Министерство образования Республики Беларусь
Учреждение образования
«Белорусский государственный университет
информатики и радиоэлектроники»

Факультет компьютерных систем и сетей

Кафедра высшей математики

СОВРЕМЕННЫЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ В ЗАДАЧАХ И УПРАЖНЕНИЯХ

Рекомендовано УМО по образованию в области информатики и радиоэлектроники в качестве пособия для специальностей I ступени высшего образования, закрепленных за УМО

Минск БГУИР 2020

УДК 517(076)
ББК 22.161я73
С56

А в т о р ы:

Е. А. Баркова, Н. И. Кобринец,
П. А. Самсонов, М. А. Сафронова, Т. С. Степанова

Р е ц е н з е н т ы:

кафедра высшей математики учреждения образования
«Белорусский государственный экономический университет»
(протокол №3 от 22.10.2019);

доцент кафедры управления финансами и недвижимостью
государственного учреждения образования «Институт бизнеса
Белорусского государственного университета»
кандидат физико-математических наук, доцент Н. Н. Рачковский

С56 **Современный** математический анализ в задачах и упражнениях : пособие / Е. А. Баркова [и др.]. – Минск : БГУИР, 2020. – 112 с. : ил.

ISBN 978-985-543-558-8.

Входит в состав методического комплекса и является продолжением серии практикумов по высшей математике для студентов технических и экономических специальностей по разделам: «Аналитическая геометрия», «Линейная алгебра», «Введение в анализ», «Дифференциальное исчисление», «Интегральное исчисление функций одной переменной».

УДК 517(076)
ББК 22.161я73

ISBN 978-985-543-558-8

1. Многочлены. Функции и их графики. Метод математической индукции

1. Найти числа α, β и γ, если многочлен $x^3+6x^2+\alpha x+\beta$ является кубом двучлена $x+\gamma$.

Ответ: $\gamma=2, \alpha=12, \beta=8$.

2. Методами неопределенных коэффициентов и деления «уголком» найти частное и остаток от деления многочлена $P(x)$ на многочлен $Q(x)$:

а) $P_4(x)=2x^4-3x^3-x^2+5x-4, \quad Q_1(x)=x-3$;

б) $P_4(x)=3x^4-x^3+4x^2-5x-5, \quad Q_2(x)=x^2-2x+2.$

Ответ:

а) $P_4(x)=(x-3)(2x^3+3x^2+8x+29)+83$;

б) $P_4(x)=(x^2-2x+2)(3x^2+5x+8)+x-21.$

3. Разложить многочлен $P(x)$ на множители:

а) $P(x)=x^3+4x^2+5x+2$;

б) $P(x)=2x^4-3x^3-7x^2+6x+8$.

Ответ:

а) $P(x)=(x+1)^2(x+2)$;

б) $P(x)=2\,(x+1)(x-2)\cdot\left(x-\dfrac{1+\sqrt{33}}{4}\right)\left(x-\dfrac{1-\sqrt{33}}{4}\right).$

4. Решить неравенство $\dfrac{(x^2+5x+4)(x-3)^2}{1-x^2}\geq 0$.

Ответ: $x\in[-4;-1)\cup(-1;1)\cup\{3\}$.

5. Решить неравенство $\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{2}{x^2-x+1}\leq\dfrac{1-2x}{1+x^3}$.

Ответ: $x\in(-\infty;-1)\cup(-1;\ 2]$.

6. Решить неравенства:

а) $\dfrac{3}{x^2+2x+4}<1$; б) $\dfrac{x^2+3x+4}{x^2+4x+3}\leq x$; в) $\dfrac{9-x^2}{3x+1}\geq\dfrac{2}{x}$.

Ответ: а) $x\in(-\infty;-1)\cup(-1;+\infty)$; б) $x\in(-3;-1)\cup[1;+\infty)$;

в) $x\in(-\infty;-2]\cup\left(-\dfrac{1}{3};\ 0\right)\cup\{1\}$.

7. Решить уравнения:

а) $x^2+2x+3\dfrac{|x-1|}{x-1}=0$; б) $3\cdot\left|x^2+4x+2\right|=5x+16$;

в) $|x-1|-2|x-2|+3|x-3|=4$.

Ответ: а) $x=-3$; б) $x\in\{-2;1\}$; в) $x\in[1;\ 2]\cup\{5\}$.

8. Решить неравенства:

а) $|x-6|<x^2-5x+9$; б) $3|x-1|>7-x^2$; в) $\dfrac{\left|24-2x-x^2\right|}{x}\le x$.

Ответ: а) $x\in(-\infty;1)\cup(3;+\infty)$; б) $x\in(-\infty;-1)\cup(2;+\infty)$; в) $x\in[-4;0)\cup[3;12]$.

9. Найти область определения функции $y=\begin{cases}x^2+2, & x<2,\\ \sin x, & x>2.\end{cases}$

Ответ: $x\in\{5\}\cup(6;8)$.

10. Найти области определения функций:
а) $y=\sqrt{\lg\sin x}$; б) $y=\sqrt{\arcsin\log_2 x}$.

Ответ: а) $x=\dfrac{\pi}{2}+2k\pi$; б) $1\le x\le 2$.

11. Найти область значений функции $y=\dfrac{x^2-x+2}{x^2+1}$.

Ответ: $y\in\left[\dfrac{3-\sqrt{2}}{2};\ \dfrac{3+\sqrt{2}}{2}\right]$.

12. Найти области значений функций:

а) $f(x)=\dfrac{x+1}{x-2}$; б) $f(x)=16\log\dfrac{1}{16}\dfrac{\sin x+\cos x+3\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$.

Ответ: а) $E(f)=(-\infty;1)\cup(1;+\infty)$; б) $E(f)=[-8;-4]$.

13. Исследовать функции на четность:

а) $f(x)=\dfrac{2^x-1}{2^x+1}$; б) $f(x)=2\arccos(-x)$.

Ответ: а) нечетная; б) общего вида.

14. Исследовать следующие функции на четность:

а) $f(x)=\sin x+\cos x$; б) $f(x)=\lg\dfrac{1-x}{1+x}$; в) $f(x)=c$.

Ответ: а) общего вида; б) нечетная; в) четная.

15. Доказать, что функция $y=2^{\cos^2 x}+3\sin x$ ограничена на множестве R.

16. Доказать ограниченность функций:

а) $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$; б) $f(x)=2^{5-4x-x^2}$.

17. Доказать, что функция $y=x\sin x$ не является ограниченной на всей числовой прямой.

18. Исследовать на монотонность функции:

а) $f(x)=x^3+3x+5$; б) $f(x)=\cos\dfrac{x^2}{1+x^2}$.

Ответ: а) строго возрастает на $(-\infty;+\infty)$; б) строго возрастает на $(-\infty;0]$, строго убывает на $[0;+\infty)$.

19. Доказать, что функция $y=x^2$ не является ни убывающей, ни возрастающей на множестве R.

20. Является ли периодической функция $y=\sin\lg\sqrt{x+3}$?

Ответ: нет.

21. Найти функции, обратные данным:

а) $y=\lg(x+2)$; б) $y=\begin{cases} x^2-2x+3, & x\le 1,\\ -x+3, & x>1. \end{cases}$

Ответ: а) $y=10^x-2$; б) $y=\begin{cases} 1-\sqrt{x-2}, & x\ge 2,\\ -x+3, & x<2. \end{cases}$

22. В одной системе координат построить графики функций:

а) $f(x)=x$, $f(x)=x^2$, $f(x)=x^3$, $f(x)=x^4$;

б) $f(x)=\dfrac{1}{x}$, $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$, $f(x)=\dfrac{1}{x^3}$.

23. Построить графики функций и уравнений:

а) $y=f(x)$; б) $y=|f(x)|$; в) $y=f(|x|)$; г) $|y|=f(x)$; д) $y=|f(|x|)|$; е) $|y|=f(|x|)$; ж) $|y|=|f(x)|$; з) $|y|=|f(|x|)|$, если $f(x)=3-x$.

24. Доказать методом математической индукции:

а) $1+2+3+\ldots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$; б) $1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

2. Матрицы и определители

Виды матриц. Линейные операции над матрицами. Транспонирование матриц. Умножение матриц. Определители второго и третьего порядков. Понятие об определителях высших порядков. Миноры и алгебраические дополнения. Теорема Лапласа. Теоремы замещения и аннулирования. Вычисление определителей n-го порядка. Обратная матрица.

1. Пусть $A=\begin{pmatrix}2 & -5 & -3\\ 1 & -4 & -8\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}4 & -7 & 5\\ 2 & -3 & 1\end{pmatrix}$ и $C=\begin{pmatrix}-3 & 3 & -8\\ -2 & 5 & -6\end{pmatrix}$. Найти матрицу X, если $2A-X=4B+5C$.

Ответ: $X=\begin{pmatrix}3 & 3 & 14\\ 4 & -21 & 10\end{pmatrix}$.

2. Даны матрицы $A_{23}, B_{35}, C_{22}, D_{52}, E_{34}$. Указать, какие из произведений данных матриц существуют и чему равны размеры получающихся матриц.

Ответ: существуют: 1) $AB-2\times5$; 2) $AE-2\times4$; 3) $BD-3\times2$; 4) $CA-2\times3$; 5) $DA-5\times3$; 6) $DC-5\times2$.

3. Показать, что:

а) $\begin{pmatrix}2 & 0 & 1\\ -2 & 3 & 2\\ 4 & -1 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-3 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 1\\ 0 & -1 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-6 & 1 & 3\\ 6 & 2 & 9\\ -12 & -3 & 14\end{pmatrix}$;

б) $\begin{pmatrix}5 & -1 & 3 & 1\\ 2 & 0 & -1 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 3 & 0\\ -2 & 1 & 1\\ 3 & 0 & -2\\ 4 & 1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10 & 15 & -5\\ 11 & 10 & 10\end{pmatrix}$;

в) $\begin{pmatrix}0 & -3 & 1\\ 2 & 1 & 5\\ -4 & 0 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\ -2\\ 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8\\ 14\\ -16\end{pmatrix}$.

4. Вычислить $\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 2\\ 2 & 2 & 3\\ 3 & 3 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & -1\\ 2 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\ 1\end{pmatrix}$. **Ответ:** $\begin{pmatrix}5\\ 15\\ 25\\ 35\end{pmatrix}$.

5. Найти $f(A)$, если $f(x)=x^2-3x+5$, $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 4 & 3\end{pmatrix}$.

Ответ: $f(A)=\begin{pmatrix}7 & 2\\ 8 & 9\end{pmatrix}$.

6. Пусть $\overline{X}=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix}a_{11} & \cdots & a_{1n}\\ \hdotsfor{3} \\ a_{n_1} & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix}$. Найти размерность матрицы $C=X^T AX$.

Ответ: $C_{1\times1}$ – это число.

7. Проверить, перестановочны ли матрицы $A=\begin{pmatrix}1 & -5\\ 2 & -4\end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$.

Ответ: да.

8. Вычислить определители:

а) $\begin{vmatrix}93 & 94\\ 78 & 79\end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix}\cos\alpha & \sin\alpha\\ -\sin\alpha & \cos\alpha\end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix}9 & 8 & 7\\ 6 & 5 & 4\\ 3 & 2 & 1\end{vmatrix}$; г) $\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 1\\ 3 & 1 & 2\end{vmatrix}$;

д) $\begin{vmatrix}3 & 1 & -1 & 4 & 1\\ 1 & 0 & 0 & 0 & 5\\ 2 & 1 & -1 & 3 & 4\\ 1 & 0 & 0 & 0 & 7\\ 5 & -2 & 3 & 6 & 1\end{vmatrix}$.

Ответ: а) 15; б) 1; в) 0; г) –18; д) 2.

9. Вычислить определитель $\begin{vmatrix}15325 & 15323 & 37527\\ 23735 & 23735 & 17417\\ 23737 & 23737 & 17418\end{vmatrix}$.

Ответ: – 22198.

10. Решить уравнение $\begin{vmatrix}2-x & -2 & 3\\ 10 & -4-x & 5\\ 5 & -4 & 6-x\end{vmatrix}=0$.

Ответ: $x_{1,2}=1, x_3=2$.

11. Доказать тождество $\begin{vmatrix}a_1+b_1x & a_1-b_1x & c_1\\ a_2+b_2x & a_2-b_2x & c_2\\ a_3+b_3x & a_3-b_3x & c_3\end{vmatrix}=-2x\begin{vmatrix}a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix}$.

12. Вычислить определители:

а) $\begin{vmatrix}2 & 1 & 5 & 1\\ 3 & 2 & 1 & 2\\ 1 & 2 & 3 & -4\\ 1 & 1 & 5 & 1\end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 2 & 3 & -1 & 5\\ 4 & 9 & 1 & 25\\ 8 & 27 & -1 & 125\end{vmatrix}$.

Ответ: а) 54; б) 432.

13. Вычислить определитель n-го порядка при $D_n=\begin{vmatrix}3 & 2 & 2 & \cdots & 2\\ 2 & 3 & 2 & \cdots & 2\\ 2 & 2 & 3 & \cdots & 2\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 3\end{vmatrix}$.

Ответ: $2n+1$.

14. Найти матрицу, обратную матрице $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 10 \end{pmatrix}$:

а) методом присоединенной матрицы;
б) путем элементарных преобразований строк.

Ответ: $A^{-1}=-\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 4 & -3 \\ 2 & -11 & 6 \\ -3 & 6 & -3 \end{pmatrix}$.

15. Даны матрицы $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ и $T=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Найти матрицу B, если $B=T^{-1}AT$.

Ответ: $B=\begin{pmatrix} 6 & 3 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$.

16. Найти обратную матрицу для матрицы A, если:

а) $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 6 & 5 & 4 \\ 13 & 10 & 8 \end{pmatrix}$; б) $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Ответ: а) $A^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -4 & 5 & -2 \\ 5 & -3 & 1 \end{pmatrix}$; б) $A^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

17. Решить матричные уравнения:

а) $X\cdot\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 9 & 5 \end{pmatrix}$;

б) $\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -6 & 4 \end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$;

в) $X\cdot\begin{pmatrix} 5 & 3 & 4 \\ -6 & -3 & -5 \\ 4 & 2 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$;

г) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 4 \\ 5 & -7 & 8 \end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ -7 \end{pmatrix}$.

Ответ: а) $\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} -11 & 7 \\ -21 & 13 \end{pmatrix}$; б) $\varnothing$; в) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

18. Решить матричное уравнение $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} \cdot X \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 16 \\ 9 & 10 \end{pmatrix}$.

Ответ: $X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

3. Векторная алгебра и аналитическая геометрия

3.1. Векторная алгебра

Векторные и скалярные величины. Линейные операции и их свойства. Ортогональная проекция. Линейная зависимость векторов. Базис. Вычисления в координатах. Деление отрезка в данном отношении. Определение скалярного произведения, его свойства и приложения. Условие ортогональности двух векторов. Скалярное произведение в координатной форме. Векторное произведение двух векторов и его свойства. Векторное произведение в координатной форме. Смешанное произведение векторов и его свойства. Условие компланарности ненулевых векторов. Смешанное произведение в координатной форме.

1. Заданы три вершины $A(0;1;-1)$, $B(1;0;2)$, $C(2;3;0)$ параллелограмма $ABCD$. Найти координаты точки D.

Ответ: $D(1;4;-3)$.

2. Доказать, что $ABCD$ – параллелограмм, если $\overline{AB} = 2\overline{a} - 3\overline{b} + \overline{c}$, $\overline{AC} = \overline{a} - \overline{b} + 2\overline{c}$, $\overline{AD} = -\overline{a} + 2\overline{b} + \overline{c}$.

3. Найти координаты, длину и направляющие косинусы вектора $\overline{AB}$, если $A(4,-5,2)$, $B(2,-3,1)$.

Ответ: $\overline{AB}(-2, 2, -1)$, $\left|\overline{AB}\right| = 3$, $\cos\alpha = -\frac{2}{3}$, $\cos\beta = \frac{2}{3}$, $\cos\gamma = -\frac{1}{3}$.

4. Найти координаты вектора $\overline{a}$, если его длина равна 2 и он образует с осями OX, OY и OZ углы $135°, 60°$ и $60°$ соответственно.

Ответ: $\overline{a}(-\sqrt{2}, 1, 1)$.

5. Найти угол, образованный единичными векторами $\overline{e}_1$ и $\overline{e}_2$, если известно, что векторы $\overline{a} = \overline{e}_1 + 2\overline{e}_2$ и $\overline{b} = 5\overline{e}_1 - 4\overline{e}_2$ перпендикулярны.

Ответ: $\varphi = \frac{\pi}{3}$.

6. В треугольнике ABC точка H – точка пересечения высот. Известно, что $\overline{AB} = (6;-2)$, $\overline{AC} = (3;4)$. Найти координаты вектора $\overline{AH}$.

Ответ: (2; 1).

7. Найти вектор $\overline{x}$, направленный по биссектрисе угла между векторами $\overline{a} = 7\overline{i} - 4\overline{j} - 4\overline{k}$ и $\overline{b} = -2\overline{i} - \overline{j} + 2\overline{k}$, если $\left|\overline{x}\right| = 5\sqrt{6}$.

Ответ: $\overline{x} = \frac{5}{3}\left(\overline{i} - 7\overline{j} + 2\overline{k}\right)$.

8. Дан треугольник с вершинами $A(4;1)$, $B(7;5)$ и $C(-4;7)$. Найти координаты точки D пересечения биссектрисы угла A со стороной BC.

Ответ: $D\left(\frac{10}{3};\frac{17}{3}\right)$.

9. Дан треугольник ABC, $A(-2,3,6)$, $B(-3,5,8)$, $C(2,3,3)$. Найти:

а) вектор $\bar{b}$, направленный по биссектрисе внутреннего угла при вершине A, если $|\bar{b}|=5\sqrt{6}$;

б) координаты точки D пересечения этой биссектрисы со стороной BC.

Ответ: а) $\bar{b}(7,10,1)$; б) $D\left(-1\frac{1}{8}, 4\frac{1}{4}, 6\frac{1}{8}\right)$.

10. К вершине куба приложены три силы, равные по величине соответственно $1, 2, 3$ и направленные по диагоналям граней куба, выходящих из одной вершины. Найти величину равнодействующей этих трех сил.

Ответ: 5.

11. Доказать, что векторы $\bar{a}=\bar{i}+2\bar{j}, \bar{b}=i-3\bar{j}$ и $\bar{c}=2\bar{i}+4\bar{j}$ линейно зависимы. Можно ли выразить вектор $\bar{b}$ через векторы $\bar{a}$ и $\bar{c}$?

Ответ: нет.

12. Даны векторы $\bar{a}=2\bar{e}_1-\bar{e}_2$, $\bar{b}=\bar{e}_1+3\bar{e}_2$, где $\bar{e}_1$ и $\bar{e}_2$ – базис. Показать, что векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ образуют базис, и найти координаты вектора $\bar{c}=3\bar{e}_1-2\bar{e}_2$ в базисе $\bar{a}$, $\bar{b}$.

Ответ: $\bar{c}=\left(\frac{11}{7};-\frac{1}{7}\right)$.

13. Найти работу силы $\bar{F}=\bar{i}+\bar{k}$ при перемещении материальной точки на вектор $\bar{a}=3\bar{i}-2\bar{j}+\bar{k}$.

Ответ: 4.

14. Длины базисных векторов $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ равны соответственно $1, 1, 2$; углы между ними следующие: $\angle(\bar{e}_1,\bar{e}_2)=90^\circ$, $\angle(\bar{e}_1,\bar{e}_3)=\angle(\bar{e}_2,\bar{e}_3)=60^\circ$. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\bar{a}=(-1;0;2)$, $\bar{b}=(2;-1;1)$. **Ответ:** $\sqrt{94}$.

15. Векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ неколлинеарны. При каких значениях скаляра λ коллинеарны векторы $\lambda\bar{a}+\bar{b}$ и $3\bar{a}+\lambda\bar{b}$?

Ответ: $\lambda=\pm\sqrt{3}$.

16. Векторы $\bar{a}, \bar{b}$ и $\bar{c}$ некомпланарны. При каких значениях скаляра λ компланарны векторы $\bar{a}+2\bar{b}+\lambda\bar{c}$, $4\bar{a}+5\bar{b}+6\bar{c}$, $7\bar{a}+8\bar{b}+\lambda^2\bar{c}$?

Ответ: $\lambda=3, \lambda=-4$.

17. Может ли некоторый ненулевой вектор образовывать с векторами $\bar{i}$, $\bar{j}$ и $\bar{k}$ углы, равные соответственно: а) $120^\circ, 135^\circ, 45^\circ$; б) $120^\circ, 135^\circ, 60^\circ$?

Ответ: а) нет; б) да.

18. Даны точки $A(1,-1,0)$, $B(5,3,-7)$, $C(8,-1,-1)$, $D(1,2,3)$. Найти:

а) скалярное произведение $\left(\overline{AB},\overline{AC}\right)$;

б) косинус угла между векторами $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$;

в) векторное произведение $\left[\overline{AB},\ \overline{AC}\right]$;

г) смешанное произведение $\left(\overline{AB},\overline{AC},\overline{AD}\right)$.

Ответ: а) 35; б) $\dfrac{7\sqrt{2}}{18}$; в) $(-4,-45,-28)$; г) -219.

19. Доказать, что четыре точки $A(1;2;-1)$, $B(0;1;5)$, $C(-1;2;1)$ и $D(2;1;3)$ лежат в одной плоскости.

20. Определить координаты концов отрезка, который точками $C(2;0;2)$ и $D(5;-2;0)$ разделен на три равные части.

Ответ: $(-1;2;4)$ и $(8;-4;-2)$.

21. Найти две точки A и B, если известно, что точка $C(-5;4)$ делит отрезок AB в отношении $3:4$, а точка $D(6;-5)$ – в отношении $2:3$.

Ответ: $A(160;-131)$, $B(-225;184)$.

22. Даны векторы $\overline{a}=(1;1)$ и $\overline{b}=(1;-1)$. Найти косинус угла между векторами $\overline{x}$ и $\overline{y}$, удовлетворяющими системе уравнений $\begin{cases}2\overline{x}+\overline{y}=\overline{a},\\ \overline{x}+2\overline{y}=\overline{b}.\end{cases}$

Ответ: $-\dfrac{4}{5}$.

23. Даны векторы $\overline{a}=(1;3)$, $\overline{b}=(2;-1)$ и $\overline{c}=(-4;1)$. Найти числа α и β такие, что $\alpha\overline{a}+\beta\overline{b}+\overline{c}=\overline{0}$.

Ответ: $\alpha=\dfrac{2}{7}$, $\beta=\dfrac{13}{7}$.

24. Проверить, что векторы $\overline{a}=(-5;-1)$ и $\overline{b}=(-1;3)$ образуют базис на плоскости. Найти координаты векторов $\overline{c}=(-1;2)$ и $\overline{d}=(2;-6)$ в этом базисе.

Ответ: $\overline{c}=\left(\dfrac{1}{16};\dfrac{11}{16}\right)$, $\overline{d}=(0;-2)$.

25. Проверить, образуют ли векторы $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ базис в $\mathbb{R}^3$. Если да, то найти координаты вектора $\overline{d}$ в этом базисе:

а) $\overline{a}(2,-1,4), \overline{b}(1,-1,0), \overline{c}(-1,3,-3), \overline{d}(2,1,12)$;

б) $\overline{a}(1,2,5), \overline{b}(1,3,2), \overline{c}(-2,-7,1), \overline{d}(6,16,16)$.

Ответ: а) да, $\overline{d}=3\overline{a}-4\overline{b}$; б) да, $\overline{d}=3\overline{a}+\overline{b}-\overline{c}$.

26. Даны вершины тетраэдра $A(0;0;2)$, $B(3;0;5)$, $C(1;1;0)$, $D(4;1;2)$. Найти его объем и длину высоты, опущенной из вершины D.

Ответ: $V_{ABCD}=\dfrac{1}{2}$, $h=\dfrac{1}{\sqrt{11}}$.

3.2. Прямая линия на плоскости

Общее уравнение прямой. Неполные уравнения прямой. Уравнение прямой с угловым коэффициентом. Каноническое уравнение прямой. Параметрическое уравнение прямой. Уравнение прямой, проходящей через две точки. Уравнение прямой в отрезках. Условие параллельности двух прямых. Условие перпендикулярности двух прямых. Нормальное уравнение прямой. Отклонение и расстояние от точки до прямой.

1. Прямая L задана общим уравнением $x-3y+6=0$. Записать уравнение прямой L: а) с угловым коэффициентом; б) в отрезках; в) каноническое; г) параметрическое; д) нормальное.

Ответ: а) $y=\frac{1}{3}x+2$; б) $\frac{x}{-6}+\frac{y}{2}=1$; в) $x-6=3y$, $\frac{x-6}{3}=\frac{y}{1}$; г) $\frac{x-6}{3}=\frac{y}{1}=t$, $x=3t+6$, $y=t$; д) $-\frac{x}{\sqrt{10}}+\frac{3}{\sqrt{10}}y-\frac{6}{\sqrt{10}}=0$.

2. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $A(-3;4)$, и параллельной прямой:

а) $x-2y+5=0$; б) $\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{3}$; в) $x=2$; г) $y=-1$; д) $x=3+t, y=4-7t$.

Ответ: а) $x-2y+11=0$; б) $\frac{x+3}{2}=\frac{y-4}{3}$; в) $x=-3$; г) $y=4$; д) $x=-3+t$, $y=4-7t$.

3. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $A(-3;4)$, и перпендикулярной прямой: а) $x-2y+5=0$; б) $\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{3}$; в) $x=2$; г) $y=-1$; д) $x=3+t, y=4-7t$.

Ответ: а) $\frac{x+3}{1}=\frac{y-4}{-2}$; б) $2x+3y-6=0$; в) $y=4$; г) $x=-3$; д) $x-7y+31=0$.

4. Составить уравнение прямой L, которая проходит через точку $M_0(2;10)$ и отсекает от второго координатного угла треугольник с площадью, равной 5.

Ответ: $5x-2y+10=0$.

5. Найти угол между прямыми $2x+3y-5=0$ и $x-3y-7=0$.

Ответ: $\varphi=\arccos\frac{7}{\sqrt{130}}$.

6. Даны две точки: $P(2; 3)$ и $Q(-1; 0)$. Составить уравнение прямой, проходящей через точку Q перпендикулярно к отрезку PQ.

Ответ: $x + y + 1 = 0$.

7. Через точку $M\,(3; 5)$ провести прямую так, чтобы она отсекала от координатного угла равнобедренный треугольник.

Ответ: $x + y - 8 = 0,\ x - y + 2 = 0$.

8. Составить уравнения катетов равнобедренного прямоугольного треугольника при уравнении гипотенузы $y = 7x - 4$ и вершине прямого угла $C\,(3; 4)$.

Ответ: $y = \dfrac{3}{4}x + \dfrac{7}{4},\ y = -\dfrac{4}{3}x + 8$.

9. Дан треугольник ABC с вершинами $A(6; 4)$, $B(-3; 5)$, $C(-2; -6)$. Составить уравнение прямой, проходящей через вершину A параллельно медиане, проходящей через вершину B.

Ответ: $6x + 5y - 56 = 0$.

10. Стороны треугольника расположены на прямых $x + 2y - 1 = 0$, $5x + 4y - 17 = 0$, $x - 4y + 11 = 0$. Составить уравнения высот треугольника.

Ответ: $2x - y + 1 = 0$, $4x - 5y + 22 = 0$, $4x + y - 18 = 0$.

11. Из точки $M\,(5; 4)$ выходит луч света под углом $\varphi = \operatorname{arctg} 2$ к оси OX и отражается от нее. Написать уравнение падающего и отраженного лучей.

Ответ: $y = 2x - 6,\ y = -2x + 6$.

12. Вершина равнобедренного треугольника находится в точке $(-7; 15)$, а середина его основания – в точке $(1; 3)$. Составить уравнения сторон треугольника, если тангенс угла при основании равен 4.

Ответ: $2x - 3y + 7 = 0$, $14x + 5y + 23 = 0$, $10x + 11y - 95 = 0$.

13. Составить уравнения сторон треугольника, зная одну из его вершин $A(2; -4)$, и уравнения биссектрис двух его углов: $x + y - 2 = 0$ и $x - 3y - 6 = 0$.

Ответ: $x + 7y - 6 = 0,\ x - y - 6 = 0,\ 7x + y - 10 = 0$.

14. Установить взаимное расположение двух данных прямых на плоскости (совпадают, параллельны, пересекаются); в случае пересечения найти общую точку прямых и косинус угла между ними:

а) $2x + 3y = 0$ и $\begin{cases} x = 3 + t, \\ y = 2 - t; \end{cases}$

б) $x + 2y = 15$ и $\begin{cases} x = 5 + 4t, \\ y = -2 - 2t; \end{cases}$

в) $3x + 4y - 20 = 0$ и $\begin{cases} x = 4 - 8t, \\ y = 2 + 6t; \end{cases}$

г) $x-5y+9=0$ и $x+y-3=0$.

Ответ: а) $(15;-10)$, $\frac{5}{\sqrt{26}}$; б) параллельны; в) совпадают; г) $(1;2)$, $\frac{2}{\sqrt{13}}$.

15. Составить уравнения прямых, проходящих через точку $A(3;1)$ и наклоненных к прямой $2x+3y-1=0$ под углом $45°$.

Ответ: $5x+y-16=0$, $x-5y+2=0$.

16. Составить уравнение прямой L_3, симметричной прямой L_1 $(3x-y+5=0)$, относительно прямой L_2 $(x+y-1=0)$.

Ответ: $x-3y+7=0$.

17. Найти длину h высоты, опущенной из вершины $A(4;4)$ треугольника ABC, если $B(-6;-1)$, $C(-2;-4)$.

Ответ: 10.

18. Записать уравнение биссектрисы L_0 угла, образованного прямыми L_1 $(x+7y=0)$ и L_2 $(x-y-4=0)$, внутри которого лежит точка $A(1;1)$.

Ответ: $3x+y-10=0$.

19. Найти точку $B(x_1;y_1)$, симметричную точке $A(8;12)$ относительно прямой L $(x-2y+6=0)$.

Ответ: $B(12;4)$.

3.3. Плоскость и прямая в пространстве

Общее уравнение плоскости. Неполные уравнения плоскости. Векторное уравнение плоскости. Параметрическое уравнение плоскости. Уравнение прямой, проходящей через три заданные точки. Уравнение плоскости в отрезках. Условия параллельности и перпендикулярности плоскостей. Угол между двумя плоскостями. Нормальное уравнение плоскости. Расстояние от точки до плоскости. Общее уравнение прямой в пространстве. Векторные уравнения прямой. Параметрическое уравнение прямой в пространстве. Каноническое уравнение прямой в пространстве. Условие параллельности двух прямых. Условия параллельности и перпендикулярности прямой и плоскости. Угол между прямой и плоскостью. Угол между двумя прямыми. Расстояние между скрещивающимися прямыми. Взаимное расположение прямой и плоскости.

1. Составить уравнение плоскости, которая проходит:

а) через ось OX и точку $M_1(4;-1;2)$;

б) через ось OY и точку $M_2(1;4;-3)$;

в) через ось OZ и точку $M_3(3;-4;7)$.

Ответ: а) $2y+z=0$; б) $x-z-1=0$; в) $5x+y-13=0$.

2. Составить общее уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(2;-1;-1)$ параллельно векторам $\bar{a}=(4;2;1)$ и $\bar{b}=(-5;1;2)$.

Ответ: $3x-13y+14z-5=0$.

3. Составить общее уравнение плоскости, заданной параметрически: $x=2+3u-4v,\ \ y=4-v,\ \ z=2+3u$.

Ответ: $x-4y-z+16=0$.

4. Плоскость P задана общим уравнением $x+3y-4z+10=0$. Записать нормальное уравнение этой плоскости.

Ответ: $-\dfrac{1}{\sqrt{26}}x-\dfrac{3}{\sqrt{26}}y+\dfrac{4}{\sqrt{26}}z-\dfrac{10}{\sqrt{26}}=0$.

5. Определить, при каких значениях l и m плоскости $2x+ly+3z-5=0$ и $mx-6y-6z+2=0$ параллельны.

Ответ: $l=3,\ \ m=-4$.

6. Определить, при каком значении l плоскости $3x-5y+lz-3=0$ и $x+3y+2z+5=0$ перпендикулярны.

Ответ: $l=6$.

7. Доказать, что три плоскости $2x-y+3z-5=0$, $3x+y+2z-1=0$, $4x+3y+z+2=0$ пересекаются по трем различным параллельным прямым.

8. Установить взаимное расположение двух данных плоскостей (пересекаются, параллельны, совпадают):

а) $x-y+3z+1=0$ и $2x-y+5z-2=0$;

б) $x-2y+z+4=0$ и $-2x+4y-2z-8=0$.

Ответ: а) пересекаются; б) совпадают.

9. Доказать, что плоскости $x=-1+8v,\ y=1+u+v,\ z=-u+3v$ и $x=1+2t+4s,\ y=4-y-3s,\ z=4+2t+5s$ параллельны, и найти расстояние d между ними.

Ответ: 4.

10. Составить уравнение плоскости, перпендикулярной плоскости $2x-2y+4z-5=0$ и отсекающей на координатных осях OX и OY отрезки $a=-2,\ b=\dfrac{2}{3}$.

Ответ: $x-3y-2z+2=0$.

11. Прямая L задана следующими общими уравнениями:

$$\begin{cases}2x+3y-z-4=0,\\ 3x-5y+2z+1=0.\end{cases}$$

Написать канонические уравнения прямой.

Ответ: $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{-7}=\dfrac{z+2}{-19}$.

12. Написать канонические уравнения прямой, проходящей через точки $M_1(1;\,2;\,3)$ и $M_2(2;\,4;\,7)$.

Ответ: $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z-3}{4}$.

13. Составить канонические и параметрические уравнения прямой, проходящей через точку $M(1;\,2;\,5)$ перпендикулярно плоскости $2x-3y+4z-5=0$.

Ответ: $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{-3}=\dfrac{z-5}{4}=t,\ \begin{cases} x=2t+1, \\ y=-3t+2, \\ z=4t+5. \end{cases}$

14. Доказать параллельность прямых $\dfrac{x+2}{3}=\dfrac{y-1}{-2}=\dfrac{z}{1}$ и $\begin{cases} x+y-z=0, \\ x-y-5z-8=0. \end{cases}$

15. Установить взаимное расположение прямых $x=-t,\ y=-4-5t,$ $z=3+3t$ и $\begin{cases} 4x+y+3z-5=0, \\ 7x-2y-z-5=0. \end{cases}$

Ответ: совпадают.

16. Доказать, что прямые параллельны, и найти расстояние между ними: $x=2t,\ \ y=0,\ \ z=3+3t,\ \ z=-2t$ и $\begin{cases} x+y+z-3=0, \\ x-y+z-1=0. \end{cases}$

Ответ: $\sqrt{3}$.

17. Даны прямые $\dfrac{x+2}{2}=\dfrac{y}{-3}=\dfrac{z-1}{4}$ и $\dfrac{x-3}{l}=\dfrac{y-1}{4}=\dfrac{z-7}{2}$. При каком значении l они пересекаются?

Ответ: $l=3$.

18. Найти точку пересечения прямой и плоскости: $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+1}{-2}=\dfrac{z}{6}$, $2x+3y+z-1=0$.

Ответ: $(2;-3;6)$.

19. Доказать, что прямые пересекаются, и найти координаты их точки (точек) пересечения при $x=-3t,\ \ y=2+3t,\ \ z=1$ и $\dfrac{x-1}{5}=\dfrac{y-1}{13}=\dfrac{z-1}{10}$.

Ответ: $(1,1,1)$.

20. Доказать, что прямые скрещиваются, и найти расстояние между ними: $\dfrac{x-3}{-6}=\dfrac{y+1}{4}=\dfrac{z}{1}$ и $x=-2+3t,\ \ y=4,\ \ z=3-t$.

Ответ: 31/13.

21. Составить уравнение плоскости, проходящей через две параллельные прямые $\frac{x-2}{3}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-3}{-2}$, $\frac{x-1}{3}=\frac{y-2}{2}=\frac{z+3}{-2}$.

Ответ: $6x-20y-11z+1=0$.

22. Убедиться, что прямые L_1 $\left(\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{-3}=\frac{z-5}{4}\right)$ и L_2 $\left(\frac{x-7}{3}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-1}{-2}\right)$ принадлежат одной плоскости, и написать уравнение этой плоскости.

Ответ: $2x-16y-13z+31=0$.

23. Точка A лежит на прямой $\frac{x-1}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z+1}{1}$. Расстояние от точки A до плоскости $x+y+z+3=0$ равно $\sqrt{3}$. Найти координаты точки A.

Ответ: $A(1;0;-1)$ или $A(-1;-3;-2)$.

24. Даны точка $A(3;-1;1)$ и плоскость $x+2y+2z+6=0$. Найти координаты точки, симметричной точке A относительно этой плоскости.

Ответ: $(1;-5;-3)$.

25. Составьте уравнение плоскости, проецирующей прямую $\begin{cases}2x-3y-4z+5=0,\\ x+y+z-2=0\end{cases}$ на плоскость XOZ.

Ответ: $5x-z-1=0$.

26. Составить канонические уравнения проекции прямой $x=1+2t$, $y=3+7$, $z=2+t$ на плоскость $3x-2y-z+14=0$.

Ответ: $\frac{x+5}{19}=\frac{y}{20}=\frac{z+1}{17}$.

27. Написать каноническое уравнение прямой L_1, которая проходит через точку $M_0(3;-2;-4)$ параллельно плоскости $P_1(3x-2y-3z-7=0)$ и пересекает прямую $L_2\left(\frac{x-2}{3}=\frac{y+4}{-2}=\frac{z-1}{2}\right)$.

Ответ: $\frac{x-3}{5}=\frac{y+2}{-6}=\frac{z+4}{9}$.

28. На плоскости OXY найти такую точку M, сумма расстояний от которой до точек $A(-1;2;5)$ и $B(11;-16;-10)$ была бы наименьшей.

Ответ: $M(3;-4;0)$.

29. При каком значении m угол φ между прямой $\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z}{1}$ и плоскостью $mx+y+z+4=0$ равен $45°$?

Ответ: $m=\pm\sqrt{6}$.

3.4. Кривые и поверхности второго порядка

Понятие кривой второго порядка. Определение эллипса. Каноническое уравнение эллипса. Параметрическое уравнение эллипса. Фокусы эллипса, вершины, полуоси, эксцентриситет, фокальные радиусы, уравнения директрис, уравнение касательной в заданной точке. Определение гиперболы. Каноническое уравнение гиперболы. Асимптоты гиперболы. Фокусы гиперболы, вершины, полуоси, эксцентриситет, фокальные радиусы, уравнения директрис, уравнение касательной в заданной точке. Определение параболы. Каноническое уравнение параболы. Фокус параболы, вершина, эксцентриситет, фокальный радиус, уравнение директрисы, уравнение касательной в заданной точке. Оптические свойства кривых второго порядка. Упрощение общего уравнения кривой второго порядка в случае отсутствия члена с произведением *xy*. Канонические уравнения и изображения поверхностей второго порядка: эллипсоид, однополостный гиперболоид, двуполостный гиперболоид, эллиптический параболоид, гиперболический параболоид, конус, эллиптический цилиндр, гиперболический цилиндр, параболический цилиндр. Исследование формы поверхности второго порядка методом сечений.

1. В данной системе координат эллипс имеет каноническое уравнение. Составить это уравнение, если:

а) расстояние между вершинами, лежащими на большой оси, равно 16, а расстояние между фокусами равно 10;

б) хорда, соединяющая две вершины эллипса, имеет длину 5 и наклонена к его большой оси под углом $\arcsin\frac{3}{5}$;

в) фокусами эллипса являются точки $(\pm 1;\, 0)$, а точка $\left(\sqrt{3};\, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ принадлежит эллипсу;

г) фокусами эллипса являются точки $(\pm 2;\, 0)$, а директрисами являются прямые $x = \pm 18$;

д) расстояние от директрисы до ближайшей вершины равно 4, а до вершины, лежащей на оси OY, равно 8.

Ответ: 1) $\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{39}=1$; 2) $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$; 3) $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$; 4) $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{32}=1$; 5) $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$.

2. В данной системе координат гипербола имеет каноническое уравнение. Составить это уравнение, если:

а) расстояние между вершинами равно 10, а расстояние между фокусами равно 12;

б) длина вещественной оси равна 1, а точка $(1;\,3)$ принадлежит гиперболе;

в) длина мнимой полуоси равна 1, а вершина гиперболы делит расстояние между фокусами в отношении $4:1$;

г) эксцентриситет гиперболы равен $\frac{7}{5}$, а расстояние от вершины до ближайшего фокуса равно 2.

Ответ: а) $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{11}=1$; б) $\frac{x^2}{1/4}-\frac{y^2}{3}=1$; в) $\frac{x^2}{1/3}-\frac{y^2}{1}=1$; г) $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{24}=1$.

3. В данной системе координат парабола имеет каноническое уравнение. Составить это уравнение, если:

а) точка $(5;-5)$ принадлежит параболе;

б) расстояние от фокуса до директрисы равно 12;

в) длина хорды, проходящей через фокус под углом $45°$ к оси параболы, равна 18.

Ответ: а) $y^2=5x$; б) $y^2=24x$; в) $y^2=9x$.

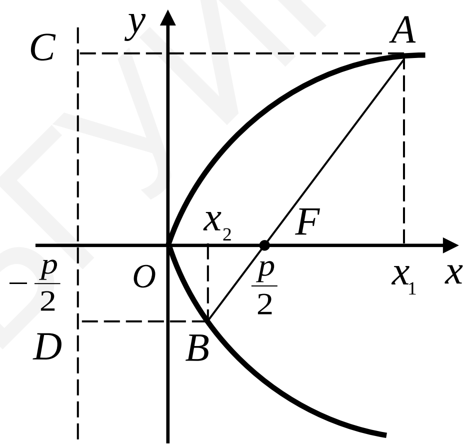


Рис. 3.1

4. Дана окружность $(x-1)^2+(y-2)^2=25$.

Составить уравнение ее касательной в точке $A(5;\,5)$.

Ответ: $4x+3y-35=0$.

5. Установить, какая линия определяется следующим уравнением: $x=-5+\frac{2}{3}\sqrt{8+2y-y^2}$. Изобразить ее на чертеже.

Ответ: правая половина эллипса с центром в $M_0(-5;\,1)$ и полуосями $a=2$ и $b=3$.

6. Составить уравнение линии, расстояние от каждой точки которой до точки $A(-1;\,0)$ вдвое меньше расстояния до прямой $x=-4$.

Ответ: $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{12}=1$.

7. Составить уравнение линии, расстояние от каждой точки которой до точки $A(2;\,0)$ и до прямой $5x+8=0$ соотносится как $5:4$.

Ответ: $\frac{(x-8)^2}{8^2}-\frac{y^2}{24^2}=1$.

8. Составить уравнение линии, каждая точка которой одинаково удалена от точки $A(0;\,2)$ и от прямой $y=4$.

Ответ: $x^2=-4(y-3)$.

9. Установить, какие кривые определяются нижеследующими уравнениями:

а) $16x^2+25y^2-32x+50y-359=0$;

б) $\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{9}y^2-x+\frac{2}{3}y-1=0$;

в) $2x^2-4x+2y-3=0$.

Построить чертежи.

Ответ:

а) эллипс $\frac{x'^2}{225}+\frac{y'^2}{16}=1$, новое начало координат $0'(1;-1)$;

б) гипербола $\frac{x'^2}{4}-\frac{y'^2}{9}=1$, новое начало координат $0'(2;3)$;

в) парабола $x'^2=-y'$, новое начало $0'\left(1;\frac{5}{2}\right)$.

10. Написать каноническое уравнение кривой $r=\frac{9}{4-5\cos\varphi}$.

Ответ: $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$. Правая ветвь гиперболы.

11. Установить, какие кривые заданы уравнениями в полярных координатах:

а) $r=\frac{15}{3-7\cos\varphi}$; б) $r=\frac{7}{5-2\cos\varphi}$; в) $r=\frac{3}{4-4\cos\varphi}$; г) $r=\frac{6}{2-\cos\varphi}$.

Ответ: а) гипербола; б) эллипс; в) парабола; г) эллипс.

12. Определить тип поверхности при всевозможных λ:

а) $\lambda x^2+y^2=z$; б) $\lambda(x^2+y^2)=z$; в) $x^2+\lambda y^2=\lambda z$.

Ответ:

а) при $\lambda>0$ – эллиптический параболоид, при $\lambda=0$ – параболический цилиндр, при $\lambda<0$ – гиперболический параболоид;

б) при $\lambda\neq 0$ – эллиптический параболоид, при $\lambda=0$ – плоскость;

в) при $\lambda>0$ – эллиптический параболоид; при $\lambda=0$ – плоскость, при $\lambda<0$ – гиперболический параболоид.

13. Определить вид и параметры поверхности, а также схематически изобразить ее:

а) $3x^2+4y^2+6z^2-6x+16y-36z+49=0$;

б) $2x^2+3y^2+6z^2-8x-6y-12z-1=0$;

в) $x^2-4y^2+z^2-2x+12y-4z-3=0$;

г) $6x^2+3y^2-2z^2+24x-6y-36z-4z+25=0$;

д) $2x^2+3y^2+16x-18y-12z+47=0$;

е) $2x^2-3y^2-12x-6y+3=0$;

ж) $9x^2+4y^2+18x-16y+21=0$.

Ответ:

а) эллипсоид $\frac{(x-1)^2}{8}+\frac{(y+2)^2}{6}+\frac{(z-3)^2}{4}=1$;

б) однополостный гиперболоид $\frac{(x-2)^2}{3}+\frac{(y-1)^2}{2}-\frac{(z+1)^2}{1}=1$;

в) двуполостный гиперболоид $(x-1)^2-4\left(y-\frac{3}{2}\right)^2+(z-2)^2=-1$;

г) конус $\frac{(x+2)^2}{1}+\frac{(y-1)^2}{2}-\frac{(z+1)^2}{3}=0$;

д) эллиптический параболоид $\frac{(x+4)^2}{3}+\frac{(y-3)^2}{2}=2(z+1)$;

е) гиперболический цилиндр $\frac{(x-3)^2}{6}-\frac{(y+1)^2}{4}=1$;

ж) эллиптический цилиндр $9(x+1)^2+4(y+2)^2=4$.

14. Установить, что плоскость $y+6=0$ пересекает гиперболический параболоид $\frac{x^2}{5}-\frac{y^2}{4}=6z$ по параболе. Найти ее параметр и вершину.

Ответ: 15; $\left(0;-6;-\frac{3}{2}\right)$.

15. Установить, при каких значениях m плоскость $x+my-2=0$ пересекает эллиптический параболоид $\frac{x^2}{2}+\frac{z^2}{3}=y$: а) по эллипсу; б) по параболе.

Ответ: а) $m\neq 0$ и $m>-\frac{1}{4}$; б) $m=0$.

16. Доказать, что через точку $A(4;3;0)$, принадлежащую гиперболическому параболоиду $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=2z$, можно провести две прямые, целиком лежащие на параболоиде. Составить канонические уравнения этих прямых.

Ответ: $\frac{x-4}{4}=\frac{y-3}{3}=\frac{z}{0}$; $\frac{x-4}{4}=\frac{y-3}{-3}=\frac{z}{2}$.

4. Линейная алгебра

4.1. Линейные пространства

Определения линейного пространства, подпространства и линейной оболочки векторов. Линейная зависимость векторов, критерий линейной зависимости. Базис и размерность линейного пространства. Координаты вектора. Матрица системы векторов. Матрица перехода от базиса к базису. Преобразование координат вектора. Ранг матрицы. Вычисление ранга матрицы с помощью элементарных преобразований. Критерий равенства нулю определителя. Теорема о базисном миноре.

1. Показать, что все многочлены степени не выше n образуют линейное пространство.

2. Доказать, что множество всех матриц размером $m \times n$ с определенными ранее операциями над матрицами является линейным пространством. Найти размерность этого пространства и указать простейший базис.

Ответ: размерность равна mn.

3. Образуют ли линейное пространство векторы плоскости, каждый из которых лежит на одной из осей координат: OX или OY?

Ответ: нет.

4. Является ли линейным пространством множество Z всех целых чисел с обычными операциями сложения и умножения?

Ответ: нет.

5. Исследовать на линейную зависимость систему векторов:

а) $\bar{a} = (2; 1; -1)$, $\bar{b} = (-1; 3; 4)$, $\bar{c} = (1; 2; -3)$;

б) $\bar{a} = (-1; 2; 0)$, $\bar{b} = (1; 2; -1)$, $\bar{c} = (3; 0; 1)$;

в) $\bar{x}_1 = \sin t$, $\bar{x}_2 = \sin 2t$, $\bar{x}_3 = \sin 3t$.

Ответ: а) независима; б) зависима; в) независима.

6. Доказать линейную зависимость векторов $\bar{a} = (1; 2; -1; 0)$, $\bar{b} = (1; -1; 2; -2)$, $\bar{c} = (3; 3; 0; -2)$.

7. Даны векторы $\bar{a} = \bar{i} + \bar{j}$, $\bar{b} = 2\bar{i} - \bar{j}$. Доказать, что векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ образуют базис. Найти координаты вектора $\bar{c} = 2\bar{i} - 4\bar{j}$ в базисе $\left(\bar{a}, \bar{b}\right)$.

Ответ: $(-2; 2)$.

8. Показать, что в линейном пространстве квадратных матриц второго порядка векторы $\bar{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \bar{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \bar{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \bar{e}_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ образуют базис, и найти в указанном базисе координаты вектора $\bar{a} = \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ -6 & 4 \end{pmatrix}$.

Ответ: $(3; 4; -2; 1)$.

9. Используя определение ранга матрицы, найти ранг матрицы:

а) $\begin{pmatrix} 1 & 5 & -1 \\ 2 & 4 & -3 \\ 3 & -1 & -3 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 2 \\ 2 & 0 & 3 & -1 \\ 3 & 0 & 8 & 2 \end{pmatrix}$.

Ответ: а) $r = 3$; б) $r = 2$.

10. Найти ранг матрицы методом окаймляющих миноров:

а) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & 5 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 5 & -3 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & -1 & 3 & 2 & 5 \\ 7 & -5 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & -3 & -5 & 0 & 7 \end{pmatrix}$.

Ответ: а) $r = 2$; б) $r = 3$.

11. Вычислить ранг матрицы при помощи элементарных преобразований:

а) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 & 10 & -3 \\ 0 & 1 & -3 & 5 & 4 \\ 2 & 1 & 23 & 5 & -18 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & 5 \\ 2 & -1 & 0 & 3 \\ 10 & 1 & 0 & 4 \\ 8 & 2 & 0 & 1 \\ 13 & 3 & -1 & 9 \end{pmatrix}$.

Ответ: а) $r = 2$; б) $r = 3$.

12. Найти значения λ, при которых матрица $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 \\ \lambda & 4 & 10 & 1 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ имеет наименьший ранг. Чему равен ранг при найденных λ, и чему он равен при других значениях λ?

Ответ: при $\lambda = 0$ $r = 2$; при $\lambda \neq 0$ $r = 3$.

13. В R^4 даны векторы $\bar{x}_1 = (1; 2; 0; 6)$, $\bar{x}_2 = (2; 0; 3; 1)$, $\bar{x}_3 = (3; 2; 3; 7)$, $\bar{x}_4 = (7; 2; 9; 9)$. Найти ранг системы векторов и указать базисные векторы.

Ответ: $r = 2$. Любые два вектора системы векторов образуют базис.

14. Пусть даны векторы $\bar{x}_1 = (1; 1; 1)$, $\bar{x}_2 = (1; 2; 3)$, $\bar{x}_3 = (2; 1; 0)$, $\bar{x}_4 = (3; 4; 5)$. Доказать, что $L(\bar{x}_1; \bar{x}_2) = L(\bar{x}_3; \bar{x}_4)$.

15. Доказать, что вектор $\bar{a} = (2, -1, 6, 4) \in L(\bar{x}_1; \bar{x}_2)$, где $\bar{x}_1 = (1; 5; -2; 1)$, $\bar{x}_2 = (11; 11; 18; 19)$.

16. Найти матрицу перехода от базиса $(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$ к базису $(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c})$ и матрицу перехода от базиса $(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c})$ к базису $(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$, если $\bar{a} = 2\bar{e}_1 + 2\bar{e}_3$, $\bar{b} = 3\bar{e}_3 - \bar{e}_2$, $\bar{c} = 3\bar{e}_1 + \bar{e}_3$.

Ответ: $T=\begin{pmatrix}2 & 0 & 3\\ 0 & -1 & 0\\ 2 & 3 & 1\end{pmatrix}$, $T^{-1}=\begin{pmatrix}-1 & 9 & 3\\ 0 & -4 & 0\\ 2 & -6 & -2\end{pmatrix}$.

4.2. Системы линейных уравнений

Общие понятия систем линейных уравнений. Матричный способ решения СЛУ. Формулы Крамера. Метод Гаусса. Совместность произвольных СЛУ. Теорема Кронекера – Капелли и следствие из нее. Однородные системы уравнений. Существование ненулевого решения. Общее решение однородных систем. Неоднородные СЛУ. Структура общего решения неоднородных систем.

1. Решить системы линейных уравнений: а) матричным методом; б) по формулам Крамера:

а) $\begin{cases}2x-y=5,\\ 3x+5y=1.\end{cases}$ **Ответ:** $x=2,\ y=-1$;

б) $\begin{cases}2x_1-x_2+2x_3=1,\\ 3x_1+2x_2-x_3=9,\\ x_1-4x_2+3x_3=-5.\end{cases}$ **Ответ:** $x_1=2,\ x_2=1,\ x_3=-1$;

в) $\begin{cases}5x_1+8x_2+x_3=2,\\ 3x_1-2x_2+6x_3=-7,\\ 2x_1+x_2-x_3=-5.\end{cases}$ **Ответ:** $x_1=-3,\ x_2=2,\ x_3=1$;

г) $\begin{cases}2x_1+3x_2+11x_3+5x_4=2,\\ x_1+x_2+5x_3+2x_4=1,\\ 2x_1+x_2+3x_3+2x_4=-3,\\ x_1+x_2+3x_3+4x_4=-3.\end{cases}$ **Ответ:** $x_1=-2,\ x_2=0,\ x_3=1,\ x_4=-1$.

2. Решить систему линейных уравнений методом Гаусса:

а) $\begin{cases}x_1-8x_2=3,\\ 2x_1+x_2=1,\\ 4x_1+7x_2=-4.\end{cases}$ **Ответ:** система несовместна;

б) $\begin{cases}3x_1+6x_2+2x_3=4,\\ 4x_1-x_2-3x_3=1,\\ 2x_1+4x_2+x_3=4.\end{cases}$ **Ответ:** $x_1=-2,\ x_2=3,\ x_3=-4$;

в) $\begin{cases} 3x_1-2x_2-5x_3+x_4=3, \\ x_1+2x_2 \qquad -4x_4=-3, \\ 2x_1-3x_2+\ x_3+5x_4=-3, \\ x_1-\ x_2-4x_3+9x_4=22. \end{cases}$

Ответ: $x_1=-1, x_2=3, x_3=-2, x_4=2$;

г) $\begin{cases} x_1+x_2-2x_3-x_4+x_5=1, \\ 3x_1-x_2+x_3+4x_4+3x_5=4, \\ x_1+5x_2-9x_3-8x_4+x_5=0. \end{cases}$

Ответ: $\begin{cases} x_1=\dfrac{5}{4}+\dfrac{1}{4}x_3-\dfrac{3}{4}x_4-x_5, \\ x_2=-\dfrac{1}{4}+\dfrac{7}{4}x_3+\dfrac{7}{4}x_4, \end{cases}$ $x_3, x_4, x_5 \in R$;

д) $\begin{cases} x_1+3x_2+5x_3-2x_4=3, \\ 2x_1+7x_2+3x_3+x_4=5, \\ x_1+5x_2-9x_3+8x_4=1, \\ 5x_1+18x_2+4x_3+5x_4=12. \end{cases}$

Ответ: $\begin{cases} x_1=6-26x_3+17x_4, \\ x_2=-1+7x_3-5x_4. \end{cases}$ $x_3, x_4 \in R$;

е) $\begin{cases} 4x_1-3x_2+2x_3-x_4=8, \\ 3x_1-2x_2+x_3-3x_4=7, \\ 2x_1-x_2-5x_4=6, \\ 5x_1-3x_2+x_3-8x_4=1. \end{cases}$

Ответ: система несовместна.

3. Найти общее решение однородной системы линейных уравнений:

а) $\begin{cases} 2x_1+x_2-x_3=0, \\ 9x_1+2x_2-3x_3=0. \end{cases}$

Ответ: $x_1=\dfrac{1}{5}c,\ x_2=\dfrac{3}{5}c,\ x_3=c$;

б) $\begin{cases} x_1+2x_2+x_3+x_4=0, \\ 2x_1+5x_2+x_3+5x_4=0, \\ 3x_1+8x_2+x_3+9x_4=0. \end{cases}$

Ответ: $\begin{cases} x_1=-3c_1+5c_2, \\ x_2=c_1-3c_2, \\ x_3=c_1,\ x_4=c_2; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 4x_1+11x_2-13x_3+16x_4=0, \\ 3x_1+4x_2-5x_3+7x_4=0, \\ 2x_1-3x_2+3x_3-2x_4=0, \\ 7x_1-2x_2+x_3+3x_4=0. \end{cases}$

Ответ: $\begin{cases} x_1=\dfrac{3}{17}c_1-\dfrac{13}{17}c_2, \\ x_2=\dfrac{19}{17}c_1-\dfrac{20}{17}c_2, \\ x_3=c_1\ \ x_4=c_2. \end{cases}$

4. Найдите фундаментальную систему решений однородной СЛУ и укажите размерность пространства решений системы:

$$\begin{cases} x_1-2x_2-3x_3+x_4-x_5=0, \\ x_1+x_2+x_3+2x_4+x_5=0, \\ 2x_1-x_2-2x_3+3x_4=0, \\ 3x_1-x_3+5x_4+x_5=0. \end{cases}$$

Ответ: $\overline{X}=c_1\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix} -5 \\ -1 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}+c_3\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}.$

5. Доказать, что неоднородная система линейных уравнений совместна, и найти ее общее решение:

$$\begin{cases} 2x_1-x_2+3x_3-2x_4+4x_5=1, \\ 4x_1-2x_2+5x_3+x_4+7x_5=1, \\ 2x_1-x_2+x_3+8x_4+2x_5=-1. \end{cases}$$

Ответ: $\begin{cases} x_1 = c_1, \\ x_2 = 2 + 2c_1 + 13c_2 + c_3, \\ x_3 = 1 + 5c_2 - c_3, \\ x_4 = c_2, \\ x_5 = c_3. \end{cases}$

6. Найти общее решение неоднородной системы линейных уравнений, используя фундаментальную систему решений, соответствующей однородной:

а) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 2, \\ 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 1, \\ 4x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 3. \end{cases}$

Ответ: $\bar{x} = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 15 \\ 4 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 10 \\ -1 \\ 15 \\ 4 \end{pmatrix};$

б) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 0, \\ x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 4x_4 - 5x_5 = 2, \\ 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 = -1. \end{cases}$

Ответ: $\bar{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1/2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} 0 \\ -3/2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 0 \\ -5/2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix};$

в) $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 - 3x_5 = -2, \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 3x_4 - x_5 = 12, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 7, \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 6x_5 = 23. \end{cases}$

Ответ: $\bar{x} = \begin{pmatrix} -16 \\ 23 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 5 \\ -6 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$

7. При каком значении параметра t совместна система линейных уравнений:

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 = 1, \\ 4x_1 - 6x_2 + 2x_3 + 3x_4 = t, \\ 2x_1 - 3x_2 + 11x_3 - 15x_4 = 13. \end{cases}$$

Ответ: 8.

8. Существует ли система линейных уравнений, для которой каждая из следующих формул является общим решением:

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} -3/5 \\ 1/5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -1/5 \\ 2/5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad x = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}?$$

Ответ: да.

4.3. Линейные операторы

Определение линейного оператора. Матрица линейного оператора. Связь между координатами вектора и его образа. Преобразование матрицы линейного оператора при переходе к новому базису. Характеристическое уравнение линейного оператора. Произведение линейных операторов. Собственные числа линейного оператора. Диагонализация линейного оператора. Ортогональные операторы. Самосопряженные операторы.

1. Доказать линейность оператора и записать его матрицу:

а) $f(\overline{x}) = (x_1 + x_3,\ 2x_1 + x_3, 3x_1 - x_2 + x_3)$;

б) $f(\overline{x}) = (0,\ x_2 + x_3, 0)$.

Ответ: а) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$; б) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

2. Доказать, что оператор $f(\overline{x}) = (x_1 + x_2, x_3 - x_1, x_2 + 1)$ не является линейным.

3. Доказать, что оператор $f(\overline{x}) = (x_1^2, x_1 - x_3, x_2 + x_3)$ не является линейным.

4. Являются ли линейными следующие операторы:

а) $f(\overline{x}) = (x_2 + 3x_3, 5x_1, 2x_3 - 3x_1)$;

б) $f(\overline{x}) = (4x_1 + x_2 - 1, x_1 - 2x_2, 3)$.

Ответ: а) да; б) нет.

5. Найти в базисе $(\bar{i}, \bar{j}, \bar{k})$ матрицу линейного оператора f, переводящего каждый вектор $\bar{x}$ в вектор $\bar{y} = [\bar{x}, \bar{a}]$, если $\bar{a} = 2\bar{i} + \bar{j} - \bar{k}$.

Ответ: $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

6. Записать в базисе $(1, x, x^2)$ линейного пространства многочленов степени не выше двух матрицу оператора дифференцирования.

Ответ: $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

7. Найти в базисе $(\bar{i}, \bar{j}, \bar{k})$ матрицу оператора f, если f – проектирование:

а) на прямую $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+2}{-3} = \dfrac{z}{\sqrt{3}}$;

б) на плоскость $2x - y + 2z - 5 = 0$.

Ответ: а) $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{3}{8} & \frac{\sqrt{3}}{8} \\ -\frac{3}{8} & \frac{9}{16} & -\frac{3\sqrt{3}}{16} \\ \frac{\sqrt{3}}{8} & \frac{-3\sqrt{3}}{16} & \frac{3}{16} \end{pmatrix}$; б) $A = \begin{pmatrix} \frac{5}{9} & \frac{2}{9} & -\frac{4}{9} \\ \frac{2}{9} & \frac{8}{9} & \frac{2}{9} \\ -\frac{4}{9} & \frac{2}{9} & \frac{5}{9} \end{pmatrix}$.

8. Задан линейный оператор f проектирования на плоскость $2x + 3y + 4z = 0$. Найти матрицу этого линейного оператора в базисе $\bar{e}_1 = (1; 0; 0), \bar{e}_2 = (0; 1; 0), \bar{e}_3 = (0; 0; 1)$.

Ответ: $A = \dfrac{1}{29}\begin{pmatrix} 25 & -6 & -8 \\ -6 & 20 & -12 \\ -8 & -12 & 13 \end{pmatrix}$.

9. В базисе, состоящем из векторов $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$, линейный оператор f задан матрицей $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Найти матрицу этого оператора в базисе $(\bar{e}'_1, \bar{e}'_2, \bar{e}'_3)$, если $\bar{e}'_1 = 2\bar{e}_1 - \bar{e}_2 + 2\bar{e}_3$, $\bar{e}'_2 = -2\bar{e}_1 + \bar{e}_2 - \bar{e}_3$, $\bar{e}'_3 = -5\bar{e}_1 + 3\bar{e}_2 + \bar{e}_3$.

Ответ: $\begin{pmatrix} -19 & 9 & -16 \\ -36 & 18 & -24 \\ 6 & -3 & 4 \end{pmatrix}$.

10. Определить, могут ли матрицы $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ быть матрицами одного линейного оператора в разных базисах.

Ответ: нет.

11. Найти матрицу линейного оператора, переводящего векторы $\overline{a}_1 = (2; 0; 3)$, $\overline{a}_2 = (4; 1; 5)$, $\overline{a}_3 = (3; 1; 2)$ в векторы $\overline{b}_1 = (1; 2; -1)$, $\overline{b}_2 = (4; 5; -2)$, $\overline{b}_3 = (1; -1; 1)$, в том же базисе, в котором даны координаты векторов.

Ответ: $\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} -6 & 11 & 5 \\ -12 & 13 & 10 \\ 6 & -5 & -5 \end{pmatrix}$.

12. Задан линейный оператор f проектирования на плоскость $3x - y + 2z = 0$. Определить матрицу этого линейного оператора в базисе $\overline{e}_1 = (1; 0; 0)$, $\overline{e}_2 = (0; 1; 0)$, $\overline{e}_3 = (0; 0; 1)$.

Ответ: $\dfrac{1}{14}\begin{pmatrix} 5 & 3 & -6 \\ 3 & 13 & 2 \\ -6 & 1 & 10 \end{pmatrix}$.

13. Найти собственные значения и собственные векторы матриц:

а) $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$; б) $A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -8 \\ -4 & 7 & -4 \\ -8 & -4 & 1 \end{pmatrix}$.

Ответ:

а) $\lambda_1 = 1, \overline{x}_1 = (2; -1)$; $\lambda_2 = -4, \overline{x}_2 = (1; 1)$;

б) $\lambda_1 = -9, \lambda_2 = \lambda_3 = 9, \overline{x}_1 = (2; 1; 2)$; $\overline{x}_2 = (1; -2; 0)$; $\overline{x}_3 = (0; -2; 1)$.

14. Выяснить, можно ли привести к диагональному виду матрицу

$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

Ответ: нет.

15. В некотором базисе $(\overline{e}_1, \overline{e}_2)$ линейный оператор f задан матрицей $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$. Найти базис, в котором матрица оператора f имеет диагональный вид.

Ответ: $\overline{e}_1' = \overline{e}_1 - \overline{e}_2, \overline{e}_2' = 2\overline{e}_1 + 3\overline{e}_2$.

16. Привести матрицу A линейного оператора f к диагональному виду. Указать соответствующую матрицу перехода, если $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

Ответ: $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

17. Выяснить, является ли матрица $A=\begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{6} & 2/\sqrt{30} \\ 0 & -1/\sqrt{6} & 5/\sqrt{30} \\ 2/\sqrt{5} & -1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{30} \end{pmatrix}$ ортогональной, и если является, то найти обратную ей.

Ответ: $A^{-1}=\begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} & 0 & 2/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{6} & -1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{6} \\ 2/\sqrt{30} & 5/\sqrt{30} & -1/\sqrt{30} \end{pmatrix}$.

18. Найти ортогональную матрицу Q, диагонализирующую симметрическую матрицу $A=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, и записать диагональный вид этой матрицы.

Ответ: $Q=\begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$, $\quad Q^T AQ=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.

19. Является ли нормальным линейный оператор, заданный в некотором ортонормированном базисе матрицей $A=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$?

Ответ: да.

20. Найти ортогональную матрицу Q, приводящую симметрическую матрицу $A=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ к диагональному виду.

Ответ: $Q=\begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} & 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{30} \\ 1/\sqrt{6} & 0 & -5/\sqrt{30} \\ -2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{5} & -2/\sqrt{30} \end{pmatrix}$.

21. Известно, что симметрическая матрица третьего порядка имеет единственное трехкратное собственное значение $\lambda = a$. Найти эту матрицу.

Ответ: $A=\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$.

4.4. Квадратичные формы

Квадратичные формы и их матрицы. Приведение квадратичных форм к каноническому виду ортогональным преобразованием. Метод Лагранжа. Знакоопределенность квадратичных форм. Критерий Сильвестра. Применение квадратичных форм к задаче упрощения уравнений кривых и поверхностей второго порядка.

1. Составить матрицу квадратичной формы и найти собственные значения матрицы:

а) $L(x_1,x_2,x_3) = -2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$;

б) $L(x_1,x_2,x_3) = 3x_1^2 + 4x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_2x_3$;

в) $L(x_1,x_2) = 17x_1^2 + 12x_1x_2 + 8x_2^2$;

г) $L(x_1,x_2,x_3) = 3x_1^2 + 5x_2^2 + 3x_3^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3$;

д) $L(x_1,x_2) = 14x_1^2 + 21x_2^2 + 24x_1x_2$.

Ответ:

а) $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = -2$;

б) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}$, $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 4,\ \lambda_3 = 7$;

в) $\begin{pmatrix} 17 & 6 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$, $\lambda_1 = 5,\ \lambda_2 = 20$;

г) $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$, $\lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = 3,\ \lambda_3 = 6$;

д) $\begin{pmatrix} 14 & 12 \\ 12 & 21 \end{pmatrix}$, $\lambda_1 = 30,\ \lambda_2 = 5$.

2. По данной матрице написать соответствующую ей квадратичную форму:

а) $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Ответ:

а) $L(x, y) = x^2 - 4xy + 3y^2$;

б) $L(x, y, z) = 3x^2 - 2y^2 + z^2 + 4xz + 2yz$.

3. В базисе $(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$ задана квадратичная форма $L(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 3x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3$. Записать эту квадратичную форму в базисе $(\bar{e}'_1, \bar{e}'_2, \bar{e}'_3)$, если $\bar{e}'_1 = -\bar{e}_2 + \bar{e}_3,\ \bar{e}'_2 = 2\bar{e}_1 - \bar{e}_3,\ \bar{e}'_3 = 5\bar{e}_1 - \bar{e}_2 + 3\bar{e}_3$.

Ответ: $Q(x'_1, x'_2, x'_3) = 6x_1'^2 + 5x_2'^2 + 118x_3'^2 + 8x'_1x'_2 + 50x'_1x'_3 + 42x'_2x'_3$.

4. Привести квадратичную форму к каноническому виду методом Лагранжа:

а) $L(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_3^2 - 3x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2x_3$;

б) $L(x_1, x_2) = 3x_1^2 - 4x_2^2 - 4\sqrt{2}x_1x_2$;

в) $L(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 + 7x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 4x_2x_3$;

г) $L(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 - x_1x_3$;

д) $L(x_1, x_2) = 2x_1^2 + 6x_1x_2 + x_2^2$.

Ответ:

а) $L(y_1, y_2, y_3) = y_1^2 - \frac{9}{4}y_2^2 + \frac{37}{9}y_3^2,\ y_1 = x_1 - \frac{3}{2}x_2 + 2x_3,\ y_2 = x_2 - \frac{16}{9}x_3,$ $y_3 = x_3$;

б) $L(y_1, y_2) = 5y_1^2 - y_2^2,\ y_1 = x_1,\ y_2 = \sqrt{2}\,x_1 + 2x_2$;

в) $L(y_1, y_2, y_3) = y_1^2 + y_2^2 + 5y_3^2,\ y_1 = x_1 + x_2 + x_3,\ y_2 = x_2 + x_3,\ y_3 = x_3$;

г) $L(y_1, y_2, y_3) = y_1^2 - y_2^2,\ y_1 = \frac{1}{2}(x_1 + x_2 - x_3),\ y_2 = \frac{1}{2}(-x_1 + x_2 - x_3),\ y_3 = x_3$;

д) $L(y_1, y_2) = -7y_1^2 + y_2^2,\ y_1 = x_1,\ y_2 = 3x_1 + x_2$.

5. Привести квадратичную форму к каноническому виду и указать соответствующее ортогональное преобразование:

а) $L(x_1,x_2,x_3)=x_1^2-2x_2^2+x_3^2+4x_1x_2-8x_1x_3-4x_2x_3$;

б) $L(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2-4x_2x_3-4x_1x_2+x_2^2$;

в) $L(x_1,x_2,x_3)=4x_1x_3+6x_1^2+5x_2^2-4x_1x_2+7x_3^2$;

г) $L(x_1,x_2)=-x_2^2-16x_1x_2+11x_1^2$;

д) $L(x_1,x_2,x_3)=2x_1x_2+2x_1x_3$.

Ответ: а) $L(y_1,y_2,y_3)=6y_1^2-3y_2^2-3y_3^2;\ \begin{cases} x_1=\frac{1}{3}(2y_1+y_2+2y_3), \\ x_2=\frac{1}{3}(y_1+2y_2-2y_3), \\ x_3=\frac{1}{3}(-2y_1+2y_2+y_3); \end{cases}$

б) $L(y_1,y_2,y_3)=4y_1^2+y_2^2-2y_3^2;\ \begin{cases} x_1=\frac{2}{3}\left(y_1+y_2+\frac{1}{2}y_3\right), \\ x_2=-\frac{2}{3}\left(y_1-\frac{1}{2}y_2-y_3\right), \\ x_3=\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}y_1-y_2+y_3\right); \end{cases}$

в) $L(y_1,y_2,y_3)=3y_1^2+6y_2^2+9y_3^2;\ \begin{cases} x_1=\frac{1}{3}(2y_1-y_2+2y_3), \\ x_2=\frac{1}{3}(2y_1+2y_2-y_3), \\ x_3=-\frac{1}{3}(y_1-2y_2-2y_3); \end{cases}$

г) $L(y_1,y_2)=-5y_1^2+15y_2^2;\ \begin{cases} x_1=\frac{1}{\sqrt{5}}(y_1-2y_2), \\ x_2=\frac{1}{\sqrt{5}}(2y_1+y_2); \end{cases}$

д) $L(y_1, y_2, y_3) = \sqrt{2}y_2^2 - \sqrt{2}y_3^2$; $\begin{cases} x_1 = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}(y_2 - y_3), \\ x_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}y_1 + \dfrac{1}{2}(y_2 + y_3), \\ x_3 = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}y_1 + \dfrac{1}{2}(y_2 + y_3). \end{cases}$

6. Исследовать знакоопределенность квадратичной формы с матрицей:

а) $A = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ -3 & 4 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$; б) $A = \begin{pmatrix} -7 & 0 & -1 \\ 0 & -3 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$; в) $A = \begin{pmatrix} 9 & -6 \\ -6 & 4 \end{pmatrix}$;

г) $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$; д) $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ -2 & 2 & -3 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix}$.

Ответ: а) положительно определенная; б) отрицательно определенная; в) положительно полуопределенная; г) отрицательно полуопределенная; д) неопределенная.

7. Исследовать на знакоопределенность квадратичную форму:

а) $L(x_1, x_2, x_3) = -6x_2^2 - 6x_3^2 + 12x_1x_2 - 12x_1x_3 + 6x_2x_3 - 11x_1^2$;

б) $L(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_2^2 + x_3^2$;

в) $L(x_1, x_2, x_3) = 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 6x_2x_3$;

г) $L(x_1, x_2) = 5x_1^2 + 6x_1x_2 + 5x_2^2$;

д) $L(x_1, x_2) = 2x_1x_2$.

Ответ: а) отрицательно определенная; б) положительно определенная; в) неопределенная; г) положительно определенная; д) неопределенная.

8. Не приводя квадратичную форму к каноническому виду, найти все значения параметра λ, при которых она является положительно определенной и отрицательно определенной:

а) $L(x_1, x_2, x_3) = \lambda x_1^2 + (\lambda - 3)x_2^2 + \lambda x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 - 4x_2x_3$;

б) $L(x_1, x_2) = \lambda x_1^2 - 4x_1x_2 + (\lambda + 3)x_2^2$.

Ответ: а) положительно определена при $\lambda > 5$, отрицательно определена при $\lambda < -1$; б) положительно определена при $\lambda > 1$, отрицательно определена при $\lambda < -4$.

9. Найти каноническое уравнение кривой второго порядка, записать все использованные преобразования и построить кривую в исходной системе координат:

а) $14x^2+24xy+21y^2-4x+18y-139=0$;

б) $-7x^2+48xy+7y^2-625=0$;

в) $x^2-2xy+y^2-10x-6y+25=0$;

г) $8x^2-18xy+9y^2+2x-1=0$.

Ответ: а) $\dfrac{(x')^2}{5}+\dfrac{(y')^2}{30}=1$ – эллипс; б) $\dfrac{(x')^2}{25}-\dfrac{(y')^2}{25}=1$ – гипербола; в) парабола $y'^2=4\sqrt{2}\,x'$; г) две пересекающиеся прямые $\left[\begin{array}{l}2x'-3y'+1=0,\\ 4x'-3y'-1=0.\end{array}\right.$

10. Привести к каноническому виду уравнение поверхности второго порядка:

а) $4x^2+4y^2+z^2+12xy-20=0$; б) $6x^2+5y^2+7z^2-4xy+4xz=18$.

Ответ: а) $\dfrac{x'^2}{20}+\dfrac{y'^2}{2}-\dfrac{z'^2}{10}=1$; б) $\dfrac{x'^2}{6}+\dfrac{y'^2}{3}+\dfrac{z'^2}{2}=1$.

11. Написать каноническое уравнение поверхности второго порядка, определить ее тип и найти каноническую систему координат:

$$7x^2+6y^2+5z^2-4xy-4yz-6x-24y+18z+30=0.$$

Ответ: эллипсоид $\dfrac{x'^2}{2}+\dfrac{y'^2}{1}+\dfrac{z'^2}{2/3}=1$, $0'(1;2;-1)$, $\bar{e}_1=\left(\dfrac{1}{3};\dfrac{2}{3};\dfrac{2}{3}\right)$, $\bar{e}_2=\left(\dfrac{2}{3};\dfrac{1}{3};-\dfrac{2}{3}\right)$, $\bar{e}_3=\left(\dfrac{2}{3};-\dfrac{2}{3};\dfrac{1}{3}\right)$.

5. Введение в анализ

5.1. Числовая последовательность

Понятие последовательности. Предел последовательности. Ограниченные, неограниченные, бесконечно малые и бесконечно большие последовательности. Свойства сходящихся последовательностей. Свойства бесконечно малых последовательностей. Монотонные последовательности. Число e.

1. Записать пять первых членов числовой последовательности (x_n), если:

а) $x_n=\dfrac{4n-1}{3^n}$. **Ответ:** $1,\ \dfrac{7}{9},\ \dfrac{11}{27},\ \dfrac{15}{81},\ \dfrac{19}{243}$;

б) $x_n=\dfrac{(-1)^n\cdot n+1}{n+2}$. **Ответ:** $0,\ \dfrac{3}{4},\ -\dfrac{2}{5},\ \dfrac{5}{6},\ -\dfrac{4}{7}$;

в) $x_n = \dfrac{(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \cdot (2n+1)}{n!}$. **Ответ:** $-3, -\dfrac{5}{2}, \dfrac{7}{6}, \dfrac{3}{8}, -\dfrac{11}{120}$;

г) $x_1 = x_2 = 1,\ x_n = x_{n-1} + x_{n-2},\ n = 3,\ 4,\ 5, \ldots$ (последовательность Фибоначчи).

Ответ: $1, 1, 2, 3, 5$.

2. Записать формулу общего члена данной последовательности:

а) $\dfrac{1}{4}, \dfrac{3}{16}, \dfrac{5}{36}, \dfrac{7}{64}, \dfrac{9}{100}, \ldots$. **Ответ:** $x_n = \dfrac{2n-1}{(2n)^2}$;

б) $\dfrac{2}{7}, -\dfrac{5}{11}, \dfrac{8}{15}, -\dfrac{11}{19}, \dfrac{14}{23}, \ldots$. **Ответ:** $x_n = \dfrac{(-1)^{n+1}(3n-1)}{4n+3}$;

в) $\dfrac{2}{3}, \dfrac{5}{5}, \dfrac{10}{7}, \dfrac{17}{9}, \dfrac{26}{11}, \ldots$. **Ответ:** $x_n = \dfrac{n^2+1}{2n+1}$;

г) $1, \dfrac{1}{2}, 3, \dfrac{1}{4}, 5, \ldots$. **Ответ:** $x_n = n^{(-1)^{n+1}}$.

3. Определить, является ли последовательность (x_n) ограниченной сверху, ограниченной снизу, ограниченной:

а) $x_n = \dfrac{n+2}{n+3}$. **Ответ:** ограниченная $\left(\dfrac{3}{4} \le x_n < 1\right)$;

б) $x_n = n^2 - 2$. **Ответ:** ограниченная снизу $(x_n \ge -1)$; неограниченная сверху;

в) $x_n = \dfrac{100^n}{n!}$. **Ответ:** ограниченная $\left(0 < x_n \le \dfrac{100^{99}}{99!}\right)$.

4. Определить, является ли последовательность (x_n) возрастающей, убывающей или не является монотонной:

а) $x_n = \dfrac{2}{n}$. **Ответ:** убывающая;

б) $x_n = \log_3(n+1)$. **Ответ:** возрастающая;

в) $x_n = n + (-1)^n$. **Ответ:** не является монотонной.

5. Доказать равенство, пользуясь определением предела последовательности (указать $n(\xi)$):

а) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2-n}{n+3} = -1$. **Ответ:** можно взять $n(\xi) = \left[\dfrac{5}{\xi}\right] + 1$;

б) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n^2-n}{2n^2-1} = \dfrac{3}{2}$. **Ответ:** можно взять $n(\xi) = \left[\dfrac{1}{\xi}\right] + 1$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty} 5^{-n} = 0.$ **Ответ:** можно взять $n(\xi) = \left[\log_5 \dfrac{1}{\xi}\right] + 1.$

6. Найти предел числовой последовательности:

а) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{7n^2 + 8n^4 - 5}{2 - 3n^2 + n^3}.$ **Ответ:** $+\infty$;

б) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{4n^3 + 6n + 17}{9n^5 + 3n^4 - 11n}.$ **Ответ:** 0;

в) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(5n+3)(n^2 - 2n + 3)}{(2n+1)^3}.$ **Ответ:** $\dfrac{5}{8}$;

г) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_0 n^k + a_1 n^{k-1} + \ldots + a_{k-1} n + a_k}{b_0 n^m + b_1 n^{m-1} + \ldots + b_{m-1} n + b_m}$, где $k, m \in N.$

Ответ: $\begin{cases} 0, & \text{если } k < m, \\ \dfrac{a_0}{b_0}, & \text{если } k = m, \\ \infty, & \text{если } k > m; \end{cases}$

д) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n! + 2(n-1)!}{4(n+2)(n-1)! - (n-2)!}.$ **Ответ:** $\dfrac{3}{4}$;

е) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{5(n+2)! - 3(n+1)!}{n! + 2(n+1)!}.$ **Ответ:** $+\infty$;

ж) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(3n+1)(n-2)! + (n-1)!}{7n! - 6(n-1)!}.$ **Ответ:** 0;

з) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(2n+3)^3 - 8n^3}{(4n+1)(3-n)}.$ **Ответ:** -9;

и) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(3n-1)^2 + 9n^2}{27n^3 + (1-3n)^3}.$ **Ответ:** $\dfrac{2}{3}$;

k) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{4n-3}{\sqrt{4n^2 + 5n - 1}}.$ **Ответ:** 2;

л) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n\sqrt[7]{n^6} + \sqrt[4]{n^8 - 2n}}{(2n + \sqrt[3]{n})\sqrt[5]{32n^5 + 1}}.$ **Ответ:** $\dfrac{1}{4}$;

м) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2 + 3n - 2} - n\right).$ **Ответ:** $\dfrac{3}{2}$;

н) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n+1}\,(\sqrt{n+5}-\sqrt{n-1})$. **Ответ:** 3;

о) $\lim\limits_{n\to\infty} (n-\sqrt[3]{n^3+7n^2-1})$. **Ответ:** $-\dfrac{7}{3}$;

п) $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt[3]{n^3+2}+\sqrt[3]{5+6n^2-n^3})$. **Ответ:** 2.

7. Найти предел числовой последовательности:

а) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+2+3+...+n}{(n+1)(n+3)}$. **Ответ:** $\dfrac{1}{2}$;

б) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+4+7+...+(3n-2)}{2+7+12+...+(5n-3)}$. **Ответ:** $\dfrac{3}{5}$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{9n^5+2^n+\log_8 n}{3\cdot 2^n+4n^2-1}$. **Ответ:** $\dfrac{1}{3}$;

г) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{6^{-n}-2\log_2(n^{13}+5)+4^{n+1}}{5n^{10}-4^n+3^{2-n}}$. **Ответ:** -4;

д) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+2+4+...+2^n}{n^2+2^{n+2}+5^{-n}}$. **Ответ:** $\dfrac{1}{2}$;

е) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3\cdot 5^n+2n^6}{1+5+25+...+5^{n+1}}$. **Ответ:** $\dfrac{12}{25}$;

ж) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{3}{6}+\dfrac{5}{36}+\dfrac{9}{216}+...+\dfrac{2^n+1}{6^n}\right)$. **Ответ:** $\dfrac{7}{10}$;

з) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{5}{10}+\dfrac{13}{100}+\dfrac{35}{1000}+...+\dfrac{2^n+3^n}{10^n}\right)$. **Ответ:** $\dfrac{19}{28}$;

и) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(-1)^n+3n}{2n-(-1)^n}$. **Ответ:** $\dfrac{3}{2}$;

к) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n\cdot\cos n!}{4n^2+1}$. **Ответ:** 0;

л) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\operatorname{arctg} 10^n}{5^{n+1}+3n^2}$. **Ответ:** 0;

м) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\log_2(n^3+1)}{\sqrt[7]{n}\,(4+\cos n)}$. **Ответ:** 0;

н) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{1\cdot 3}+\dfrac{1}{3\cdot 5}+...+\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}\right)$. **Ответ:** $\dfrac{1}{2}$;

о) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{n(n+2)}\right)$. **Ответ:** $\frac{3}{4}$.

8. Найти предел числовой последовательности:

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2n+1}{n+3}\right)^{n}$. **Ответ:** $+\infty$;

б) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{4n+5}{3n-1}\right)^{1-n}$. **Ответ:** 0;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n-3}{n}\right)^{n}$. **Ответ:** e^{-3};

г) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2n+2}{2n-3}\right)^{n+4}$. **Ответ:** $e^{\frac{5}{2}}$;

д) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2n^2+4n+3}{2n^2-n+1}\right)^{4n-7}$. **Ответ:** e^{10};

е) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n^2-3n+5}{n^2+2}\right)^{n^2}$. **Ответ:** 0;

ж) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{6-n^2}{2+n-n^2}\right)^{n^2+n}$. **Ответ:** $+\infty$;

з) $\lim\limits_{n\to\infty} n(\ln(n+1)-\ln(n+2))$. **Ответ:** -1;

и) $\lim\limits_{n\to\infty}(2-3n)\cdot(\ln(n^2+2)-\ln(n^2+n-1))$. **Ответ:** 3;

к) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{6^n+3^n}{6^n+2^n}\right)^{2^{n+1}}$. **Ответ:** e^2.

5.2. Предел функции

Понятие переменной величины и функции. Способы задания функции. Предел функции в точке по Коши. Предел функции в точке по Гейне. Теоремы о пределах. Односторонние пределы. Предел функции при $x\to\infty$. Бесконечно малые и бесконечно большие функции, их свойства.

1. Доказать равенство, пользуясь определением предела функции по Коши:

а) $\lim\limits_{x\to 3}(3x-1)=8$;

б) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-x-2}{x^2+x-6}=\dfrac{3}{5}$.

2. Доказать с помощью определения предела по Гейне, что функция $f(x)=\cos\dfrac{2}{x}$ не имеет предела в точке $x_0=0$.

3. Найти предел функции в указанной точке:

а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^3-x^2+5x-1}{x+3}$. **Ответ:** $\dfrac{5}{4}$;

б) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\sin 2x}{x}$. **Ответ:** $\dfrac{4}{\pi}$;

в) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^3-3x-2}{x^2+x-6}$. **Ответ:** 1;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x^3+2x^5+3x^2}{4x^8-5x^4-2x^2}$. **Ответ:** $-\dfrac{3}{2}$;

д) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3+x^2+x+1}{x^2-2x-3}$. **Ответ:** $-\dfrac{1}{2}$;

е) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^3-5x^2+16}{2x^2-7x-4}$. **Ответ:** $\dfrac{8}{9}$;

ж) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^3+8}{x^3+7x^2+16x+12}$. **Ответ:** ∞;

з) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^5+2x^3-3x^2+2x}{5x^6-8x^3+3x}$. **Ответ:** 0;

и) $\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{1}{x^2+x-12}-\dfrac{1}{2x^2-5x-3}\right)$. **Ответ:** $\dfrac{1}{49}$;

к) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{2x}{x^3-1}\right)$. **Ответ:** ∞;

л) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^k-1}{x^m-1}$, где $k,m\in\boldsymbol{N}$. **Ответ:** $\dfrac{k}{m}$;

м) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-\sqrt[5]{x}}{1-\sqrt[7]{x}}$. **Ответ:** $\dfrac{7}{5}$;

н) $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{1-\sqrt{x+4}}{\sqrt{x+12}-3}$. **Ответ:** -3;

о) $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{16-x^2}{\sqrt{6x+1}-5}$. **Ответ:** $-13\dfrac{1}{3}$;

п) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{2-\sqrt[3]{x+6}}{x^3-8}$. **Ответ:** $-\dfrac{1}{144}$;

р) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{\sqrt[3]{3x-5}+2}{\sqrt{x+5}-\sqrt{3-x}}$. **Ответ:** $\dfrac{1}{2}$;

с) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+3)^{10}\cdot(2x-1)^{16}}{(3x+2)^{12}\cdot(5x+4)^{14}}$. **Ответ:** $\dfrac{2^{16}}{3^{12}\cdot5^{14}}$;

т) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{27x^3-4x}-\sqrt{16x^2+1}}{7x-\sqrt[4]{x^4+2x^3+x}}$. **Ответ:** $-\dfrac{1}{6}$;

у) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln(x^8+3x^5-4)}{\ln(x^{14}-x+2)}$. **Ответ:** $\dfrac{4}{7}$;

ф) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+3}+|x|}{\sqrt[3]{x^2+1}-|x|}$. **Ответ:** -2.

4. Найти односторонние пределы $f(x)$ в точке x_0:

а) $f(x)=2x-\dfrac{|x+2|}{x+2}$, $x_0=-2$. **Ответ:** $f(-2-0)=-3$; $f(-2+0)=-5$;

б) $f(x)=\operatorname{arctg}\dfrac{3}{x}$, $x_0=0$. **Ответ:** $f(-0)=-\dfrac{\pi}{2}$; $f(+0)=\dfrac{\pi}{2}$;

в) $f(x)=5^{\frac{2}{1-x}}$, $x_0=1$. **Ответ:** $f(1-0)=+\infty$; $f(1+0)=0$;

г) $f(x)=\dfrac{1}{2-3^{\frac{1}{x+4}}}$, $x_0=-4$. **Ответ:** $f(-4-0)=\dfrac{1}{2}$; $f(-4+0)=0$.

5.3. Непрерывность и точки разрыва функции. Замечательные пределы

Определение непрерывности функции. Односторонняя непрерывность функции. Точка разрыва функции и их классификация. Простейшие элементарные функции. Первый и второй замечательные пределы. Другие замечательные пределы. Понятие равномерной непрерывности. Сравнение бесконечно малых функций. Символ «*о* малое» и его свойства. Асимптотические формулы.Теоремы Вейерштрасса и Больцано – Коши.

1. Найти пределы:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 7x}{x}$. **Ответ:** 7;

б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}3x}{\sin 9x}$. **Ответ:** $\dfrac{1}{3}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cdot\arcsin 5x}{\mathrm{arctg}\,2x^2}$. **Ответ:** $\dfrac{5}{2}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}4x-\sin 4x}{x^3}$. **Ответ:** 32;

д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos ax-\cos bx}{x^2}$, $a\neq b$. **Ответ:** $\dfrac{b^2-a^2}{2}$;

е) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x+x\sin x}{\mathrm{tg}\,x^2}$. **Ответ:** $\dfrac{3}{2}$;

ж) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\sqrt{2}-2\cos x}{4x-\pi}$. **Ответ:** $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$;

з) $\lim\limits_{x\to 2}(2-x)\cdot\mathrm{ctg}\dfrac{\pi x}{2}$. **Ответ:** $-\dfrac{2}{\pi}$;

и) $\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{6}}\dfrac{2\sin x+1}{\mathrm{tg}\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)}$. **Ответ:** $\sqrt{3}$;

к) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin kx}{\sin nx}$, $k,n\in Z$. **Ответ:** $(-1)^{k-n}\cdot\dfrac{k}{n}$;

л) $\lim\limits_{x\to\infty}x^2\cdot\sin\dfrac{3x-2}{4x^3+x+1}$. **Ответ:** $\dfrac{3}{4}$;

м) $\lim\limits_{x\to\infty}\arcsin\dfrac{x+5}{x^4+2}\cdot\mathrm{ctg}^3\dfrac{2x+1}{x^2-x+3}$. **Ответ:** $\dfrac{1}{8}$.

2. Найти пределы:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-4}{x}\right)^{x}$. **Ответ:** e^{-4};

б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x-2}{3x+4}\right)^{5x-1}$. **Ответ:** e^{-10};

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x^2+7x+1}{2x^2-x+8}\right)^{3x+7}$. **Ответ:** e^{12};

г) $\lim\limits_{x\to 0}(1+4x)^{\frac{1}{x}}$. **Ответ:** e^{4};

д) $\lim\limits_{x\to -1}(6+5x)^{\frac{x-2}{x+1}}$. **Ответ:** e^{-15};

е) $\lim\limits_{x\to 3}(10-3x)^{\frac{x+4}{x-3}}$. **Ответ:** e^{-21};

ж) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{\operatorname{tg} x}$. **Ответ:** 1;

з) $\lim\limits_{x\to -1}(\cos 2\pi x)^{\operatorname{ctg}^2 \pi x}$. **Ответ:** e^{-2};

и) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+\operatorname{tg} x}{1+\sin x}\right)^{\frac{1}{\operatorname{tg}^3 x}}$. **Ответ:** $\sqrt{e}$;

к) $\lim\limits_{x\to+\infty}(2x-1)\big(\ln(4x-3)-\ln(4x+2)\big)$. **Ответ:** $-\dfrac{5}{2}$;

л) $\lim\limits_{x\to\infty} x^2\left(\ln 3x^2-\ln(3x^2-1)\right)$. **Ответ:** $\dfrac{1}{3}$;

м) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^3+x\right)\left(3\ln x-\ln(x^3-x+2)\right)$. **Ответ:** $+\infty$;

н) $\lim\limits_{x\to+\infty}(2x-1)\big(\ln(4x-3)-\ln(4x+2)\big)$. **Ответ:** $-\dfrac{5}{2}$.

3. Найти пределы:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\log_2(1+3x)}{x}$. **Ответ:** $\dfrac{3}{\ln 2}$;

б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln(2-x)}{x^3-1}$. **Ответ:** $-\dfrac{1}{3}$;

в) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\log_5(x_2-x-5)}{x+2}$. **Ответ:** $-\dfrac{5}{\ln 5}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{\ln\cos x}$. **Ответ:** -2;

д) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \dfrac{\log_3 \sin 2x}{\cos 2x}$. **Ответ:** 0;

е) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{3x}-1}{2x}$. **Ответ:** $\dfrac{3}{2}$;

ж) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{7x^2+x}{7x-1}$. **Ответ:** $\dfrac{1}{\ln 7}$;

з) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{8x}-e^{-3x}}{5x^3+x^2+x}$. **Ответ:** 11;

и) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{6^x-3^{2x}}{4x+x^6}$. **Ответ:** $\dfrac{1}{4}\ln\dfrac{2}{3}$;

к) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{4^{x^2-x-2}-1}{x^2-5x+6}$. **Ответ:** $-3\ln 4$;

л) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2+x-2}{e^{x^{2+5x-2}}-e^{x^2+3}}$. **Ответ:** $\dfrac{3}{5}e^{-4}$;

м) $\lim\limits_{x\to\frac{1}{4}} \dfrac{\ln \operatorname{tg} \pi x}{2^{x^{4x-1}}-1}$. **Ответ:** $\dfrac{\pi}{\ln 4}$.

4. Найти пределы:

а) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1+3x)^{15}-1}{x}$. **Ответ:** 15;

б) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[7]{2x+1}-1}{4x}$. **Ответ:** $\dfrac{1}{14}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0} \sqrt[5]{1-\sin x}-1$. **Ответ:** -5;

г) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1-\sqrt[10]{2x^2+x-2}}{x^2+x-2}$. **Ответ:** $-\dfrac{1}{6}$;

д) $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{\sqrt[5]{2x^2+5x-2}-1}{1-\sqrt[8]{x^2-x-11}}$. **Ответ:** $-\dfrac{8}{5}$;

е) $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}} \dfrac{(1+\cos 3\pi x)^{12}-1}{\cos \pi x}$. **Ответ:** $-\dfrac{1}{4}$.

5. Найти пределы:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}5x\cdot(1-e^{\sin x})}{\sqrt[6]{1+2x^2-x^3}-1}$. **Ответ:** -15;

б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(4^x-3^x)\operatorname{arctg}2x}{\arcsin\dfrac{x}{2}\cdot\ln(1+4x)}$. **Ответ:** $\ln\dfrac{4}{3}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(2\operatorname{tg}^2x-1)^8-1}{(8^{\operatorname{tg}x}-1)\cdot\log_8(5\sin x+1)}$. **Ответ:** $-3{,}2$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+ax)^s-e^{bx}}{x}$. **Ответ:** $as-b$;

д) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\log_5\cos 2\pi x}{(5^{x^2-2x-3}-1)\cdot\operatorname{tg}\pi x}$. **Ответ:** $-\dfrac{\pi}{2\ln^2 5}$;

е) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\arcsin(x-1)^2\cdot\cos\dfrac{\pi x}{2}}{\sqrt[5]{x^3-3x^2+3x-1}}$. **Ответ:** $-\dfrac{5\pi}{2}$.

6. Доказать, используя определение, что функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0:

а) $f(x)=4x^3-2x,\ x_0=-1$;

б) $f(x)=2x^2-3x+5$ для любого $x_0\in\mathbb{R}$.

7. При каких значениях a и b функция

$$f(x)=\begin{cases}(x-1)^2 & \text{при } x\le 0,\\ ax+b & \text{при } 0<x<1,\\ \sqrt[3]{2x-3} & \text{при } x\ge 1\end{cases}$$

будет непрерывной? **Ответ:** $a=-2, b=1$.

8. Доопределить функцию $f(x)$ по непрерывности в точке x_0:

а) $f(x)=\dfrac{2x^2+3x-2}{6x^2-5x+1},\ x_0=\dfrac{1}{2}$. **Ответ:** $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=5$;

б) $f(x)=\dfrac{(1+x)^a-1}{x},\ a\in\mathbb{R},\ x_0=0$. **Ответ:** $f(0)=a$;

в) $f(x)=\dfrac{3^x-9}{\sin\pi x},\ x_0=2$. **Ответ:** $f(2)=\dfrac{9\ln 3}{\pi}$.

9. Найти точки разрыва функции, указать их род, вычислить скачки в точках разрыва первого рода:

а) $f(x)=\begin{cases} 3x+1 & \text{при } x<-1, \\ x^2+2 & \text{при } -1\le x\le 1, \\ 2^x+1 & \text{при } x>1. \end{cases}$

Ответ: $x=-1$ – точка разрыва первого рода, $\sigma(-1)=5$;

б) $f(x)=\begin{cases} \log_2(5-x) & \text{при } x=-3, \\ \dfrac{4}{x-2} & \text{при } -3<x<2, \\ x^2-3x+1 & \text{при } x\ge 2. \end{cases}$

Ответ: $x=-3$ – точка разрыва первого рода, $\sigma(-3)=-3{,}8$; $x=2-$ точка разрыва второго рода;

в) $f(x)=\dfrac{x+1}{3x^2-5x-2}$.

Ответ: $x=-\dfrac{1}{3}$, $x=2$ – точка разрыва второго рода;

г) $f(x)=\dfrac{|x+4|}{x+4}$.

Ответ: $x=-4$ – точка разрыва первого рода, $\sigma(-4)=2$;

д) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}-1}{1-x^2}$.

Ответ: $x=1$ – точка устранимого разрыва;

е) $f(x)=\operatorname{arctg}\dfrac{3}{2x+1}$.

Ответ: $x=-\dfrac{1}{2}$ – точка разрыва первого рода, $\sigma\left(-\dfrac{1}{2}\right)=\pi$;

ж) $f(x)=\ln\left|\dfrac{x+5}{x-4}\right|$.

Ответ: $x=-5$, $x=4$ – точка разрыва второго рода;

з) $f(x)=\dfrac{2}{1-3^{\frac{x}{x+1}}}$.

Ответ: $x=-1$ – точка разрыва первого рода, $\sigma(-1)=2$; $x=0$ – точка разрыва второго рода;

и) $f(x)=\dfrac{\operatorname{tg}3x\cdot\operatorname{arcctg}\dfrac{5}{x-2}}{x^2+x}$.

Ответ: $x=0$ – точка устранимого разрыва первого рода; $x=2$ – точка разрыва первого рода, $\sigma(2)=-\dfrac{\pi\operatorname{tg}6}{6}$; $x=-1$, $x=\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{\pi k}{3}$, $k\in\mathbb{Z}$ – точка разрыва второго рода.

10. Доказать, что $f(x)=0(g(x))$ при $x\to x_0$:

а) $f(x)=3x^3-5x^2+x+1$, $g(x)=\sqrt{x}-1$, $x_0=1$;

б) $f(x)=x\cdot\sin^2 x$, $g(x)=\operatorname{tg}2x$, $x_0=0$;

в) $f(x)=\ln\cos x$, $g(x)=6^{\sin 2x}-1$, $x_0=2\pi$.

11. Сравнить бесконечно малые функции $f(x)$ и $g(x)$ при $x\to x_0$:

а) $f(x)=\sqrt{x+4}-2$, $g(x)=x$, $x_0=0$.

Ответ: $f(x)=0\big(g(x)\big)$, $x\to 0$;

б) $f(x)=\sin x-1$, $g(x)=\cos x$, $x_0=\dfrac{\pi}{2}$.

Ответ: $f(x)=0\big(g(x)\big)$, $x\to\dfrac{\pi}{2}$;

в) $f(x)=\sqrt[5]{5x-4}-1$, $g(x)=e^{x-1}-1$, $x_0=1$.

Ответ: $f(x)\sim g(x)$, $x\to 1$.

12. Выделить главную часть функции $f(x)$ вида $C_0(x-x_0)^n$ при $x\to x_0$ и определить ее порядок малости n относительно $x-x_0$:

а) $f(x)=5x^2+2x^3+3x^4$, $x_0=0$.

Ответ: $f(x)=5x^2+0(x^2)$, $x\to 0$, $n=2$;

б) $f(x)=\sin x-\operatorname{tg}x$, $x_0=0$.

Ответ: $f(x)=-\dfrac{1}{2}x^3+0(x^3)$, $x\to 0$, $n=3$;

в) $f(x)=\ln(3-3x+x^3)$, $x_0=1$.

Ответ: $f(x)=3(x-1)^2+0(x-1)$, $x\to 1$, $n=2$;

г) $f(x)=5^{x^2+x-6}-1$, $x_0=2$.

Ответ: $f(x)=5\ln 5\cdot(x-2)+0(x-2)$, $x\to 2$, $n=1$.

13. Выделить главную часть функции $\Gamma(x)$ вида Cx^n и определить порядок роста n функции $f(x)$ относительно x при $x\to+\infty$:

а) $f(x)=\sqrt[5]{32x^3-27x+1}+\sqrt[7]{x-1}.$

Ответ: $\Gamma(x)=2x^{\frac{3}{5}},\ \ x\to+\infty;\ \ n=\dfrac{3}{5};$

б) $f(x)=(x^2+1)\cdot\sqrt{x^3+2}\,\arcsin\dfrac{2}{x}.$

Ответ: $\Gamma(x)=x^{\frac{5}{2}},\ \ x\to+\infty;\ \ n=\dfrac{5}{2};$

в) $f(x)=\dfrac{3x^5+2x^4-x^2}{\sqrt[3]{4x-x^6}}\cdot\mathrm{tg}\,\dfrac{x^2+1}{2x^3-5}.$

Ответ: $\Gamma(x)=-\dfrac{3}{2}x^2,\ \ x\to+\infty;\ \ n=2.$

14. Найти пределы, используя эквивалентные функции:

а) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\mathrm{arctg}\,(1-x^2)}{x^2+x-2}.$ **Ответ:** $-\dfrac{2}{3};$

б) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt[3]{\cos 3x}-1}{\arcsin^2 4x}.$ **Ответ:** $-\dfrac{3}{32};$

в) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 5x\,(1-\sqrt[5]{1+\mathrm{tg}\,2x})}{\ln(1+x^2-4x^3)}.$ **Ответ:** $-2;$

г) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\mathrm{tg}\,\dfrac{x}{3}\cdot(1-e^{\sin 6x})}{\sqrt[4]{1+2x^2+x^5}-1}.$ **Ответ:** $-4;$

д) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln\cdot(2x^3+e^x)}{\ln(3x^4+e^{2x})}.$ **Ответ:** $\dfrac{1}{2};$

е) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{27^{2x}-3^{5x}}{2e^{3x}-5\,\mathrm{tg}\,2x+7\sin^3 x-2}.$ **Ответ:** $-\dfrac{1}{4}\ln 3;$

ж) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln\cos 2\pi x}{(2^{\mathrm{tg}\,\pi x}-1)^2}.$ **Ответ:** $-\dfrac{2}{\ln^2 2};$

з) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{1-e^{\cos^2 x}}{\ln\sin x}.$ **Ответ:** $2\ln 10;$

и) $\lim\limits_{x\to a}\sin\dfrac{x-a}{2}\cdot\mathrm{tg}\,\dfrac{\pi}{2a},\ \ a\neq0.$ **Ответ:** $-\dfrac{a}{\pi};$

к) $\lim\limits_{x\to1}(2^x-\cos(x-1))^{\frac{1}{x^2+2x-3}}.$ **Ответ:** $\sqrt{2}.$

6. Дифференциальное исчисление функций одной переменной

6.1. Производная функции

Производная функции в точке. Односторонние производные. Геометрический и физический смысл производной. Бесконечная производная. Основные правила дифференцирования. Производная сложной функции. Обратная функция и ее дифференцирование. Производные элементарных функций. Гиперболические функции и их дифференцирование. Логарифмическое дифференцирование. Таблица производных.

1. Пользуясь определением, вычислить производную функции $f(x)$ в точке x_0:

а) $f(x)=\dfrac{1}{x},\ x_0=1.$ **Ответ:** -1;

б) $f(x)=\sqrt[3]{x},\ x_0=-1.$ **Ответ:** $\dfrac{1}{3}$;

в) $f(x)=\begin{cases}\sin\left(3x+x^2\cdot\sin\dfrac{5}{x}\right), & \text{если } x\neq 0,\\ 0, & \text{если } x=0,\end{cases}$ **Ответ:** 3.

$x_0=0.$

2. Пользуясь определением, вычислить односторонние производные функции $f(x)$ в точке x_0; определить, является ли функция $f(x)$ дифференцируемой в точке x_0:

а) $f(x)=\begin{cases}\sin 2x, & \text{если } x\le 0,\\ x^2+x, & \text{если } x>0,\end{cases}$

$x_0=0.$

Ответ: $f'_-(0)=2,\ \ f'_+(0)=1,\ \ f'(0)$ не существует;

б) $f(x)=\begin{cases}\operatorname{tg}x+1, & \text{если } x<0,\\ 1-x^2, & \text{если } x\ge 0,\end{cases}$

$x_0=0.$

Ответ: $f'_-(0)=1,\ \ f'_+(0)=0,\ \ f'(0)$ не существует;

в) $f(x)=2x^2-|x+1|+2,\ x_0=-1.$

Ответ: $f'_-(-1)=-3,\ \ f'_+(-1)=-5,\ \ f'(-1)$ не существует;

г) $f(x)=1+3|x+2|-x^2,\ x_0=-2.$

Ответ: $f'_-(-2)=1,\ \ f'_+(-2)=7,\ \ f'(-2)$ не существует.

3. Определить, при каких значениях a и b функция

$$f(x)=\begin{cases}(x+a)\cdot e^{-bx}, & \text{если } x<0,\\ ax^2+bx+1, & \text{если } x\ge 0,\end{cases}$$

дифференцируема во всех точках числовой прямой. **Ответ:** $a=1,\ b=\dfrac{1}{2}.$

4. Найти производную функции:

а) $y=2x^3+4\sqrt{x}+x^2-\sqrt[7]{x^5}+0{,}3.$ **Ответ:** $y'=6x^2+\dfrac{2}{\sqrt{x}}+\dfrac{19}{7}x\sqrt[7]{x^5};$

б) $y=\dfrac{7x^4+x^3+1}{x^5}-\dfrac{3}{\sqrt[4]{x^3}}+\ln 5.$ **Ответ:** $y'=-\dfrac{7}{x^2}-\dfrac{2}{x^3}-\dfrac{5}{x^6}+\dfrac{9}{4\sqrt[4]{x^7}};$

в) $y=5x^4+4^x-x^2+3x.$ **Ответ:** $y'=20x^3+4^x\ln 4-2x+3;$

г) $y=7^x+\log_3 x-\dfrac{2}{x}.$ **Ответ:** $y'=7^x\ln 7+\dfrac{1}{x\ln 3}+\dfrac{2}{x^2};$

д) $y=3\sin x-4\ln x+\log_2 5.$ **Ответ:** $y'=3\cos x-\dfrac{4}{x};$

е) $y=\left(\dfrac{2}{3}\right)^x+2\cos x-3\operatorname{tg} x-\sin 3.$ **Ответ:** $y'=\left(\dfrac{2}{3}\right)^x\ln\dfrac{2}{3}-2\sin x-\dfrac{3}{\cos^2 x};$

ж) $y=4\operatorname{arctg} x+5\log_4 x-6^{x+2}.$ **Ответ:** $y'=\dfrac{4}{1+x^2}+\dfrac{5}{x\ln 4}-36\cdot 6^x\ln 6;$

з) $y=\dfrac{7}{\sqrt[5]{x^2}}+3\arcsin x+4\operatorname{ctg} x-\operatorname{tg} x.$

Ответ: $y'=-\dfrac{14}{5\sqrt[5]{x^7}}+\dfrac{3}{\sqrt{1-x^2}}-\dfrac{4}{\sin^2 x}-\dfrac{1}{\cos^2 x};$

и) $y=\ln x^6-2\operatorname{arc\,ctg} x+8\arccos x.$ **Ответ:** $y'=\dfrac{6}{x}+\dfrac{2}{1+x^2}-\dfrac{8}{\sqrt{1-x^2}};$

к) $y=2x^5-3\arcsin x+4\arccos x+5^x.$

Ответ: $y'=10x^4-\dfrac{7}{\sqrt{1-x^2}}+5^x\ln 5.$

5. Найти производную функции:

а) $y=(x^3+2)\cos x.$ **Ответ:** $y'=3x^2\cos x-(x^3+2)\sin x;$

б) $y = 4^x \cdot (2\,\mathrm{tg}\,x - x^2)$.

Ответ: $y' = 4^x \ln 4\,(2\,\mathrm{tg}\,x - x^2) + 4^x \left(\dfrac{2}{\cos^2 x} - 2x \right)$;

в) $y = (e^x + \ln x)\,\mathrm{arctg}\,x$.

Ответ: $y' = \left(e^x + \dfrac{1}{x} \right) \mathrm{arctg}\,x + \dfrac{e^x + \ln x}{1 + x^2}$;

г) $y = \dfrac{3\sin x - \cos x}{2x^5 + 4}$.

Ответ: $y' = \dfrac{(3\cos x + \sin x)(2x^5 + 4) - 10x^4 (3\sin x - \cos x)}{(2x^5 + 4)^2}$;

д) $y = \dfrac{x^3 + 2x + 1}{x^2 - x + 2}$.

Ответ: $y' = \dfrac{x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 2x + 5}{(x^2 - x + 2)^2}$;

е) $y = \dfrac{\mathrm{tg}\,x}{\arccos x}$.

Ответ: $y' = \dfrac{1}{\cos^2 x \arccos x} + \dfrac{\mathrm{tg}\,x}{\arccos^2 x \sqrt{1 - x^2}}$.

6. Найти производную функции:

а) $y = \sin 5x$. **Ответ:** $y' = 5\cos 5x$;

б) $y = (2x^4 + 7)^{26}$. **Ответ:** $y' = 208x^3 (2x^4 + 7)^{25}$;

в) $y = \mathrm{tg}\,(3^x + x^3)$. **Ответ:** $y' = \dfrac{3^x \ln 3 + 3x^2}{\cos^2 (3^x + x^3)}$;

г) $y = \mathrm{arcctg}\,\dfrac{1}{2x+1}$. **Ответ:** $y' = \dfrac{2}{(2x+1)^2 + 1}$;

д) $y = \sqrt[3]{\ln^2 \cos 5x}$. **Ответ:** $y' = \dfrac{-10\,\mathrm{tg}\,5x}{3\sqrt[3]{\ln \cos 5x}}$;

е) $y = \sin \ln |x|$. **Ответ:** $y' = \dfrac{\cos \ln |x|}{x}$;

ж) $y = \sqrt{\cos \sqrt{x}}$. **Ответ:** $y' = -\dfrac{\sin \sqrt{x}}{4\sqrt{x \cos \sqrt{x}}}$;

з) $y=\arcsin e^{x}+\arcsin\sqrt{1-e^{2x}}$. **Ответ:** $y'=0$;

и) $y=x\arccos\dfrac{x}{3}-\sqrt{9-x^{2}}$. **Ответ:** $y'=\arccos\dfrac{x}{3}$;

к) $y=\log_{3}\sqrt{\dfrac{3^{2x}}{9+3^{2x}}}$. **Ответ:** $y'=\dfrac{9}{9+9^{x}}$.

7. Найти производную функции, используя логарифмическое дифференцирование:

а) $y=\dfrac{\sqrt{2x+3}\cdot(3x-4)^{5}}{\sqrt[8]{(5x-1)^{7}}\cdot(1-4x)^{9}}$.

Ответ: $y'=\dfrac{\sqrt{2x+3}\cdot(3x-4)^{5}}{\sqrt[8]{(5x-1)^{7}}\,(1-4x)^{9}}\cdot\left(\dfrac{1}{2x-3}+\dfrac{15}{3x-4}-\dfrac{35}{40x-8}+\dfrac{36}{1-4x}\right)$;

б) $y=\dfrac{(7+5x)^{143}\cdot(11x-9)^{98}}{(8x^{2}-2x+1)^{14}\cdot\sqrt[7]{(3x^{2}-2)}}$.

Ответ:

$$y'=\frac{(7+5x)^{143}\,(11x-9)^{98}}{(8x^{2}-2x+1)^{14}\,\sqrt[7]{(3x^{2}-2)}}\cdot\left(\frac{143\cdot5}{5x+7}+\frac{98\cdot11}{11x-9}-\frac{14\cdot(16x-2)}{8x^{2}-2x+1}-\frac{6x}{21x^{2}-14}\right);$$

в) $y=(\sin x)^{\operatorname{arctg}x}$.

Ответ: $y'=(\sin x)^{\operatorname{arctg}x}\cdot\left(\dfrac{\ln\sin x}{1+x^{2}}+\operatorname{ctg}x\cdot\operatorname{arctg}x\right)$.

г) $y=(\ln x)^{x}$.

Ответ: $y'=(\ln x)^{x}\cdot\left(\ln\ln x+\dfrac{1}{\ln x}\right)$.

д) $y=(\arcsin 2x)^{e^{3x}}$.

Ответ: $y'=(\arcsin 2x)^{e^{3x}}\cdot e^{3x}\left(3\ln\arcsin 2x+\dfrac{2}{\arcsin 2x\sqrt{1-4x^{2}}}\right)$;

е) $y=\sqrt[x+1]{x+1}$.

Ответ: $y'=\sqrt[x+1]{x+1}\cdot\dfrac{1-\ln(x+1)}{(x+1)^{2}}$.

6.2. Дифференцирование функций, заданных неявно и параметрически. Дифференциал. Производные и дифференциалы высших порядков

Дифференцирование параметрически заданных функций. Понятие неявно заданных функций и их дифференцирование. Дифференцируемость функции в точке. Дифференциал функции, его геометрический смысл. Применение дифференциала в приближенных вычислениях. Инвариантность формы дифференциала. Уравнение касательной и нормали к кривой. Производные высших порядков, формула Лейбница. Высшие производные параметрически и неявно заданных функций. Дифференциалы высших порядков.

1. Найти производную неявной функции:

а) $x^5-4xy+y^4-3=0$. **Ответ:** $y'_x=\dfrac{4y-5x^4}{4y^3-4x}$;

б) $x^2y^3+xy-\cos y+5=0$. **Ответ:** $y'_x=-\dfrac{2xy^3+y}{3x^2y^2+x+\sin y}$;

в) $\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}=\ln\sqrt{x^2+y^2}$. **Ответ:** $y'_x=\dfrac{x+y}{x-y}$.

2. Найти производную неявной функции в точке $M_0(x_0;y_0)$:

а) $x^3-2x^2y^2+5x+y-5=0,\ M_0(1;1)$. **Ответ:** $\dfrac{4}{3}$;

б) $x^4+y^4-xy=1,\ M_0(1;1)$. **Ответ:** -1;

в) $ye^y=e^{x+1},\ M_0(0;1)$. **Ответ:** $\dfrac{1}{2}$;

г) $\operatorname{tg} y=xy-y,\ M_0(3;0)$. **Ответ:** 0;

д) $x^y=y^x,\ M_0(1;1)$. **Ответ:** 1.

3. Найти производную $\dfrac{dy}{dx}$ параметрически заданной функции:

а) $\begin{cases} x=2t^2+t-4, \\ y=4t^3-2t+1. \end{cases}$ **Ответ:** $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{12t^2-2}{4t^2+1}$;

б) $\begin{cases} x=e^{2t}+1, \\ y=2t+e^{-2t}. \end{cases}$ **Ответ:** $\dfrac{dy}{dx}=e^{-2t}-e^{-4t}$;

в) $\begin{cases} x=a\sin t, \\ y=b\cos t,\ a\neq 0, b\neq 0. \end{cases}$ **Ответ:** $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{b}{a}\operatorname{tg} t$.

4. Найти значение производной $\dfrac{dy}{dx}$ в точке t_0 параметрически заданной функции:

а) $\begin{cases} x=\sin^3 t, \\ y=\cos^3 t,\ t_0=\dfrac{\pi}{6}. \end{cases}$ **Ответ:** $-\sqrt{3}$;

б) $\begin{cases} x=\dfrac{3at^2}{1+t^3}, \\ y=\dfrac{3at^2}{1+t^3},\ a\neq 0,\ t_0=\dfrac{1}{2}. \end{cases}$ **Ответ:** $\dfrac{5}{4}$;

в) $\begin{cases} x=a(t-\sin t), \\ y=a(1-\cos t),\ a\neq 0,\ t_0=\dfrac{2\pi}{3}. \end{cases}$ **Ответ:** $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

5. Составить уравнения касательной и нормали к данной кривой в заданной точке:

а) $y=x^2+8x,\ x_0=1.$ **Ответ:** $y=10x-1;\ y=-0{,}1x+9{,}1;$

б) $y=\dfrac{x^2+1}{x},\ x_0=1.$ **Ответ:** $y=2;\ x=1;$

в) $x^3+2x^2y-3y^2+4=0,\ M_0(1;-1).$ **Ответ:** $y=8x-9;\ y=-\dfrac{1}{3}x-\dfrac{7}{8};$

г) $xe^y+2=x^2+y,\ M_0(2;0).$ **Ответ:** $y=\dfrac{1}{3}x-\dfrac{2}{3};\ y=-3x+6;$

д) $\begin{cases} x=t^3+t^2-1, \\ y=t^3+2t,\ t_0=1. \end{cases}$ **Ответ:** $y=x+2;\ y=-x+4;$

е) $\begin{cases} x=t(1-\sin t), \\ y=t\cos t,\ t_0=\pi. \end{cases}$ **Ответ:** $y=-\dfrac{x+\pi^2}{\pi+1};\ y=(\pi+1)x-\pi^2-2\pi.$

6. Найти приращение Δy и дифференциал dy данной функции в точке x_0 при приращении Δx:

а) $y=x^2+3x,\ x_0=2,\ \Delta x=0{,}1.$

Ответ: $\Delta y(x_0,\Delta x)=0{,}71;\ dy(x_0,\Delta x)=0{,}7;$

б) $y=x^3+3x^2,\ x_0=1,\ \Delta x=0{,}2.$

Ответ: $\Delta y(x_0,\Delta x)=2{,}048;\ dy(x_0,\Delta x)=1{,}8;$

в) $y=4x^2+1,\ \ x_0=3,\ \Delta x=-0{,}1.$

Ответ: $\Delta y(x_0,\Delta x)=-2{,}36;\ \ dy(x_0,\Delta x)=-2{,}4.$

7. Найти дифференциал функции:

а) $y=\sqrt[3]{x}+3^x.$ **Ответ:** $dy=\left(\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}+3^x\ln 3\right)dx;$

б) $y=\dfrac{x+5}{x+2}.$ **Ответ:** $dy=-\dfrac{3dx}{(x+2)^2};$

в) $y=e^{\operatorname{ctg}(4x+5)}.$ **Ответ:** $dy=-\dfrac{4e^{\operatorname{ctg}(4x+5)}}{\sin^2(4x+5)}dx.$

8. Найти дифференциал dy данной функции в заданной точке:

а) $y=x^3\cdot 3^x,\ \ x_0=1.$ **Ответ:** $dy(x_0)=(9+3\ln 3)\,dx;$

б) $x^2-2xy^3+3y^2-xy=1,\ \ M_0=(1;1).$ **Ответ:** $dy(M_0)=-dx;$

в) $\begin{cases} x=t\sin t, \\ y=t-\cos t,\ \ t_0=\dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$ **Ответ:** $dy(t_0)=2dx.$

9. Вычислить приближенно значение выражения с помощью дифференциала:

а) $e^{0,03}.$ **Ответ:** $\approx 1{,}03;$

б) $\ln 0{,}96.$ **Ответ:** $\approx -0{,}04;$

в) $\arcsin 0{,}02.$ **Ответ:** $\approx 0{,}02;$

г) $\sqrt{24}.$ **Ответ:** $\approx 4{,}9;$

д) $\operatorname{arctg} 0{,}97.$ **Ответ:** $\approx 0{,}77;$

е) $\sqrt[3]{\dfrac{3-x}{3+x}}.$ **Ответ:** $\approx 0{,}98.$

10. Найти указанные производные функции $y(x)$:

а) $y=2x^6+5^x-3\ln 2,\ \ y''(x).$ **Ответ:** $y''(x)=60x^4+5^x\ln^2 5;$

б) $y=x^3-5x^2+7x-2,\ \ y''(2),\ \ y^{(5)}(x).$ **Ответ:** $y''(2)=2,\ \ y_x^{(5)}=0;$

в) $y=\sin^2 x,\ \ y''(x),\ \ y''(0).$ **Ответ:** $y''(x)=2\cos 2x,\ \ y''(0)=2;$

г) $y=(1+4x^2)\operatorname{arctg}2x,\ \ y''(x).$ **Ответ:** $y''(x)=8\operatorname{arctg}2x+\dfrac{16x}{1+4x^2};$

д) $y=e^{x^2},\ \ y'''(x).$ **Ответ:** $y'''(x)=(8x^3+12x)e^{x^2};$

е) $y=e^{-3x},\ \ y^{(n)}(x),\ n\in\mathbb{N}.$ **Ответ:** $y^{(n)}(x)=(-1)^n\cdot 3^n\cdot e^{-3x};$

ж) $y=\dfrac{1}{5x+3}$, $y^{(n)}(x), n\in\mathbb{N}$. **Ответ:** $y^{(n)}(x)=\dfrac{(-1)^n\cdot 5^n\cdot n!}{(5x+3)^{n+1}}$;

з) $y=\ln(1+4x)$, $y^{(10)}(0)$. **Ответ:** $y^{(10)}(0)=-4^{10}\cdot 9!$

11. Найти $y^{(n)}(x)$ с помощью формулы Лейбница:

а) $y=e^{-x}\cdot(x^2-3)$, $n=8$. **Ответ:** $y^{(8)}(x)=(x^2-16x+53)\,e^{-x}$;

б) $y=x^3\cdot\cos x$, $n=11$.

Ответ: $y^{(11)}(x)=(x^3-330x)\cdot\sin x+(990-33x^2)\cos x$;

в) $y=(x^2+2)\ln x^2$, $n=7$. **Ответ:** $y^{(7)}(x)=\dfrac{96(x^2+21)}{x^7}$.

12. Найти производную $y''_{x^2}(M_0)$ функции, заданной неявно:

а) $x^4-2xy+y^4-1=0$, $M_0(0;1)$. **Ответ:** $y''_{x^2}(M_0)=-\dfrac{3}{4}$;

б) $xy^3-3y-2=0$, $M_0(1;2)$. **Ответ:** $y''_{x^2}(M_0)=\dfrac{320}{243}$;

в) $xy+e^y=e$, $M_0(0;1)$. **Ответ:** $y''_{x^2}(M_0)=e^{-2}$.

13. Найти производную y''_{xx} функции, заданной параметрически:

а) $\begin{cases} x=t^3+t+1, \\ y=t^3+t^2-1. \end{cases}$ **Ответ:** $y''_{xx}=\dfrac{2+6t-6t^2}{(3t^2+1)^3}$;

б) $\begin{cases} x=3\cos t, \\ y=2\sin t. \end{cases}$ **Ответ:** $y''_{xx}=\dfrac{-2}{9\sin^3 t}$;

в) $\begin{cases} x=2\ln t, \\ y=t+\dfrac{1}{t}. \end{cases}$ **Ответ:** $y''_{xx}=\dfrac{1}{4}\left(t+\dfrac{1}{t}\right)$.

14. Найти d^2y и $d^2y(x_0,\Delta x)$ функции $y(x)$, где $x-$ независимая переменная:

а) $y=e^{3x}$, $x_0=0, \Delta x=0{,}1$.

Ответ: $d^2y=9e^{3x}dx^2$, $d^2y(x_0,\Delta x)=0{,}09$;

б) $y=\cos x^2$, $x_0=\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}, \Delta x=0{,}2$.

Ответ: $d^2y=-2(2x^2\cos x^2+\sin x^2)\,dx^2$, $d^2y(x_0,\Delta x)=-0{,}08$.

15. Для функции d^2y и $y = 5x^4 - 2x^3 + x$ найти d^2y, если:

а) $x-$ независимая переменная;

б) $x = x(t)$, т. е. зависимая переменная.

Ответ:

а) $d^2y = (60x^2 - 12x)\,dx^2$;

б) $d^2y = (60x^2 - 12x)\,dx^2 + (20x^3 - 6x^2 + 1)\,d^2x$.

16. Найти d^3y функции $y(x)$, где $x-$ независимая переменная:

а) $y = \sin^2 3x$. **Ответ:** $d^3y = -108\sin 6x\,dx^3$;

б) $y = \dfrac{\ln x}{x}$. **Ответ:** $d^3y = \dfrac{11 - 6\ln x}{x^4}\,dx^3$;

в) $y = x^2 \cdot e^{-2x}$. **Ответ:** $d^3y = (-8x^2 + 24x - 12)\,e^{-2x}dx^3$.

6.3. Основные теоремы дифференциального исчисления. Правило Лопиталя

Локальный экстремум функции. Теорема Ферма. Теорема Ролля и ее следствия. Теорема Лагранжа и формула конечных приращений. Теорема Коши. Раскрытие неопределенностей $\left(\dfrac{0}{0}\right)$ и $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$ по правилу Бернулли – Лопиталя. Алгебраические преобразования и раскрытие неопределенностей вида $(0\cdot\infty)$, $(\infty\cdot\infty)$, (0°), (∞°), (1^{∞}).

1. Найти точку локального экстремума многочлена $P(x)$ с помощью метода выделения полного квадрата. Проверить выполнение условий теоремы Ферма в этой точке:

а) $P(x) = 2x^2 - 6x + 5$. **Ответ:** $x_{\min} = 1{,}5$, $P'(1{,}5) = 0$;

б) $P(x) = 3x^2 + 2x - 1$. **Ответ:** $x_{\min} = -\dfrac{1}{3}$, $P'\left(-\dfrac{1}{3}\right) = 0$;

в) $P(x) = 3 + x - x^2$. **Ответ:** $x_{\max} = \dfrac{1}{2}$, $P'\left(\dfrac{1}{2}\right) = 0$.

2. Выяснить, применима ли теорема Ролля к функции $f(x)$ на отрезке $[a; b]$:

а) $f(x) = 1 - x - 3x^2$, $\left[-1; \dfrac{2}{3}\right]$. **Ответ:** да;

б) $f(x) = \sqrt[3]{x^2} - 1$, $[-1; 1]$.

Ответ: нет, не существует конечной производной $f'(x)$ в точке $x = 0$;

в) $f(x)=5x+7,\ [2;4].$ **Ответ:** нет, $f(2)\neq f(4)$;

г) $f(x)=\begin{cases} x & \text{при } 0\le x<2, \\ 0 & \text{при } x=2. \end{cases}$

Ответ: нет, $f(x)$ не является непрерывной в точке $x=2$.

3. Доказать, пользуясь теоремой Лагранжа, справедливость неравенства:

а) $|\cos x-\cos y|\le|x-y|$ для $\forall x,y\in\mathbb{R}$;

б) $|\operatorname{arctg} x-\operatorname{arctg} y|\le|x-y|$ для $\forall x,y\in\mathbb{R}$.

4. Определить промежуточное значение c формулы конечных приращений для функции

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{3}{2}-\dfrac{x^2}{2} & \text{при } 0\le x\le 1, \\ \dfrac{1}{x} & \text{при } x>1 \end{cases}$$

на отрезке $[0;2]$.

Ответ: $c_1=\dfrac{1}{2},\ c_2=\sqrt{2}.$

5. Определить, в какой точке касательная к графику функции $y=f(x)$ параллельна хорде, соединяющей точки графика A и B:

а) $f(x)=4-x^2,\ A(-2;0),\ B(1;3).$ **Ответ:** $M\left(-\dfrac{1}{2};\dfrac{15}{4}\right)$;

б) $f(x)=x^3+3x^2-x-1,\ A(-2;5),\ B(1;2).$ **Ответ:** $A(-2;5), M(0;-1).$

6. Проверить выполнение условий теоремы Коши о среднем значении для функций $f(x)$ и $g(x)$ на отрезке $[a;b]$ и найти соответствующее значение c формулы Коши:

а) $f(x)=x^2-2x+2,\ g(x)=x^3-7x^2+20x-1,\ [1;4].$ **Ответ:** $c=2$;

б) $f(x)=5x+1,\ g(x)=\ln x,\ [1;e].$ **Ответ:** $c=e-1$.

7. Найти пределы, используя правило Лопиталя, где это возможно:

а) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2x^2-5x-3}{3x^2-11x+6}.$ **Ответ:** 1;

б) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^4-x^2+x+1}{x^3+1}.$ **Ответ:** $-\dfrac{1}{3}$;

в) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-8}{x-\sqrt{2x}}.$ **Ответ:** 24;

г) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^3+3x^2-4}{x^3+5x^2+8x+4}.$ **Ответ:** 3;

д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(4x+1)^6-24x-1}{(3x+1)^9-27x-1}$. **Ответ:** $\dfrac{20}{27}$;

е) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 7x+\sin 3x}{e^{5x}-e^{7x}}$. **Ответ:** -5;

ж) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}2x-\sin 2x}{x^3}$. **Ответ:** 4;

з) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\ln(e^x+1)}{1-xe^x}$. **Ответ:** 0;

и) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x^n}{3^x}$, $n\in\mathbb{N}$. **Ответ:** 0;

к) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x+\sin x}{x}$. **Ответ:** 1, правило Лопиталя неприменимо;

л) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\dfrac{\ln \operatorname{tg}x}{\sin x-\cos x}$. **Ответ:** $\sqrt{2}$;

м) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}+0}\dfrac{\ln(2x-\pi)}{\operatorname{tg}x}$. **Ответ:** 0;

н) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin x+\cos 2x}{\sin x-1}$. **Ответ:** -3;

о) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3\cdot\sin\frac{2}{x}}{\operatorname{tg}^2 x}$. **Ответ:** 0, правило Лопиталя неприменимо.

8. Найти пределы с помощью правила Лопиталя:

а) $\lim\limits_{x\to +\infty} e^{-2x}\ln(7x+1)$. **Ответ:** 0;

б) $\lim\limits_{x\to +0} \ln x \operatorname{arctg} x$. **Ответ:** 0;

в) $\lim\limits_{x\to +0} xe^{\frac{1}{x}}\ln(7x+1)$. **Ответ:** $+\infty$;

г) $\lim\limits_{x\to +\infty} (x+1)(\ln(x+2)-\ln(x-1))$. **Ответ:** 3;

д) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\operatorname{ctg}x}{x}-\dfrac{1}{x^2}\right)$. **Ответ:** $-\dfrac{1}{3}$;

е) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\operatorname{arctg}x}-\dfrac{1}{x}\right)$. **Ответ:** 0;

ж) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e^x-1}\right)$. **Ответ:** $\dfrac{1}{2}$;

з) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{\cos x-1}}$. **Ответ:** $e^{\frac{1}{3}}$;

и) $\lim\limits_{x\to 1-0}(1-x)^{\ln x}$. **Ответ:** 1;

к) $\lim\limits_{x\to +\infty}(x+5^x)^{\frac{1}{x}}$. **Ответ:** 5;

л) $\lim\limits_{x\to 0}(\sin x)^x$. **Ответ:** 1;

м) $\lim\limits_{x\to 0}(2x+3^x)^{\frac{1}{\operatorname{tg} x}}$. **Ответ:** $3e^2$;

н) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{x}{\ln x}\right)^{\frac{1}{x}}$. **Ответ:** 1.

6.4. Формула Тейлора

Линейное и квадратичное приближение функции. Многочлен Тейлора и формула Тейлора. Остаточный член формулы Тейлора в форме Пеано и в форме Лагранжа. Разложение основных элементарных функций по формуле Маклорена. Вычисление пределов при помощи формулы Тейлора. Использование формулы Тейлора в приближенных вычислениях.

1. Разложить многочлен $P(x)$ по степеням $x-x_0$, пользуясь формулой Тейлора:

а) $P(x)=2x^3-3x^2+5x+1,\ x_0=-1.$

Ответ: $P(x)=-9+17(x+1)-9(x+1)^2+2(x+1)^3$;

б) $P(x)=3x^4-4x^2-8,\ x_0=2.$

Ответ: $P(x)=24+80(x-2)+68(x-2)^2+24(x-2)^3+3(x-2)^4$.

2. Разложить функцию $f(x)$ по формуле Тейлора n-го порядка в окрестности точки x_0 с остаточным членом в форме Лагранжа:

а) $f(x)=\sqrt{x},\ x_0=1,\ n=3.$

Ответ: $\sqrt{x}=1+\dfrac{1}{2}(x-1)-\dfrac{1}{8}(x-1)^2+\dfrac{1}{16}(x-1)^3-\dfrac{5(x-1)^4}{128\cdot\sqrt{(1+\theta(x-1))^7}},\ 0<\theta<1$;

б) $f(x)=\operatorname{tg} x,\ x_0=\dfrac{\pi}{4},\ n=2.$

Ответ: $\operatorname{tg} x = 1 + 2\left(x-\frac{\pi}{4}\right) + 2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2 + \frac{2\sin^2 c+1}{3\cos^4 c}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^3$, где $c = \frac{\pi}{4} + \theta\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$, $0<\theta<1$;

в) $f(x) = e^{x^2+x}$, $x_0 = -1$, $n = 2$.

Ответ: $e^{x^2+x} = 1-(x+1)+\frac{3}{2}(x+1)^2 + \frac{(2c+1)^3+6(2c+1)}{6} e^{c^2+c}(x+1)^3$, где $c = -1+\theta(x+1)$, $0<\theta<1$.

3. Разложить функцию $f(x)$ по формуле Тейлора произвольного порядка n в окрестности точки x_0 с остаточным членом в форме Лагранжа:

а) $f(x) = \ln(4x-3)$, $x_0 = 1$.

Ответ: $\ln(4x-3) = 4(x-1) - 8(x-1)^2 + \ldots + \frac{(-1)^n \cdot 4^{n+1}}{(n+1)(4c-3)^{n+1}}(x-1)^{n+1}$, где $c = 1+\theta(x-1)$, $0<\theta<1$;

б) $f(x) = \cos 3x$, $x_0 = \frac{\pi}{6}$.

Ответ:

$$\cos 3x = -3\left(x-\frac{\pi}{6}\right) + \frac{3^3}{3!}\left(x-\frac{\pi}{6}\right)^3 - \frac{3^5}{5!}\left(x-\frac{\pi}{6}\right)^5 + \ldots + \frac{(-1)^{n+1}\cdot 3^{2n+1}}{(2n+1)!}\left(x-\frac{\pi}{6}\right)^{2n+1} +$$

$$+ \frac{(-1)^{n+1}\cdot 3^{2n+2}\cdot\cos 3c}{(2n+2)!}\left(x-\frac{\pi}{6}\right)^{2n+2},$$ где $c = \frac{\pi}{6}+\theta\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$, $0<\theta<1$.

4. Разложить функцию $f(x)$ по формуле Маклорена с остаточным членом в форме Пеано, используя основные разложения:

а) $f(x) = x^2 \sin\frac{x}{3}$.

Ответ: $x^2\sin\frac{x}{3} = \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{3^3\cdot 3!} + \ldots + \frac{(-1)^n\cdot x^{2n+3}}{3^{2n+1}\cdot(2n+1)!} + o(x^{2n+3})$;

б) $f(x) = x e^{-2x^2}$.

Ответ: $x e^{-2x^2} = x - 2x^3 + 2x^5 + \ldots + \frac{(-1)^n\cdot 2^n}{n!}x^{2n+1} + o(x^{2n+1})$;

в) $f(x) = \frac{x^3}{3x^2-2}$.

Ответ: $\dfrac{x^3}{3x^2-2}=-\dfrac{1}{2}x^3+\dfrac{3}{4}x^5-\ldots+\dfrac{(-1)^{n+1}\cdot 3^n}{2^{n+1}}x^{2n+3}+o(x^{2n+3})$;

г) $f(x)=x\ln(4+5x)$.

Ответ: $x\ln(4+5x)=x\ln 4+\dfrac{5}{4}x^2-\dfrac{25}{32}x^3+\ldots+\dfrac{(-1)^{n-1}\cdot 5^n}{n\cdot 4^n}x^{n+1}+o(x^{2n+1})$.

5. Разложить функцию $f(x)$ по формуле Тейлора в окрестности точки x_0 с остаточным членом в форме Пеано, используя основные разложения:

а) $f(x)=\dfrac{x}{3x-5}$, $x_0=2$.

Ответ: $\dfrac{x}{3x-5}=2+5\sum\limits_{k=1}^{n}(-1)^k\cdot 3^{k-1}\cdot(x-2)^k+o((x-2)^n)$;

б) $f(x)=\dfrac{1}{x^2+2x+3}$, $x_0=-1$.

Ответ: $\dfrac{1}{x^2+2x+3}=\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{(-1)^k}{2^{k+1}}(x+1)^{2k}+o((x+1)^{2n})$;

в) $f(x)=\ln(7x+2)$, $x_0=1$.

Ответ: $\ln(7x+2)=\ln 9+\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{(-1)^{k-1}\cdot 7^k}{k\cdot 9^k}(x-1)^k+o((x-1)^n)$;

г) $f(x)=xe^{x-3}$, $x_0=-2$.

Ответ: $xe^{x-3}=-2e^{-5}+e^{-5}\cdot\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{k-2}{k!}(x+2)^k+o((x+2)^n)$;

д) $f(x)=\cos(x^2+6x)$, $x_0=-3$.

Ответ: $\cos(x^2+6x)=\cos 9\cdot\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{(-1)^k(x+3)^{4k}}{(2k)!}+\sin 9\cdot\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{(-1)^k(x+3)^{4k+2}}{(2k+1)!}+$
$+o((x+3)^{4n+2})$.

6. Вычислить приближенно с точностью до $0,01$:

а) $\ln 0,9$. **Ответ:** $-0,10$;

б) $\sqrt[5]{e}$. **Ответ:** $1,22$;

в) $\sqrt[3]{9}$. **Ответ:** $2,08$;

г) $\cos 0,7$. **Ответ:** $0,75$;

д) $\sin 1$. **Ответ:** $0,84$.

7. Выяснить происхождение и оценить погрешность приближенной формулы:

а) $\ln 1,5 \approx 0,5 - \frac{1}{2}\cdot 0,5^2 + \frac{1}{3}\cdot 0,5^3 - \frac{1}{4}\cdot 0,5^4.$ **Ответ:** $|R_4| < 10^{-2}$;

б) $e^{1,1} \approx 1 + 1,1 + \frac{1}{2!}\cdot 1,1^2 + \frac{1}{3!}\cdot 1,1^3 + \frac{1}{4!}\cdot 1,1^4.$ **Ответ:** $|R_4| < 5\cdot 10^{-2}$;

в) $\operatorname{arctg} 0,1 \approx 0,1 - \frac{1}{3}\cdot 0,1^3.$ **Ответ:** $|R_3| < 10^{-5}$.

8. Найти предел с помощью формулы Тейлора:

а) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos 2x^3 - 1 + 2x^6}{2x^{12} + 3x^{16}}.$ **Ответ:** $\frac{1}{3}$;

б) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1 - \ln(1+x)}{7x^3 + 2x^2}.$ **Ответ:** $\frac{1}{2}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2 \sin x^3 - 4x^6}{x\ln(1+5x^2) - 5x^3}.$ **Ответ:** $-\frac{2}{25}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2\operatorname{tg} x + \sin x - 3x}{5x^3 + x^4}.$ **Ответ:** $\frac{1}{10}$;

д) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^3 \cdot \operatorname{tg} x}.$ **Ответ:** $-\frac{1}{12}$;

е) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{\ln(1+x)^{1+x}}{x^2} - \dfrac{1}{x}\right).$ **Ответ:** $\frac{1}{2}$;

ж) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\cos x + \dfrac{x^2}{2}\right)^{\frac{1}{x(\operatorname{tg} x - x)}}.$ **Ответ:** $e^{\frac{1}{8}}$;

з) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{2\sqrt{x} - \sin(x-1) - 2\cos(1-x)}{\ln^2(2x-1)}.$ **Ответ:** $\frac{3}{16}$.

6.5. Исследование функций с помощью производных

Условия возрастания и убывания функций. Экстремум функции. Необходимые условия существования экстремума. Достаточные условия существования экстремума функции. Условия выпуклости функций. Точки перегиба. Наибольшее и наименьшее значения функции в промежутке. Асимптоты графика функции. Общая схема исследования функции и построение ее графика.

1. Найти промежутки возрастания, убывания и локальные экстремумы функции $f(x)$:

а) $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 5.$

Ответ: возрастает на $(-\infty;-1)$ и $(2;+\infty)$, убывает на $(-1;2)$; $f_{\max}(-1)=12,\ \ f_{\min}(2)=-15$;

б) $f(x)=x^4-6x^2+3.$

Ответ: возрастает на $(-\infty;-\sqrt{3})$ и $(\sqrt{3};+\infty)$, убывает на $(-\infty;-\sqrt{3})$ и $(0;\sqrt{3})$; $f_{\max}(0)=3,\ \ f_{\min_{1,2}}(\pm\sqrt{3})=-6$;

в) $f(x)=(x-1)^3(x+3)^2.$

Ответ: возрастает на $(-\infty;-3)$ и $(-1,4;+\infty)$, убывает на $(-3;-1,4)$; $f_{\max}(-3)=0,\ \ f_{\min}(-1,4)=-\dfrac{3^3\cdot 2^{12}}{5^5}=-35,38944$;

г) $f(x)=\sqrt[3]{(x^2-x-6)^2}.$

Ответ: возрастает на $\left(-2;\dfrac{1}{2}\right)$ и $(3;+\infty)$, убывает на $(-\infty;-2)$ и $\left(\dfrac{1}{2};3\right)$; $f_{\max}\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{5}{2}\cdot\sqrt[3]{\dfrac{5}{2}},\ \ f_{\min_1}(-2)=f_{\min_2}(3)=0$;

д) $f(x)=\dfrac{e^{-x}}{x^2}.$

Ответ: возрастает на $(-2;0)$, убывает на $(-\infty;-2)$ и $(0;+\infty)$; $f_{\min}(-2)=\dfrac{e^2}{4}$;

е) $f(x)=x\cdot\operatorname{arctg}x-\ln\sqrt{1+x^2}.$

Ответ: возрастает на $(0;+\infty)$, убывает на $(-\infty;0)$; $f_{\min}(0)=0.$

2. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x)$ на указанном отрезке:

а) $f(x)=x^3-3x+4,\ \ x\in[0;3].$

Ответ: $f(3)=22;\ \ f(1)=2$;

б) $f(x)=x^2-2x-15+\dfrac{16}{x-1},\ \ x\in[2;5].$

Ответ: $f(5)=4;\ \ f(3)=-4$;

в) $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2-3},\ \ x\in[2;4].$

Ответ: $f(2)=8;\ \ f(3)=4,5$;

г) $f(x)=\sin^2 x+\cos x,\ \ x\in\left[-\dfrac{\pi}{2};\pi\right].$

Ответ: $f\left(\pm\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{5}{4};\ \ f(\pi)=-1$;

д) $f(x)=x^2e^{-x^2}$, $x\in[-2;3]$.

Ответ: $f(\pm1)=\frac{1}{e}$; $f(0)=0$.

3. Представить число 11 в виде суммы двух положительных чисел так, чтобы сумма куба первого числа и увеличенного в 12 раз второго числа была наименьшей.

Ответ: 2 и 9.

4. Определить размеры открытого бассейна с квадратным дном, объем которого равен 32 м^3, так, чтобы на облицовку его стен и дна пошло наименьшее количество материала.

Ответ: степень основания – 4 м, глубина – 2 м.

5. Найти промежутки выпуклости, вогнутости и точки перегиба графика функции $f(x)$:

а) $f(x)=2x^4-3x^2+8x-5$.

Ответ: выпукла на $\left(-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$; вогнута на $\left(-\infty;-\frac{1}{2}\right)$ и $\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$; $x=\pm\frac{1}{2}$ – точки перегиба;

б) $f(x)=\frac{x^3}{x^2+3}$.

Ответ: выпукла на $(-3;0)$ и $(3;+\infty)$; вогнута на $(-\infty;-3)$ и $(0;3)$; $x=\pm3$ и $x=0$ – точки перегиба;

в) $f(x)=x\sqrt[3]{x-1}$.

Ответ: выпукла на $(1;1,5)$; вогнута на $(-\infty;1)$ и $(1,5;+\infty)$; $x=1$ и $x=1,5$ – точки перегиба;

г) $f(x)=(x^2+1)e^x$.

Ответ: выпукла на $(-3;-1)$; вогнута на $(-\infty;-3)$ и $(-1;+\infty)$; $x=-3$ и $x=-1$ – точки перегиба;

д) $f(x)=e^{\operatorname{arctg} x}$.

Ответ: выпукла на $\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$; вогнута на $\left(-\infty;\frac{1}{2}\right)$; $x=\frac{1}{2}$ – точка перегиба;

е) $f(x)=\ln\frac{x}{x+4}$.

Ответ: выпукла на $(0;+\infty)$; вогнута на $(-\infty;-4)$; точек перегиба нет.

6. Найти асимптоты графика функции $f(x)$:

а) $f(x)=\dfrac{x^2+3x-1}{x^2-4x+3}$. **Ответ:** $x=1$, $x=3$, $y=1$;

б) $f(x)=\dfrac{x^3+2}{x^2+2x-15}$. **Ответ:** $x=-5$, $x=3$, $y=x-2$;

в) $f(x)=xe^{-2x}$. **Ответ:** $y=0$ при $x\to+\infty$;

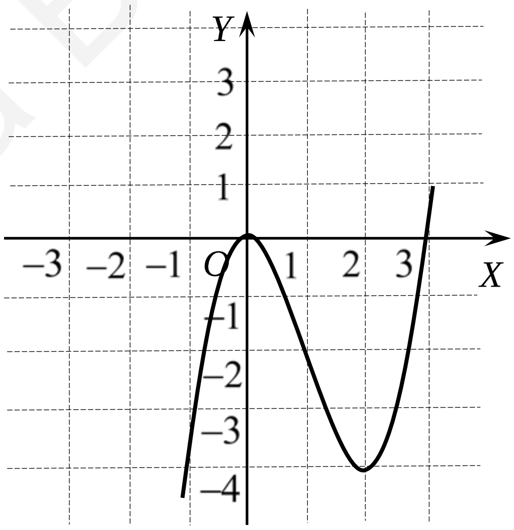
г) $f(x)=\dfrac{1}{1-e^{2x}}$. **Ответ:** $x=0$, $y=1$ при $x\to+\infty$;

д) $f(x)=\ln\left|\dfrac{x+2}{x-2}\right|$. **Ответ:** $x=-2$, $x=2$, $y=0$;

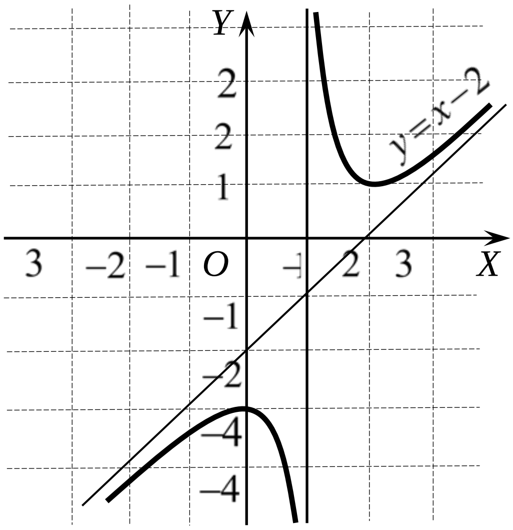
е) $f(x)=\dfrac{x}{4}+\operatorname{arcctg}3x$. **Ответ:** $y=\dfrac{x}{4}+\pi$ при $x\to-\infty$, $y=\dfrac{x}{4}$ при $x\to+\infty$.

7. Исследовать функцию $f(x)$ и построить ее график:

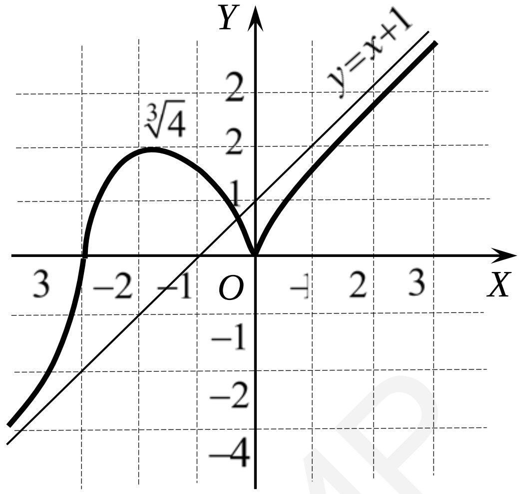
а) $f(x)=x^3-3x^2$. **Ответ:**



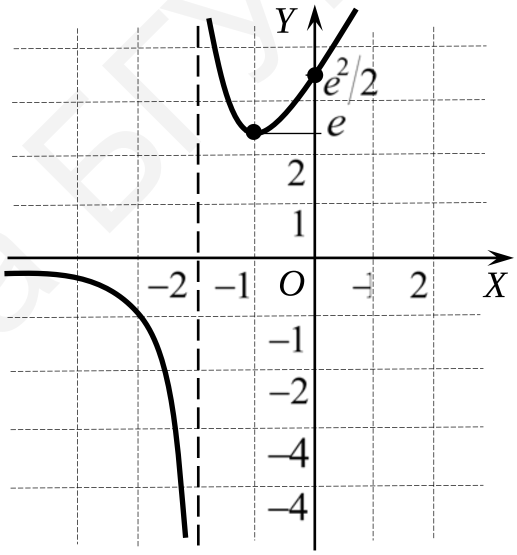
б) $f(x)=\dfrac{x^2-3x+3}{x-1}$. **Ответ:**



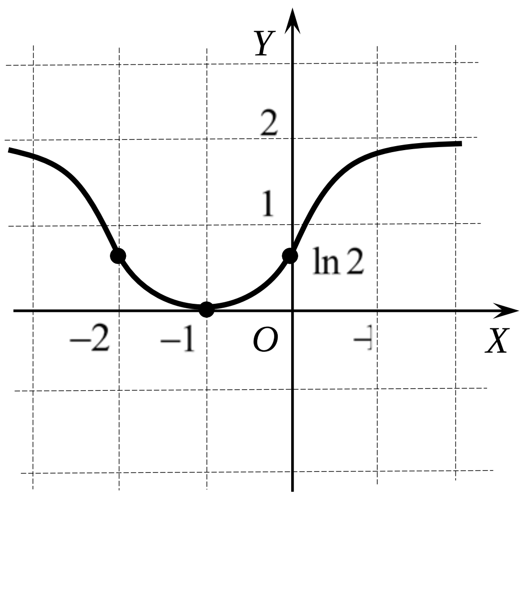
в) $f(x)=\sqrt[3]{x^2(x+3)}$. **Ответ:**



г) $f(x)=\dfrac{e^{x+2}}{x+2}$. **Ответ:**

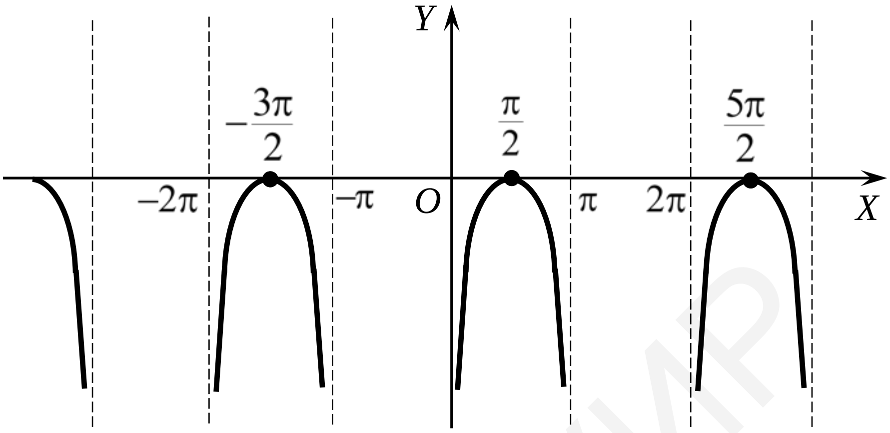


д) $f(x)=\ln(x^2+2x+2)$. **Ответ:**



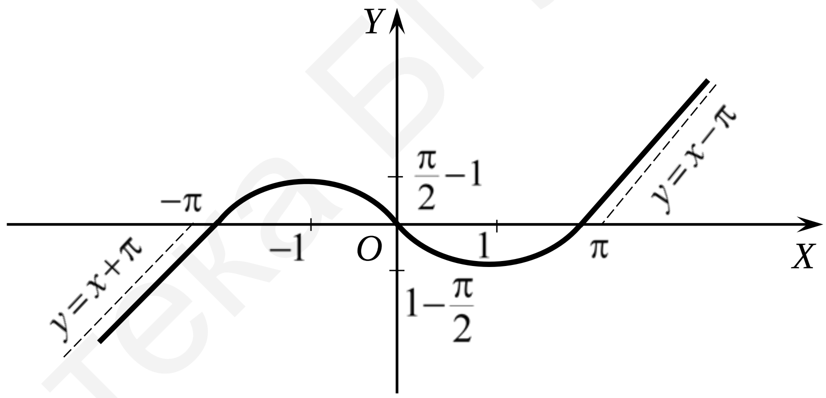
е) $f(x) = \ln \sin x$.

Ответ:



ж) $f(x) = x - 2\mathrm{arctg}\, x$.

Ответ:



7. Комплексные числа

Определение комплексных чисел. Алгебраическая форма записи комплексных чисел. Правила действий с комплексными числами, записанными в алгебраической форме. Геометрическая интерпретация комплексных чисел. Модуль и аргументы комплексного числа. Тригонометрическая форма комплексного числа. Умножение и деление комплексных чисел, записанных в тригонометрической форме. Возведение в степень. Формула Муавра. Извлечение корней из комплексных чисел. Показательная форма комплексного числа. Формулы Эйлера.

1. Представить в алгебраической форме комплексные числа:

а) $z = \dfrac{1+i}{1-i} + \dfrac{1-i}{1+i}$. **Ответ:** 0;

б) $\dfrac{13+12i}{6i-8} + \dfrac{(1+2i)^2}{2+i}$. **Ответ:** $-\dfrac{18}{25} + \dfrac{23}{50}i$.

2. Решить уравнение

$(1+2i)(z-i)+(4i-3)(1+iz)+1+7i=0.$ **Ответ:** $-1-i.$

3. Решить систему

$$\begin{cases} z_1+2z_2=2+i, \\ 3z_1-iz_2=5-3i. \end{cases}$$

Ответ: $z_1=\dfrac{50-33i}{37},\ z_2=\dfrac{12+35i}{37}.$

4. Представить в тригонометрической форме комплексные числа:

а) $z=-i;$ б) $z=\dfrac{1-i}{1+i};$ в) $z=-\cos\dfrac{\pi}{7}+i\sin\dfrac{\pi}{7}.$

Ответ: а) $\cos\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(-\dfrac{\pi}{2}\right);$ б) $\cos\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(-\dfrac{\pi}{2}\right);$
в) $\cos\dfrac{6\pi}{7}+i\sin\dfrac{6\pi}{7}.$

5. Решить уравнения:

а) $|z|-z=1+2i;$ б) $|z|+z=2+i.$

Ответ: а) $\dfrac{3}{2}-2i;$ б) $\dfrac{3}{4}+i.$

6. Найти $|z|$ и $\arg z,$ если

а) $z=2ie^{-\frac{\pi}{5}i};$ б) $z=-3e^{\frac{\pi}{5}i}.$

Ответ: а) $2;\ \dfrac{3\pi}{10};$ б) $3;\ -\dfrac{4\pi}{5}.$

7. Представить в показательной форме комплексное число $z=(-1+i)^5.$

Ответ: $4\sqrt{2}\,e^{-\frac{\pi i}{4}}.$

8. Найти все значения n, при которых справедливо равенство

$(1+i)^n=(1-i)^n.$

Ответ: $n=4k$ при $k\in\mathbb{N}.$

9. Найти все значения $\sqrt[4]{-81}.$

Ответ: $w_0=\sqrt{3}+i\sqrt{3},\ w_1=-\sqrt{3}+i\sqrt{3},\ w_3=-\sqrt{3}-i\sqrt{3},\ w_4=\sqrt{3}-i\sqrt{3}.$

10. Используя формулу Муавра, выразить через $\cos\varphi$ и $\sin\varphi$ следующие функции: а) $\cos 4\varphi;$ б) $\sin 4\varphi.$

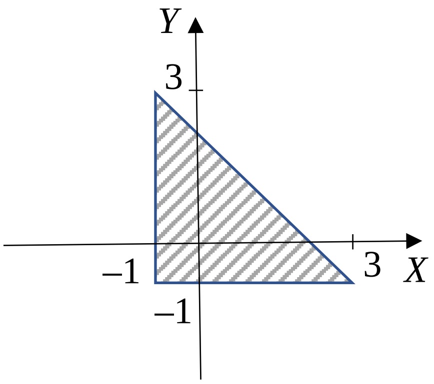
Ответ: а) $\cos^4\varphi-6\cos^2\varphi+\sin^4\varphi;$ б) $4\sin\varphi\cos^3\varphi-4\cos\varphi\sin^3\varphi.$

11. Используя формулы Эйлера, доказать равенство

$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\,\cos\beta+\cos\alpha\,\sin\beta.$

12. Изобразите на комплексной плоскости множество точек, удовлетворяющих условиям $0 \le \arg(z+1+i) \le \frac{\pi}{2}$, $\operatorname{Re} iz \ge \operatorname{Re}(z-2)$.

Ответ:



13. Определите вид кривой, заданной соотношением $|z+4-10i| = |z-4-2i|$.
Ответ: $y = x+6$.

8. Интегральное исчисление функций одной переменной

8.1. Первообразная. Неопределенный интеграл

Понятие первообразной функции. Связь между любыми первообразными функциями $f(x)$. Неопределенный интеграл. Свойства неопределенного интеграла. Таблица основных неопределенных интегралов. Основные методы интегрирования: непосредственное интегрирование, интегрирование подстановкой и заменой переменного, интегрирование по частям.

Найти неопределенные интегралы:

1. $\int \frac{(x^2+1)(x^2-2)}{\sqrt[3]{x^2}}\,dx$. **Ответ:** $\frac{3x^4\sqrt[3]{x}}{13} - \frac{3x^2\sqrt[3]{x}}{7} - 6\sqrt[3]{x} + c$.

2. $\int 2^{2x} e^{3x}\,dx$. **Ответ:** $\frac{(4e^3)^x}{\ln 4e^3} + c$.

3. $\int (2x+7)^8\,dx$. **Ответ:** $\frac{1}{18}(2x+7)^9 + c$.

4. $\int \frac{dx}{\sqrt{3-7x}}$. **Ответ:** $-\frac{2}{7}\sqrt{3-7x} + c$.

5. $\int x^3 \sqrt[4]{5x^4-3}\,dx$. **Ответ:** $\frac{1}{25}\sqrt[4]{(5x^4-3)^5} + c$.

6. $\int (3-4\sin)^{\frac{1}{3}} \cos x\,dx$. **Ответ:** $-\frac{3}{16}(3-4\sin x)^{\frac{4}{3}} + c$.

7. $\int \frac{\sin x\,dx}{\sqrt{\cos^2 x+4}}$. **Ответ:** $-\ln(\cos x+\sqrt{\cos^2 x+4})+c$.

8. $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^6+1}}$. **Ответ:** $\frac{1}{3}\ln\left|x^3+\sqrt{x^6+1}\right|+c$.

9. $\int \frac{e^{\arcsin x}+x+1}{\sqrt{1-x^2}}dx$. **Ответ:** $e^{\arcsin x}-\sqrt{1-x^2}+\arcsin x+c$.

10. $\int \frac{\sin 2x}{\sqrt{3-\cos^2 x}}dx$. **Ответ:** $-2\sqrt{3-\cos^2 x}+c$.

11. $\int x(2x+5)^8 dx$. **Ответ:** $\frac{1}{40}(2x+5)^{10}-\frac{5}{36}(2x+5)^9+c$.

12. $\int \frac{\ln^5 x}{x}dx$. **Ответ:** $\frac{\ln^6 x}{6}+c$.

13. $\int \frac{dx}{1+\cos x}$. **Ответ:** $\operatorname{tg}\frac{x}{2}+c$.

14. $\int \frac{\sqrt{1+2\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$. **Ответ:** $\frac{2}{3}\sqrt{(1+2\sqrt{x})^3}+c$.

15. $\int \frac{dx}{e^x+e^{-x}}$. **Ответ:** $\operatorname{arctg} e^x+c$.

16. $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x+3}}$. **Ответ:** $2(\sqrt{x+3})-\ln(1+\sqrt{x+3})+c$.

17. $\int \frac{1}{x^2(x^2+4)}dx$. **Ответ:** $-\frac{1}{4x}-\frac{1}{8}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}+c$.

18. $\int \frac{1}{x^2(4-x^2)}dx$. **Ответ:** $-\frac{1}{4x}+\frac{1}{16}\ln\left|\frac{2+x}{2-x}\right|+c$.

19. $\int \frac{x-1}{(x+2)^2}dx$. **Ответ:** $\ln|x+2|+\frac{3}{x+2}+c$.

20. $\int \frac{dx}{x^2-6x+10}$. **Ответ:** $\frac{1}{\sqrt{10}}\operatorname{arctg}\frac{x-3}{\sqrt{10}}+c$.

21. $\int \frac{dx}{\sqrt{15+4x-x^2}}$. **Ответ:** $\arcsin\frac{x-2}{\sqrt{11}}+c$.

22. $\int \frac{4x-3}{x^2-2x+6}dx$. **Ответ:** $2\ln(x^2-2x+6)+\frac{1}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{x-1}{\sqrt{5}}+c$.

23. $\int \frac{x+4}{\sqrt{2-x-x^2}}dx$. **Ответ:** $-\sqrt{2-x-x^2}+\frac{7}{2}\arcsin\frac{2x+1}{3}+c$.

24. $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+x+1}}dx.$ **Ответ:** $\sqrt{x^2+x+1}-\frac{1}{2}\ln\left(x+\frac{1}{2}+\sqrt{x^2+x+1}\right)+c.$

25. $\int \arccos x\,dx.$ **Ответ:** $x\arccos x-\sqrt{1-x^2}+c.$

26. $\int \frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}}dx.$ **Ответ:** $\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}\ln x-\frac{9}{4}\sqrt[3]{x^2}+c.$

27. $\int x^2\sin x\,dx.$ **Ответ:** $-x^2\cos x+2x\sin x+2\cos x+c.$

28. $\int (x^2-2x+5)e^{-x}dx.$ **Ответ:** $-e^{-x}(x^2+5)+c.$

29. $\int \frac{x\sin x}{\cos^3 x}dx.$ **Ответ:** $\frac{x}{2\cos^2 x}-\frac{1}{2}\operatorname{tg} x+c.$

30. $\int e^{2x}\cos 3x\,dx.$ **Ответ:** $e^{2x}\frac{2\cos 3x+3\sin 3x}{13}+c.$

31. $\int e^{3x}\cos e^x dx.$ **Ответ:** $(e^{2x}-2)\sin e^x+2e^x\cos e^x+c.$

8.2. Интегрирование рациональных функций

Многочлены и рациональные дроби. Деление многочленов «уголком». Разложение многочлена с вещественными коэффициентами на произведение неприводимых множетелей. Разложение правильной рациональной дроби на сумму простейших дробей. Интегрирование простейших рациональных дробей:

1) $\frac{A}{x-a}$, 2) $\frac{B}{(x-a)^k}$, 3) $\frac{Mx+N}{x^2+px+q}$, 4) $\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k}$.

Интегрируемость рациональной дроби в элементарных функциях.

1. Представить неправильную рациональную дробь в виде суммы многочлена и правильной рациональной дроби:

а) $f(x)=\frac{3x^4-x^3+4x^2-5x-5}{x^2-2x+2}$.

Ответ: $f(x)=3x^2+5x+8+\frac{x-21}{x^2-2x+2}$;

б) $f(x)=\frac{x^4+x^3+x^2+3x+1}{x^2+1}$.

Ответ: $f(x)=x^2+x+\frac{2x+1}{x^2+1}$.

2. С помощью элементарных преобразований разложить рациональную дробь $\frac{1}{x^2(x^2+1)}$ на простейшие. **Ответ:** $\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^2+1}$.

3. Найти интегралы:

а) $\displaystyle\int \frac{2x+3}{(x-2)(x+5)}dx.$ **Ответ:** $\ln|x-2|+\ln|x+5|+c;$

б) $\displaystyle\int \frac{x^3-2x^2+4}{x^2+2x-3}dx.$ **Ответ:** $\displaystyle\frac{x^2}{2}-4x+\frac{3}{4}\ln|x-1|+\frac{41}{4}\ln|x+3|+c;$

в) $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{(x+1)(x+2)(x+3)}.$ **Ответ:** $\displaystyle\frac{1}{2}\ln\left|\frac{(x+2)^4}{(x+1)(x+1)^3}\right|+c;$

г) $\displaystyle\int \frac{5x^3+9x^2-22x-8}{x^3-4x}dx.$ **Ответ:** $5x+\ln x^2(x+2)^4|x-2|^3+c;$

д) $\displaystyle\int \frac{x^2+1}{(x+1)^2(x-1)}dx.$ **Ответ:** $\displaystyle\frac{1}{x+1}+\frac{1}{2}\ln\left|x^2-1\right|+c;$

е) $\displaystyle\int \frac{3x^2+2x-1}{(x-1)^2(x+2)}dx.$ **Ответ:** $\displaystyle-\frac{4}{3(x-1)}+\frac{20}{9}\ln|x-1|+\frac{7}{9}\ln|x+2|+c;$

ж) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x+1)(x^2+1)}dx.$ **Ответ:** $\displaystyle\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x+\frac{1}{4}\ln\frac{(x+1)^2}{x^2+1}+c;$

з) $\displaystyle\int \frac{xdx}{(x-1)^2(x^2+2x+2)}.$

Ответ: $\displaystyle-\frac{1}{5(x-1)}+\frac{1}{50}\ln\frac{(x-1)^2}{x^2+2x+2}-\frac{8}{25}\operatorname{arctg}(x+1)+c;$

и) $\displaystyle\int \frac{(x+1)\,dx}{(x^2+x+2)(x^2+4x+5)}.$

Ответ: $\displaystyle\frac{2}{3\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{7}}-\frac{1}{3}\operatorname{arctg}(x+2)+c;$

к) $\displaystyle\int \frac{x^3}{(x-1)^{100}}dx.$

Ответ: $\displaystyle-\frac{1}{96(x-1)^{96}}-\frac{3}{97(x-1)^{97}}-\frac{3}{98(x-1)^{98}}-\frac{1}{99(x-1)^{99}}+c;$

л) $\displaystyle\int \frac{dx}{x(x^{10}+2)}.$ **Ответ:** $\displaystyle\frac{1}{20}\ln\frac{x^{10}}{x^{10}+2}+c;$

м) $\displaystyle\int \frac{x^{11}dx}{x^8+3x^4+2}.$ **Ответ:** $\displaystyle\frac{x^4}{4}+\frac{1}{4}\ln\frac{x^4+1}{(x^4+2)^2}+c;$

н) $\displaystyle\int \frac{1-x^7}{x(1+x^7)}dx.$ **Ответ:** $\displaystyle\frac{1}{7}\ln\frac{\left|x^7\right|}{(1+x^2)^2}+c;$

4. Используя рекурентные соотношения, найти:

а) $\int \frac{dx}{(x^2+1)^2}$. **Ответ:** $\frac{x}{2(1+x^2)}+\frac{\operatorname{arctg} x}{2}+c;$

б) $\int \frac{dx}{(x^2+1)^3}$. **Ответ:** $\frac{x(3x^2+5)}{8(x^2+1)^2}+\frac{3}{8}\operatorname{arctg} x+c.$

8.3. Интегрирование тригонометрических и иррациональных выражений

Интегралы вида $\int R(\sin x;\cos x)\,dx$. Универсальная тригонометрическая подстановка $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t$. Частные случаи. Применение подстановок $t=\sin x,\ t=\cos x$ и $t=\operatorname{tg} x$. Интегралы вида $\int \sin^m x\cos^n x dx$ и $\int \sin\alpha x\cos\beta x\,dx$. «Неберущиеся интегралы». Интегрирование функций, содержащих радикалы от дробно-линейной функции. Применение подстановок Эйлера и тригонометрических подстановок при нахождении интегралов. $\int R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})\,dx$. Интегрирование дифференциального бинома. Интегралы вида $\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$.

1. $\int \frac{dx}{2\sin^2 x+3\cos^2 x}$. **Ответ:** $\frac{1}{\sqrt{6}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\operatorname{tg} x\right)+c.$

2. $\int \sin^5 x\,dx$. **Ответ:** $-\cos x+\frac{2}{3}\cos^3 x-\frac{\cos^5 x}{5}+c.$

3. $\int \frac{\cos^3 2x}{\sqrt[3]{\sin^2 2x}}dx$. **Ответ:** $\frac{3}{2}\sqrt[3]{\sin 2x}-\frac{3}{14}\sqrt[3]{\sin^7 2x}+c.$

4. $\int \sin^4 x\cos^4 x\,dx$. **Ответ:** $\frac{1}{128}\left(3x-\sin 4x+\frac{\sin 8x}{8}\right)+c.$

5. $\int \sin^4 3x\cos^2 3x\,dx$. **Ответ:** $\frac{1}{16}x-\frac{1}{192}\sin 12x-\frac{1}{144}\sin^3 6x+c.$

6. $\int \sin x\sin 3x\,dx$. **Ответ:** $-\frac{\sin 4x}{8}+\frac{\sin 2x}{4}+c.$

7. $\int \sin\frac{x}{3}\cos\frac{2x}{3}dx$. **Ответ:** $\frac{3}{2}\cos\frac{x}{3}-\frac{1}{2}\cos x+c.$

8. $\int \frac{2-\sin x+3\cos x}{1+\cos x}dx$. **Ответ:** $3x-\operatorname{tg}\frac{x}{2}-\ln\left|\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}+1\right|+c.$

9. $\int \frac{dx}{3-2\sin x+\cos x}$. **Ответ:** $\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}-1\right)+c.$

10. $\int \frac{\sin^2 x}{1+\sin^2 x}dx.$ **Ответ:** $x-\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}(\sqrt{2}\operatorname{tg}x)+c.$

11. $\int \frac{dx}{4\sin^2 x-7\cos^2 x}.$ **Ответ:** $\frac{1}{4\sqrt{7}}\ln\left|\frac{2\operatorname{tg}x-\sqrt{7}}{2\operatorname{tg}x+\sqrt{7}}+1\right|+c.$

12. $\int \operatorname{ctg}^5 x\,dx.$ **Ответ:** $-\frac{1}{4}\operatorname{ctg}^4 x+\frac{1}{2}\operatorname{ctg}^2 x+\ln|\sin x|+c.$

13. $\int \frac{\operatorname{tg}x}{1-\operatorname{ctg}^2 x}dx.$ **Ответ:** $\frac{1}{4}\ln\left|\operatorname{tg}^4 x-1\right|+c.$

14. $\int \frac{dx}{\sin^4 3x}.$ **Ответ:** $-\frac{1}{3}\left(\operatorname{ctg}3x+\frac{1}{3}\operatorname{ctg}^3 3x\right)+c.$

15. $\int \frac{\sin^2 x}{\cos^6 x}dx.$ **Ответ:** $\frac{\operatorname{tg}^3 x}{3}+\frac{\operatorname{tg}^5 x}{5}+c.$

16. $\int \frac{dx}{\left(1+\sqrt[3]{x}\right)\sqrt{x}}.$ **Ответ:** $6\sqrt[6]{x}-6\operatorname{arctg}\sqrt[6]{x}+c.$

17. $\int \frac{1+\sqrt[4]{x}}{x+\sqrt{x}}dx.$ **Ответ:** $4\sqrt[4]{x}+2\ln(1+\sqrt{x})-4\operatorname{arctg}\sqrt[4]{x}+c.$

18. $\int \frac{\sqrt{2x+1}+\sqrt[3]{2x+1}}{\sqrt{2x+1}}dx.$ **Ответ:** $\frac{1}{2}(2x+1)+\frac{3}{5}\sqrt[6]{(2x+1)^5}+c.$

19. $\int \frac{1}{(2-x)^2}\sqrt[3]{\frac{2-x}{2+x}}dx.$ **Ответ:** $\frac{3}{8}\sqrt[3]{\left(\frac{2+x}{2-x}\right)^2}+c.$

20. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)^4}}.$ **Ответ:** $-\frac{3}{2}\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}+c.$

21. $\int x^{-2}(1+x^3)^{-\frac{3}{2}}dx.$ **Ответ:** $-\frac{2+3x^3}{2x\sqrt[3]{(1+x^3)^2}}+c.$

22. $\int x^{-\frac{2}{3}}(1+x^{\frac{1}{3}})^{-3}dx.$ **Ответ:** $-\frac{3}{2}(1+x^{\frac{1}{3}})^{-2}+c.$

23. Применяя тригонометрические подстановки, найти следующие интегралы:

а) $\int \sqrt{1-2x-x^2}\,dx.$ **Ответ:** $\frac{x+1}{2}\sqrt{1-2x-x^2}+\arcsin\frac{x+1}{\sqrt{2}}+c;$

б) $\int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x^2}dx.$ **Ответ:** $\ln\left|x+\sqrt{x^2-1}\right|-\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}+c;$

в) $\int \frac{x^2}{\sqrt{(x^2+1)^3}}dx.$ **Ответ:** $\frac{x^3}{3\sqrt{(1+x^2)^3}}+c.$

24. Применяя формулу

$$\int \frac{P_m(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx = Q_{m-1}(x)\sqrt{ax^2+bx+c} + K\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}},$$

найти следующие интегралы:

а) $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{x^2+2x+3}}$. **Ответ:** $\frac{x-3}{2}\sqrt{x^2+2x+3}+c$;

б) $\int \frac{x^2+2x+3}{\sqrt{-x^2+4x}}\,dx$. **Ответ:** $-\left(\frac{x}{2}+5\right)\sqrt{-x^2+4x}+13\arcsin\frac{x-2}{2}+c$.

8.4. Определенный интеграл

Задача об определении площади. Формула пути поступательного движения. Интегральная сумма и ее предел. Интеграл Римана. Классы интегрируемых функций. Основные свойства определенного интеграла. Теорема о среднем. Формула Ньютона – Лейбница. Замена переменной в определенном интеграле. Интегрирование по частям. Интегрирование четных, нечетных и переодических функций.

1. Вычислить, исходя из определения $\int\limits_0^2 (x+1)\,dx$. **Ответ:** 4.

2. Применяя формулу $\sum\limits_{i=1}^{n} i^2 = \frac{i(i+1)(2i+1)}{6}$, вычислить $\int\limits_0^2 x^2\,dx$. **Ответ:** $\frac{8}{3}$.

3. Используя геометрический смысл интеграла, вычислить:

а) $\int\limits_{-2}^{2} |x-1|\,dx$. **Ответ:** 5;

б) $\int\limits_{-1}^{1} \arccos x\,dx$. **Ответ:** π.

4. Проверить неравенства:

а) $-\frac{1}{5} < \int\limits_2^3 \frac{dx}{1+x-2x^2} < -\frac{1}{14}$;

б) $\frac{2}{25} < \int\limits_1^3 \frac{dx}{(x^2-4x+8)^2} < \frac{2}{16}$;

в) $\frac{1}{(n+1)\sqrt{2}} < \int\limits_0^1 \frac{x^n dx}{\sqrt{1+x}} < \frac{1}{n+1}$.

5. Используя неравенства $\sin t \le t,\ t \ge 0$, доказать, что $\cos x \ge 1 - \dfrac{x^2}{2},\ x \ge 0.$

6. Сравнить числа:

а) $I_1 = \int\limits_{\frac{1}{2}}^{1} \dfrac{dx}{\sqrt{x}}$ и $I_2 = \int\limits_{\frac{1}{2}}^{1} \dfrac{dx}{\sqrt[3]{x}}$. **Ответ:** $I_1 > I_2$;

б) $I_1 = \int\limits_{0}^{1} e^{-x} \sin x\, dx$ и $I_2 = \int\limits_{0}^{1} e^{-x^2} \sin x\, dx.$ **Ответ:** $I_2 > I_1$.

7. Доказать равенство

$$\int\limits_0^1 x^m (1-x)^n\, dx = \int\limits_0^1 x^n (1-x)^m\, dx,\ \ n, m \in \mathbb{N}.$$

8. Доказать, что для любой непрерывной на отрезке $[0;1]$ функции $y = f(t)$ имеет место равенство $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\, dx = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)\, dx$.

9. Вычислить $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\int\limits_0^x (\operatorname{arctg} t)^2\, dt}{\sqrt{x^2+1}}$. **Ответ:** $\dfrac{\pi^2}{4}$.

10. Исследовать на экстремум функцию $\int\limits_0^x (t-1)^6 (t+2)^3\, dt.$

Ответ: подозрительными на экстремум являются точки $x = 1$ и $x = -2$. Точка $x = 1$ не является точкой экстремума. Точка $x = -2$ является точкой минимума.

11. Найти производную функцию $f(x) = \int\limits_{\frac{1}{x}}^{\sqrt{x}} \cos t^2 dt,\ \ x > 0.$

Ответ: $f'(x) = \dfrac{\cos x}{2\sqrt{x}} + \dfrac{1}{x^2} \cos \dfrac{1}{x^2}$.

12. Вычислить интегралы:

а) $\int\limits_0^2 \dfrac{2x-1}{2x+1}\, dx.$ **Ответ:** $2 - \ln 5$;

б) $\int\limits_0^3 \dfrac{x\, dx}{\sqrt{x+1} + \sqrt{5x+1}}$. **Ответ:** $\dfrac{14}{15}$;

в) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 x \sin x\, dx.$ **Ответ:** $\frac{1}{5}$;

г) $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos x - \cos^3 x}\, dx.$ **Ответ:** $\frac{4}{3}$;

д) $\int\limits_{0}^{100\pi} \sqrt{1-\cos 2x}\, dx.$ **Ответ:** $200\sqrt{2}$;

е) $\int\limits_{0}^{1} x \ln(1+x^2)\, dx.$ **Ответ:** $\ln 2 - \frac{1}{2}$;

ж) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}} x \operatorname{arctg} x\, dx.$ **Ответ:** $\frac{1}{2} + \frac{\pi^2}{38} - \frac{\pi}{8}$;

з) $\int\limits_{0}^{1} \frac{\arcsin x}{\sqrt{1+x}}\, dx.$ **Ответ:** $\pi\sqrt{2} - 4$;

и) $\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{x\, dx}{\cos^2 x}.$ **Ответ:** $\frac{1}{18}(5\pi\sqrt{3} - 9\ln 3)$;

к) $\int\limits_{1}^{e} \ln^2 x\, dx.$ **Ответ:** $e-2$;

л) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}} x^2 \cos 2x\, dx.$ **Ответ:** $\frac{\pi^2 - 8}{32}$;

м) $\int\limits_{1}^{2} \frac{x\, dx}{\sqrt{2x+5}}.$ **Ответ:** $\frac{3}{4} - \frac{7}{\sqrt{12}}$;

н) $\int\limits_{1}^{\frac{3}{2}} \frac{4x+3}{(x-2)^3}\, dx.$ **Ответ:** $-12{,}5$;

о) $\int\limits_{1}^{3} \frac{dx}{x\sqrt{x^2+5x+1}}.$ **Ответ:** $\ln \frac{7+2\sqrt{7}}{9}$;

п) $\int\limits_{0}^{5} \frac{dx}{2x+\sqrt{3x+1}}.$ **Ответ:** $\frac{1}{5}\ln 112$;

р) $\int\limits_0^3 x^2\sqrt{9-x^2}\,dx.$ **Ответ:** $\frac{81\pi}{16}$.

8.5. Геометрические и физические приложения определенных интегралов

Площадь криволинейной трапеции в декартовой системе координат. Площадь криволинейной трапеции при параметрическом задании границы. Площадь криволинейного сектора. Площадь произвольной плоской фигуры. Вычисление объема тела по площадям параллельных сечений. Объем и площадь поверхности тела вращения. Определение длины дуги. Вычисление длины дуги в декартовой и полярной системах координат. Приложения определенного интеграла к решению некоторых задач механики и физики: нахождение давления, работы, статических моментов, координат центра тяжести и других величин.

1. Найти площади фигур, ограниченных графиками функций:

а) $y=x^2-2x+3$ и $y=3x-1$. **Ответ:** $\frac{9}{2}$;

б) $y=4-x^2$ и $y=x^2-2x$. **Ответ:** 9;

в) $y=x^3$ и $y=\sqrt{x}$. **Ответ:** $\frac{1}{3}$;

г) $y=\sin\frac{\pi x}{2}$ и $y=x^2$. **Ответ:** $\frac{6-\pi}{3n}$.

2. Найти площадь фигуры, ограниченной графиком функции $y=-16-x^2$ и касательной к этой параболе, проведенной из начала координат.

Ответ: $\frac{128}{3}$.

3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линией $y=x\cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$ и ее асимптотой.

Ответ: 2.

4. Найти площадь верхней лунки, ограниченной окружностями $x^2+y^2=a^2$ и $x^2+y^2+2ay=a^2$, $(a>0)$.

Ответ: a^2.

5. Найти площадь фигуры, ограниченной кривой, при $x=12\cos t+5\sin t$, $y=5\cos t-12\sin t$.

Ответ: 169π.

6. Используя формулу $S=\frac{1}{2}\int\limits_{2}^{8}(x(t)y'(t)-x'(t)y(t))\,dt$, найти площадь петли кривой:

а) $x=\frac{t}{3}(6-t),\;\; y=\frac{t^2}{8}(6-t).$ **Ответ:** $\frac{27}{5}$;

б) $x=2t-t^2,\;\; y=2t^2-t^3.$ **Ответ:** $\frac{8}{15}$.

7. Найти площадь фигуры, ограниченной кривой $r=3+2\cos\varphi$.

Ответ: 11π.

8. Найти площадь фигуры, ограниченной кривыми $r=a\cos\varphi,\;\; r=2a\cos\varphi$.

Ответ: $\frac{3}{2}\pi a^2$.

9. Найти площадь фигуры, ограниченной кривой $r=a\sin 3\varphi$ (площадь одной петли).

Ответ: $\frac{\pi a^2}{12}$.

10. Вычислить длину дуги кривой $y=\frac{2}{\pi}\ln\sin\frac{\pi x}{2}$ от $x_1=\frac{1}{2}$ до $x_2=\frac{3}{2}$.

Ответ: $\frac{4}{\pi}\ln\operatorname{tg}\frac{3\pi}{8}$.

11. Найти длину кривой $y=\frac{1}{3}(3-x)\sqrt{x}$ между точками ее пересечения с осью OX.

Ответ: $2\sqrt{3}$.

12. Вычислить длину кривой $x=e^t\cos t,\;\; y=e^t\sin t$ от $t=0$ до $t=1$.

Ответ: $\sqrt{2}(e-1)$.

13. Найти длину петли $x=a(t^2+1),\;\; y=\frac{a}{3}(t^3-3t)$.

Ответ: $2\sqrt{3}$.

14. Найти длину кривой $r=1-\cos\varphi$. **Ответ:** 8.

15. Найти длину кривой $r=a\sin^3\frac{\varphi}{3}$. **Ответ:** $\frac{3\pi a}{2}$.

16. От прямого кругового цилиндра радиусом a отсекли клин плоскостью, проходящей через диаметр основания и наклоненной к основанию под углом α. Найти объем клина. **Ответ:** $\frac{2}{3}a^3\operatorname{tg}\alpha$.

17. Вычислить объем тела, ограниченного параболическим цилиндром $z=4-y^2$, плоскостями координат и плоскостью $x=a$. **Ответ:** $\frac{16}{3}a$.

18. Вычислить объем тела, ограниченного конической поверхностью $(z-2)^2=\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{y^2}{2}$ и плоскостью $z=0$. **Ответ:** $\dfrac{8\pi\sqrt{6}}{3}$.

19. Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси OX фигуры, ограниченной линиями $y^2=x$ и $x^2=y$. **Ответ:** $0{,}3\pi$.

20. Вычислить объем тела, которое образуется при вращении одной арки циклоиды $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$ вокруг оси OX. **Ответ:** $5\pi^2a^3$.

21. Найти площадь поверхности, полученной вращением параболы $y^2=4ax$ вокруг оси OX, от начала O до точки с абсциссой $x=3a$.

Ответ: $\dfrac{56}{3}\pi a^3$.

22. Найти площадь поверхности конуса, образованного вращением отрезка прямой $y=2x$ от $x=0$ до $x=2$. **Ответ:** $8\pi\sqrt{5}$.

23. Астроида $x=a\sin^3 t$, $y=a\cos^3 t$ вращается около оси OX. Найти поверхность тела вращения. **Ответ:** $\dfrac{12\pi a^3}{5}$.

24. Определить массу стержня длиной $l=10м$, если линейная плотность стержня меняется по закону $S=6+0{,}3x$ кг/м, где $x-$расстояние от одного из концов стержня. **Ответ:** 75 кг.

25. Скорость движения точки $V=0{,}1l^{-0{,}02t}$ м/с. Найти путь, пройденный точкой от начала движения до полной остановки. **Ответ:** 250 м.

26. Найти силу, с которой жидкость с плотностью ρ давит на вертикальную стенку, имеющую форму полуэллипса,большая ось которого находится на поверхности жидкости. Большая полуось эллипса a, малая – b.

Ответ: $\dfrac{2}{3}\rho gab^2$.

27. Какую работу надо затратить, чтобы растянуть пружину на 5 см, если сила в 1 Н растягивает ее на 1 см. **Ответ:** 0,125 Дж.

28. Вычислить работу, которую надо затратить, чтобы выкачать жидкость из котла, имеющего форму параболоида вращения, обращенного вершиной вверх. Радиус основания R, высота H, плотность жидкости ρ.

Ответ: $\dfrac{1}{3}\pi\rho gR^2H^2$.

8.6. Несобственные интегралы

Понятие несобственного интеграла первого рода (интеграла по бесконечному промежутку). Геометрическая интерпретация. Основные свойства несобственных интегралов первого рода. Обобщенная формула Ньютона – Лейбница. Критерий Коши сходимости несобственных интегралов первого рода. Общий, частный и предельный признаки сравнения. Абсолютная и условная сходимость несобственных интегралов первого рода. Главное значение несобственных интегралов первого рода.

Понятие несобственного интеграла второго рода (от неограниченных функций). Геометрическая интерпретация, основные свойства, обобщенная формула Ньютона – Лейбница. Критерий Коши сходимости несобственных интегралов второго рода. Признаки сравнения, абсолютная и условная сходимость интегралов второго рода. Главное значение несобственного интеграла второго рода. Преобразование несобственных интегралов и сведение их к обычным определенным интегралам.

1. Вычислить следующие несобственные интегралы первого рода или установить их расходимость, основываясь на определении этих интегралов:

а) $\int\limits_5^{\infty} \frac{dx}{x^2-6x+8}$. **Ответ:** $\frac{1}{2}\ln 3$;

б) $\int\limits_0^{\infty} \frac{\sin 2x}{(2+\cos 2x)^2}\,dx$. **Ответ:** расходится;

в) $\int\limits_{-\infty}^{0} \frac{e^{3x}}{e^{3x}-5}\,dx$. **Ответ:** $\frac{1}{3}\ln\frac{4}{5}$;

г) $\int\limits_0^{\infty} xe^{-x}\,dx$. **Ответ:** 1;

д) $\int\limits_0^{\infty} x\cos 3x\,dx$. **Ответ:** расходится.

2. Вычислить следующие несобственные интегралы с помощью обобщенных формул Ньютона – Лейбница:

а) $\int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{x(x+1)^2}$. **Ответ:** $\ln 2-\frac{1}{2}$;

б) $\int\limits_0^{\infty} \frac{x\,dx}{\sqrt{(4x^2+1)^3}}$. **Ответ:** 1;

в) $\int\limits_0^{\infty} e^{-x}\cos 2x\,dx.$ **Ответ:** $\frac{1}{5}$;

г) $\int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}}.$ **Ответ:** $\sqrt{2}-1.$

3. Исследовать сходимость интегралов, установив предварительно порядок малости подынтегральных функций по сравнению с $\frac{1}{x}$ при $x\to+\infty$:

а) $\int\limits_1^{\infty} \frac{2+\sqrt[8]{x}}{\sqrt[5]{x^6}+\sqrt[4]{x^5}+2x+3}\,dx.$ **Ответ:** $\lambda=\frac{9}{8}$. Сходится;

б) $\int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x\cos^2 x}+\sqrt{x-\sin^2 x}}.$ **Ответ:** $\lambda=\frac{1}{2}$. Расходится;

в) $\int\limits_1^{\infty} \frac{\sin^2\frac{1}{\sqrt[3]{x}}}{\sqrt{x}}\,dx.$ **Ответ:** $\lambda=\frac{7}{6}$. Сходится;

г) $\int\limits_1^{\infty} \frac{(2x^3+3)\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)}{\sqrt[4]{3x^{15}+1}}\,dx.$ **Ответ:** $\lambda=1$. Расходится.

4. Доказать, что интеграл Дирихле $\int\limits_0^{\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx$ сходится условно.

5. Вычислить следующие несобственные интегралы второго рода или установить их расходимость, основываясь на определении этих интегралов:

а) $\int\limits_0^{1} \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}.$ **Ответ:** 1;

б) $\int\limits_0^{1} \ln x\,dx.$ **Ответ:** -1;

в) $\int\limits_3^{6} \frac{dx}{x^2-7x+10}.$ **Ответ:** расходится;

г) $\int\limits_1^{3} \frac{dx}{\sqrt{4x-x^2-3}}.$ **Ответ:** π.

6. Вычислить следующие несобственные интегралы с помощью обобщенных формул Ньютона – Лейбница:

а) $\int\limits_{0}^{\frac{2}{\pi}} \sin\frac{1}{x}\cdot\frac{dx}{x^2}$. **Ответ:** расходится;

б) $\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}}$. **Ответ:** $\frac{\pi}{2}$;

в) $\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$. **Ответ:** π;

г) $\int\limits_{0}^{2} \sqrt{\frac{2+x}{2-x}}\,dx$. **Ответ:** $\pi+2$.

7. Исследовать сходимость интегралов, установив предварительно, какого порядка является бесконечно большая функция $f(x)$ по сравнению с $\frac{1}{|x-a|}$ при $x\to a$:

а) $\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt[3]{x-\sin x}}$. **Ответ:** $\lambda=1$. Расходится;

б) $\int\limits_{0}^{2} \frac{x^2\,dx}{\sqrt[3]{(1-x^2)^2}}$. **Ответ:** $\lambda=\frac{2}{3}$. Сходится;

в) $\int\limits_{0}^{2} \frac{\ln(1+\sqrt{x^3})}{e^{\operatorname{tg}^2 x}-1}\,dx$. **Ответ:** $\lambda=\frac{1}{2}$. Сходится;

г) $\int\limits_{0}^{\pi} \frac{\sin x+2\cos x}{\sqrt[3]{\sin x-\cos x}}\,dx$. **Ответ:** $\lambda=\frac{1}{3}$. Сходится;

д) $\int\limits_{0}^{1} \frac{\sqrt[3]{x^2}\,dx}{e^x-\cos x}$. **Ответ:** $\lambda=\frac{1}{3}$. Сходится.

8. Вычислить интегралы или установить их расходимость:

а) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1+2x}{1+x^2}\,dx$. **Ответ:** расходится;

б) $V.P. \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1+2x}{1+x^2}\,dx$. **Ответ:** π;

в) $V.P. \int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2}$. **Ответ:** расходится;

г) $\int\limits_{\frac{n}{2}}^{n} \frac{dx}{3+5\cos x}$. **Ответ:** расходится;

д) $V.P. \int\limits_{\frac{n}{2}}^{n} \frac{dx}{3+5\cos x}$. **Ответ:** $\frac{1}{4}\ln 3$;

е) $V.P. \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+|x|}dx$. **Ответ:** расходится;

ж) $V.P. \int\limits_{-\infty}^{\infty} \sin^{15} 3x\,dx$. **Ответ:** 0.

9. Теория функций нескольких переменных

9.1. Основные понятия функции нескольких переменных

Понятие n-мерного координатного и n-мерного евклидова пространств. Открытые и замкнутые множества. Понятие функции n переменных. Предел и непрерывность функции многих переменных. Основные теоремы о пределах и непрерывных функциях. Определение частной производной. Физический смысл частной производной. Определение дифференцируемости функции. Связь между дифференцируемостью и существованием частных производных. Геометрический смысл дифференцируемости функции двух независимых переменных. Дифференцируемость сложной функции. Правило дифференцирования сложной функции. Полный дифференциал функции многих переменных. Геометрический смысл и инвариантность формы записи дифференциала. Геометрические приложения: производная по направлению, градиент, касательная плоскость и нормаль.

1. Найти область определения функций:

а) $z=\sqrt{\frac{x^2+y^2-x}{2x-x^2-y^2}}$.

Ответ: $x \le x^2+y^2 < 2x$;

б) $z = x\sqrt{\cos y}$.

Ответ: $2k\pi-\frac{n}{2} \le y \le \frac{n}{2}+2k\pi,\ \ k=0;\pm 1;\ \dots;$

в) $z=\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}$.

Ответ: угол, ограниченный лучами $y=x,\ x\ge 0,\ y=-x,\ x\ge 0$;

г) $z=\sqrt{\sin(x^2+y^2)}$.

Ответ: семейство концентрических колец

$2\pi k \le x^2+y^2 \le \pi(2k+1)$, $(k=0;\ 1;\ 2;\ldots)$;

д) $u=\dfrac{1}{\sqrt{x+y+z}}$.

Ответ: часть пространства над плоскостью $x+y+z=0$.

2. Найти множество значений функций:

а) $z=x^2-2xy+y^2+2x-2y-3$. **Ответ:** $[-4;+\infty]$.

б) $u=x^2+2y^2+z^2+4x-4y-6z-5$. **Ответ:** $[-20;+\infty]$.

3. Найти линии уровня функции $z=x^y$, $x>0$.

Ответ: $y=\dfrac{c}{\ln x}$.

4. Найти поверхности уровня функции $u=x^2-y^2-z^2$.

Ответ: семейство двуполостных гиперболоидов $x^2-y^2-z^2=c$ (при $c>0$); семейство однополостных гиперболоидов $x^2-y^2-z^2=c$ (при $c<0$); конус $x^2-y^2-z^2=c$ (при $c=0$).

5. Найти пределы:

а) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to b}}\dfrac{\sin xy}{y}$. **Ответ:** b;

б) $\lim\limits_{\substack{x\to +\infty\\ y\to +\infty}}(x^2+y^2)e^{-(x+y)}$. **Ответ:** 0.

6. Доказать, что указанные пределы не существуют:

а) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x^2+xy+y^2}{x^2-xy+y^2}$; б) $\lim\limits_{\substack{x\to +\infty\\ y\to +\infty}}\dfrac{x+y^2}{x+y^4}$.

7. Исследовать на непрерывность функцию $\begin{cases}\dfrac{\cos(x-y)-\cos(x+y)}{2xy}, & xy\ne 0,\\ 1, & xy=0\end{cases}$ в точке $O\,(0;\,0)$.

Ответ: в точке $O\,(0;\,0)$ функция является непрерывной.

8. Найти точки разрыва функций:

а) $z=\dfrac{1}{\sin x\,\sin y}$.

Ответ: $x=k\pi$, $y=m\pi$, $k,m\in\mathbb{Z}$ – точки бесконечного разрыва;

б) $z=\dfrac{x-y}{x^3-y^3}$.

Ответ: $y=x-$ точки разрыва; $y=x\ (x\neq 0)-$ точки устранимого разрыва; точка $O\,(0;0)-$ точка бесконечного разрыва;

в) $z=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0;\\ 0, & x=y=0.\end{cases}$

Ответ: в точке $O\,(0;0)$ и ее окрестности функция определена, но не является непрерывной в этой точке, так как в ней не имеет предела.

9.2. Частные производные, дифференциал. Применение дифференциала. Производная сложной функции. Производная по направлению

1. Пользуясь определением, найти $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ для функции $z=\dfrac{x}{y}$.

Ответ: $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{1}{y}$; $\dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{x}{y^2}$.

2. Найти частные производные следующих функций:

а) $z=xy+\dfrac{x}{y}$. **Ответ:** $\dfrac{\partial z}{\partial x}=y+\dfrac{1}{y}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}=x-\dfrac{x}{y^2}$;

б) $z=x\sin(x+y)$.

Ответ: $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\sin(x+y)+x\cos(x+y)$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}=x\cos(x+y)$;

в) $u=x^{\frac{y}{z}}$.

Ответ: $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{yu}{xz}$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{u\ln x}{z}$, $\dfrac{\partial u}{\partial z}=-\dfrac{yu}{z^2}\ln z$, $u=x^{\frac{y}{z}}$;

г) $z=\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$. **Ответ:** $\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{y}{x^2+y^2}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{x}{x^2+y^2}$;

д) $z=\arcsin\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$. **Ответ:** $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{|y|}{x^2+y^2}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{x\,\mathrm{sgn}\,y}{x^2+y^2}$.

3. Найти полное приращение и дифференциал функции $z=x^2-xy+y^2$, если x изменяется от 2 до 2,1, а y – от 1 до 1,2.

Ответ: $\Delta z=0{,}33$, $dz=0{,}3$.

4. Найти дифференциалы функций:

а) $z = x^y$. **Ответ:** $dz = x^y\left(\dfrac{y}{x}dx + \ln x dy\right)$;

б) $z = \ln\cos\dfrac{x}{y}$. **Ответ:** $dz = \dfrac{1}{y^2}\operatorname{tg}\dfrac{x}{y}(xdy - ydx)$.

5. Найти дифференциалы функций в указанных точках:

а) $u = \operatorname{arctg}\dfrac{xy}{z^2}$ в точке $M(3;2;1)$. **Ответ:** $\dfrac{2dx+3dy-12dz}{37}$;

б) $u = e^{x^2+y^2+z^2}$ в точке $M(0;1;2)$. **Ответ:** $2e^5dy + 4e^5dz$.

6. С посощью полного дифференциала функции вычислить приближенно:

а) $(2,01)^{3,03}$. **Ответ:** $8,29$;

б) $\sqrt{(4,05)^2+(3,07)^2}$. **Ответ:** $5,08$.

7. Вывести приближенную формулу $\ln(1+x)\cdot\ln(1+y) = xy$, ($x$ и y малы по абсолютной величине).

8. В усеченном конусе радиусы оснований $R = 20$ см, $r = 10$ см, высота $h = 30$ см. Как приближенно изменится объем конуса, если R увеличить на 2 мм, r – на 3 мм и h уменьшить на 1 мм?

Ответ: увеличится на 617,5 см^3.

9. Найти $\dfrac{dz}{dt}$, если $z = \dfrac{x}{y}$, где $x = e^t$, $y = \ln t$.

Ответ: $\dfrac{dz}{dt} = \dfrac{e^t(t\ln t - 1)}{t\ln^2 t}$.

10. Найти $\dfrac{dz}{dt}$, если $z = x^2 - y^2$, где $y = \cos t$, $x = \sin t$.

Ответ: $\dfrac{dz}{dt} = 2\cos 2t$.

11. Найти $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial z}{\partial y}$, если $z = u^2v - uv^2$, где $u = x + 2y$, $v = x - 2y$.

Ответ: $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 8xy$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = 4(x^2 - 12y^2)$.

12. Найти $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ и $\dfrac{dz}{dy}$, если $z = \ln(e^x + e^y)$, где $y = \dfrac{1}{3}x^3 + x$.

Ответ: $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{e^x}{e^x + e^y}$, $\dfrac{dz}{dx} = \dfrac{e^x + e^y(x^2+1)}{e^x + e^y}$, $y = \dfrac{1}{3}x^3 + x$.

13. Доказать равенства:

а) $y\dfrac{\partial z}{\partial x}-x\dfrac{\partial z}{\partial y}=0,$ если $z=\varphi(x^2+y^2);$

б) $x^2\dfrac{\partial z}{\partial x}-xy\dfrac{\partial z}{\partial y}+y^2=0,$ если $z=\dfrac{y^2}{3x}+\varphi(xy).$

14. Найти производную функции $z=5x^2-3x-y-1$ в точке $M(2;1)$ в направлении, идущем от этой точки к точке $N(5;5).$

Ответ: $9,4.$

15. Показать, что производная функции $z=x^3+3x^2+4xy+y^2$ в точке $M\left(\dfrac{2}{3};-\dfrac{4}{3}\right)$ по любому направлению имеет одно и то же значение.

16. Найти угол φ между градиентами функции $z=\operatorname{arctg}\dfrac{x}{y}$ в точках $M_1(1;1)$ и $M_2(-1;-1).$

Ответ: $\varphi=\pi.$

17. Найти в точке $M_0(1;1;1)$ направление наибольшего роста функции $u=xy+yz+xz$ и величину наибольшего роста в этой точке.

Ответ: $\operatorname{grad}u(M_0)=2(\bar{i}+\bar{j}+\bar{k});$ $\max\dfrac{\partial u}{\partial e}=2\sqrt{3}.$

18. Найти точки, в которых градиент функции $z=\sin(x+y)$ равен $\bar{i}+\bar{j}.$

Ответ: $y=-x+2k\pi,$ $k=0;\pm1;\pm2;\ldots.$

19. Написать уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности $z=(x-y)^2-x+2y$ в точке $M_0(1;1;1).$

Ответ: $x-2y+z=0,$ $x-1=\dfrac{y-1}{-2}=z-1.$

20. Для поверхности, заданной в неявном виде $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}-\dfrac{z^2}{16}=1,$ написать уравнение касательной плоскости и нормали в точке $M_0(2;3;4).$

Ответ: $\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{3}-\dfrac{z}{4}=1,$ $\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-3}{2/3}=\dfrac{z-4}{-1/2}.$

21. Доказать, что гиперболоид $x^2-y^2+z^2=3$ и эллипсоид $4x^2+(y-2)^2+z^2=5$ касаются друг друга в точке $M_0(0;1;2).$

9.3. Производные и дифференциалы высших порядков. Формула Тейлора. Дифференцирование неявно заданных функций

Частные производные второго порядка. Частные производные высших порядков. Теорема о независимости смешанных частных производных функции от порядка дифференцирования. Дифференциал второго порядка. Матричная запись дифференциала второго порядка. Матрица Гессе. Нарушение инвариантности формы для дифференциала второго порядка. Дифференциалы k-го порядка. Операторная формула записи дифференциала k-го порядка. Многочлен Тейлора для функции многих переменных. Формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано, Лагранжа и в интегральной форме. Понятие неявной функции. Существование, непрерывность и дифференцируемость неявной функции. Производные и дифференциалы высших порядков неявно заданных функций.

1. Для функции $z = x^2 \ln(x+y)$ найти $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

Ответ: $\dfrac{x(x+2y)}{(x+y)^2}$.

2. Для функции $z = x\sin xy + y\cos xy$ найти $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

Ответ: $y(2-y^2)\cos xy - xy^2 \sin xy$.

3. Для функции $z = \dfrac{x^2+y^2}{xy}$ найти частные производные второго порядка.

Ответ: $z''_{xx} = \dfrac{2y}{x^2}$, $z''_{xy} = \dfrac{x^2+y^2}{x^2y^2}$, $z''_{yy} = \dfrac{2x}{y^3}$.

4. Вычислить частные производные второго порядка в указанных точках:

а) $z = \dfrac{x}{x+y}$, $M_0(1;0)$.

Ответ: $z''_{xx}(M_0) = 0$, $z''_{xy}(M_0) = 1$, $z''_{yy}(M_0) = 2$;

б) $z = \ln(x^2+y)$, $M_0(0;1)$.

Ответ: $z''_{xx}(M_0) = 2$, $z''_{xy}(M_0) = 0$, $z''_{yy}(M_0) = -1$.

5. Найти $\dfrac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y}$, если $u = \sin xy$.

Ответ: $-2y\sin xy - xy^2 \cos xy$.

6. Найти $\dfrac{\partial^8 u}{\partial x^4 \partial y^4}$, если $u = x^4 \cos y + y^4 \cos x$.

Ответ: $24(\cos y + \cos x)$.

7. Найти $\dfrac{\partial^{10} u}{\partial x \partial y^9}$, если $u = (x^2 + y)^{10} \operatorname{tg} x$.

Ответ: $10!\left(2x \operatorname{tg} x + \dfrac{x^2 + y}{\cos^2 x}\right)$.

8. Показать, что функция $z = x\varphi\left(\dfrac{y}{x}\right) + \psi\left(\dfrac{y}{x}\right)$ удовлетворяет уравнению $x^2 \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2xy \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + y^2 \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$.

9. С помощью оператора найти $d^3 z$ в точке $M_0(0;1)$ для функции $z = e^{x^2 y}$.

Ответ: $d^3 z(M_0) = 6dx^2 dy$.

10. Найти $d^2 z$, если $z = \varphi(t)$, где $t = x^2 + y^2$.

Ответ: $d^2 z = 4\varphi''(t)(xdx + ydy)^2 + 2\varphi'(t)(dx^2 + dy^2)$.

11. Функцию $f(x; y) = x - 2y + x^2 - 3xy + 4y^2$ разложить по формуле Тейлора с центром разложения в точке $M_0(1; 2)$.

Ответ: $f(x; y) = 8 + (-3(x-1) + 11(y-2)) + (x-1)^2 - 3(x-1)(y-2) + 4(y-2)^2)$.

12. Разложить функцию $z = x^y$ по формуле Тейлора с центром разложения в точке $M_0(1;1)$ до членов второго порядка.

Ответ: $x^y = 1 - y + xy + o((x-1)^2 + (y-1)^2)$.

13. Доказать, что неявная функция $y = f(x)$, заданная уравнением $x^2 - xy + 2y^2 + x - y = 1$ и удовлетворяющая условию $f(0) = 1$, дифференцируема в любой окрестности точки $M(0;1)$. Найти $f'(0)$ и $f''(0)$.

Ответ: $f'(0) = 0$, $f''(0) = -\dfrac{2}{3}$.

14. Найти $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ и $\dfrac{dz}{dy}$ в точке $M(1; -2; 2)$, если $z^3 - 4xz + y^2 - 4 = 0$.

Ответ: $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 1$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{1}{2}$.

15. Найти дифференциалы первого и второго порядков неявной функции $z = f(x; y)$, заданной уравнением $\dfrac{x}{z} = \ln \dfrac{z}{y} + 1$.

Ответ: $dz=\frac{z}{y(x+2)}(ydx+zdy),\ d^2z=\frac{-z^2}{y^2(x+z)^2}(ydx-xdy)^2.$

16. Неявную функцию $z(x;y),$ определяемую уравнением $z^3+3yz-4x=0,$ если $z(1;1)=1,$ разложить в окрестности точки $M(1;1)$ в ряд Тейлора до членов второго порядка.

Ответ: $z=1+\frac{2}{3}(x-1)-\frac{1}{2}(y-1)-\frac{2}{5}(x-1)^2-\frac{1}{8}(y-1)^2+\dots .$

9.4. Локальный экстремум функции многих переменных. Условный экстремум

Определение и необходимые условия локального экстремума. Квадратичная форма и ее главные миноры. Положительно определенные, отрицательно определенные, квазизнакоопределенные и знакопеременные квадратичные формы. Критерий Сильвестра знакоопределенности квадратичных форм. Достаточные условия локального экстремума. Достаточные условия экстремума функции двух переменных. Исследование функций на экстремум. Понятие условного экстремума. Общая постановка задачи. Метод исключения части переменных. Необходимое условие условного экстремума. Метод Лагранжа. Достаточные условия условного экстремума. Нахождение наибольшего и наименьшего значений функции в замкнутой области.

1. Доказать, что функция $f(x;y)=e^{-y^2}(1+x^2)$ имеет единственную критическую точку $(0;0),$ но не имеет локального экстремума в этой точке.

2. Доказать, что функция $f(x;y)=e^{y^2}(1+x^2)$ имеет единственную критическую точку $(0;0),$ которая является точкой локального минимума.

3. Исследовать по определению на экстремум функцию $z=2+(6x-x^2-9)^3+(\cos y-1)^5$ в точке $M_0(3;0).$

Ответ: точка $M_0(3;0)$ является точкой локального максимума, $z(3;0)=2.$

4. Исследовать на локальный экстремум функцию $z=\frac{1}{\sqrt{(x-1)^2+(y+2)^2}}.$

Ответ: функция не имеет критических точек. Точек локального экстремума нет.

5. Для функции $z=3x^2y-x^3-y^4$ проверить выполнение достаточных условий локального экстремума в стационарных точках $M_1(6;3)$ и $M_2(0;0).$

Ответ: в точке $M_1(6;3)$ функция $z(x;y)$ имеет локальный максимум, в точке $M_2(0;0)$ функция $z(x;y)$ не имеет локального экстремума.

6. Исследовать на экстремум функции:

а) $z = x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y;$

б) $z = 3x^2 - x^3 + 3y^2 + 4y.$

Ответ: а) $z_{\min} = -9$ при $x = 0,\ y = 3;$ б) $z_{\min} = -\frac{4}{3}$ при $x = 0,\ y = -\frac{2}{3}$. В стационарной точке $\left(2; -\frac{2}{3}\right)$ экстремума нет.

7. С помощью критерия Сильвестра исследовать на экстремум функцию $u = x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 6y - 2z.$

Ответ: $u_{\min} = -14$ при $x = 2,\ y = -3,\ z = 1.$

8. Найти локальные экстремумы неявных функций вида $z = f(x; y)$, заданных уравнением $F(x; y; z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 4z - 10 = 0.$

Ответ: функция $z = f(x_1; y_2)$ имеет в точке $(1; -1)$ локальный минимум, равный -2, а функция $z = f_2(x; y)$ имеет в точке $(1; -1)$ локальный максимум, равный 6.

9. Исследовать на условный экстремум функции методом исключения части переменных:

а) $z = x^2 + y^2$ при условии связи $2x + y = 2;$

б) $u = x + y + z^2$ при условиях связи $\begin{cases} z - x = 1, \\ y - xz = 1. \end{cases}$

Ответ: а) $z_{\min} = \frac{4}{5}$ при $x = \frac{4}{5},\ y = \frac{2}{5};$ б) $u_{\min} = 0$ при $x = -1,\ y = -1,\ z = 0.$

10. Найти методом Лагранжа условный экстремум функции $z = xy^2$ при условии связи $x + 2y - 1 = 0.$

Ответ: $z_{\min}(1; 0) = 0,\ z_{\max}\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{27}.$

11. Исследовать на условный экстремум функцию $z = x + 2y$ при $x^2 + y^2 = 5.$

Ответ: $z_{\max} = 5$ при $x = 1,\ y = 2;$ $z_{\min} = -5$ при $x = -1,\ y = -2.$

12. В полушар радиусом R вписать прямоугольный параллелепипед наибольшего объема.

Ответ: длины сторон параллелепипеда – $\frac{2R}{\sqrt{3}}, \frac{2R}{\sqrt{3}}, \frac{R}{\sqrt{3}}$.

13. Объем правильной треугольной призмы равен V. Какова длина стороны основания призмы, площадь полной поверхности которой наименьшая?

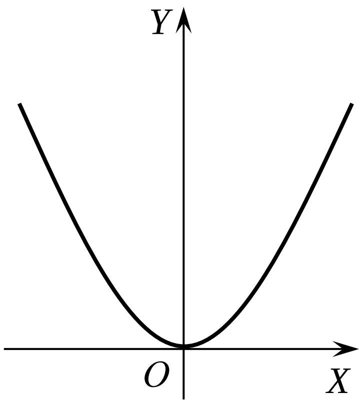
Ответ: $\sqrt[3]{4V}$.

14. Найти наименьшее и наибольшее значения функции $z = x^2 - xy + y^2 - 4x$ в замкнутой области, ограниченной прямыми $x = 0$, $y = 0$, $2x + 3y - 12 = 0$.

Ответ: $z_{\text{наим}} = -\frac{16}{3}$, $z_{\text{наиб}} = 16$.

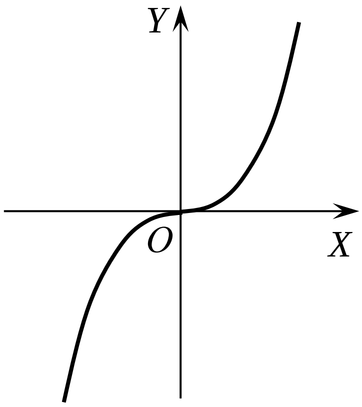
Приложения

1. Графики некоторых элементарных функций



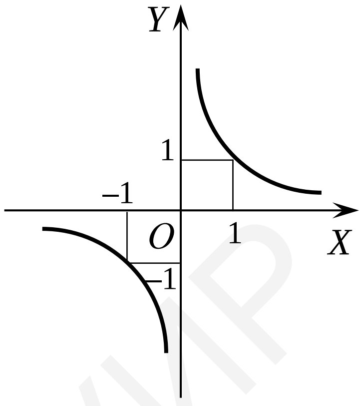
1. Парабола

$$y = x^2$$



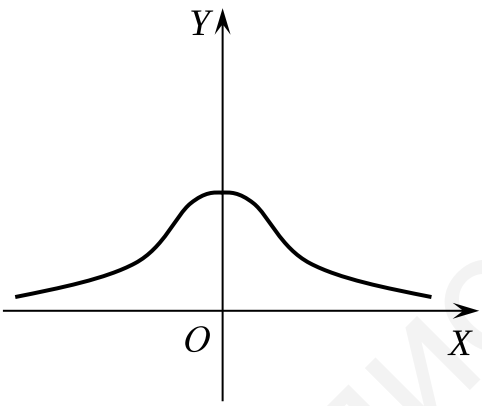
2. Кубическая парабола

$$y = x^3$$



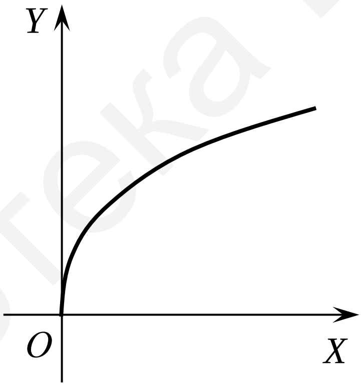
3. Равноосная гипербола

$$y = \frac{1}{x}$$



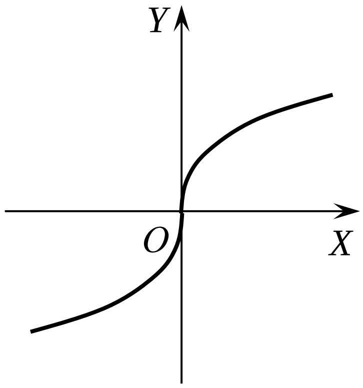
4. Локон Аньези

$$y = \frac{1}{1+x^2}$$



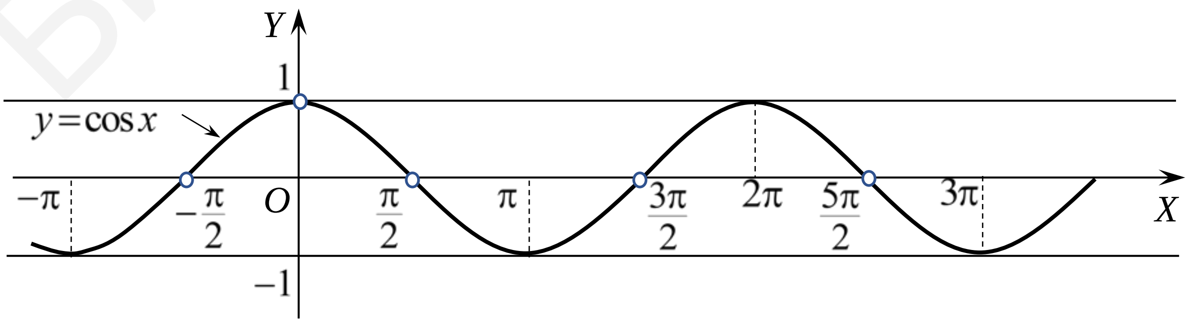
5. Парабола (верхняя ветвь)

$$y = \sqrt{x}$$

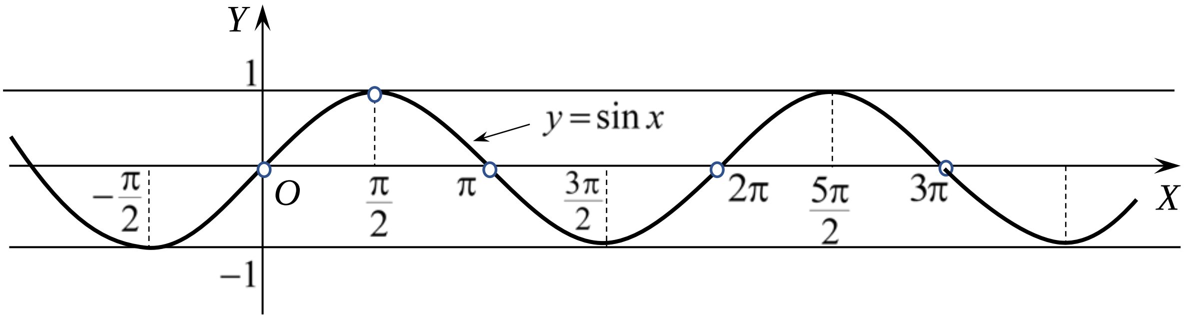


6. Кубическая парабола

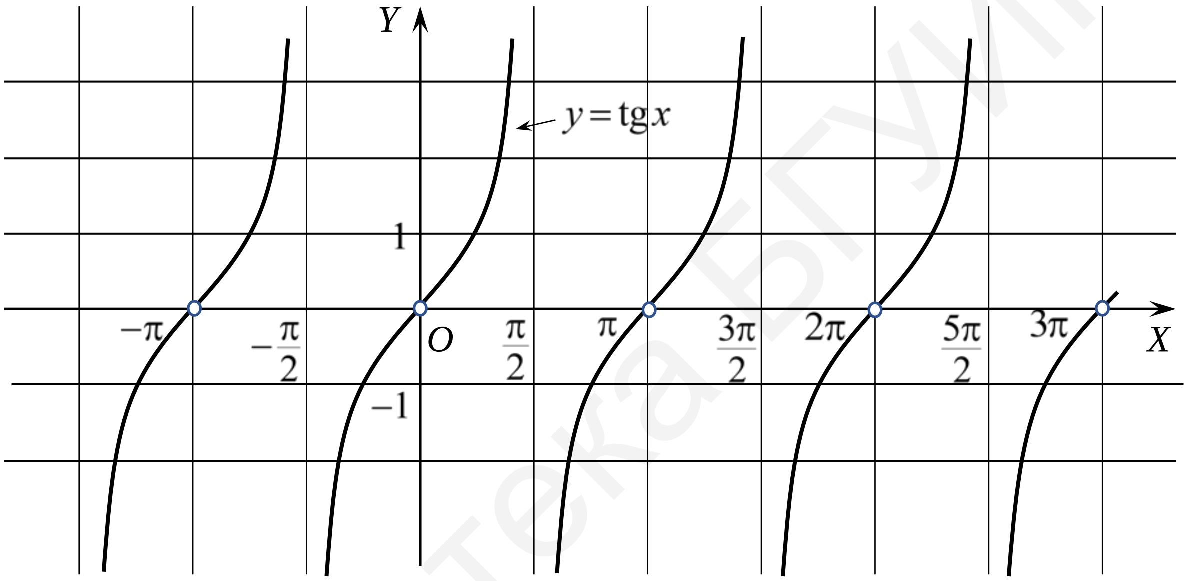
$$y = \sqrt[3]{x}$$



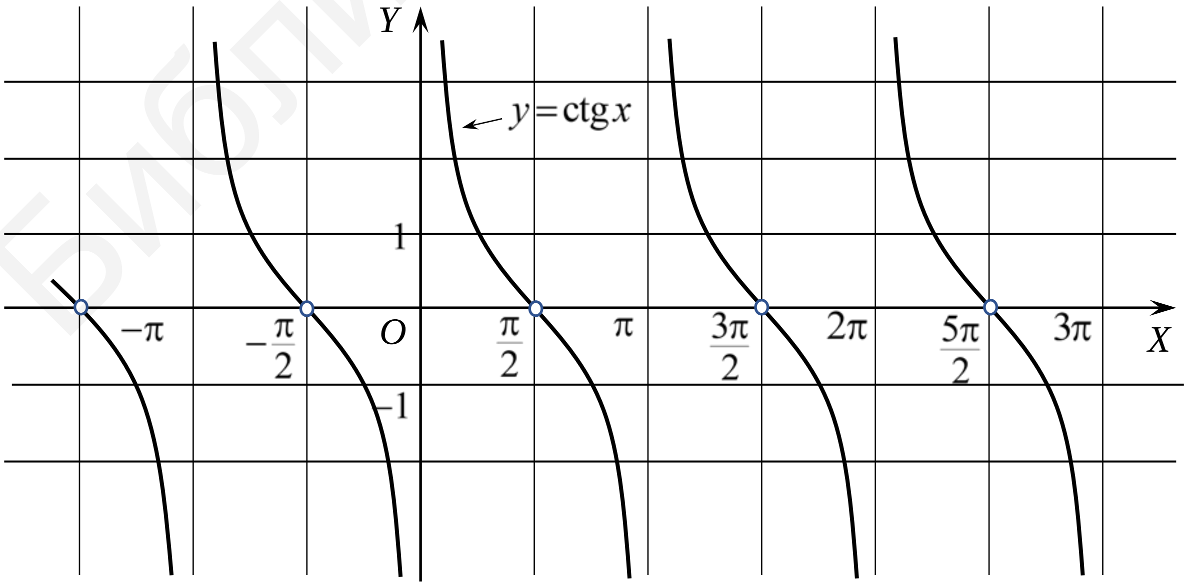
7. Косинусоида $y = \cos x$



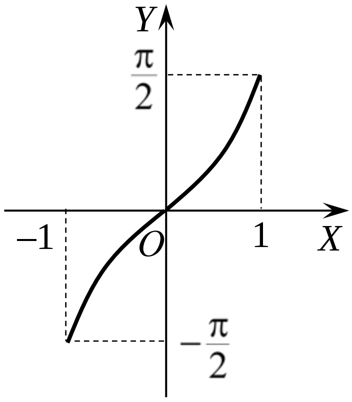
8. Синусоида $y = \sin x$



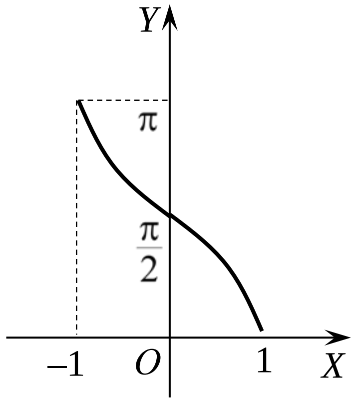
9. Тангенсоида $y = \operatorname{tg} x$



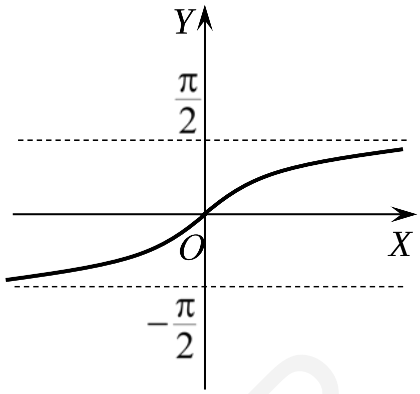
10. Котангенсоида $y = \operatorname{ctg} x$



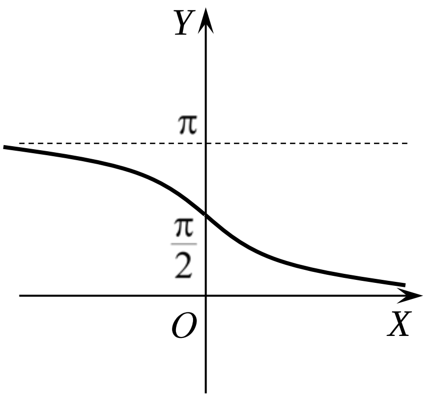
11. $y = \arcsin x$



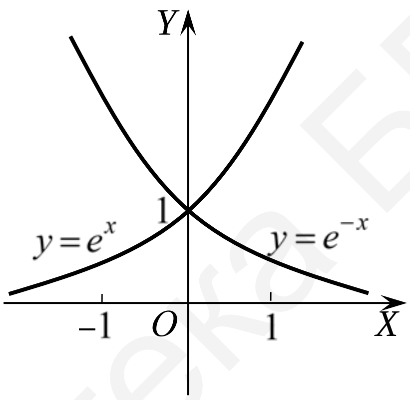
12. $y = \arccos x$



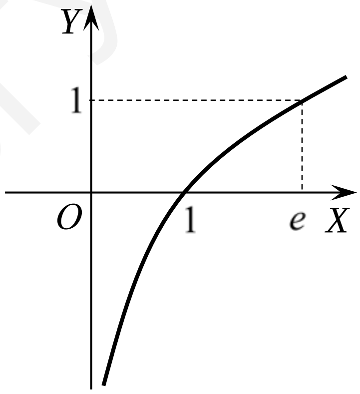
13. $y = \operatorname{arctg} x$



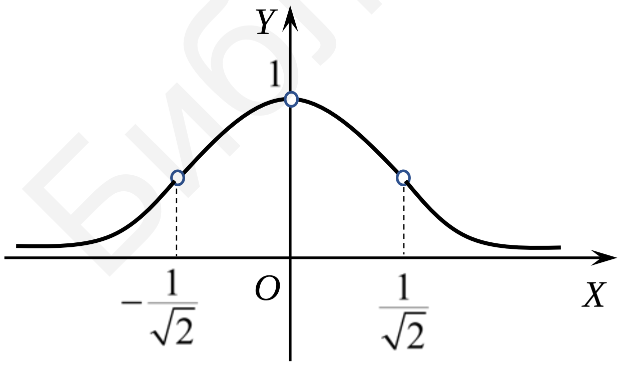
14. $y = \operatorname{arcctg} x$



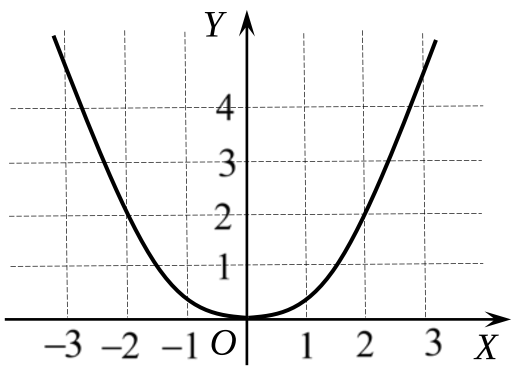
15. Графики показательных функций $y = e^x$ и $y = e^{-x}$



16. Логарифмическая кривая
$y = \ln x$

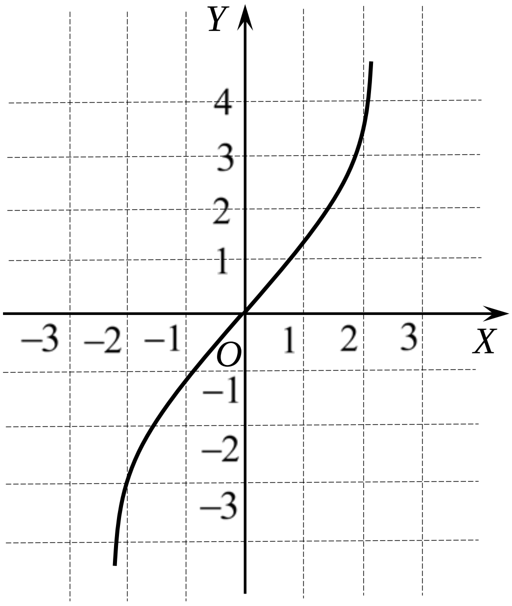


17. Кривая Гаусса $y = e^{-x^2}$



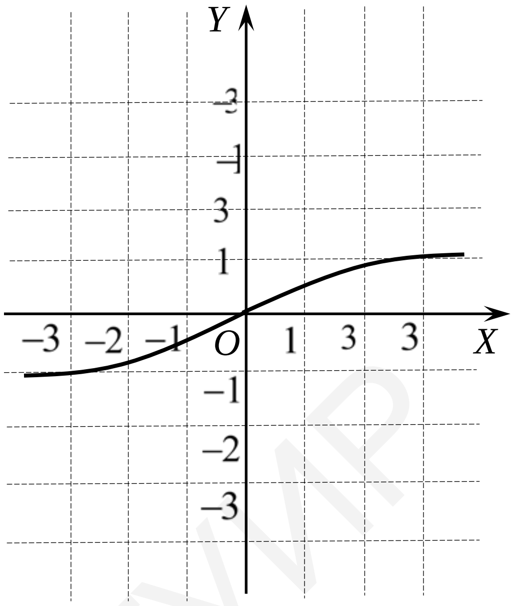
18. Гиперболическая функция

$y = \operatorname{ch} x \equiv \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ (цепная линия)



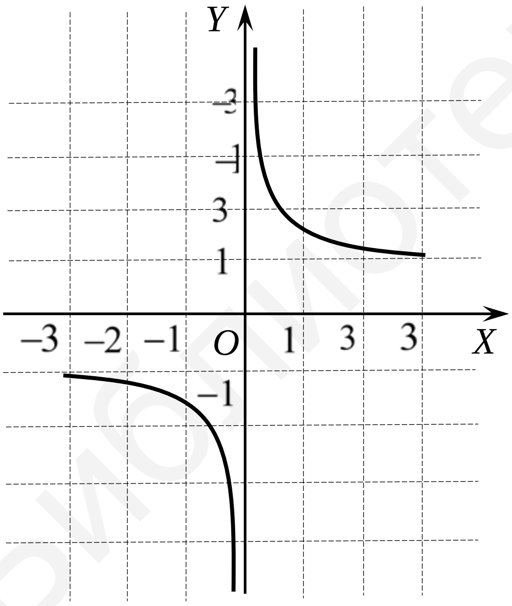
19. Гиперболическая функция

$$y = \operatorname{sh} x \equiv \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$



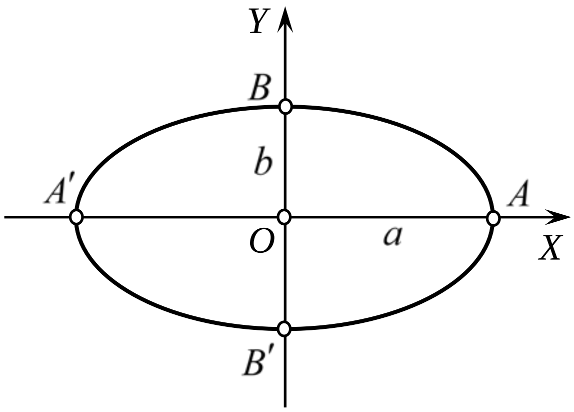
20. Гиперболическая функция

$$y = \operatorname{th} x \equiv \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$



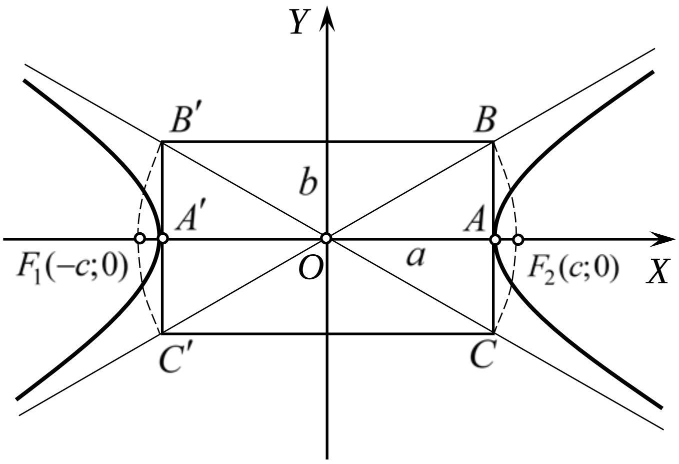
21. Гиперболическая функция

$$y = \operatorname{cth} x \equiv \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$$



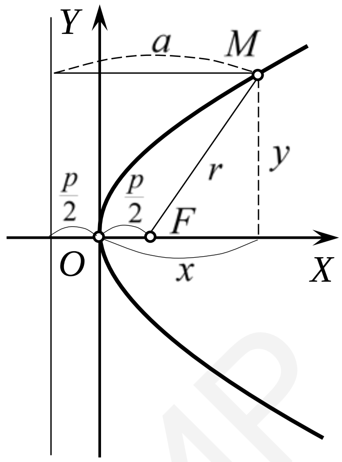
22. Эллипс

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ или } \begin{cases} x = a\cos t, \\ y = b\sin t. \end{cases}$$

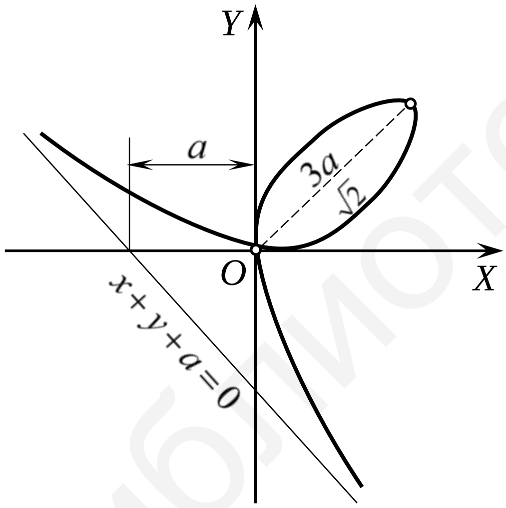


23. Гипербола

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \text{ или } \begin{cases} x=a\operatorname{ch}t, \\ y=b\operatorname{sh}t \end{cases} \text{(для правой ветви).}$$

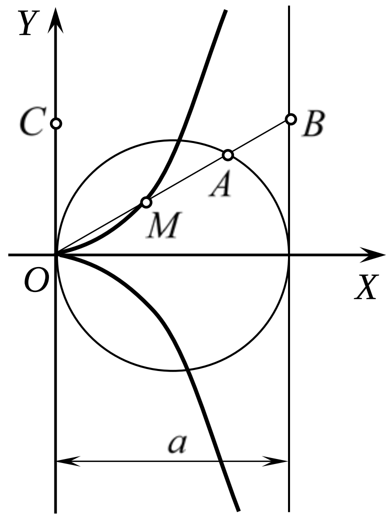


24. Парабола $y^2=2px$



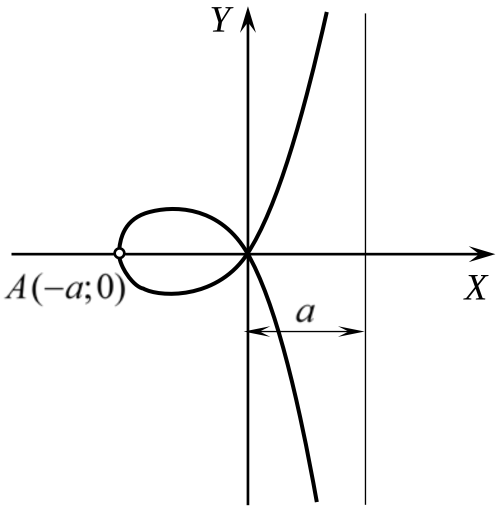
25. Декартов лист

$$x^3+y^3-3axy=0 \text{ или } \begin{cases} x=\dfrac{3at}{1+t^3}, \\ y=\dfrac{3at^2}{1+t^3}. \end{cases}$$

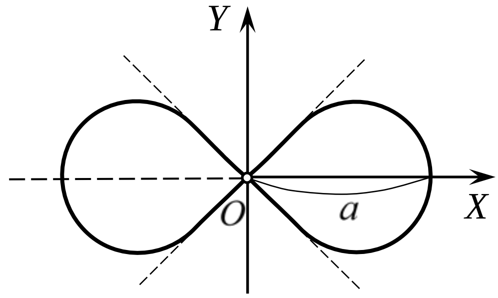


26. Циссоида Диоклеса

$$y^2=\frac{x^3}{a-x} \text{ или } \begin{cases} x=\dfrac{at^2}{1+t^2}, \\ y=\dfrac{at^3}{1+t^2}. \end{cases}$$



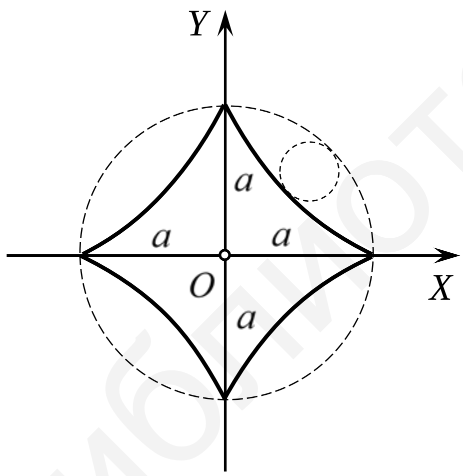
27. Строфоида $y^2 = x^2 \dfrac{a+x}{a-x}$



28. Лемниската Бернулли

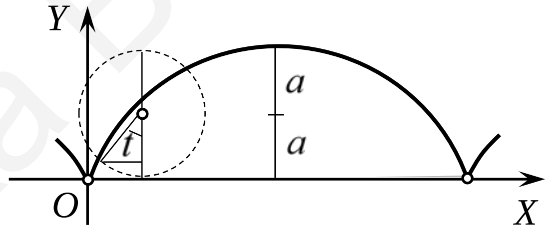
$(x^2+y^2)^2 = a^2(x^2-y^2)$

или $r^2 = a^2\cos 2\varphi$

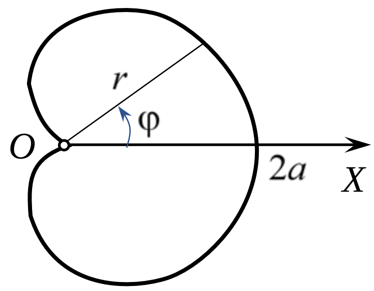


29. Гипоциклоида (астроида)

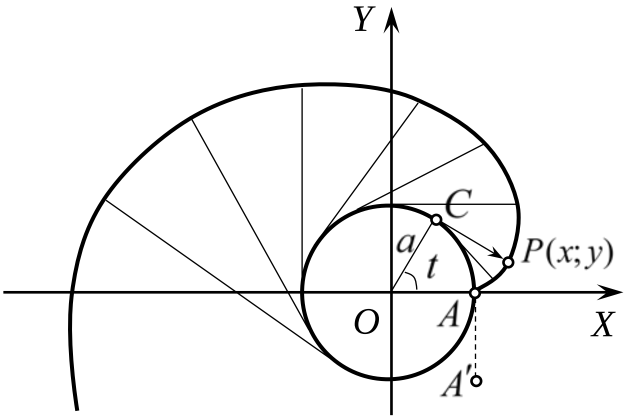
$\begin{cases} x = a\cos^3 t, \\ y = a\sin^3 t \end{cases}$ или $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$



30. Циклоида $\begin{cases} x = a(t-\sin t), \\ y = a(1-\cos t) \end{cases}$

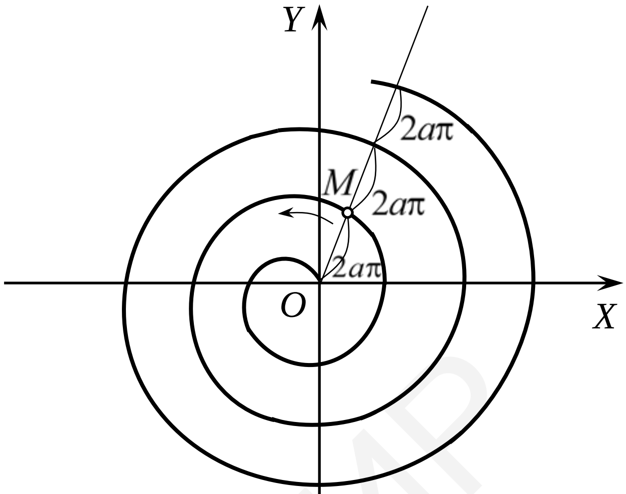


31. Кардиоида $r = a(1+\cos\varphi)$

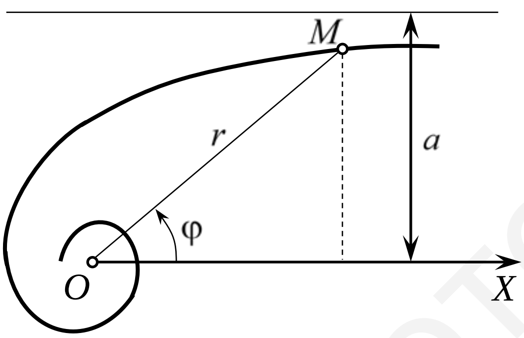


32. Эвольвента (развертка) окружности

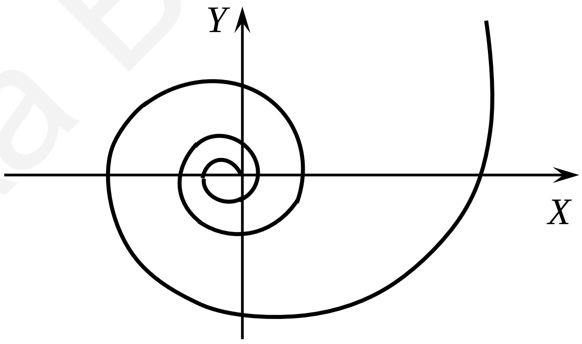
$$\begin{cases} x = a(\cos t + t\sin t), \\ y = a(\sin t - t\cos t) \end{cases}$$



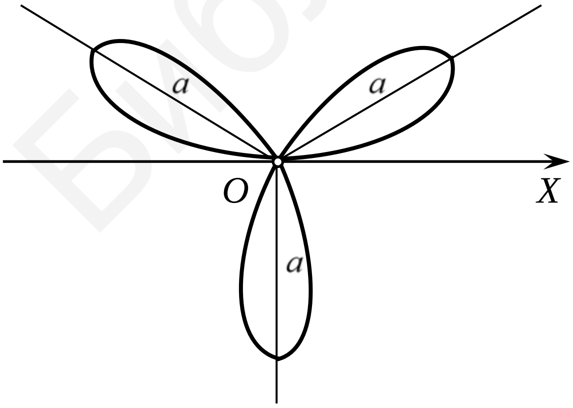
33. Спираль Архимеда $r = a\varphi$



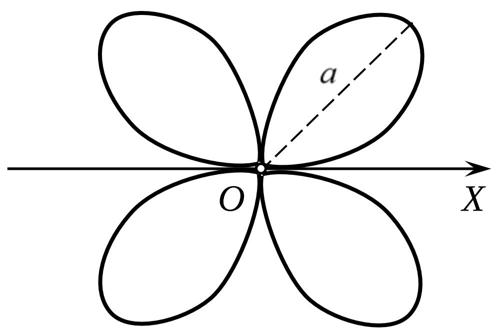
34. Гиперболическая спираль $r = \dfrac{a}{\varphi}$



35. Логарифмическая спираль $r = e^{a\varphi}$

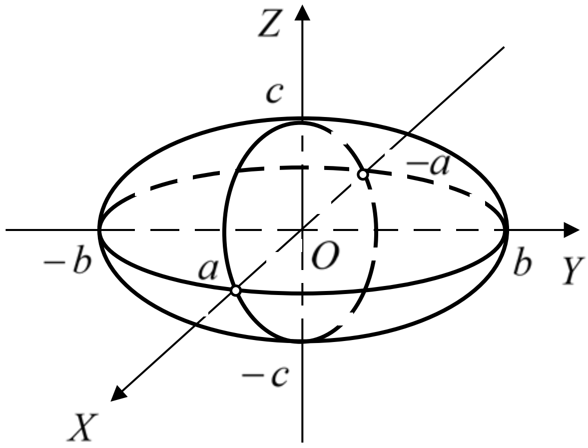


36. Трехлепестковая роза $r = a\sin 3\varphi$

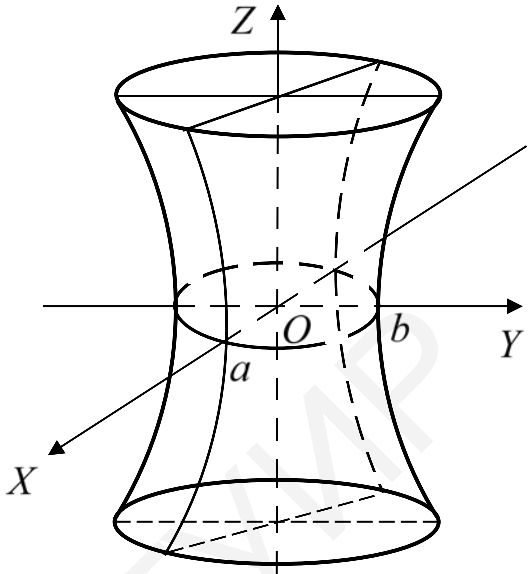


37. Четырехлепестковая роза $r = a\left|\sin 2\varphi\right|$

2. Поверхности второго порядка

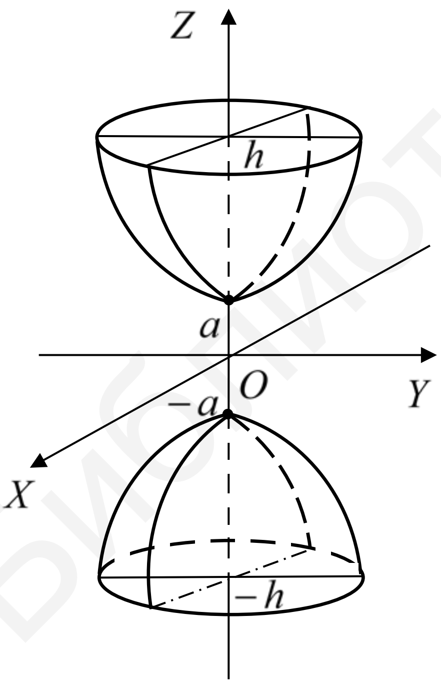


1. Эллипсоид $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$



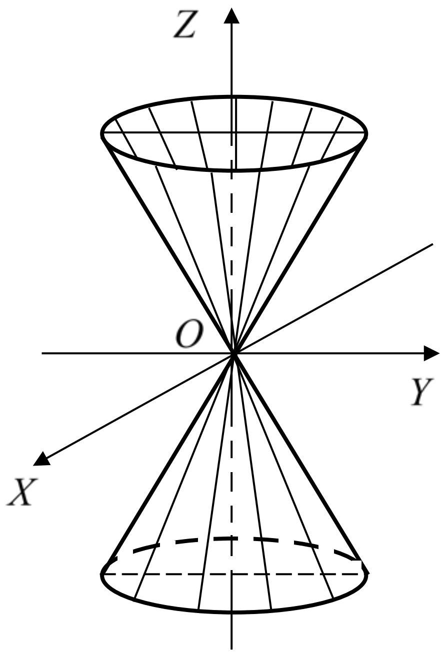
2. Однополостный гиперболоид

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

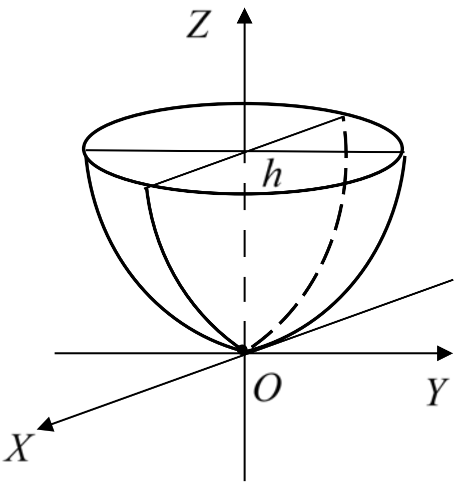


3. Двуполостный гиперболоид

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$$

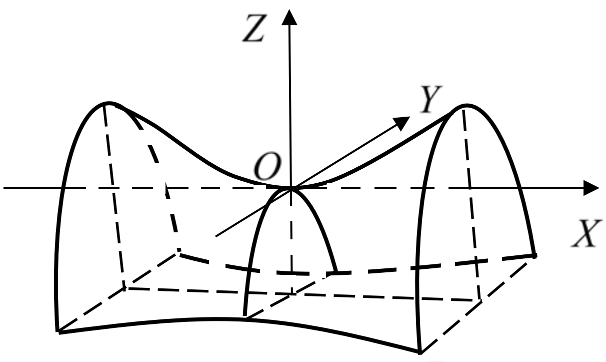


4. Конус $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2}$



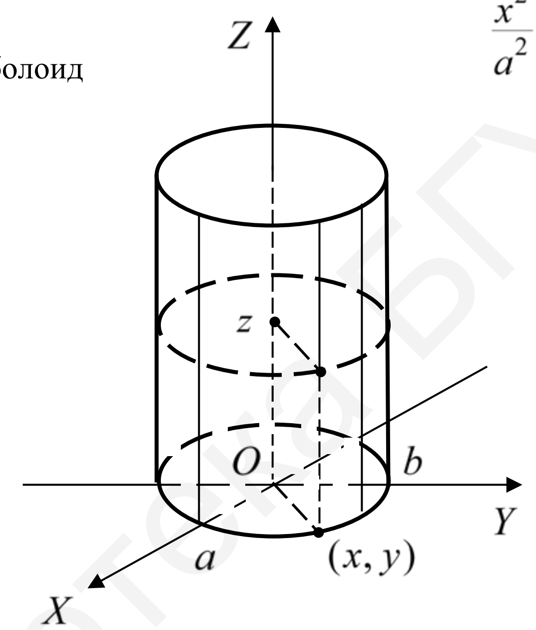
5. Эллиптический параболоид

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2z$$



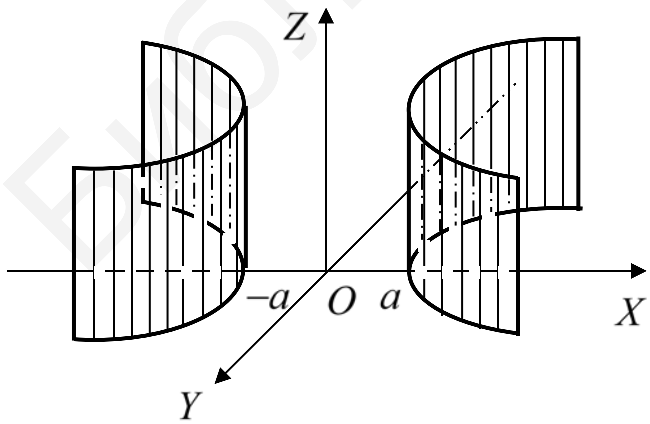
6. Гиперболический параболоид

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2z$$



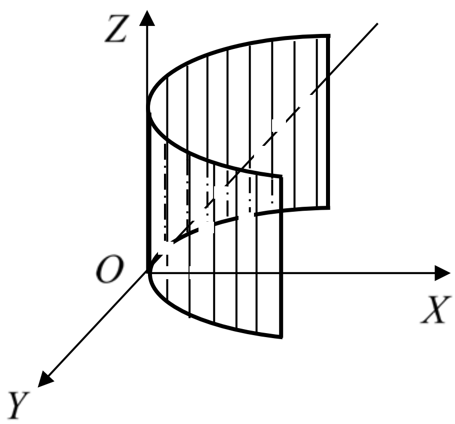
7. Эллиптический цилиндр

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$



8. Гиперболический цилиндр

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$



9. Параболический цилиндр

$$y^2=2px$$

3. Таблица эквивалентных бесконечно малых

$\alpha(x)$ – бесконечно малая при $x \to 0$			
1	$\sin\alpha(x) \sim \alpha(x)$	2	$\operatorname{tg}\alpha(x) \sim \alpha(x)$
3	$1-\cos\alpha(x) \sim [\alpha(x)]^2/2$	4	$\arcsin\alpha(x) \sim \alpha(x)$
5	$\operatorname{arctg}\alpha(x) \sim \alpha(x)$	6	$\ln[1+\alpha(x)] \sim \alpha(x)$
7	$a^{\alpha(x)}-1 \sim \alpha(x)\ln a \quad (a>0)$, в частности, $e^{\alpha(x)}-1 \sim \alpha(x)$		
8	$[1+\alpha(x)]^P-1 \sim P\alpha(x)$, в частности, $\sqrt[n]{1+\alpha(x)}-1 \sim \dfrac{\alpha(x)}{n}$		

4. Таблица производных основных функций

1	$(x^n)' = nx^{n-1}$	2	$(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}, \quad (x>0)$
3	$(\sin x)' = \cos x$	4	$(\cos x)' = -\sin x$
5	$(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$	6	$(\operatorname{ctg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$
7	$(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad (\lvert x\rvert<1)$	8	$(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad (\lvert x\rvert<1)$
9	$(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$	10	$(\operatorname{arcctg} x)' = -\dfrac{1}{x^2+1}$
11	$(a^x)' = a^x \ln a$	12	$(e^x)' = e^x$
13	$(\ln x)' = \dfrac{1}{x}, \quad (x>0)$	14	$(\log_a x)' = \dfrac{1}{x\ln a} = \dfrac{\log_a e}{x}, \quad (x>0,\ a>0)$
15	$(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x$	16	$(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x$
17	$(\operatorname{th} x)' = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$	18	$(\operatorname{cth} x)' = -\dfrac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$

5. Формула Маклорена

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + o(x^n).$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n).$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + o(x^{2n}).$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}).$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o(x^n).$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + o(x^n).$$

6. Таблица неопределенных интегралов

1	$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \neq -1$
2	$\int \frac{dx}{x} = \ln\lvert x\rvert + C$
3	$\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C = -\frac{1}{a}\operatorname{arcctg}\frac{x}{a} + C_1, \quad (a \neq 0)$
4	$\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left\lvert\frac{x-a}{x+a}\right\rvert + C, \quad (a \neq 0)$ $\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left\lvert\frac{a+x}{a-x}\right\rvert + C, \quad (a \neq 0)$
5	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}} = \ln\left\lvert x + \sqrt{x^2+a}\right\rvert + C, \quad (a \neq 0)$
6	$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C = -\arccos\frac{x}{a} + C_1, \quad (a > 0)$
7	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \quad (a > 0); \quad \int e^x dx = e^x + C$
8	$\int \sin x\, dx = -\cos x + C$
9	$\int \cos x\, dx = \sin x + C$
10	$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$
11	$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$
12	$\int \frac{dx}{\sin x} = \ln\left\lvert\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right\rvert + C = \ln\lvert\operatorname{cosec} x - \operatorname{ctg} x\rvert + C$
13	$\int \frac{dx}{\cos x} = \ln\left\lvert\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right\rvert + C = \ln\lvert\operatorname{tg} x + \sec x\rvert + C$
14	$\int \operatorname{sh} x\, dx = \operatorname{ch} x + C$

15	$\int \operatorname{ch} x\,dx = \operatorname{sh} x + C$
16	$\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C$
17	$\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C$

7. Неберущиеся интегралы (неопределенные интегралы, являющиеся неэлементарными функциями)

1	$\int e^{-x^2}dx, \quad \int e^{x^2}dx$	2	$\int \sin x^2 dx$
3	$\int \cos x^2 dx$	4	$\int \frac{\sin x}{x}dx$
5	$\int \frac{\cos x}{x}dx$	6	$\int \frac{dx}{\ln x}$
7	$\int \frac{e^x}{x}dx$	8	$\int \frac{e^x}{x^n}, \quad n \in \mathbb{N}$
9	$\int \frac{\sin x}{x^n}dx, \quad n \in \mathbb{N}$	10	$\int \frac{\cos x}{x^n}dx, \quad n \in \mathbb{N}$

11	$\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}, \quad 0<k<1$
12	$\int \frac{x^2dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}, \quad 0<k<1$
13	$\int \frac{dx}{\sqrt{1-k^2\sin^2 x}}, \quad 0<k<1$
14	$\int \sqrt{1-k^2\sin^2 x}\,dx \quad 0<k<1$

15	$\int \frac{x\,dx}{\sin x}$	16	$\int \frac{x^2\,dx}{\sin x}$	17	$\int \frac{x\,dx}{\sin^3 x}$
18	$\int \frac{\sin^2 x}{x}dx$	19	$\int \frac{\cos^2 x}{x}dx$	20	$\int \frac{xdx}{\cos x}$
21	$\int \frac{xdx}{\cos^3 x}$	22	$\int x \operatorname{tg} x\,dx$	23	$\int \frac{\operatorname{tg} x}{x}dx$
24	$\int x \operatorname{ctg} x\,dx$	25	$\int \frac{\operatorname{ctg} x}{x}dx$	26	$\int \frac{\arcsin x}{x}dx$

27	$\int \frac{\arccos x}{x}dx$	28	$\int \frac{\mathrm{arctg}\, x}{x}dx$	29	$\int \frac{\mathrm{arcctg}\, x}{x}dx$
30	$\int \frac{e^x}{x^2}dx$	31	$\int \frac{xdx}{\ln x}$	32	$\int \frac{x^2dx}{\ln x}$

33	$\int \frac{dx}{x^2 \ln x}$	34	$\int \frac{\ln(ax+b)}{x}dx,\ \ a \neq 0$
35	$\int \frac{\ln(x+\sqrt{x^2+1})}{x}dx$	36	$\int \ln \sin x\, dx$
37	$\int \ln \cos x\, dx$	38	$\int \ln \mathrm{tg} x\, dx$
39	$\int e^x \ln x\, dx$	40	$\int \frac{\mathrm{sh}\, x}{x}dx$
41	$\int \frac{\mathrm{ch}\, x}{x}dx$	42	$\int \frac{\mathrm{sh}\, x}{x^2}dx$
43	$\int \frac{\mathrm{sh}^2\, x}{x}dx$	44	$\int \frac{xdx}{\mathrm{sh}\, x}$
45	$\int \frac{\mathrm{ch}^2\, x}{x}dx$	46	$\int \frac{xdx}{\mathrm{ch}\, x}$

8. Именные интегралы

Интеграл Дирихле	$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{x}dx = \frac{\pi}{2}\mathrm{sgn}\,\alpha$
Интеграл Пуассона	$\int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$
Интегралы Лапласа	$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos ax}{b^2+x^2}dx = \frac{\pi}{2\lvert b\rvert}e^{-\lvert ab\rvert},\ \ b \neq 0$ $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x \sin ax}{b^2+x^2}dx = \frac{\pi}{2}\mathrm{sgn}\,\alpha \cdot e^{-\lvert ab\rvert}$
Интегралы Френеля	$\int\limits_0^{+\infty} \sin x^2\, dx = \frac{\pi}{2}\int\limits_0^{+\infty} \cos x^2 dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$
Интеграл Эйлера	$\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}dx = \frac{\pi}{\sin \alpha\pi},\ \ 0<\alpha<1$

Список использованных источников

1. Морозова, В. Д. Введение в анализ / В. Д. Морозова. – М. : Издательство МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2000. – 396 с.

2. Канатников, А. Н. Аналитическая геометрия / А. Н. Канатников, А. П. Крищенко. – 2-е изд. – М. : Издательство МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2000. – 388 с.

3. Канатников, А. Н. Линейная алгебра / А. Н. Канатников, А. П. Крищенко. – 3-е изд. – М. : Издательство МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2002. – 336 с.

4. Математический анализ в вопросах и задачах : учеб. пособие / под ред. В. Ф. Бутузова. – М. : Высш. шк., 1991. – 198 с.

5. Сборник задач по высшей математике / К. Н. Лунгу [и др.]. – М. : Айрис-пресс : Рольф, 2001. – 576 с.

Содержание

Св. план 2020, поз. 23

Учебное издание

Баркова Елена Александровна
Кобринец Николай Иванович
Самсонов Павел Анатольевич и др.

СОВРЕМЕННЫЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ В ЗАДАЧАХ И УПРАЖНЕНИЯХ

ПОСОБИЕ

Редактор *Е. В. Иванюшина*
Корректор *Е. Н. Батурчик*
Компьютерная верстка *Г. М. Кореневская*
Компьютерная правка, оригинал-макет *М. В. Касабуцкий*

Подписано в печать 06.05.2020. Формат 60×84 1/16. Бумага офсетная. Гарнитура «Таймс».
Отпечатано на ризографе. Усл. печ. л. 6,63. Уч.-изд. л. 6,8. Тираж 100 экз. Заказ 380.

Издатель и полиграфическое исполнение: учреждение образования
«Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники».
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя,
распространителя печатных изданий №1/238 от 24.03.2014,
№2/113 от 07.04.2014, №3/615 от 07.04.2014.
Ул. П. Бровки, 6, 220013, г. Минск