ЦЕПОЧКИ ОКРУЖНОСТЕЙ, ВПИСАННЫХ В ПАРАБОЛУ

Зезюлькин П.А., Ващилин Е.В.

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники
г. Минск, Республика Беларусь

Баркова Е.А. – канд. физ.-мат. наук, доцент

Япония находилась в многовековой изоляции. Однако это не помешало развитию японской науки, в частности, математики. Японцы полагали, что искусство геометрии угодно Богу, и ею увлекались представители всех сословий. Много работ было посвящено кривым второго порядка, а особое внимание уделялось эстетике открытий. Поэтому для данной работы мы сформулировали следующую задачу: возможно ли вписать цепочки окружностей в параболу, и будут ли полученные закономерности лаконичными?

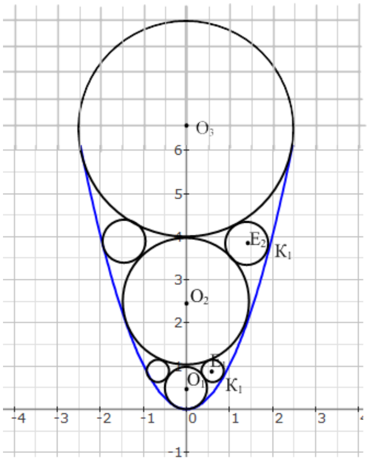

Рисунок 1

В данной работе нами рассматриваются две цепочки окружностей, вписанных в параболу: первая цепочка – это окружности ω_n, центры которых находятся на оси Oy (на рисунке 1 это точки O_1, O_2,…, O_n) и которые касаются друг друга и параболы. Вторая цепочка – это окружности ψ_n, вписанные в криволинейные треугольники, образованные окружностями из первой цепочки и ветвями параболы. Их центры – это точки E_1, E_2, …, E_n на рисунке 1, а K_1, K_2, …, K_n – точки касания этих окружностей с параболой.

Найдём радиусы и координаты центров окружностей из первой цепочки. Для этого составим системы из уравнений окружностей и параболы для окружностей O_1 и O_2:

$$\begin{cases} y = x^2, \\ x^2 + (y - R_1)^2 = {R_1}^2 \end{cases} (1), \qquad \begin{cases} y = x^2, \\ x^2 + \left(y - (2R_1 + R_2)\right)^2 = {R_2}^2 \end{cases} (2)$$

С помощью арифметической прогрессии найдём координаты центра n-ой окружности: $O_n(O; n^2 - n + \frac{1}{2})$. На основании полученных решений для систем (1) и (2) ($R_1 = 0.5$; $R_2 = 1.5$) возникает гипотеза о том, что радиус n-ой окружности можно найти по формуле $R_n = n - \frac{1}{2}$. Данную формулу нетрудно доказать методом математической индукции.

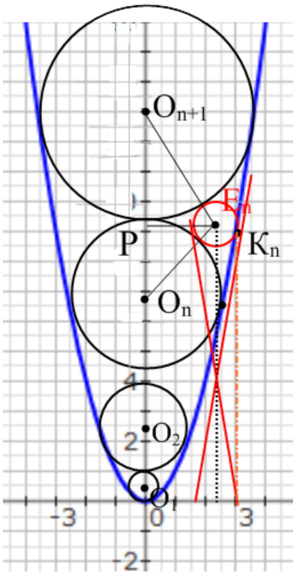

Рисунок 2

Рассмотрим рисунок 2. Пусть $E_n(x_{1n}; y_{1n})$ — центр окружности ψ_n, т.е. n-ой окружности, вписанной в криволинейный треугольник. Эта окружность касается окружностей ω_n и ω_{n+1}, т.е. -ой и $(n+1)$-ой окружностей с центрами на оси Oy. Пусть r_n – радиус этой окружности.

$K_n(x_{2n}; y_{2n})$ — точка касания n-ой окружности и параболы; $y_{2n} = x_{2n}^2$.

$O_{n+1}(O; y_{n+1})$ — центр (n+1)-ой окружности с центром на оси Oy.

$O_n(O; y_n)$ — центр n-ой окружности.

Проведём $E_nP \perp Oy$. Из треугольников $O_{n+1}E_nP$ и O_nE_nP:

$$\begin{cases} O_{n+1}P^2 + PE_n^2 = O_{n+1}E_n^2 \\ O_nP^2 + PE_n^2 = O_nE_n^2 \end{cases}, \text{ или } \begin{cases} (y_{n+1} - y_{1n})^2 + x_{1n}^2 = (R_{n+1} + r_n)^2 \\ (y_n - y_{1n})^2 + x_{1n}^2 = (R_n + r_n)^2 \end{cases} \quad (3)$$

Из системы (3) получим:

$$r_n = 2n^3 - 2ny_{1n} \text{ или } y_{1n} = \frac{2n^3 - r_n}{2n}.$$

С помощью пары касательных к окружности ψ_n, симметричных относительно прямой $x = x_{1n}$, проходящей через центр данной окружности, получим выражение для абсциссы центра ψ_n (формула 5) и её радиуса (формула 6).

$$x_{1n}^2 = 9r_n^2 - \frac{9}{64} \ (5), \qquad r_n = \frac{n}{4} \ (6).$$

Таблица 1 – Результаты исследования

Цепочка окружностей	Координаты центра	Радиус
O_n	$O_n(O; n^2 - n + \frac{1}{2})$	$R_n = n - \frac{1}{2}$
ψ_n	$E_n(\frac{3}{4}\sqrt{n^2 - \frac{1}{2}}; n^2 - \frac{1}{8})$	$r_n = \frac{n}{4}$

Также в ходе работы мы нашли координаты точки K_n касания окружности ψ_n и параболы:

$$K_n\left(\sqrt{n^2-\frac{1}{4}};n^2-\frac{1}{4}\right) \quad (7)$$

В силу симметрии данную задачу можно рассматривать и в пространстве, а именно вписать цепочки сфер в параболоид (рисунки 3, 4).

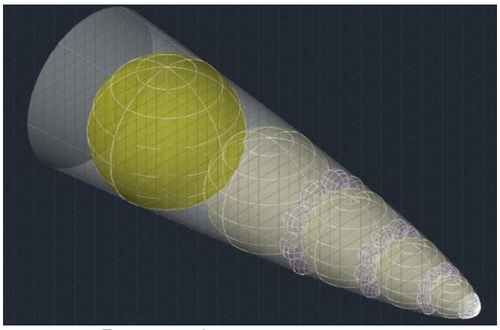

Рисунок 3

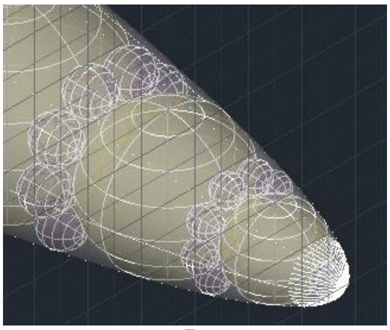

Рисунок 4

Рассматривая полученные цепочки, необходимо обратить внимание на возможность вписания окружности в криволинейный треугольник, образованный тремя окружностями. Для этого используем теорему Декарта, согласно которой радиусы четырёх взаимно касающихся окружностей удовлетворяют некоторому квадратному уравнению, а именно:

$$(\mathrm{k}_1+\mathrm{k}_2+\mathrm{k}_3+\mathrm{k}_4)^2 = 2\,(\mathrm{k}_1^2+\mathrm{k}_2^2+\mathrm{k}_3^2+\mathrm{k}_4^2) \quad (8),$$

где $k_i=\frac{1}{r_i}$ - кривизна окружности.

Чтобы найти координаты центра такой окружности, можно рассмотреть т. Декарта в комплексном виде, представив координаты (x,y) центра в виде комплексного числа $z=x+iy$. Тогда координаты центра z_4 можно найти по формуле:

$$\mathrm{z}_4=\frac{\mathrm{z}_1\mathrm{k}_1+\mathrm{z}_2\mathrm{k}_2+\mathrm{z}_3\mathrm{k}_3\pm 2\sqrt{\mathrm{k}_1\mathrm{k}_2\mathrm{z}_1\mathrm{z}_2+\mathrm{k}_2\mathrm{k}_3\mathrm{z}_2\mathrm{z}_3+\mathrm{k}_1\mathrm{k}_3\mathrm{z}_1\mathrm{z}_3}}{\mathrm{k}_4} \quad (9)$$

Таким образом у нас появилась возможность построить третью цепочку окружностей. Полученные окружности выделены красным цветом на рисунке 5.

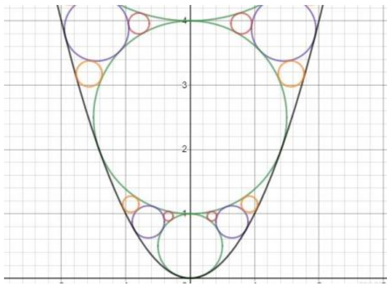

Рисунок 5

Список использованных источников:

1. *Гусак А.А. Справочник по высшей математике / А.А. Гусак, Г.А. Гусак, Е.А. Бричикова. – Минск: ТетраСистемс, 1999. – 640 с. ISBN: 985-6317-51-7.*
2. *Журнал “Квант”, №4 – 2013*
3. *Beyond the Descartes circle theorem / Colin L.Mallows [et al.] // Amer. Math. Monthly 109 (2002), 338--361.*
4. *Japanese Temple Geometry / Rothman T. // Scientific American, 278, #5 1998, p.85-91.*