО	0,4	0,1	0,1	160	0,4	0,3	0,3	180
47	0,4	0,1	0,3	120	0,4	0,3	0,1	170	0,4	0,0	0,3	190
48	0,2	0,0	0,4	130	0,4	0,0	0,4	180	0,4	0,0	0,4	200
49	0,1	0,2	0,2	140	0,4	0,4	0,4	190	0,4	0,4	0,0	100
50	0,3	0,1	0,3	150	0,1	0,1	0,1	200	0,0	0,1	0,1	110

8.2. Оптимизационные модели

Номер варианта соответствует последней цифре зачетной книжки.

***Задача* 2**

Используя **Поиск решения**, решить задачу оптимального использования ресурсов на максимум общей стоимости. Ресурсы сырья, норма его расхода на единицу продукции и цена продукции заданы в соответствующей таблице.

В каждой задаче требуется определить:

1. План выпуска продукции из условия максимизации ее стоимости.
2. Ценность каждого ресурса и его приоритет при решении **задачи** увеличения запаса ресурсов.
3. Максимальный интервал изменения запасов каждого из ресурсов, в пределах которого структура оптимального решения, т.е. номенклатура выпускаемой продукции, остается без изменений.
4. Суммарную стоимостную оценку ресурсов, используемых при производстве единицы каждого изделия. Выпуск какой продукции нерентабелен?
5. На сколько уменьшится стоимость выпускаемой продукции при принудительном выпуске единицы нерентабельной продукции?
6. На сколько можно снизить запас каждого из ресурсов, чтобы это не привело к уменьшению прибыли.
7. Интервалы изменения цен на каждый вид продукции, при которых сохраняется структура оптимального плана.
8. На сколько нужно снизить затраты каждого вида сырья на единицу продукции, чтобы сделать производство нерентабельного изделия рентабельным?

Кроме того, в каждом варианте необходимо выполнить еще два пункта задания (9,10).

Вариант 1

Для изготовления четырех видов продукции используют три вида сырья. Запасы сырья, нормы его расхода и прибыль от реализации каждого продукта приведены в табл. 8.3.

Таблица 8.3

Тип сырья	Нормы расхода сырья на одно изделие				Запасы
	А	*Б*	*В*	*Г*	
I	1	2	I	0	18
11	1	1	2	1	30
Щ	1	3	3	2	40
Цена изделия	12	7	18	10	

9. Как изменяется общая стоимость продукции и план ее выпуска при увеличении запасов сырья I- и II-го вида на 4 и 3 ед. соответственно и уменьшении на 3 ед. сырья III вида?

10. Целесообразно ли включать в план изделие *Д* ценой 10 ед., на изготовление которого расходуется по 2 ед. каждого вида сырья?

Вариант 2

Для изготовления четырех видов продукции используют три вида сырья. Запасы сырья, нормы его расхода и цена каждого продукта приведены в табл.8.4.

Таблица 8.4

Тип сырья	Нормы расхода сырья на одно изделие				Запасы сырья
	А	*Б*	*В*	*Г*	
I II III	1 0 4	0 1 2	2 3 0	1 2 4	180 210 800
Цена изделия	9	6	4	7	

9. Как изменяются общая стоимость продукции и план ее выпуска при увеличении запасов сырья I- и II-го вида на 120 и 160 ед. соответственно и одновременном уменьшении на 60 ед. запасов сырья I-го вида?

10. Целесообразно ли включать в план изделие *Д* ценой 12 ед., на изготовление которого расходуется по 2 ед. каждого вида сырья?

Вариант 3

Для изготовления трех видов продукции используют три вида сырья. Запасы сырья, нормы его расхода и цена каждого продукта приведены в табл.8.5.

Таблица 8.5

Тип сырья	Нормы расхода сырья на одно изделие			Запасы сырья
	А	*Б*	*В*	
I II III	4 3 1	2 1 2	I 3 5	180 210 244
Цена изделия	10	14	12	

9. Как изменится общая стоимость продукции и план ее выпуска при увеличении запасов сырья I и II-го вида на 4 ед. каждого?

10. Целесообразно ли включать в план изделие *Г* ценой 13 ед., на изготовление которого расходуется соответственно 1, 3 и 2 ед. каждого вида сырья, и изделие *Д* ценой 12 ед., на изготовление которого расходуется по 2 ед. каждого вида сырья?

Вариант 4

Для изготовления четырех видов продукции используют три вида сырья. Запасы сырья, нормы его расхода и цена каждого продукта приведены в табл. 8.6.

Таблица 8.6

Тип сырья	Нормы расхода сырья на одно изделие				Запасы сырья
	А	*Б*	*В*	*Г*	
I	2	1	3	2	200
II	I	2	4	8	160
III	2	4	1	1	170
Цена изделия	5	7	3	8	

9. Как изменится общая стоимость продукции и план выпуска при увеличении запасов сырья I и П-го вида на 8 и 10 ед. соответственно и одновременном уменьшении на 5 ед. запасов сырья Ш-го вида?

10. Целесообразно ли включать в план изделие *Д* ценой 10 ед., на изготовление которого расходуется по 2 ед. каждого вида сырья?

Вариант 5

На основании информации, приведенной в табл.8.7, была решена задача оптимального использования ресурсов на максимум общей стоимости.

Таблица 8.7

Ресурсы	Нормы затрат ресурсов			Запасы ресурсов
	Iвид	II вид	III вид	
Труд	1	4	3	200
Сырье	1	1	2	80
Оборудование	1	1	2	140
Цена изделия	40	60	80	

9. Как изменится общая стоимость продукции и план ее выпуска при увеличении запасов сырья на 18 ед.?

10. Целесообразно ли включать в план изделия IV-го вида, на изготовление которого расходуется по 2 ед. каждого вида ресурсов ценой 70 ед.?

Вариант 6

На предприятии выпускается три вида изделий и используется при этом три вида сырья (табл. 8.8):

Таблица 8.8

Сырье	Нормы затрат ресурсов на единицу продукции			Запасы сырья
	А	*Б*	*В*	
I	18	15	12	360
II	6	4	8	192
III	5	3	3	180
Цена из-	9	10	16	

9. Как изменится общая стоимость выпускаемой продукции и план ее выпуска, если запас сырья I вида увеличить на 45 кг, а II вида- уменьшить на 9 кг?

10. Целесообразно ли выпускать изделие *Г* ценой 11 ед., если нормы затрат сырья составляют 9, 4 и 6 кг?

Вариант 7

Для изготовления трех видов продукции используют четыре вида ресурсов. Запасы ресурсов, нормы и цена каждого продукта приведены в табл.8.9.

Таблица 8.9

Ресурсы	Нормы затрат ресурсов			Запасы ресурсов
	1вид	И вид	III вид	
Труд	3	6	4	2 000
Сырье I	20	15	20	15 000
Сырье 11 Обо-	10	15	20	7 400
рудование	0	3	5	1 500
Цена изделия	6	10	9	

9. Как изменится общая стоимость выпускаемой продукции и план ее выпуска, если запас сырья I-го вида увеличить на 24 кг?

10. Целесообразно ли выпускать изделие IV-го вида ценой 11 ед., если нормы затрат ресурсов составляют 8, 4, 20 и 6 ед.?

Вариант 8

Предприятие выпускает четыре вида продукции и использует три типа основного оборудования: токарное, фрезерное, шлифовальное. Затраты на изготовление единицы продукции приведены в табл.8.10; там же указан общий фонд рабочего времени, а также цена изделия каждого вида.

Таблица 8.10

Тип оборудования	Нормы затрат ресурсов на единицу продукции				Общий фонд раб. времени
	А	*Б*	*В*	*Г*	
Токарное	2	1	1	3	300
Фрезерное	1	0	2	1	70
Шлифовальное	1	2	1	0	340
Цена изделия	8	3	2	1	

9. Как изменится общая стоимость выпускаемой продукции и план ее выпуска, если фонд времени шлифовального оборудования увеличить на 24 ч?

10. Целесообразно ли выпускать изделие *Д* ценой 11 ед., если нор мы затрат оборудования составляют 8, 2 и 2 ед.?

Вариант 9

На предприятии выпускается три вида изделий и используются при этом три вида сырья (табл.8.11).

Таблица 8.11

Тип сырья	Нормы расхода сырья од-			Запасы сырья, кг
	А	*Б*	*В*	
1	1	2	1	430
II	3	0	2	460
III	1	4	0	420
Цена изделия	3	2	5	

9. Как изменятся общая стоимость выпускаемой продукции и план ее выпуска, если запас сырья I-го вида увеличить на 80 кг, а II-го вида – уменьшить на 10 кг?

10. Целесообразно ли выпускать изделие *Г* ценой 7 ед., если нормы затрат сырья составляют 2, 4 и 3 кг?

Вариант 10

Для изготовления четырех видов продукции используют три вида сырья. Запасы сырья, нормы его расхода на одно изделие и цена каждого продукта приведены в табл. 8.12

Таблица 8.12

Тип сырья	Нормы расхода сырья на изделие				Запасы сырья
	А	*Б*	*В*	*Г*	
I	2	1	0,5	4	2 400
II	1	5	3	0	1 200
Ш	3	0	6	1	3 000
Цена изделия	7,5	3	6	12	

Как изменится общая стоимость выпускаемой продукции и план ее выпуска, если запас сырья I-го вида увеличить на 100 кг, а II-го вида – уменьшить на 150 кг?

Целесообразно ли выпускать изделие *Д* ценой 10 ед., если нормы затрат сырья составляют 2, 4 и 3 кг?

Задача 3

Исходные данные транспортной задачи приведены схематически: внутри прямоугольника заданы удельные транспортные затраты на перевозку единицы груза, слева указаны мощности поставщиков, а сверху – мощности потребителей. Сформулировать экономико-математическую модель исходной транспортной задачи, найти оптимальный план закрепления поставщиков за потребителями, установить единственность или не единственность оптимального плана, используя **Поиск решения.**

Вариант 1

	150	40	110	50
70	9	5	10	7
80	11	8	9	6
90	7	6	5	4
110	6	4	3	2

Вариант 2

	25	10	20	30	15
40	5	3	4	6	4
20	3	4	10	5	7
40	4	6	9	3	4

Вариант 3

	100	140	100	60
100	5	4	3	2
60	2	3	5	6
80	3	2	4	3
160	4	1	2	4

Вариант 4

	150	350	200	100	100
500	3	3	5	3	1
300	4	3	2	4	5
100	3	7	5	4	1

Вариант 5

	60	40	120	100
70	4	8	1	6
80	3	5	3	4
90	2	6	4	3

Вариант 6

	40	30	90	80	50
60	4	2	3	4	1
90	2	4	3	5	6
140	6	5	4	6	2

Вариант 7

	8	9	13	8	12
9	5	15	3	6	10
11	23	8	13	27	12
14	30	1	5	24	25

Вариант 8

	40	30	20	50
60	2	4	5	1
70	2	3	9	4
50	8	4	2	5

Вариант 9

	11	11	11	16	11
15	3	4	5	15	24
15	19	2	22	4	13
15	20	27	1	17	19

Вариант 10

	7	7	7	7	2
4	16	30	17	10	16
6	20	27	26	9	23
10	13	4	22	3	1
10	3	1	5	4	24

8.3. Эконометрические модели

Номер варианта соответствует последней цифре зачетной книжки.

***Задача* 4**

В таблице для каждого варианта заданы три временных ряда: первый из них представляет нарастающую по кварталам прибыль коммерческого банка $y_{t,}$ второй и третий ряд - процентные ставки этого банка по кредитованию юридических лиц x_{2t} и депозитным вкладам x_{1t} за этот же период.

Требуется:

1. Вычислить матрицу коэффициентов парной корреляции и проанализировать тесноту связи между показателями.
2. Построить линейную модель регрессии, описывающую зависимость y_t от факторов x_{1t}, и x_{2t}
3. Оценить качество построенной модели. Вычислить для модели среднюю ошибку аппроксимации и коэффициент детерминации.
4. Проанализировать по модели влияние факторов на зависимую переменную (для каждого коэффициента регрессии вычислить коэффициент эластичности, β-коэффициент, Δ-коэффициент) и оценить их значимость при t_{Kp} = 1,86.
5. Определить точечные и интервальные прогнозные оценки прибыли коммерческого банка на два квартала вперед ($t_{Kp} = t_{0,7}$ = 1,12).

Номер наблюдения (t=1,2,…,10)

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Вариант 1

3	11	10	11	15	17	21	25	23	19
18	14	33	37	40	42	41	49	56	48
20	22	14	26	25	32	35	34	39	45

Вариант 2

16	20	22	14	25	28	25	28	30	31
30	34	40	38	22	48	50	52	53	49
25	27	30	31	35	27	42	41	43	42

Вариант 3

11	15	10	16	22	17	26	28	33	34
88	85	78	86	81	80	83	78	76	69
75	77	73	67	66	63	67	63	44	60

Вариант 4

43	47	50	48	67	57	61	59	65	54
30	34	32	36	39	44	45	41	46	47
28	24	26	29	33	31	24	33	35	34

Вариант 5

15	20	22	14	25	28	25	28	30	31
32	34	41	38	42	48	50	52	54	51
32	28	26	24	25	23	19	27	22	20

Вариант 6

70	76	78	76	80	82	89	78	88	120
65	58	63	60	56	53	54	53	51	52
58	60	56	57	53	50	44	40	35	22

Вариант 7

4	12	10	11	15	17	21	25	23	19
15	20	22	14	25	28	25	28	30	32
45	38	40	36	38	34	25	28	27	26

Вариант 8

20	88	78	89	82	80	76	78	76	70
15	20	22	14	25	28	25	28	30	31
42	47	50	48	67	57	61	59	65	54

Вариант 9

16	14	33	37	40	42	41	49	56	48
28	34	40	38	22	48	50	52	53	49
87	85	78	86	81	80	83	78	76	69

Вариант 10

24	22	15	26	25	32	35	34	39	45
62	58	63	60	56	53	54	53	51	52
30	28	26	24	25	23	19	27	22	20

Вариант 11

41	46	49	48	65	55	61	59	65	57
29	33	32	36	39	43	45	41	46	49
27	23	30	29	33	30	24	33	35	36

8.4. Модели управления проектами

Задача 5.А. Построить и рассчитать временные характеристики сетевых графиков

Номер варианта (номер задачи) соответствует последней цифре зачетной книжки.

5А.1. Проект разработки и внедрения нового вида продукта включает в себя следующие работы (табл. 8.13).

Таблица 8.13

Работа	Предшествующие работы	Продолжительность работы, мес.
A_1	–	1
A_2	–	5
A_3	A_1	3
A_4	A_1	2
A_5	A_2, A_3	6
A_6	A_2, A_3	5
A_7	A_4, A_5	5
A_8	A_6	3

Требуется:

1) построить сетевой график проекта;
2) рассчитать минимальное время выполнения проекта;
3) рассчитать временные параметры свершения событий;
4) определить сроки выполнения работ и их резервы времени;
5) построить линейный график выполнения работ проекта.

5А.2. Фирма «Астра» запланировала реконструкцию своего офиса. Перечень работ, которые необходимо для этого выполнить, представлен в табл.8.14

Требуется:

1) построить сетевой график проекта;
2) рассчитать минимальное время выполнения проекта;
3) рассчитать временные параметры свершения событий;
4) определить сроки выполнения работ и их резервы времени;
5) построить линейный график выполнения работ проекта.

Таблица 8.14

Работа	Содержание	Предшествующие работы	Продолжительность, дн.
A_1	Определение объема реконструкции	—	5
A_2	Составление сметы затрат	A_1	10
A_3	Выбор проекта реконструкции	A_1	5
A_4	Выбор строительной организации	A_2	3
A_5	Получение финансового обеспечения	A_2	5
A_6	Составление договора на выполнение работ	A_4	3
A_7	Экономическое обоснование проекта	A_3	4
A_8	Привязка проекта к условиям фирмы	A_7	5
A_9	Работа по реконструкции	A_5, A_6, A_8	39

5А.3. Подготовка и проведение экскурсионного тура требует выполнения следующих работ (табл.8.15).

Таблица 8.15

Работа	Предшествующие работы	Продолжительность дн.
A,	–	6
A_2	–	8
A_3,	–	2
A_4	*A,*	3
A_5	*A,*	4
A_6	A_3	6
A_7	*A.,*	3
A_8	A_2, A_s, A_6	4
A_9	A_2, A_5, A_6	4
A_{10}	A_4, A_8	2
A_{11}	A_7	3

Требуется:

1) построить сетевой график проекта;

2) рассчитать временные параметры свершения событий, пользуясь четырехсекторной схемой. Выделить критические работы, указать критический срок выполнения проекта;

3) определить сроки выполнения работ и их резервы времени;

4) построить линейный график выполнения работ проекта.

5А.4. Комплекс работ по организации спортивно-оздоровительного мероприятия для детей туристской школы приведен в табл. 8.16.

Таблица 8.16

Работа	Предшествующие работы	Продолжительность работы
A_1	–	4
A_2	–	6
A_3	A_1	2
A_4	A_1	6
A_5	$A_{2,}$,A_3	3
A_6 , A_7	A_2,, A_3 $A_{4,}$ .A_5	3 5

Требуется:

1) построить сетевой график проекта;

2) рассчитать минимальное время выполнения проекта;

3) рассчитать временные параметры свершения событий;

4) определить сроки выполнения работ и их резервы времени.

5А.5. Осуществление проекта требует выполнения ряда работ, перечень которых задан в табл. 8.17.

Таблица 8.17

Работа	Предшествующие работы	Продолжительность
A_1	–	5
A_2	–	3
A_3	A_1	7
A_4	A_1	6
A_5	A_2	7
A_6	A_4,, A_5	3
A_7	A_4,, A_5	10
A_8	A_3, , A_6	8

Требуется:

1) построить сетевой график выполнения проекта;
2) определить:
   а) сколько времени потребуется для завершения проекта;
   б) можно ли отложить выполнение работы A_4 без отсрочки завершения проекта в целом;
   в) на сколько месяцев можно отложить выполнение работы A_3 без отсрочки завершения проекта в целом?

5А.6. Проект подготовки нового экскурсионного тура состоит из восьми работ (табл. 8.18).

Таблица 8.18

Работа	Предшествующие работы	Продолжительность работы, дн.
A_1	–	3
A_2	–	6
A_3	A_1	2
A_4	A_2, A_3	5
A_5	A_4	4
A_6	A_5	3
A_7	A_2, A_3	9
A_8	A_6,A_7	3

Требуется:
1) построить сетевой график проекта;
2) рассчитать минимальное время выполнения проекта;
3) рассчитать временные параметры свершения событий;
4) определить, можно ли отложить выполнение работы A_3 без отсрочки завершения проекта в целом;
5) определить, на сколько дней можно отложить выполнение работы A_6 без отсрочки завершения проекта в целом.

5А.7. Университет рассматривает предложение о строительстве новой турбазы. Работы, которые следует выполнить перед началом строительства, представлены в табл. 8.19.

Таблица 8.19

Работа	Содержание работы	Предшествующие работы	Продолжительность работы
A_1	Определить место строительства	–	6
A_2	Разработать первоначальный проект	A_1	8
A_3	Получить разрешение на строительство	A_1	12
A_4	Выбрать архитектурную мастерскую	A_3	4
A_5	Разработать смету затрат на строительство	A_3	12
A_6	Закончить разработку проекта	A_4, A_5	15
A_7	Получить финансовое обеспечение	A_2, A_5	12
A_8	Нанять подрядчика	A_6, A_7	8

Требуется:

1) построить сетевой график проекта;
2) найти критический путь;
3) определить, реально ли начать работу по строительству здания турбазы через год после принятия решения о начале проекта;
4) определить сроки свершения событий, пользуясь четырехсекторной схемой;
5) определить сроки выполнения работ и их резервы времени.

Задача 5 Б. Провести оптимизацию проекта по времени.

Номер варианта (номер задачи) соответствует последней цифре зачетной книжки.

5Б.1–5Б.2. Проект представлен сетевым графиком (рис 8.1). Продолжительность t_{tj} работ *(i, j)* $\in$ и минимальное время их выполнения d_{ij}, а также технологические коэффициенты использования дополнительных средств A_j; приведены в табл. 8.20.

Необходимо определить, сколько дополнительны: средств x_{ij} нужно вложить в каждую работу, чтобы время выполнения проекта не превосходило t_0, а сумма дополнительно вложенных средств была минимальной.

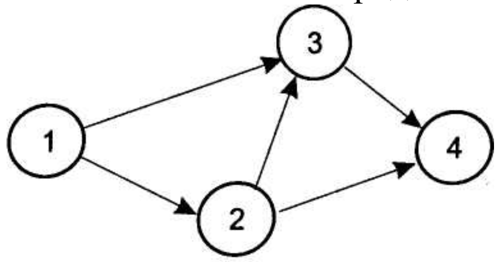


Рис. 8.1

Таблица 8.20

Номер задачи	Параметры	Работа (1,2)	Работа (1,3)	Работа (2,3)	Работа (2,4)	Работа (3,4)	Срок выполнения
5Б.1	t_{ij}	10	20	15	10	25	35
	d_{ij},	7	10	9	5	14	
	k_{ij}	0,05	0,3	0,4	0.1	0,2	
5Б.2	t_{ij}	10	20	0	10	25	30
	d_{ij},	7	10	0	5	14	
	k_{ij}	0,05	0,3	0	0.1	0,2	

5Б.3–5Б.8. Параметры проекта, заданного сетевым графиком (рис. 8.2), приведены в табл.8.21.

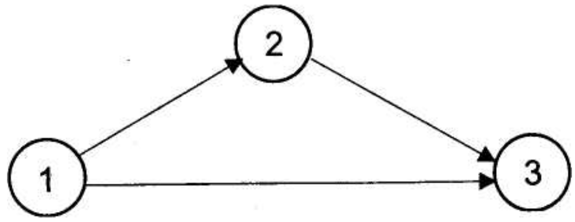


Рис.8.2

Определить величину дополнительных вложений в каждую работу, при которых время выполнения комплекса работ не превышает t_0, а сумма дополнительных вложений минимальна.

Таблица 8.21

Номер задачи	Параметры	Работа			Срок выполнения комплекса работ, t_0
		(1.2)	(1.3)	(2.3)	
5Б.3	t_{ij}	7	5	4	8
	d_{ij}	4	2	3	
	k_{ij}	0.3	0.4	0.7	
5Б.4	t_{ij}	10	20	8	11
	d_{ij}	6	7	2	
	k_{ij}	0.1	0.2	0.3	
5Б.5	t_{ij}	14	25	10	21
	d_{ij}	12	7	8	
	k_{ij}	0.1	0.4	0.2	
5Б.6	t_{ij}	15	17	9	20
	d_{ij}	10	14	5	
	k_{ij}	0.1	0.7	0.4	
5Б.7	t_{ij}	11	15	19	23
	d_{ij}	4	6	12	
	k_{ij}	0,2	0,3	0,1	

5Б.8–5Б.12. Определить оптимальные дополнительные вложения в выполнение работ проекта, представленного сетевым графиком (рис. 8.3) с параметрами из табл. 8.22, если общая сумма дополнительных средств составляет Б ден. ед., а время выполнения проекта должно быть как можно меньше.

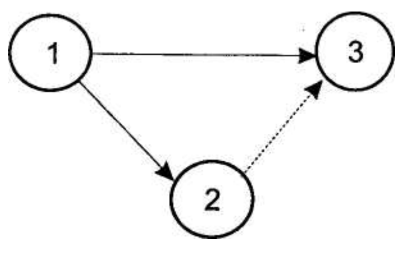


Рис. 8.3

Таблица 8.22

Номер задачи	Параметры	Работа				Дополнительные средства,
		(1,2)	(1,3)	(2,3)	(3,4)	
5Б.8	t_{ij}	20	10	0	7	190
	d_{ij}	11	6	0	4	
	k_{ij}	0.1	0.8	0	0.4	
5Б.9	*Ч	11	17	0	9	210
	da	5	8	0	4	
	k_{ij}	0.07	0.02	0	0.05	
5Б.10	*tij*	9	12	0	17	210
	d_{ij}	4	8	0	5	
	k_{ij}	0.08	0.1	0	0.06	
5Б.11	t_{ij}	15	5	0	6	250
	d_{ij}	8	2	0	3	
	k_{ij}	0,2	0,3	0	0,4	
5Б.12	t_{ij}	19	14	0	11	150
	d_{ij}	9	7	0	6	
	k_{ij}	0,02	0,03	0	0,15	

Литература

1. Орлова И.В. Экономико-математические методы и модели. Выполнение расчетов в среде EXEL /Практикум: Учебное пособие для вузов.– М.: ЗАО «Финстатинформ», 2000. –136 с.

2. Экономико-математические методы и модели: Учеб. пособие / Н.И. Холод, А.В. Кузнецов, Я.Н. Жихар и др. – Мн.: БГЭУ, 1999.– 413 с.

3. А.В. Кузнецов, В.А. Сакович, Н.И. Холод. Высшая математика. Математическое программирование. – Мн.: Выш. шк., 1994. – 287 с.

4. Экономико-математические модели и методы. Методические указания, программа и контрольные задания по курсу «Экономико-математические модели и методы в экономике» для студентов экономических специальностей заочной формы обучения / Сост. С.А. Поттосина. – Мн.: БГУИР, 1999. – 40 с.

5. Колемаев В.А. и др. Теория вероятностей и математическая статистика. – М.: Статистика, 1991.

6. Замков О.О. и др. Математические методы в экономике. – М.: ДИС, 1997.

Св. план 2004, поз. 124

Учебное издание

Журавлев Валерий Александрович
Поттосина Светлана Анатольевна

ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ И МЕТОДЫ

Лабораторный практикум
для студентов экономических специальностей БГУИР
всех форм обучения

Редактор Н. А. Бебель
Корректор Н.В. Гриневич

Подписано в печать 11.03.2005. Формат 60х84 1/16. Бумага офсетная.
Гарнитура «Таймс». Печать ризографическая. Усл. печ. л. 4,77.
Уч.-изд. л. 3,8. Тираж 200 экз. Заказ 539.

Издатель и полиграфическое исполнение: Учреждение образования
«Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники»
Лицензия на осуществление издательской деятельности №02330/0056964 от 01.04.2004.
Лицензия на осуществление полиграфической деятельности №02330/0133108 от 30.04.2004.
220013, Минск, П. Бровки, 6