НАТУРАЛЬНЫЕ ТОЧКИ ПОД КРИВОЙ

Шедов В.С.

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники
г. Минск, Республика Беларусь

Примичева З.Н. – к.ф.-м.н., доцент

В данной работе исследовано количество натуральных точек под различными видами кривых. Рассмотрены кривые: $y = ax$, $y = ax^2$, $y = a\sqrt{x}$, $y = ax^{\frac{1}{3}}$, $y = ax^3$, $y = ax^{\frac{1}{m}}$, $y = ax^m$, $y = \log_\alpha x$, $y = \alpha \sin x$, $y = \alpha \arcsin x$, обобщение в пространстве для плоскости $z = ax + by$, где α и β –положительные действительные числа. Для этих кривых найдены пределы и формулы описывающие свойства количества точек под ними.

I. Рассмотрено множество натуральных точек под прямой $y = \alpha x$, которое обозначено $f_\alpha(n)$.

1.1. а) Для нахождения $f_{\sqrt{2}}(6)$ на координатной плоскости Oxy рассмотрена область, ограниченная прямыми $y = \sqrt{2}x$ и $x = 6$. Количество точек с натуральными координатами в рассматриваемой области N = 27. Для $f_{\sqrt{3}}(4)$, N = 15.

б) Для нахождения $f_1(n)$ на координатной плоскости Oxy рассмотрена область, ограниченная прямыми $y = x$ и $x = n$. $f_1(n) = \frac{n(n+1)}{2}$. Для α > 0:

$$N = \sum_{x=1}^{n} [\alpha x]. \tag{1}$$

1.2. Доказано, что ни при каких α и β равенство $f_\alpha(n) = f_\beta(n)$ не выполняется.

1.3. Вычислен $f_\alpha(n)$ для различных α При целом α формула $N = \sum_{x=1}^{n} [\alpha x]$ приобретает вид

$$N = \sum_{x=1}^{n} \alpha x = \frac{(\alpha+\alpha n)n}{2}. \tag{2}$$

При все остальных α используем формулу $N = \sum_{x=1}^{n} [\alpha x]$.

1.4. Вычислен предел:$\lim_{n\to\infty} \frac{f_\alpha(n)}{n^2} = \frac{\alpha}{2}$.

1.5. Доказано, что:

а) $f_\alpha(n) = \frac{1}{2}[\alpha]n(n+1) + f_{\{\alpha\}}(n)$, где [a] - целая часть, { α }- дробная часть числа α.

б) $f_\alpha(n) + f_{\frac{1}{\alpha}}([n\alpha]) - \left[\frac{n}{b}\right] = n[n\alpha]$. Построен аналог этой формулы для произвольного положительного $\alpha \in R$.

1.6. а) Проверено выполнение равенства $f_{\alpha+\beta}(n) = f_\alpha(n) + f_\beta(n)$ для целых α и β. Найдено всё множество пар (α, β), для которых это равенство будет выполняться для любого натурального *n*. Найдена связь между $f_{\alpha+\beta}(n)$ и $f_\alpha(n), f_\beta(n)$. Доказаны утверждения $f_{\alpha+\beta}(n) = f_\alpha(n) + f_\beta(n)$ при $\alpha \in Z, \beta \in Z, \alpha\beta \geq 0$ и $f_{\alpha+\beta}(n) < f_\alpha(n) + f_\beta(n)$ при $\alpha \in Z, \beta \in Z, \alpha\beta < 0$.

б) Найдена связь (в виде нетривиальных тождеств или неравенств) между $f_\alpha(n+m)$ и $f_\alpha(n), f_\alpha(m)$.

II. Множества натуральных точек под параболами $y = \alpha x^2$, $y = \alpha\sqrt{x}$ обозначены соответственно $g_\alpha(n), h_\alpha(n)$.

2.1. Решены задачи, аналогичные п. 1.1—1.3, для $g_\alpha(n)$ *и* $h_\alpha(n)$. В частности показано, что

$$h_1(n) = n\left[\sqrt{n}\right] - \frac{1}{3}\left[\sqrt{n}\right]^3 - \frac{1}{2}\left[\sqrt{n}\right]^2 + \frac{5}{6}\left[\sqrt{n}\right]. \tag{3}$$

2.2. Вычислены пределы:

а) $\lim_{n\to\infty} \frac{g_\alpha(n)}{n^3} = \frac{\alpha}{3}$; б) $\lim_{n\to\infty} \frac{h_\alpha(n)}{n^{\frac{3}{2}}} = \frac{2\alpha}{3}$.

2.3. а) Доказаны формулы $h_\alpha(n) = h_{[a]}(n) + h_{\{\alpha\}}(n)$ и $g_\alpha(n) = \frac{[\alpha]n(n+1)(2n+1)}{6} + g_{\{\alpha\}}(n)$.

б) Доказано, что, если α - положительное иррациональное, то $g_\alpha(n) + h_{\frac{1}{\sqrt{\alpha}}}([\alpha n^2]) = n[\alpha n^2]$

2.4.

1) а) Доказано, что $g_{\alpha+\beta}(n) = g_\alpha(n) + g_\beta(n)$ при αβ ≥ 0 и $g_{\alpha+\beta}(n) < g_\alpha(n) + g_\beta(n)$ при $\alpha \in Z, \beta \in Z$, $\alpha\beta < 0$.

б) Если $\alpha \geq 0$, то $g_\alpha(n+m) < g_\alpha(n) + g_a(m)$ и $g_\alpha(n+m) < g_\alpha(n) + g_a(n)$ при $\alpha < 0$.

2) а) Доказано, что $h_{a+\beta}(n) = h_\alpha(n) + h_\beta(n)$ при αβ ≥ 0 и $h_{\alpha+\beta}(n) < h_\alpha(n) + h_\beta(n)$ при $\alpha \in Z, \beta \in Z$, $\alpha\beta < 0$.

б) Если $\alpha \geq 0$, то $h_\alpha(n+m) < h_\alpha(n) + h_a(m)$ и $h_\alpha(n+m) < h_\alpha(n) + h_a(n)$ при $\alpha < 0$.

Также получены формулы для вычисления точек под следующими кривыми:

$$N = \sum_{x=1}^{n}[\alpha x^m]; \tag{4}$$

$$N = \sum_{x=1}^{n}[\alpha^x]; \tag{5}$$

$$N = \sum_{x=1}^{n}[\log_\alpha x]; \tag{6}$$

$$N = \sum_{x=1}^{n}\left[\frac{\alpha \sin x + |\alpha \sin x|}{2}\right]; \tag{7}$$

$$N = \left[\frac{\alpha\pi}{2}\right]. \tag{8}$$

для $y = \alpha x^m$ (8), $y = \alpha^x$ (9), $y = \log_\alpha x$ (10), $y = \alpha \sin x$ (11), $y = \alpha \arcsin x$ (12).

В трехмерном пространстве для плоскости $z = \alpha x + \beta y$ получено обобщение:

$$\sum_{y=1}^{n}\left(\sum_{x=1}^{n-y}[\alpha x + \beta y]\right) \tag{9}$$

Таким образом, в процессе исследования было рассмотрено количество натуральных точек под различными видами кривых, получены формулы для их вычисления и изучены свойства этих множеств.

Список использованных источников:
1. Ильин В.А., Садоничий В.А., Сендов Бл. Х. Математический анализ. Часть 1.
2. Ильин В.А., Садоничий В.А., Сендов Бл. Х. Математический анализ. Часть 2

РАВЕНСТВО ПАРСЕВАЛЯ

Якутонис Алексей Сергеевич

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники
г. Минск, Республика Беларусь

Каянович Сергей Сергеевич – канд. физ.-мат. наук

Равенство Парсеваля — это аналог теоремы Пифагора в векторных пространствах со скалярным произведением. Доказательство с помощью предельного перехода под знаком интеграла.

Равенство Парсеваля.

Степенной ряд

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k \tag{1}$$

Можно рассматривать как некоторый аналог ряда Фурье для функции $f(z)$.Чтобы в этом убедиться, докажем сначала лемму.

Теорема

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|f\left(z_0 + \rho e^{i\theta}\right)\right|^2 d\theta = \sum_{k=0}^{\infty}|a_k|\rho^{2k} \tag{2}$$

Замечая, что $|z|^2 = z\overline{z}$, $\overline{z_1 z_2} = \overline{z}_1\overline{z}_2$, $\overline{z^m} = \overline{z}^m$, получаем цепочку равенств

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|\sum_{k=0}^{n} a_k (z - z_0)^k\right|^2 d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k (z - z_0)^k \cdot \overline{\sum_{j=0}^{n} a_j (z - z_0)^j}\right) d\theta =$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k (z - z_0)^k \cdot \sum_{j=0}^{n} \overline{a_j}\,\overline{(z - z_0)^j}\right) d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\sum_{k,j=0}^{n} a_k \overline{a_j} (z - z_0)^k \overline{(z - z_0)^j}\right) d\theta =$$

$$\frac{1}{2\pi}\sum_{k,j=0}^{n} a_k \overline{a_j} \int_0^{2\pi} (z - z_0)^k \overline{(z - z_0)^j} d\theta = \frac{1}{2\pi}\sum_{k=0}^{n} a_k \overline{a_k} \int_0^{2\pi} (z - z_0)^k \overline{(z - z_0)^k} d\theta = \sum_{k=0}^{n}|a_k|\rho^{2k},$$