АЛГОРИТМ ПОДСЧЁТА РАЦИОНАЛЬНЫХ ТОЧЕК ВЛИЗИ ПАРАБОЛЫ

Андреюк Д.С., Труханович М.В.

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники
г. Минск, Республика Беларусь

Калугина М.А. – канд. физ.-мат. наук, доцент

В работе рассмотрены алгоритмы решения задачи распределения точек с рациональными координатами в некоторой окрестности параболы. Приведены подходы, лежащие в основе выбранной методики подсчета точек, и асимптотические оценки трудоемкости получения результата.

Задачи о количестве целых точек в областях евклидова пространства возникли в классической теории чисел. Важное место среди них занимает подсчет на плоскости точек с целочисленными координатами, которые лежат внутри замкнутой кривой [1]. Как обобщение возникла задача о распределении рациональных точек вблизи кривых, эффективное решение которой играет важную роль в получении оценок размерности Хаусфорда множеств, определяемых диофантовыми неравенствами при совместных приближениях [2].

Поскольку множество рациональных чисел бесконечно, в рамках поставленной задачи рассматриваются координаты, представимые несократимой дробью с целым числителем и натуральным знаменателем, не превышающим некоторого значения.

Выбранный способ подсчёта точек сводится к нахождению на открытом вещественном интервале (a,b) рациональных точек со знаменателем, не превышающим $Q\in\mathbb{N}$. Его можно рассматривать как обобщение подсчёта целочисленных координат на отрезке: число точек, представимых в виде рациональных дробей с натуральным знаменателем, равно числу целых чисел на этом отрезке, умноженном на вышеназванный знаменатель. Однако, ввиду основного свойства дроби, одно и то же рациональное число может быть задано дробями с разными знаменателями. Таким образом, возникает проблема нахождения именно несократимых дробей на интервале.

В ходе решения поставленной задачи был изучен ряд Фарея [3] – последовательность положительных несократимых правильных дробей со знаменателем, не превышающим порядок последовательности. Таким образом, если рассматриваемый интервал включает промежуток единичной длины с целочисленной точной нижней гранью, то задача поиска рациональных точек представляет собой построение ряда Фарея требуемого порядка с последующим смещением его элементов. Для промежутков, которые не могут быть покрыты единичными интервалами, необходимо применение наивного алгоритма перебора всех дробей с проверкой их на несократимость посредством нахождения НОД алгоритмом Евклида.

Таким образом, каждой рациональной координате на оси абсцисс можно поставить в соответствие некоторое число точек с рациональными ординатами. Следовательно, решение задачи нахождения рациональных точек на интервале оси абсцисс позволяет определить отрезки на окрестности рассматриваемой гладкой кривой (в случае данной работы -- параболы), параллельные оси ординат, на которых будут располагаться искомые рациональные точки. Проецирование этих отрезков на ось ординат и решение задачи нахождения рациональных точек на интервале для полученных промежутков в итоге предоставит решение рассматриваемой проблемы. Отдельной задачей является оценка быстродействия разработанных алгоритмов, что одновременно позволяет найти приближение числа искомых точек.

Таким образом, можно выделить два алгоритма: подсчёт рациональных точек на интервале и непосредственное определение их координат. Оба алгоритма подразумевают фрагментацию рассматриваемого интервала, построение ряда Фарея заданного порядка, перебор значений на концевых промежутках заданного интервала, не покрываемых единичными отрезками. Учитывая рекурсивность алгоритма построения ряда Фарея F_n и приближение числа элементов последовательности n-го порядка вида

$$|F_n| \sim \frac{3n^2}{\pi^2},$$

а также логарифмическое время работы алгоритма Евклида, асимптотически сложность алгоритма подсчёта рациональных точек на интервале (a,b) со знаменателем, не превышающим $Q\in\mathbb{N}$, можно описать как

$$O(Q^3+(b-a)Q^2\log(Q)),$$

в то время как быстродействие алгоритма нахождения рациональных точек с теми же входными данными может быть описано как

$$O(Q^3+(b-a)Q^2(\log(Q)+1)),$$

поскольку требуется проведение операций смещения ряда Фарея.

В рамках описываемого алгоритма нахождение числа рациональных точек в окрестности параболы требует определения рациональных абсцисс. Однако дальнейшие этапы алгоритма используют результаты этого определения. Потому оценка сложности требует нахождения приближения числа рациональных точек на интервале. Это может быть осуществлено с использованием теоремы о распределении простых чисел:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\pi(n)}{n/\ln n}=1,$$

где $\pi(n)$ -- функция распределения простых чисел. Предпосылкой этого служит факт, что взаимная простота числителя и знаменателя является критерием несократимости дроби. На этом основании получаем оценку числа рациональных точек на вещественном интервале (a,b) со знаменателем, не превышающим $Q \in \mathbb{N}$:

$$O(\frac{1}{2}(b-a)(Q^2+Q)-2Q+1-\sum_{i=1}^{Q}\frac{(b-a)i-1}{\ln[\sqrt{i}+1]}),$$

которая, однако, требует нахождения частичной суммы указанного ряда, что является нетривиальной задачей. Альтернативой является использование оценки количества элементов ряда Фарея, что даёт асимптотическую оценку:

$$O((b-a)Q^2).$$

Таким образом, быстродействие алгоритма по подсчёту рациональных точек в ε-окрестности параболы на вещественном интервале (a,b) со знаменателем, не превышающим $Q \in \mathbb{N}$ может быть оценено как

$$O((b-a)Q^5+\varepsilon(b-a)Q^4\log(Q)),$$

в то время как для алгоритма нахождения искомых точек с теми же входными данными справедлива оценка:

$$O((b-a)Q^5+\varepsilon(b-a)Q^4\log(Q+1)).$$

В исследовании В. Берeсневича [2] рассматривался случай $\varepsilon=Q^{-v-1}, 0<v<1.$ При подстановке несложно сравнить оба результата.

Для этой же окрестности произвести оценку числа рациональных точек можно и на основании теоремы о распределении простых чисел:

$$O((\frac{b-a}{2}(Q^2+Q)-2Q+1-\sum_{i=1}^{Q}\frac{(b-a)i-1}{\ln[\sqrt{i}+1]})(Q^{-v-1}(Q^2+Q)-2Q+1-\sum_{i=1}^{Q}\frac{2Q^{-v-1}i-1}{\ln[\sqrt{i}+1]})),$$

и на основании свойств ряда Фарея:

$$O(\frac{9}{\pi^2}(b-a)Q^{-v+3}).$$

Разработанные алгоритмы были реализованы на языке программирования Python 3.0 с использованием библиотек NumPy и Matplotlib. Демонстрация работы для интервала $(-1.01;2.99)$ с верхним ограничением на знаменатель $Q=5$ в окрестности $\varepsilon=1$ представлена на рисунке 1.

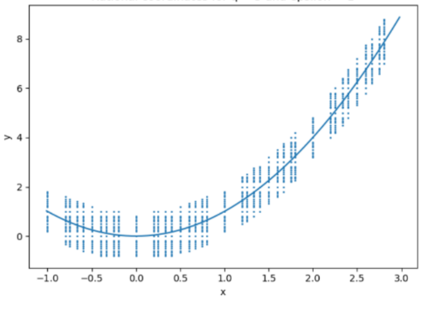

Рисунок 1 – Распределение рациональных точек вблизи параболы

Список использованных источников:

1. Бухштаб, А.А. Теория чисел / А.А. Бухштаб. – Москва, издательство «Просвещение», 1965. -- 51 с.
2. Бересневич, В.В. Распределение рациональных точек вблизи параболы / В.В. Бересневич // Материалы докладов

НАН Беларуси (г. Минск, июль – август 2000 г.) / Институт математики НАН Беларуси. – Минск, 2000.
3. Дерево Штерна-Броко. Ряд Фарея [Электронный ресурс]. – 2009. – Режим доступа: https://e-maxx.ru/algo/stern_brocot_farey. – Дата доступа: 17.07.2009.