Министерство образования Республики Беларусь
Учреждение образования
«Белорусский государственный университет
информатики и радиоэлектроники»

Факультет компьютерных систем и сетей

Кафедра физики

Н. В. Горячун

ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАДАНИЯ ПО ФИЗИКЕ. МЕХАНИКА

Рекомендовано УМО по образованию в области информатики и радиоэлектроники в качестве пособия для специальностей, закрепленных за УМО по образованию в области информатики и радиоэлектроники

Минск БГУИР 2015

УДК 531(076.2)
ББК 22.2я73
Г71

Р е ц е н з е н т ы:

кафедра технической физики Белорусского национального технического университета (протокол №4 от 27.12.2013 г.);

доцент кафедры энергофизики физического факультета Белорусского государственного университета, кандидат физико-математических наук М. С. Тиванов

Горячун, Н. В.

Г71 Практические задания по физике. Механика : пособие / Н. В. Горячун. – Минск : БГУИР, 2015. – 71 с. : ил.
ISBN 978-985-543-076-7.

Пособие предназначено для самостоятельной работы студентов всех форм обучения. Содержит основные формулы, задания с пояснениями и задания для самостоятельного решения по разделу «Механика» курса общей физики.

УДК 531(076.2)
ББК 22.2я73

ISBN 978-985-543-076-7

СОДЕРЖАНИЕ

Введение ……………………………………………………………… 4
1. Кинематика материальной точки………………………………….. 5
2. Динамика материальной точки ……………………………………18
3. Момент инерции ……………………………………………………. . 25
4. Механика твердого тела ……………………………………………... 30
5. Работа и мощность силы. Закон сохранения импульса,
момента импульса, полной механической энергии ………………..39
6. Механические колебания ……………………………………….. 54
7. Упругие волны ………………………………………………………. 62
Приложение. Производные и интегралы ………………………………. 69
Литература ……………………………………………………………… 70

Введение

Решение задач по физике представляет собой большую сложность даже для студентов, хорошо знающих физическую теорию. Трудность решения физической задачи состоит в том, что помимо знания физической теории необходимо владеть еще обобщенными знаниями, включающими в себя следующие основные моменты:

1) знание основных физических понятий;
2) знание физических законов и границ их применения;
3) понимание необходимости замены реальных физических объектов идеальными физическими моделями с целью пренебрежения несущественными второстепенными связями и взаимодействиями;
4) умение применять физические законы к конкретной задаче;
5) владение математическим аппаратом, позволяющим решить физическую задачу.

Курс общей физики включает два вида задач: поставленные и непоставленные.

Поставленная физическая задача – это идеализированная модель реального физического явления или процесса с некоторыми известными и неизвестными физическими величинами, характеризующими это явление или процесс.

Решить поставленную (идеализированную) физическую задачу – значит найти неизвестные физические величины и связи между ними.

Для решения непоставленной (неидеализированной) физической задачи надо использовать сначала метод постановки задачи, а затем метод упрощения и усложнения.

В пособии рассмотрены только поставленные физические задачи.

Данное пособие поможет студентам, разобравшись с заданиями, в которых даются пояснения по ходу решения задач, справиться с заданиями для самостоятельного решения.

1. Кинематика материальной точки

1.1. Основные формулы

Кинематический закон движения материальной точки в декартовой системе координат

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}.$$

Мгновенная скорость материальной точки в декартовой системе координат

$$\vec{\upsilon}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} \equiv \dot{\vec{r}}(t) = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k} = \upsilon_x\vec{i} + \upsilon_y\vec{j} + \upsilon_z\vec{k},$$

где $\upsilon_x, \upsilon_y, \upsilon_z$ – проекции вектора скорости точки на координатные оси; $\dot{\vec{r}}(t)$ – первая производная радиуса-вектора по времени.

Модуль мгновенной скорости

$$\upsilon(t) = \frac{ds}{dt} = \dot{s}(t),$$

где s – путь, пройденный точкой.

Путь, пройденный точкой за промежуток времени от t_1 до t_2,

$$s = \int_{t_1}^{t_2} \upsilon(t)dt,$$

где $\upsilon(t)$ – зависимость модуля скорости от времени.

Ускорение материальной точки в декартовой системе координат

$$\ddot{\vec{r}}(t) = \vec{a}(t) = \frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k},$$

где a_x, a_y, a_z – проекции вектора ускорения точки на координатные оси; $\ddot{\vec{r}}(t)$ – вторая производная радиуса-вектора по времени.

Полное ускорение точки при движении по плоской кривой

$$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n = a_\tau\vec{\tau} + a_n\vec{n} = \frac{d\upsilon}{dt}\vec{\tau} + \frac{\upsilon^2}{R}\vec{n}.$$

Тангенциальное ускорение точки

$$\vec{a}_\tau = \frac{d\upsilon}{dt}\vec{\tau},$$

где $\vec{\tau}$ – единичный вектор, направленный по касательной к траектории в сторону вектора $\vec{\upsilon}$.

Нормальное ускорение точки

$$\vec{a}_n = \frac{\upsilon^2}{R}\vec{n},$$

где $\vec{n}$ – единичный вектор, направленный по нормали к траектории в сторону ее вогнутости; R – радиус кривизны траектории в рассматриваемой точке.

Радиус-вектор и вектор скорости материальной точки можно найти по формулам

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \int_0^t \vec{\upsilon}(t)\,dt$$

и

$$\vec{\upsilon}(t) = \vec{\upsilon}_0 + \int_0^t \vec{a}(t)\,dt,$$

где $\vec{r}_0$ и $\vec{\upsilon}_0$ – соответственно радиус-вектор и скорость материальной точки в начальный момент времени $t_0 = 0$.

Среднее значение вектора скорости за промежуток времени от t_1 до t_2

$$\langle \vec{\upsilon} \rangle = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} \vec{\upsilon}(t)\,dt.$$

Среднее значение вектора ускорения за промежуток времени от t_1 до t_2

$$\langle \vec{a} \rangle = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} \vec{a}(t)\,dt.$$

Вектор угловой скорости твердого тела

$$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt},$$

где $d\vec{\varphi}$ – вектор, образующий правый винт с направлением вращения, модуль которого равен элементарному угловому пути $|d\varphi|$.

Вектор углового ускорения твердого тела

$$\vec{\beta} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}.$$

Связь между модулями линейных и угловых кинематических величин при вращении тела вокруг фиксированной оси:

$$\upsilon = \omega R,$$

где R – расстояние до рассматриваемой точки тела от оси вращения.

$$a_\tau = \frac{d\upsilon}{dt} = \frac{d(\omega R)}{dt} = R\frac{d\omega}{dt} = \pm R\beta;$$

$$a_n = \frac{\upsilon^2}{R} = \frac{\omega^2 R^2}{R} = \omega^2 R.$$

Закон сложения скоростей Галилея

$$\vec{\upsilon} = \vec{\upsilon}' + \vec{V},$$

где $\vec{\upsilon}$ – скорость точки относительно неподвижной системы отсчета; $\vec{\upsilon}'$ – скорость точки относительно движущейся системы отсчета; $\vec{V}$ – скорость движущейся системы отсчета относительно неподвижной.

1.2. Задания с пояснениями

1.2.1. Частица движется вдоль прямой по закону $\vec{r}(t) = 2t^3\vec{i} + 5t^2\vec{j} - t\vec{k}$. В момент времени $t_0 = 0$ радиус-вектор частицы $\vec{r}_0 = 0$. Найти зависимости от времени скорости $\vec{\upsilon}$, ускорения $\vec{a}$ и модулей этих величин, а также средние значения вектора скорости и вектора ускорения за промежуток времени от $t_1 = 1$ с до $t_2 = 3$ с.

Пояснения

По условию задачи $x(t) = 2t^3$, $y(t) = 5t^2$, $z(t) = -t$.

Вектор и модуль скорости

$$\vec{\upsilon}(t) = \upsilon_x\vec{i} + \upsilon_y\vec{j} + \upsilon_z\vec{k};$$

$$\upsilon(t) = \sqrt{\upsilon_x^2 + \upsilon_y^2 + \upsilon_z^2}.$$

Вектор и модуль ускорения

$$\vec{a}(t) = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k};$$

$$a(t) = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}.$$

Среднее значение вектора скорости за промежуток времени от t_1 до t_2

$$\langle\vec{\upsilon}\rangle = \frac{1}{t_2 - t_1}\int_{t_1}^{t_2}\vec{\upsilon}(t)dt.$$

Среднее значение вектора ускорения за промежуток времени от t_1 до t_2

$$\langle\vec{a}\rangle = \frac{1}{t_2 - t_1}\int_{t_1}^{t_2}\vec{a}(t)dt.$$

Задания:

1. Найдите вектор и модуль скорости $\vec{\upsilon}(t)$.
2. Найдите вектор и модуль ускорения $\vec{a}(t)$.
3. Найдите среднее значение вектора скорости $\langle\vec{\upsilon}\rangle$.
4. Найдите среднее значение вектора ускорения $\langle\vec{a}\rangle$.

Ответ: $\vec{\upsilon}(t) = 6t^2\vec{i} + 10t\vec{j} - \vec{k}$ м/с;

$\vec{a}(t) = 12t\vec{i} + 10\vec{j}$ м/с^2;

$\upsilon(t) = \sqrt{36t^4 + 100t^2 + 1}$ м/с;

$a(t) = \sqrt{144t^2 + 100}$ м/с^2;

$\langle\vec{\upsilon}\rangle = 26\vec{i} + 20\vec{j} - \vec{k}$ м/с;

$\langle\vec{a}\rangle = 24\vec{i} + 10\vec{j}$ м/с^2.

1.2.2. Ускорение материальной точки изменяется со временем по закону $\vec{a}(t) = At^2\vec{i} - B\vec{j}$, где $A = 2$ м/с^4; $B = 1$ м/с^2. Найти кинематический закон движения точки, а также модуль ее перемещения за время $\Delta t = t_1 - t_0$, где $t_1 = 1$ с, если в момент $t_0 = 0$ $\vec{r}_0 = 3\vec{i}$ и $\vec{\upsilon}_0 = 2\vec{j}$.

Пояснения

Закон изменения скорости материальной точки

$$\vec{\upsilon}(t) = \vec{\upsilon}_0 + \int_0^t \vec{a}(t)dt.$$

Кинематический закон движения точки

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \int_0^t \vec{\upsilon}(t)dt.$$

Вектор перемещения точки

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_0 = (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j} + (z_2 - z_1)\vec{k} = \Delta x\vec{i} + \Delta y\vec{j} + \Delta z\vec{k}.$$

Модуль вектора перемещения

$$\left|\Delta\vec{r}\right| = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}.$$

Задания:

1. Найдите закон изменения скорости $\vec{\upsilon}(t)$.
2. Найдите кинематический закон движения точки $\vec{r}(t)$.
3. Подставьте момент времени $t_1 = 1$ с в $\vec{r}(t)$, найдите $\vec{r}_1$.
4. Найдите вектор перемещения точки $\Delta\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_0$.
5. Найдите модуль вектора перемещения точки Δr.

Ответ: $\vec{r}(t) = (3 + \frac{t^4}{6})\vec{i} - \frac{t^2}{2}\vec{j}$ м;

$\left|\Delta\vec{r}\right| = 0{,}53$ м.

1.2.3. Точка движется в плоскости XY по закону $x = \alpha t$, $y = \alpha t(1 - bt)$, где α и b – положительные постоянные. Найти: 1) уравнение траектории точки $y(x)$, изобразить ее график; 2) зависимость от времени модуля скорости и ускорения точки; 3) Момент t_0, когда угол между скоростью и ускорением равен $\frac{\pi}{4}$.

Пояснения

Для нахождения $y(x)$ найдем t из уравнения $x = \alpha t$ и подставим его в уравнение $y = \alpha t(1 - bt)$. По виду функции $y(x)$ можно определить уравнение траектории движения точки.

Модуль скорости точки

$$\upsilon(t) = \sqrt{\upsilon_x^2 + \upsilon_y^2}.$$

Модуль ускорения точки

$$a(t) = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}\ .$$

Угол между векторами $\vec{\upsilon}$ и $\vec{a}$ можно найти через скалярное произведение этих векторов:

$$\cos\varphi = \frac{\upsilon_x a_x + \upsilon_y a_y + \upsilon_z a_z}{\sqrt{\upsilon_x^2 + \upsilon_y^2 + \upsilon_z^2}\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}\ .$$

Но в данной задаче, так как ускорение направлено против оси y (убедитесь в этом, вычислив ускорение и построив график траектории), угол φ определим по формуле

$$\mathrm{tg}\varphi = \frac{\upsilon_x}{\upsilon_y}.$$

Задания:

1. Найдите $y = y(x)$. По виду функции определите уравнение траектории, постройте график.
2. Найдите $\upsilon(t)$.
3. Найдите $a(t)$.
4. Найдите $\mathrm{tg}\varphi(t)$.
5. Найдите t_0, приравняв $\mathrm{tg}\varphi = 1$ $(\varphi = \frac{\pi}{4})$.

Ответ: $y(x) = x - \dfrac{x^2 b}{\alpha}$;

$\upsilon(t) = \alpha\sqrt{1 + (1 - 2bt)^2}$;

$a = 2b\alpha = \mathrm{const}$;

$t_0 = \dfrac{1}{\beta}$.

1.2.4. Точка движется, замедляясь, по прямой с ускорением, модуль которого зависит от ее скорости υ по закону $a = \alpha\sqrt{\upsilon}$, где α – положительная постоянная. В начальный момент времени скорость точки равна υ_0. Какой путь пройдет точка до остановки? За какое время этот путь будет пройден?

Пояснения

При замедленном движении по прямой модуль ускорения точки равен

$$a = -\frac{d\upsilon}{dt}.$$

По условию задачи ускорение точки равно $a = \alpha\sqrt{\upsilon}$.

Тогда можно записать $-\dfrac{d\upsilon}{dt} = \alpha\sqrt{\upsilon}$.

Разделив переменные в этом уравнении и проинтегрировав его в пределах интегрирования от 0 до t и от υ_0 до υ, найдем $\upsilon(t)$.

Обозначим момент времени остановки точки $t_{\text{ост}}$.

В момент остановки скорость точки равна нулю.

Путь, проходимый точкой за время t:

$$s(t) = \int_0^t \upsilon(t)dt .$$

Задания:

1. Найдите функцию $\upsilon(t)$.
2. Из условия, что в момент остановки $\upsilon(t) = 0$, найдите $t_{\text{ост}}$.
3. Найдите путь, проходимый точкой $s(t)$.
4. Подставьте $t_{\text{ост}}$ в $s(t)$, найдите $s(t_{\text{ост}})$.

Ответ: $t_{\text{ост}} = \dfrac{2\sqrt{\upsilon_0}}{\alpha}$;

$$s(t_{\text{ост}}) = \frac{2\upsilon_0^{3/2}}{3\alpha}.$$

1.2.5. Радиус-вектор частицы меняется со временем t по закону $\vec{r} = \vec{b}t(1-\alpha t)$, где $\vec{b}$ – постоянный вектор, α – положительная постоянная. Найти: 1) скорость $\vec{\upsilon}$ и ускорение $\vec{a}$ частицы в зависимости от времени; 2) промежуток времени Δt, по истечении которого частица вернется в исходную точку, а также путь s, который она пройдет при этом.

Пояснения

Из условия следует, что частица движется по прямой из исходной точки до точки поворота. Затем по этой же прямой возвращается в исходную точку.

Вектор скорости частицы

$$\vec{\upsilon}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{b}(1-2\alpha t).$$

Модуль скорости частицы

$$\upsilon(t) = b\left|1-2\alpha t\right|$$

Вектор ускорения частицы

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{\upsilon}(t)}{dt}.$$

В момент времени $t_0 = 0$ радиус-вектор частицы $\vec{r}_0 = 0$ (радиус-вектор исходной точки).

Обозначим момент времени поворота частицы t_1, а момент времени, когда частица вернется в исходную точку t_2.

Полный путь, который пройдет частица, $s = s_1 + s_2$, где s_1 – путь из начального положения до поворота, а s_2 – путь от поворота до исходной точки.

$$s_1 = \int_0^{t_1} \upsilon(t)dt \text{, а } s_2 = \int_{t_1}^{t_2} \upsilon(t)dt,$$

причем, для $0 \le t \le t_1$ $\upsilon(t) = b(1-2\alpha t)$, а для $t_1 \le t \le t_2$ $\upsilon(t) = b(2\alpha t - 1)$.

Задания:

1. Найдите вектор ускорения частицы $\vec{a}(t)$.

2. Из условия, что в момент поворота $\vec{\upsilon}(t) = 0$, найдите t_1.

3. Из условия, что в момент времени, когда частица вернется в исходную точку $\vec{r}(t) = 0$, найдите t_2.

4. Найдите $\Delta t = t_2 - t_0$.

5. Найдите модуль скорости частицы $\upsilon(t)$.

6. Найдите s_1, s_2 и $s = s_1 + s_2$.

Ответ: $\vec{\upsilon}(t) = \vec{b}(1-2\alpha t)$;

$\vec{a} = -2\alpha\vec{b} = \text{const}$;

$\Delta t = \dfrac{1}{\alpha}$;

$s = \dfrac{b}{2\alpha}$.

1.2.6. Воздушный шар начинает подниматься с поверхности земли. Скорость его подъема постоянна и равна υ_0. Благодаря ветру шар приобретает горизонтальную составляющую скорости $\upsilon_x = \alpha y$, где α – положительная постоянная, y – высота подъема. Найти зависимость от высоты подъема: а) величины сноса шара $x(y)$; б) тангенциального, нормального и полного ускорений шара.

Пояснения

Считаем, что в начальный момент времени $t_0 = 0$ координаты шара $x = y = 0$.

Шар будет двигаться по криволинейной траектории. Вертикальная составляющая скорости шара равна скорости его подъема, т. е. $\upsilon_y = \upsilon_0$. По условию задачи шар движется равномерно вверх, следовательно, высота подъема $y = \upsilon_0 t$, смещение шара в горизонтальном направлении $x(t)$ найдем по формуле

$$x(t) = \int_0^t \upsilon_x dt = \int_0^t \alpha y dt = \int_0^t \alpha\upsilon_0 t dt.$$

Чтобы найти величину сноса шара $x(y)$, надо подставить в найденную в результате интегрирования функцию $x(t)$, значение $t = \dfrac{y}{\upsilon_0}$.

Скорость движения шара $\vec{\upsilon}(t) = \dfrac{dx(t)}{dt}\vec{i} + \dfrac{dy(t)}{dt}\vec{j} = \upsilon_x\vec{i} + \upsilon_y\vec{j}$.

Модуль скорости $\upsilon(t) = \sqrt{\upsilon_x^2 + \upsilon_y^2}$.

Ускорение шара $\vec{a}(t) = \frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \frac{d\upsilon_x}{dt}\vec{i} + \frac{d\upsilon_y}{dt}\vec{j}$.

Модуль ускорения $a(t) = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$.

Из вычислений становится ясно, что ускорение направлено вдоль оси x . Оно и будет полным ускорением шара a .

Тогда тангенциальное ускорение $a_\tau = \frac{d\upsilon(t)}{dt}$, нормальное $a_n = \sqrt{a^2 - a_\tau^2}$.

Задание:

1. Найдите $x(t)$.
2. Найдите величину сноса шара $x(y)$.
3. Найдите вектор и модуль скорости $\vec{\upsilon}(t)$.
4. Найдите вектор и модуль ускорения $\vec{a}(t)$.
5. Найдите тангенциальное ускорение $a_\tau(t)$ и нормальное ускорение $a_n(t)$.
6. Зная, что $t = \frac{y}{\upsilon_0}$, найдите $a_\tau(y)$ и $a_n(y)$.

Ответ: а) $x(y) = \frac{\alpha y^2}{2\upsilon_0}$;

б) $a = \alpha\upsilon_0$; $a_\tau(y) = \frac{\alpha^2 y}{\sqrt{1 + (\frac{\alpha y}{\upsilon_0})^2}}$; $a_n(y) = \frac{\alpha\upsilon_0}{\sqrt{1 + (\frac{\alpha y}{\upsilon_0})^2}}$.

1.2.7. Твердое тело начинает вращаться вокруг неподвижной оси с угловым ускорением $\beta = At$, где $A = 2\cdot 10^{-2}$ рад/с^3. Через сколько времени после начала вращения вектор полного ускорения произвольной точки тела будет составлять угол $\varphi = 60^\circ$ с ее вектором скорости? В момент $t = 0$ $\omega_0 = 0$.

Пояснения

Угол φ можно найти по формулам

$$\varphi = \arccos\frac{(\vec{\upsilon}, \vec{a})}{|\vec{\upsilon}||\vec{a}|};$$

$$\varphi = \mathrm{arctg}\frac{a_n}{a_\tau}.$$

В нашей задаче проще найти φ по второй формуле .

Закон изменения угловой скорости тела

$$\omega(t) = \omega_0 + \int_0^t \beta(t)dt .$$

Формула связи модулей линейной и угловой скоростей

$$\upsilon = \omega R,$$

где R – расстояние до точки от оси вращения.

Нормальное ускорение точки

$$a_n = \frac{\upsilon^2}{R} = \omega^2 R.$$

Тангенциальное ускорение точки

$$a_\tau = \frac{d\upsilon}{dt} = R\frac{d\omega}{dt} = R\beta.$$

Задания:

1. Найдите угловую скорость тела $\omega(t)$.
2. Найдите нормальное ускорение тела a_n.
3. Найдите тангенциальное ускорение тела a_τ.
4. Из условия: $\mathrm{tg}\varphi = \frac{a_n}{a_\tau} = \mathrm{tg}60^\circ$, найдите время t.

Ответ: $t = 7$ с.

1.2.8. Точка движется по дуге окружности радиусом R. Ее скорость зависит от пройденного пути s по закону $\upsilon(s) = \alpha\sqrt{s}$, где α – положительная постоянная. Найти угол φ между вектором полного ускорения и вектором скорости в зависимости от s.

Пояснения

Угол $\varphi(s)$, найдем по формуле

$$\varphi(s) = \mathrm{arctg}\frac{a_n(s)}{a_\tau(s)}.$$

Модуль скорости

$$\upsilon = \frac{ds}{dt}.$$

По условию задачи

$$\upsilon = \alpha\sqrt{s}.$$

Следовательно, можно записать $\frac{ds}{dt} = \alpha\sqrt{s}$.

Разделив переменные в этом уравнении и проинтегрировав его в пределах интегрирования от 0 до s и от 0 до t, найдем $s(t)$.

Нормальное ускорение точки

$$a_n(s) = \frac{\upsilon^2(s)}{R}.$$

Тангенциальное ускорение точки

$$a_\tau = \frac{d\upsilon}{dt}.$$

Задания:

1. Найдите путь, проходимый точкой $s(t)$.
2. Найдите модуль скорости точки $\upsilon(t)$.
3. Найдите тангенциальное ускорение точки a_τ.
4. Зная, по условию задачи $\upsilon(s)$, найдите $a_n(s)$.
5. Найдите $\varphi(s)$.

Ответ: $\varphi(s) = \operatorname{arctg}\frac{2s}{R}$.

1.2.9. Твердое тело начинает вращаться вокруг неподвижной оси с угловым ускорением $\vec{\beta} = \vec{\beta}_0 \cos\varphi$, где $\vec{\beta}_0$ – постоянный вектор, φ – угол поворота из начального положения. Найти угловую скорость тела в зависимости от угла φ.

Пояснения

В нашей задаче модуль угловой скорости тела равен

$$\beta = \beta_0 \cos\varphi.$$

Представим β, как $\beta = \frac{d\omega}{dt}$. Тогда можно записать $\frac{d\omega}{dt} = \beta_0 \cos\varphi$.

Сделаем замену переменных в этом уравнении, считая, что ω является функцией φ, используя тождество

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{d\omega}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt} = \omega\frac{d\omega}{d\varphi},$$

получим дифференциальное уравнение в новых переменных

$$\omega\frac{d\omega}{d\varphi} = \beta_0 \cos\varphi.$$

В момент времени $t_0 = 0$ $\varphi_0 = 0$ и $\omega_0 = 0$, следовательно, разделив переменные в последнем уравнении и проинтегрировав его в пределах интегрирования от 0 до ω и от 0 до φ, найдем $\omega(\varphi)$.

Задание

1. Найдите $\omega(\varphi)$.

Ответ: $\omega(\varphi) = \sqrt{2\beta_0 \sin\varphi}$.

1.2.10. Твердое тело начинает вращаться вокруг неподвижной оси так, что его угловая скорость зависит от угла поворота φ по закону $\omega(\varphi) = \omega_0 - \alpha\varphi$, где ω_0 и α – положительные постоянные. В момент времени $t = 0$ угол $\varphi = 0$. Найти зависимость от времени: а) угла поворота; б) угловой скорости.

Пояснения

Угловая скорость тела равна

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}.$$

По условию задачи угловая скорость равна

$$\omega = \omega_0 - \alpha\varphi.$$

Следовательно, можно записать

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega_0 - \alpha\varphi.$$

Разделив переменные в этом уравнении и проинтегрировав его в пределах интегрирования от 0 до φ и от 0 до t, найдем $\varphi(t)$.

Задания:

1. Найдите зависимость от времени угла поворота $\varphi(t)$.
2. Найдите зависимость от времени угловой скорости $\omega(t)$.

Ответ: $\varphi(t) = \dfrac{\left(1 - e^{-\alpha t}\right)\omega_0}{\alpha}$;

$\omega(t) = \omega_0 e^{-\alpha t}$.

1.3. Задания для самостоятельного решения

1. Кинематический закон движения материальной точки $\vec{r}(t) = At^2\vec{i} + Bt\vec{j} - C\vec{k}$, где $A = 1$ м/с^2, $B = 2$ м/с, $C = 3$ м. Найти модули скорости и ускорения точки в момент времени $t_1 = 1$ с, а также модуль перемещения материальной точки за промежуток времени от $t_1 = 1$ с до $t_2 = 2$ с. В начальный момент времени $t_0 = 0$ точка находилась в начале координат с $\vec{r}_0 = \vec{0}$.

Ответ: $\upsilon\big|_{t_1=1\text{ с}} = 2{,}8$ м/с; $a\big|_{t_1=1\text{ с}} = 2$ м/с^2; $|\Delta\vec{r}| = 3{,}6$ м.

2. Ускорение точки изменяется со временем по закону $\vec{a}(t) = A\vec{i} + Bt\vec{j}$, где $A = 3$ м/с^2; $B = 2$ м/с^3. Найти вектор скорости и радиус-вектор точки в момент времени $t = 1$ с. В начальный момент времени $t_0 = 0$ радиус-вектор точки равен $\vec{r}_0 = 1\vec{i} + 1\vec{j}$, а скорость $\vec{\upsilon}_0 = 2\vec{i}$.

Ответ: $\vec{\upsilon}\big|_{t_1=1\text{ с}} = 5\vec{i} + 1\vec{j}$ м/с; $\vec{r}\big|_{t_1=1\text{ с}} = \dfrac{9}{2}\vec{i} + \dfrac{4}{3}\vec{j}$ м.

3. В момент $t = 0$ частица вышла из начала координат в положительном направлении оси x. Ее скорость меняется со временем по закону $\vec{\upsilon}(t) = \vec{\upsilon}_0(1 - \dfrac{t}{\tau})$, где $\vec{\upsilon}_0$ – начальная скорость, модуль которой $\upsilon_0 = 10$ см/с, $\tau = 5$ с. Найти:

а) координату x частицы в моменты времени 6, 10 и 20 с;

б) моменты времени, когда частица будет находиться на расстоянии 10 см от начала координат.

Ответ: а) $x(t) = \upsilon_0 t(1 - \frac{t}{2\tau})$; $x = 0{,}24$; 0; -4 м; б) $t = 1{,}1$; 9 ; 11 с.

4. Точка движется в плоскости XY по закону $x = A\sin\omega t$, $y = A(1-\cos\omega t)$, где A и ω – положительные постоянные. Найти: 1) скорость и ускорение точки в зависимости от времени; 2) путь s, проходимый точкой за время τ. Угол между скоростью и ускорением точки.

Ответ: $\upsilon = A\omega$; $a = A\omega^2$; $s = A\omega\tau$; $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

5. Точка движется по окружности со скоростью $\upsilon = At$, где $A = 0{,}5$ м/с^2. Найти ее полное ускорение в момент, когда она пройдет $\eta = 0{,}1$ длины окружности после начала движения.

Ответ: $a = 0{,}8$ м/с^2.

6. Точка движется по плоскости так, что ее тангенциальное ускорение $a_\tau = \alpha$, а нормальное ускорение $a_n = bt^4$, где α и b – положительные постоянные, t – время. В момент $t = 0$ точка покоилась. Найти зависимость от пройденного пути s радиуса кривизны R траектории точки и ее полного ускорения a.

Ответ: $R(s) = \frac{\alpha^3}{2bs}$; $a(s) = \alpha\sqrt{1 + (\frac{4bs^2}{\alpha^3})^2}$.

7. Колесо вращается вокруг неподвижной оси так, что угол φ его поворота зависит от времени, как $\varphi = Bt^2$, где $B = 0{,}2$ рад/с^2. Найти полное ускорение a точки на ободе колеса в момент $t = 2{,}5$ с, если скорость точки в этот момент $\upsilon = 0{,}65$ м/с.

Ответ: $a = 0{,}7$ м/с^2.

8. Твердое тело вращается с угловой скоростью $\vec{\omega} = At\vec{i} + Bt^2\vec{j}$, где $A = 0{,}5$ рад/с^2, $B = 0{,}06$ рад/с^3, $\vec{i}$ и $\vec{j}$ – орты осей x и y. Найти модули угловой скорости и углового ускорения в момент $t = 10$ с.

Ответ: $\omega\big|_{t=10\text{ c}} = 7{,}8$ рад/с; $\beta\big|_{t=10\text{ c}} = 1{,}3$ рад/с^2.

9. Тело одновременно участвует в двух вращательных движениях относительно оси x и относительно оси y с угловыми скоростями: $\vec{\omega}_1 = t^2\vec{i}$ и $\vec{\omega}_2 = 2t^2\vec{j}$. Найти угловой путь, который пройдет тело к моменту времени $t = 2$ с.

Ответ: $\varphi = 6$ рад.

10. Твердое тело вращается вокруг неподвижной оси по закону $\varphi = At - Bt^3$, где $A = 6{,}0$ рад/с, $B = 2{,}0$ рад/с^3. Найти: а) средние значения угловой скорости и углового ускорения за промежуток времени от $t = 0$ до остановки; б) угловое ускорение в момент остановки тела.

Ответ: $<\omega>= \dfrac{2A}{3} = 4$ рад/с; $<\beta>= -\sqrt{3AB} = -6$ рад/с^2;

$\beta = -2\sqrt{3AB} = -12$ рад/с^2.

2. Динамика материальной точки

2.1. Основные формулы

Второй закон Ньютона для материальной точки (уравнение движения)

$$m\vec{a} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i ,$$

где m – масса точки; $\vec{a}$ – ускорение точки; $\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i$ – векторная сумма сил, действующих на точку.

Третий закон Ньютона

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21} .$$

Второй закон Ньютона для системы материальных точек

$$m\vec{a}_c = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i^{\text{внеш}} ,$$

где m – масса системы; $\vec{a}_c$ – ускорение центра масс системы; $\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i^{\text{внеш}}$ – векторная сумма всех внешних сил, действующих на систему материальных точек.

2.2. Задания с пояснениями

2.2.1. Частица движется вдоль оси x по закону $x(t) = \alpha t^2 - bt^3$, где α и b – положительные постоянные. В момент $t = 0$ сила, действующая на частицу, равна F_0. Найти значение силы F_x в точке поворота и в момент, когда частица опять окажется в точке $x = 0$.

Пояснения

В задаче задан кинематический закон движения частицы. Уравнение движения (второй закон Ньютона) частицы, движущейся вдоль оси x:

$$ma_x = F_x .$$

Проекция скорости частицы на ось x (закон изменения скорости)

$$\upsilon_x(t) = \frac{dx(t)}{dt} .$$

Проекция ускорения частицы на ось x (закон изменения ускорения)

$$a_x(t) = \frac{d\upsilon_x(t)}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} .$$

В точке поворота в момент времени t_1 скорость частицы обращается в нуль, т. е. $\upsilon_x(t_1)=0$.

В исходной точке координата частицы равна нулю, тогда момент времени, когда частица опять окажется в этой точке можно найти из кинематического закона движения, положив координату в этот момент $x=0$.

Задания:

1. Найдите из кинематического закона движения частицы ее скорость $\upsilon_x(t)$ и ускорение $a_x(t)$.

2. Выразите массу частицы из второго закона Ньютона, используя начальные условия задачи (при $t=0$ $F_x=F_0$, $a_x=2\alpha$)

$$m=\frac{F_0}{a_x}.$$

3. Найдите t_1, положив $\upsilon_x(t_1)=0$.

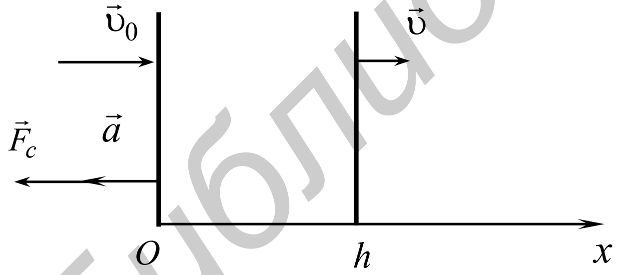
4. Подставьте t_1 в уравнение движения и получите силу $F_x(t_1)$ в точке поворота.

5. Найдите t_2 – время, когда частица опять окажется в исходной точке, положив $x(t_2)=0$.

6. Подставьте t_2 в уравнение движения и получите силу $F_x(t_2)$ в исходной точке.

Ответ: $F_x(t_1)=-F_0$; $F_x(t_2)=-2F_0$.

2.2.2. Пуля, пробив доску толщиной h, изменила свою скорость от υ_0 до υ. Найти время движения пули в доске, считая силу сопротивления пропорциональной квадрату скорости.



Пояснения

Уравнение движения пули в векторном виде

$$m\frac{d\vec{\upsilon}}{dt}=\vec{F}_c=-k\upsilon\vec{\upsilon}.$$

Уравнение движения пули в проекции на ось x, считая $\upsilon_x=\upsilon$:

$$m\frac{d\upsilon}{dt}=-k\upsilon^2.$$

Чтобы найти из этого уравнения $t(\upsilon)$, надо разделить переменные в нем и проинтегрировать полученное уравнение в пределах интегрирования от υ_0 до υ и от 0 до t.

В задаче неизвестны m и k. Чтобы их найти нужно решить уравнение $m\dfrac{d\upsilon}{dt} = -k\upsilon^2$ в других переменных, считая, что υ является функцией пройденного пути s. Делая замену переменных и используя тождество

$$\frac{d\upsilon}{dt} = \frac{d\upsilon}{ds}\frac{ds}{dt} = \upsilon\frac{d\upsilon}{ds},$$

получим уравнение движения пули в виде

$$\frac{d\upsilon}{ds} = -\frac{k}{m}\upsilon.$$

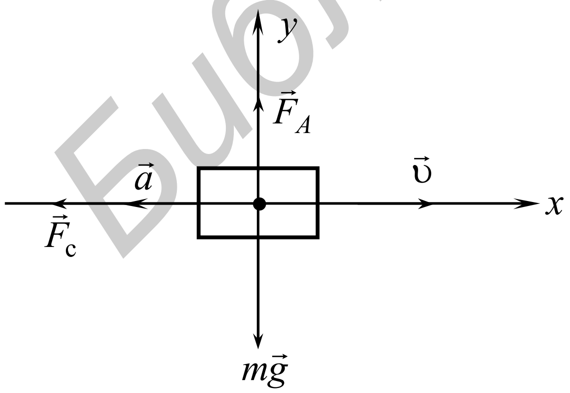
Разделив в этом уравнении переменные и проинтегрировав его в пределах интегрирования от υ_0 до υ и от 0 до h, найдем $\dfrac{m}{k}$.

Задания:

1. Найдите $t(\upsilon)$, решив уравнение $m\dfrac{d\upsilon}{dt} = -k\upsilon^2$.
2. Найдите $\upsilon(s)$, решив уравнение $\dfrac{d\upsilon}{ds} = -\dfrac{k}{m}\upsilon$.
3. Найдите из последнего уравнения $\dfrac{m}{k}$ и подставьте его в $t(\upsilon)$.

Ответ: $t = \dfrac{h(\upsilon_0 - \upsilon)}{\upsilon_0\upsilon \ln\dfrac{\upsilon}{\upsilon_0}}$.

2.2.3. Катер массой m движется по озеру со скоростью υ_0. В момент $t = 0$ выключили его двигатель. Считая силу сопротивления пропорциональной скорости катера, $\vec{F}_c = -k\vec{\upsilon}$, $k = \text{const} > 0$, найти: 1) время движения катера с выключенным двигателем; 2) скорость катера в зависимости от пути, пройденного с выключенным двигателем; 3) полный путь до остановки.



Пояснения

Движение катера замедленное. Сила сопротивления воды направлена с ускорением движения катера в одну сторону.

Уравнение движения катера в векторном виде

$$m\frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \vec{F}_c + \vec{F}_A + m\vec{g}.$$

Модуль силы сопротивления $F_c = -k\upsilon$

Уравнение движения катера в проекции на ось x

$$m\frac{d\upsilon}{dt} = -k\upsilon.$$

Чтобы найти из этого уравнения $\upsilon(t)$, надо разделить переменные в нем и проинтегрировать полученное уравнение в пределах интегрирования от υ_0 до υ и от 0 до t. Скорость катера в момент остановки будет равна нулю. Тогда момент времени, когда катер остановится, можно найти из функции $\upsilon(t)$, положив скорость в этот момент $\upsilon(t_{\text{ост}}) = 0$.

Чтобы найти скорость катера в зависимости от пути, пройденного с выключенным двигателем, нужно решить уравнение $m\frac{d\upsilon}{dt} = -k\upsilon$ в других переменных, считая, что υ является функцией пройденного пути s. Делая замену переменных и используя тождество

$$\frac{d\upsilon}{dt} = \frac{d\upsilon}{ds}\frac{ds}{dt} = \upsilon\frac{d\upsilon}{ds}.$$

Получим уравнение движения катера в виде

$$\frac{d\upsilon}{ds} = -\frac{k}{m}.$$

Разделив в этом уравнении переменные и проинтегрировав его в пределах интегрирования от υ_0 до υ и от 0 до s, найдем $\upsilon(s)$.

Задания:

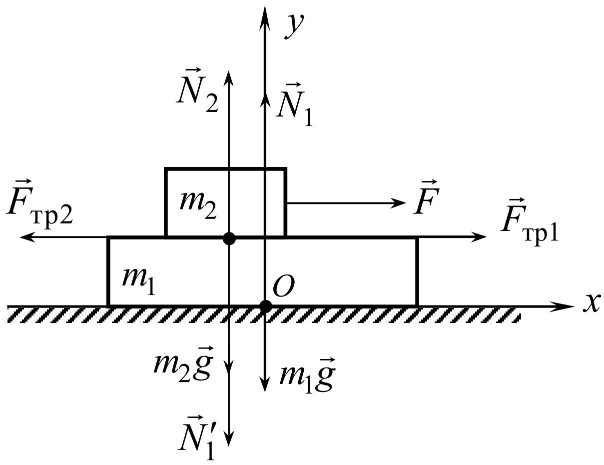
1. Найдите $\upsilon(t)$, решив уравнение $m\frac{d\upsilon}{dt} = -k\upsilon$.
2. Считая в момент остановки $\upsilon(t_{\text{ост}}) = 0$, найдите $t_{\text{ост}}$.
3. Найдите $\upsilon(s)$, решив уравнение $\upsilon\frac{d\upsilon}{ds} = -\frac{k}{m}\upsilon$.
4. Считая в момент остановки $\upsilon(s_{\text{ост}}) = 0$, найдите $s_{\text{ост}}$.

Ответ: $t_{\text{ост}} \to \infty$;

$$\upsilon(s) = \upsilon_0 - \frac{k}{m}s;$$

$$s_{\text{ост}} = \frac{m\upsilon_0}{k}.$$

2.2.4. На гладкой горизонтальной плоскости лежит доска массой m_1 и на ней брусок массой m_2. К бруску приложили горизонтальную силу, увеличивающуюся со временем t по закону $F = \alpha t$, где $\alpha -$ постоянная. Найти зависимость от t ускорений доски a_1 и бруска a_2, если коэффициент трения между доской и бруском равен k, а также момент начала скольжения бруска относительно доски.



Пояснения

Под действием силы F, вследствие трения между собой доска и брусок придут в движение и будут двигаться вначале вместе, как единое целое с одним ускорением a, после начала скольжения бруска относительно доски, доска будет двигаться с ускорением a_1, а брусок с ускорением a_2.

Время начала скольжения обозначим t_0.

Второй закон Ньютона в векторном виде для доски и бруска до начала скольжения ($t \le t_0$)

$$(m_1 + m_2)\vec a = \vec F + (m_1 + m_2)\vec g + \vec N_1.$$

В проекции на ось x:

$$(m_1 + m_2)a = F = \alpha t\,.$$

Второй закон Ньютона в векторном виде для бруска после начала скольжения ($t \ge t_0$)

$$m_2\vec a_2 = m_2\vec g + \vec N_2 + \vec F + \vec F_{тр2}\,.$$

Второй закон Ньютона в векторном виде для доски после начала скольжения

$$m_1\vec a_1 = m_1\vec g + \vec N_1 + \vec N_1' + \vec F_{тр1}\,.$$

$\vec N_1'$ – вес бруска, действующий на доску.

По третьему закону Ньютона: $\vec F_{тр1} = -\vec F_{тр2}$; $\vec N_1' = -\vec N_2$.

$N_1' = m_2 g$; $\left|\vec F_{тр1}\right| = \left|\vec F_{тр2}\right| = F_{тр} = kN_2 = km_2 g$

Задания:

1. Запишите уравнения движения доски и бруска в проекции на ось x и ось y после начала скольжения.

2. Решив совместно полученные уравнения, найдите a_1 и a_2.

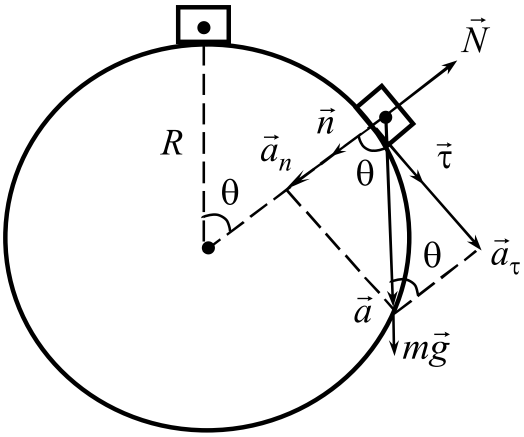
3. В момент начала скольжения $a_1 = a_2$, приравняв их, найдите t_0.

Ответ: $a_1 = \dfrac{km_2 g}{m_1}$;

$$a_2(t) = \frac{(\alpha t - km_2 g)}{m_2};$$

$$t_0 = \frac{kgm_2(m_1 + m_2)}{\alpha m_1}.$$

2.2.5. Небольшое тело начинает скользить с вершины гладкой сферы радиусом R. Найти угол θ между вертикалью и радиусом-вектором, характеризующим положение тела относительно центра сферы в момент отрыва от нее, а также скорость тела в этот момент.



Пояснения

Тело совершает плоское движение, поэтому его полное ускорение равно

$$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n .$$

Уравнение движения тела в проекции на направление $\vec{\tau}$

$$m\frac{d\upsilon}{dt} = mg\sin\theta .$$

Уравнение движения тела в проекции на направление $\vec{n}$

$$m\frac{\upsilon^2}{R} = mg\cos\theta - N .$$

В момент отрыва сила реакции опоры равна нулю.

Чтобы найти $\upsilon_{\text{отр}}$ и $\theta_{\text{отр}}$ надо найти функцию $\upsilon(\theta)$. Для этого сделаем замену переменных в уравнении $m\dfrac{d\upsilon}{dt} = mg\sin\theta$, считая, что υ является функцией угла θ и используя тождество

$$\frac{d\upsilon}{dt} = \frac{d\upsilon}{ds}\frac{ds}{dt} = \upsilon\frac{d\upsilon}{ds} .$$

Получим уравнение движения тела в новых переменных

$$\upsilon\frac{d\upsilon}{ds} = g\sin\theta .$$

Представим $ds = Rd\theta$ и разделим переменные в полученном уравнении. Проинтегрируем дифференциальное уравнение в пределах интегрирования от 0 до υ и от 0 до θ. Найдем $\upsilon = \upsilon(\theta)$.

Задания:

1. Найдите функцию $\upsilon = \upsilon(\theta)$.

2. В формулу $\upsilon = \upsilon(\theta)$ входит $\cos\theta$. Обозначьте скорость в момент отрыва $\upsilon_{\text{отр}}$, а соответствующий ей угол $\theta_{\text{отр}}$.

3. Найдите $\cos\theta_{\text{отр}}$ из уравнения $m\dfrac{\upsilon^2}{R} = mg\cos\theta - N$, считая в момент отрыва $N = 0$.

4. Подставьте $\cos\theta_{\text{отр}}$ в функцию $\upsilon = \upsilon(\theta)$ и найдите из нее $\upsilon_{\text{отр}}$.

Ответ: $\cos\theta_{\text{отр}} = \dfrac{2}{3}$; $\theta_{\text{отр}} = 48^\circ$; $\upsilon_{\text{отр}} = \sqrt{\dfrac{2gR}{3}}$.

2.3. Задания для самостоятельного решения

1. Найти модуль и вектор силы, действующей на частицу массой m, при ее движении в плоскости XY по закону $x = A\sin\omega t$, $y = B\cos\omega t$, где A, B, ω – постоянные.

Ответ: $F = m\omega^2\sqrt{x^2 + y^2}$; $\vec{F} = -m\omega^2\vec{r}$, где $\vec{r}$ – радиус-вектор частицы.

2. Частица массой m в момент $t = 0$ начинает двигаться под действием силы $\vec{F}(t) = \vec{F}_0(1 - \frac{t}{\alpha})$, $\vec{F}_0$ – постоянный вектор; α – положительная постоянная. Найти: 1) кинематический закон движения; 2) время τ возвращения в исходную точку; 3) путь, пройденный за это время. В момент $t = 0$ $x(0) = 0$ и $\upsilon(0) = 0$.

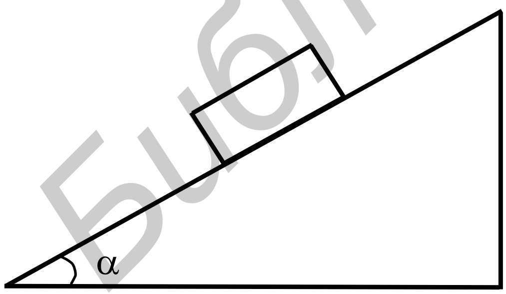
Ответ: $x(t) = \dfrac{F_0}{2m}\left(t^2 - \dfrac{t^3}{3\alpha}\right)$; $\tau = 3\alpha$; $s(\tau) = \dfrac{4F_0\alpha^2}{3m}$.

3. На тело массой m, лежащее на гладкой горизонтальной плоскости, в момент времени $t = 0$ начала действовать сила, зависящая от времени как $F = kt$, где k – постоянная. Направление этой силы все время составляет угол α с горизонтом. Найти: 1) скорость тела в момент отрыва от плоскости; 2) путь, пройденный телом к этому моменту.

Ответ: $\upsilon(t_{\text{отр}}) = \dfrac{mg^2\cos\alpha}{2k\sin^2\alpha}$; $s(t_{\text{отр}}) = \dfrac{m^2g^3\cos\alpha}{6k^2\sin^3\alpha}$.

4. В момент $t = 0$ частица массой m начинает двигаться под действием силы $\vec{F} = \vec{F}_0\cos\omega t$, где $\vec{F}_0$ и ω – постоянные. Сколько времени частица будет двигаться до первой остановки? Какой путь она пройдет за это время? Какова максимальная скорость частицы на этом пути?

Ответ: $t_{\text{ост}} = \dfrac{\pi}{\omega}$; $s(t_{\text{ост}}) = \dfrac{2F_0}{m\omega^2}$; $\upsilon_{\max} = \dfrac{F_0}{m\omega}$.



5. Небольшой брусок начинает скользить по наклонной плоскости, составляющей угол α с горизонтом. Коэффициент трения зависит от пройденного пути x по закону $k = \gamma x$, где γ – постоянная. Найти путь, пройденный бруском до остановки, и его максимальную скорость на этом пути.

Ответ: $x(t_{\text{ост}}) = \dfrac{2\text{tg}\alpha}{\gamma}$; $\upsilon_{\max} = \sqrt{\dfrac{g\sin^2\alpha}{\gamma\cos\alpha}}$.

3. Момент инерции

3.1. Основные формулы

Момент инерции твердого тела относительно некоторой оси

$$I = \int\limits_{(m)} r^2 dm,$$

или для однородных тел

$$I = \int\limits_{(V)} \rho r^2 dV,$$

где dm – элементарная масса; ρ – плотность тела; dV – элементарный объем; r – расстояние от dm или dV до выбранной оси; m – масса тела; V – объем тела.

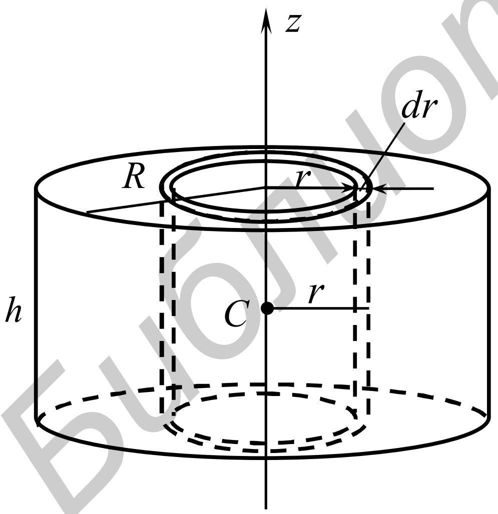
Теорема Штейнера

$$I = I_C + ma^2,$$

где I – момент инерции твердого тела относительно произвольной оси; I_C – момент инерции твердого тела относительно параллельной оси, проходящей через его центр инерции; m – масса тела; a – расстояние между осями.

3.2. Задания с пояснениями

3.2.1. Найти момент инерции однородного сплошного цилиндра относительно оси симметрии, перпендикулярной к основанию цилиндра, если его масса m и радиус основания R.



Пояснения

Для однородных тел $\rho = \mathrm{const}$, тогда

$$I = \rho \int\limits_{(V)} r^2 dV.$$

Возьмем за элементарный объем dV – тонкостенный цилиндр. Для этого разобьем мысленно сплошной цилиндр на тонкостенные цилиндры высотой h, радиусом r и толщиной dr. Момент инерции каждого такого цилиндра относительно оси симметрии (оси z) определяется как $dI = \rho r^2 dV$, где dV – его объем.

Масса всего цилиндра $m = \rho V$. Объем всего цилиндра $V = \pi R^2 h$.

Момент инерции цилиндра $I = \int\limits_{(V)} dI$, где V – область пространства, занятого цилиндром.

Задания:

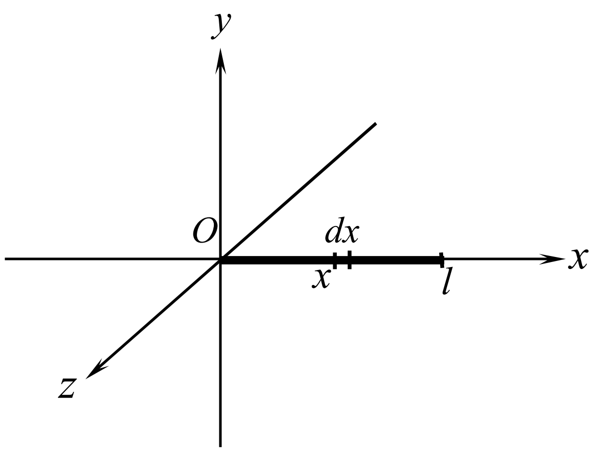
1. Выразите элементарный объем dV через переменную r и dr.

2. Вычислите интеграл $I = \int dI$ по r в пределах интегрирования от 0 до R.

3. Выразите полученное выражение через массу сплошного цилиндра m.

Ответ: $I = \frac{1}{2} mR^2$.

3.2.2. Найти момент инерции тонкого однородного стержня относительно оси, перпендикулярной к стержню и проходящей через его конец, если масса стержня m и его длина l. Найти момент инерции стержня, относительно оси, перпендикулярной стержню и проходящей через его середину.



Пояснения

Поместим стержень вдоль оси x и проведем ось y через его конец, относительно которой будем искать момент инерции стержня.

Элементарную массу стержня можно представить

$$dm = \rho dx$$

Так как стержень тонкий ($\sqrt{s} << l$, где s – площадь поперечного сечения стержня), то

$$\rho = \frac{m}{l},$$

здесь ρ – линейная плотность стержня. Тогда

$$dm = \frac{m}{l} dx.$$

Для нахождения I разобьем мысленно стержень на бесконечно малые отрезки dx, обозначим расстояние от dx до оси y через x, тогда получим $dI = x^2 dm$.

Момент инерции стержня $I = \int\limits_{(l)} dI$, где l – область пространства, занятого стержнем.

Задания:

1. Вычислите интеграл $I = \int\limits_{(l)} dI$ по x в пределах интегрирования от 0 до l.

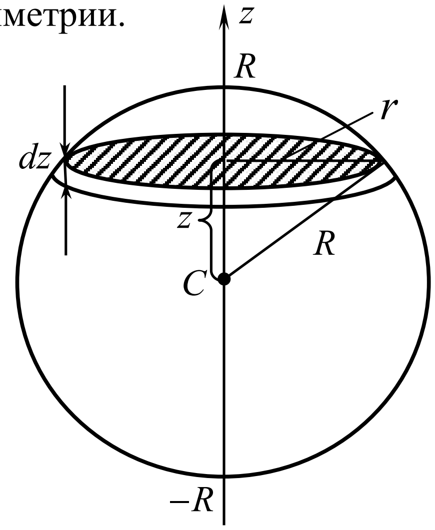
2. По теореме Штейнера, зная I, найдите момент инерции стержня относительно оси, перпендикулярной стержню и проходящей через его середину I_C.

Ответ: $I_y = I_z = \frac{1}{3} ml^2$; $I_C = \frac{1}{12} ml^2$.

3.2.3. Вычислить момент инерции однородного шара относительно его оси симметрии, если масса шара m и радиус R.

Пояснения

Проведем ось z через центр масс шара. Она будет совпадать с его осью симметрии.



Разобьем мысленно шар на бесконечно тонкие диски радиусом r и высотой dz.

Момент инерции такого диска равен $dI = \dfrac{r^2 dm}{2}$, где dm – масса элементарного диска, равная $dm = \rho dV = \rho \pi r^2 dz$.

Момент инерции шара $I = \int\limits_{(V)} dI$,

где V – область пространства, занятого шаром.

Масса шара равна $m = \rho V$. Объем шара равен $V = \dfrac{4\pi R^3}{3}$.

Задания:

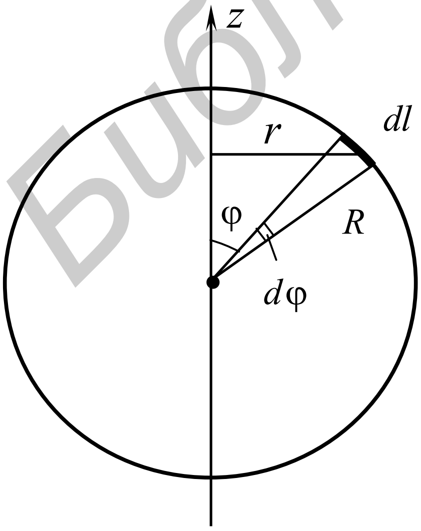
1. Выразите dI через z и dz, заменив переменную r через переменную z, используя теорему Пифагора для r, h и R.

2. Вычислите интеграл $I = \int dI$ по z в пределах интегрирования от $-R$ до R.

3. Выразите полученное выражение через массу шара m.

Ответ: $I = \dfrac{2}{5} mR^2$.

3.2.4. Найти момент инерции тонкого проволочного кольца радиусом R и массой m относительно оси, совпадающей с его диаметром.



Пояснения

Проведем ось z через диаметр кольца. Разобьем мысленно кольцо на элементарные отрезки dl. Расстояние от dl до оси z обозначим через r. Так как кольцо тонкое, то элементарную массу кольца можно представить $dm = \rho dl$.

Тогда $dI = r^2 dm = \rho r^2 dl$.

Выразим $dl = R d\varphi$, а $r = R \sin\varphi$.

Момент инерции кольца $I = \int\limits_{(l)} dI$, где l – область пространства, занятого кольцом.

Задания:

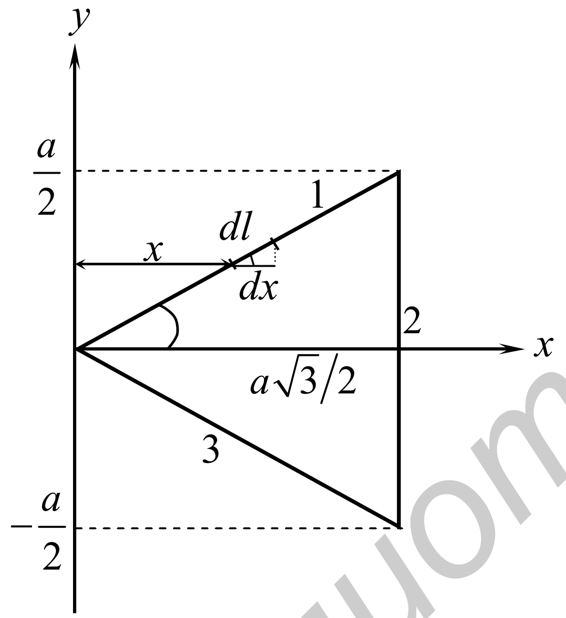
1. Выразите dI через φ и $d\varphi$.

2. Вычислите интеграл $I = \int dI$ по φ в пределах интегрирования от 0 до 2π.

3. Выразите полученное выражение через массу кольца m.

Ответ: $I = \dfrac{1}{2} mR^2$.

3.2.5. Найти момент инерции тонкого проволочного равностороннего треугольника со стороной a и массой m относительно оси, проходящей через вершину треугольника параллельно противолежащей стороне.



Пояснения

Момент инерции – аддитивная величина, поэтому момент инерции всего треугольника равен сумме моментов инерции трех его сторон относительно оси y, т. е.

$$I = I_1 + I_2 + I_3.$$

Так как треугольник тонкий, то $dm = \rho dl$ и момент инерции каждой из сторон находится по формуле

$$I = \rho \int\limits_{(l)} x^2 dl,$$

где ρ – линейная плотность вещества, $\rho = \dfrac{m}{3a}$; dl – элемент длины треугольника; x – расстояние от dl до оси.

Момент инерции стороны 1: $I_1 = \rho \int x^2 dl = \rho \int\limits_0^{a\frac{\sqrt{3}}{2}} x^2 dx \dfrac{2}{\sqrt{3}}$.

Момент инерции стороны 3: $I_3 = I_1$, так как треугольник равносторонний.

Момент инерции стороны 2: $I_2 = \rho \int x^2 dy = \rho \dfrac{3}{4} a^2 \int\limits_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} dy$.

Задания:

1. Найдите момент инерции $I_1 (I_3)$.

2. Найдите момент инерции I_2.

3. Найдите момент инерции всего треугольника, как $I = I_1 + I_2 + I_3$.

4. Выразите полученное выражение через массу треугольника m.

Ответ: $I = \frac{5}{12} ma^2$.

3.3. Задания для самостоятельного решения

1. Найти момент инерции тонкого проволочного кольца радиусом R и массой m относительно оси, проходящей через центр масс кольца перпендикулярно его плоскости.

Ответ: $I = mR^2$.

2. Найти момент инерции тонкого однородного стержня относительно оси, проходящей через центр масс, если стержень расположен под углом φ к оси, масса стержня m, его длина l.

Ответ: $I_y = \frac{1}{12} ml^2 \sin^2 \varphi$; $I_x = \frac{1}{12} ml^2 \cos^2 \varphi$.

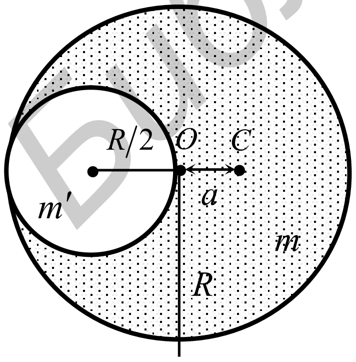
3. Найти момент инерции однородного сплошного конуса относительно его оси симметрии, если масса конуса m и радиус его основания R.

Ответ: $I = \frac{3}{10} mR^2$.

4. Найти момент инерции тонкой однородной пластинки массой m, имеющей форму равнобедренного прямоугольного треугольника относительно оси, совпадающей с одним из катетов, длина которого a.

Ответ: $I = \frac{ma^2}{6}$.

5. Однородный диск радиусом R имеет круглый вырез. Масса оставшейся (заштрихованной) части диска равна m. Найти момент инерции такого диска относительно оси, перпендикулярной к плоскости диска и проходящей:



а) через точку O;
б) через его центр масс.

Ответ: а) $I_O = \frac{13}{24} mR^2$;

б) $I_C = \frac{37}{72} mR^2$.

4. Механика твердого тела

4.1. Основные формулы

Уравнение движения центра масс твердого тела

$$m\vec{a}_c = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \ ,$$

где m – масса тела; $\vec{a}_c$ – ускорение центра масс тела; $\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i$ – векторная сумма всех сил, действующих на тело.

Момент силы $\vec{F}$ относительно точки o

$$\vec{M} = \left[\vec{r}, \vec{F}\right].$$

Модуль момента силы

$$M = rF\sin\alpha = lF \ ,$$

где r – модуль радиуса-вектора точки приложения силы; F – модуль силы; α – угол между направлением силы и направлением радиуса-вектора точки; $l = r\sin\alpha$ – плечо силы относительно точки o.

Момент импульса $\vec{p}$ относительно точки o

$$\vec{L} = \left[\vec{r}, \vec{p}\right].$$

Модуль момента импульса

$$L = rp\sin\alpha = lp \ ,$$

где $l = r\sin\alpha$ – плечо импульса относительно точки o.

Уравнение вращательного движения твердого тела относительно фиксированной оси z

$$I\beta_z = \sum_{i=1}^{N} M_{iz} \ ,$$

где I – момент инерции тела; β_z – проекция углового ускорения тела на ось z; $\sum_{i=1}^{N} M_{iz}$ – сумма моментов всех сил, действующих на тело, относительно оси z.

Кинетическая энергия твердого тела при плоском движении

$$K = \frac{m\upsilon_c^2}{2} + \frac{I_c\omega^2}{2} \ ,$$

где υ_c – скорость центра масс твердого тела; I_c – момент инерции твердого тела относительно оси, проходящей через его центр масс.

Общие рекомендации

Для решения задач по механике твердого тела необходимо выполнить следующее:

1) определить состав механической системы;

2) выбрать оси координат, относительно которых движутся тела системы;

3) определить силы и моменты сил, под действием которых движутся тела;

4) спроектировать силы и моменты сил на оси координат;

5) записать уравнения поступательного и вращательного движений, в которых участвуют тела;

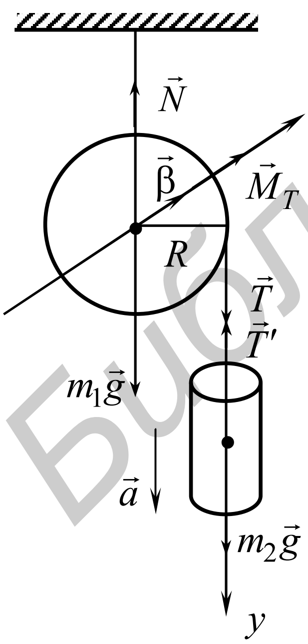
6) получить систему уравнений, которую решить относительно искомой величины;

7) если число неизвестных величин в системе превышает число уравнений, составить дополнительные уравнения (уравнения связи) между неизвестными величинами.

4.2. Задания с пояснениями

4.2.1. На однородный сплошной цилиндр массой m_1 и радиусом R плотно намотана легкая нерастяжимая нить, к концу которой прикреплен груз массой m_2. В момент $t = 0$ система пришла в движение. Пренебрегая трением в оси цилиндра, найти: 1) модуль угловой скорости цилиндра в момент времени τ; 2) кинетическую энергию системы груз – цилиндр.

Пояснения



Будем рассматривать механическую систему: цилиндр и груз.

Каждое тело участвует в одном виде движения.

Поскольку нить по условию легкая, то $T = T'$.

Уравнение поступательного движения груза в проекции на ось y

$$m_2 a = m_2 g - T'.$$

Уравнение вращательного движения цилиндра относительно оси z

$$I\beta_z = M_T,$$

где I – момент инерции сплошного цилиндра относительно оси z; β_z – проекция углового ускорения цилиндра на ось z; M_T – момент силы натяжения нити T относительно оси z; $\vec{M}_{m_1 g} = 0$ и $\vec{M}_N = 0$ относительно этой оси.

Поскольку нить нерастяжима и намотана плотно, то линейная и угловая скорости связаны соотношением

$$\upsilon = \omega R,$$

тогда линейное ускорение груза связано с угловым вращением цилиндра формулой (уравнения связи)

$$a = R\beta.$$

Суммарная кинетическая энергия системы состоит из кинетической энергии поступательного движения груза и кинетической энергии вращательного движения цилиндра:

$$K = \frac{m\upsilon_c^2}{2} + \frac{I_c\omega^2}{2}.$$

Момент инерции цилиндра $I_c = \dfrac{mR^2}{2}$.

Задания:

1. Запишите, чему равен момент силы M_T и момент инерции цилиндра I относительно оси z.

2. Подставьте в уравнение вращательного движения цилиндра значения M_T и I.

3. Получите систему уравнений для решения задачи (число неизвестных в системе уравнений не должно превышать числа уравнений).

4. Решите систему уравнений относительно β.

5. Зная угловое ускорение β, найдите угловую скорость ω в момент времени τ.

6. Найдите суммарную кинетическую энергию груза и цилиндра.

Ответ: $\omega = \dfrac{2m_2 g\tau}{m_1 R + 2m_2 R}$;

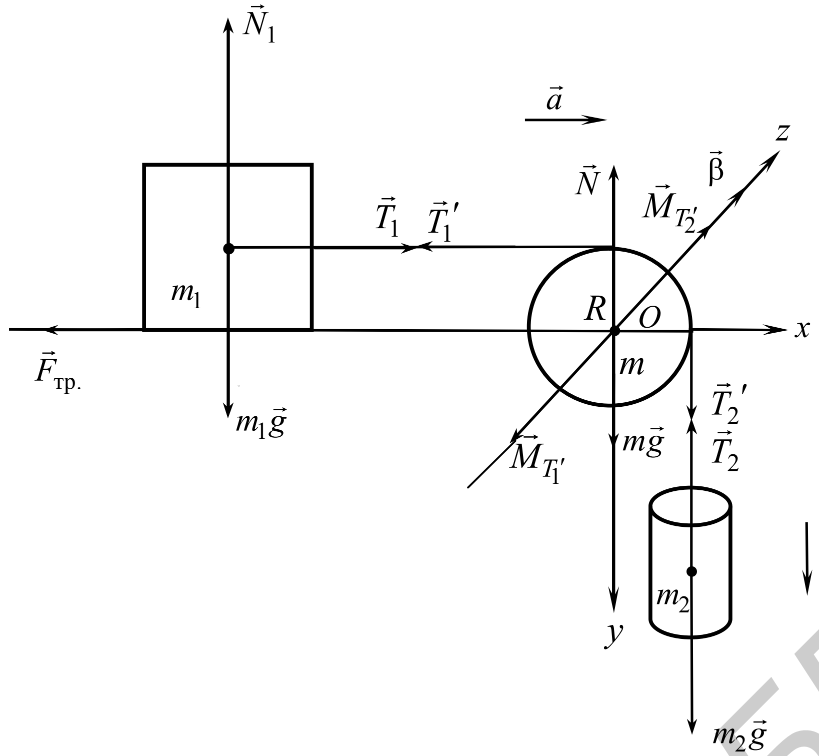
$$K = \frac{\omega^2 R^2}{2}\left(\frac{m_1}{2} + m_2\right).$$

4.2.2. В системе известны массы тел m_1 и m_2, коэффициент k между телом m_1 и горизонтальной плоскостью, а также масса блока m, который можно считать однородным диском. Скольжения нити по блоку нет. В момент $t = 0$ тело m_2 начинает опускаться. Пренебрегая массой нити и трением в оси блока, найти: а) ускорение тела m_2; б) работу силы трения, действующую на тело m_1, за первые t секунд после начала движения.

Пояснения

Будем рассматривать механическую систему: два груза и блок. Каждое из тел участвует в одном виде движения.

Следовательно, надо составить три уравнения движения и дополнив их, если это необходимо, уравнениями связи, решить эту систему относительно искомой величины.



Так как нить невесома: $T_1' = T_1$, $T_2' = T_2$.

Тогда момент силы T_1' и T_2' относительно оси z $M_{T_1'} = M_{T_1}$; $M_{T_2'} = M_{T_2}$.

Сила трения скольжения, действующая на тело m_1, $F_{тр} = kN_1$.

Работа силы трения $A_{тр} = \int_0^t \left(\vec{F}_{тр}, \vec{\upsilon}\right) dt = -\int_0^t F_{тр} \upsilon dt$.

Скорость тела m_2 найдем по формуле $\upsilon(t) = \int_0^t a(t) dt$.

Момент инерции диска $I = \dfrac{mR^2}{2}$.

Задания:

1. Запишите уравнение движения груза m_1 в проекции на ось x.

2. Запишите уравнение движения груза m_1 в проекции на ось y, найдите силу трения.

3. Запишите уравнение движения груза m_2 в проекции на ось y.

4. Запишите уравнение вращательного движения блока m в проекции на ось z.

5. Дополните полученную систему уравнений уравнениями связи между неизвестными величинами, если это необходимо.

6. Решите систему уравнений относительно ускорения a.

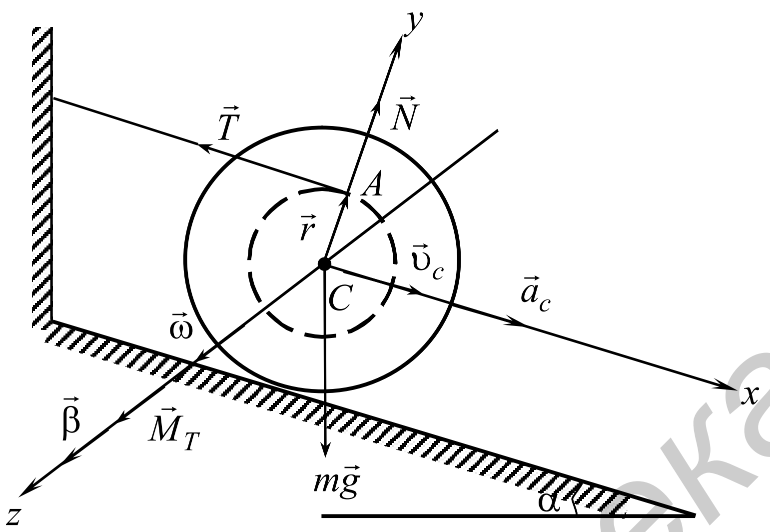
7. Найдите скорость тела $\upsilon(t)$.

8. Найдите работу силы трения, действующую на тело m_1, за первые t секунд после начала движения.

Ответ: $a = \dfrac{2g(m_2 - km_1)}{2m_1 + 2m_2 + m}$;

$$A_{\text{тр}} = -\frac{km_1 g^2 (m_2 - km_1) t^2}{2m_1 + 2m_2 + m}.$$

4.2.3. На гладкой наклонной плоскости, составляющей угол α с горизонтальной поверхностью, находится катушка с ниткой, свободный конец которой укреплен, как показано на рисунке далее. Масса катушки m, ее момент инерции относительно собственной оси I, радиус намотанного слоя ниток r. Найти ускорение оси катушки.



Пояснения

Катушка совершает плоское движение. Ускорение центра масс катушки $\vec{a}_c$ направлено вдоль оси x.

Все точки катушки вращаются вокруг оси z с угловым ускорением β, при этом

$$a_c = r\beta,$$

так как через точку касания нити A проходит мгновенная ось вращения, а скорость центра масс

$$\vec{\upsilon}_c = -[\vec{\omega}, \vec{r}],$$

где $\vec{r}$ – радиус-вектор точки, через которую проходит мгновенная ось вращения.

По условию задачи поверхность наклонной плоскости гладкая, следовательно, сила трения отсутствует.

Задания:

1. Запишите уравнение движения центра масс катушки в проекции на ось x.
2. Запишите уравнение вращательного движения катушки в проекции на ось z.
3. Дополнив систему уравнений уравнением связи $a_c = r\beta$, решите ее относительно a_c.

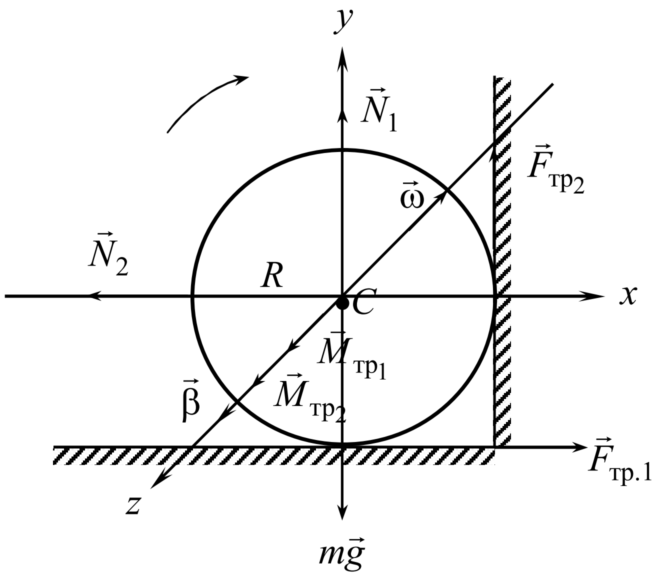
Ответ: $a_c = \dfrac{g\sin\alpha}{(1 + \dfrac{I}{mr^2})}$.

4.2.4. Однородный цилиндр радиусом R раскрутили вокруг его оси до угловой скорости ω_0 и поместили затем в угол. Коэффициент трения между стенками угла и цилиндром равен k. Сколько оборотов сделает цилиндр до остановки?

Пояснения

Цилиндр вращается, замедляясь вокруг оси, проходящей через его центр масс.

Уравнение вращательного движения цилиндра в векторном виде



$$I\vec{\beta} = \vec{M}_{тр_1} + \vec{M}_{тр_2}.$$

Модуль момента сил трения равен

$$M_{тр} = F_{тр}R.$$

Чтобы найти значения сил трения $F_{тр_1}$ и $F_{тр_2}$, учтем, что центр масс C покоится, и поэтому

$$\vec{F}_{тр_1} + \vec{F}_{тр_2} + \vec{N}_1 + \vec{N}_2 + m\vec{g} = \vec{0}.$$

В проекциях на ось x и ось y получаем:

– для оси x: $0 = F_{тр_1} - N_2$;

– для оси y: $0 = F_{тр_2} + N_1 - mg$.

При этом $F_{тр_1} = kN_1$, а $F_{тр_2} = kN_2$.

Движение цилиндра будет равнозамедленным. Зависимость углового пути и угловой скорости от времени при равнозамедленном движении:

$$\varphi(t) = \omega_0 t - \frac{\beta t^2}{2};$$

$$\omega(t) = \omega_0 - \beta t.$$

Угловой путь можно найти через число оборотов n, которые сделает цилиндр до остановки $\varphi = 2\pi n$, тогда

$$2\pi n = \omega_0 t_{ост} - \frac{\beta t_{ост}^2}{2}.$$

Задания:

1. Решив совместно систему уравнений для сил, действующих на цилиндр, найдите $F_{тр_1}$ и $F_{тр_2}$.

2. Запишите уравнение вращательного движения цилиндра в проекции на ось z.

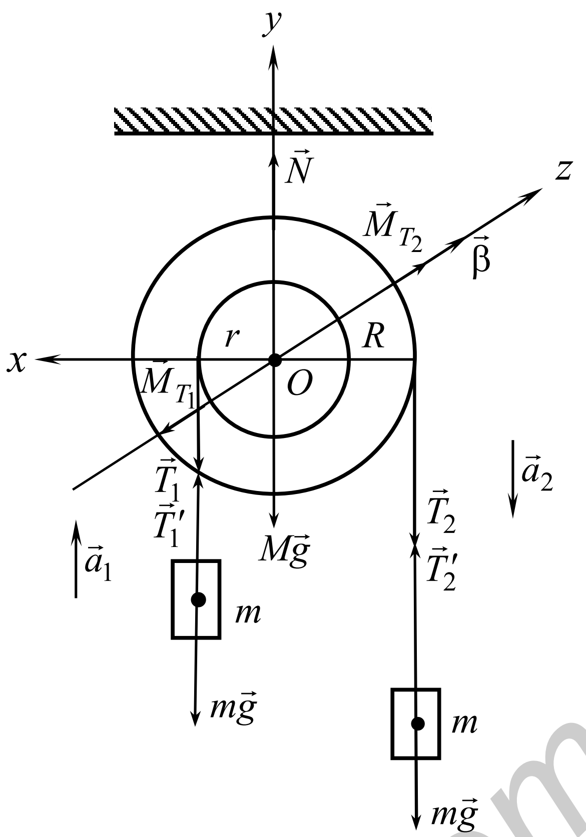
3. Подставив в это уравнение значения сил трения и момент инерции цилиндра, найдите угловое ускорение цилиндра.

4. Из условия, что в момент остановки угловая скорость вращения цилиндра равна нулю, найдите время остановки $t_{ост}$.

5. Подставьте $t_{ост}$ в уравнение $2\pi n = \omega_0 t_{ост} - \frac{\beta t_{ост}^2}{2}$, найдите n.

Ответ: $n = \dfrac{(1+k^2)\omega_0^2 R}{8\pi g k(1+k)}$.

4.2.5. На ступенчатый вал, радиусы которого r и R, плотно намотаны в противоположных направлениях нерастяжимые нити, нагруженные одинаковыми грузами массами m. Момент инерции вала I. Найти ускорения a_1 и a_2 грузов. Массой нити и трением в оси блока пренебречь.



Пояснения

Будем рассматривать механическую систему: ступенчатый вал и два груза.

Поместим начало координат в центр масс вала. Грузы движутся поступательно вдоль оси y, а вал вращается относительно оси z.

Так как нить невесома, то

$$\vec{T}_1' = -\vec{T}_1,$$
$$\vec{T}_2' = -\vec{T}_2.$$

Уравнения движения всех тел, входящих в систему в векторном виде:

$$m\vec{a}_1 = \vec{T}_1' + m\vec{g};$$
$$m\vec{a}_2 = \vec{T}_2' + m\vec{g};$$
$$I\vec{\beta} = \vec{M}_{T_1} + \vec{M}_{T_2}.$$

Поскольку нити нерастяжимы и намотаны плотно, то линейные ускорения грузов связаны с угловым вращением цилиндра уравнением связи

$$\beta = \frac{a_1}{r} = \frac{a_2}{R}.$$

Задания:

1. Запишите уравнения движения грузов в проекции на ось y.

2. Запишите уравнение вращательного движения вала в проекции на ось z. значения M_{T_1}, M_{T_2} и I.

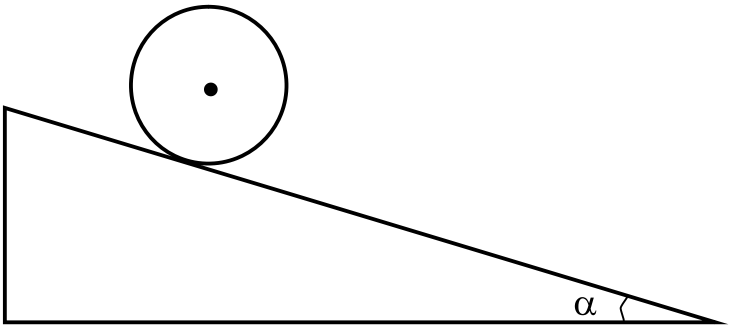
3. Найдите из уравнений поступательных движений грузов выражения для T_1 и T_2 и подставьте их в уравнение вращательного движения вала.

4. Используя уравнение связи, найдите a_1, а затем a_2.

Ответ: $a_1 = \dfrac{rmg(R-r)}{(I + R^2 m + r^2 m)}$;

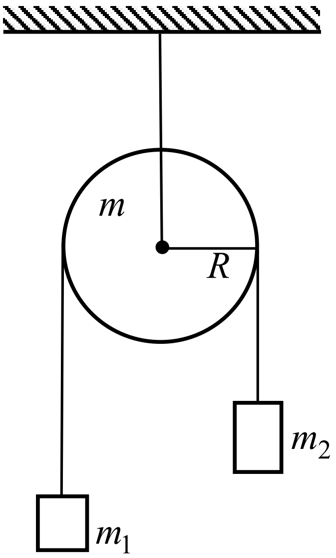
$$a_2 = \frac{Rmg(R-r)}{(I + R^2 m + r^2 m)}.$$

4.3. Задания для самостоятельного решения



1. Однородный шар скатывается без скольжения по наклонной плоскости, составляющей угол α с горизонтальной плоскостью. Найти ускорение центра масс шара и значение коэффициента трения качения.

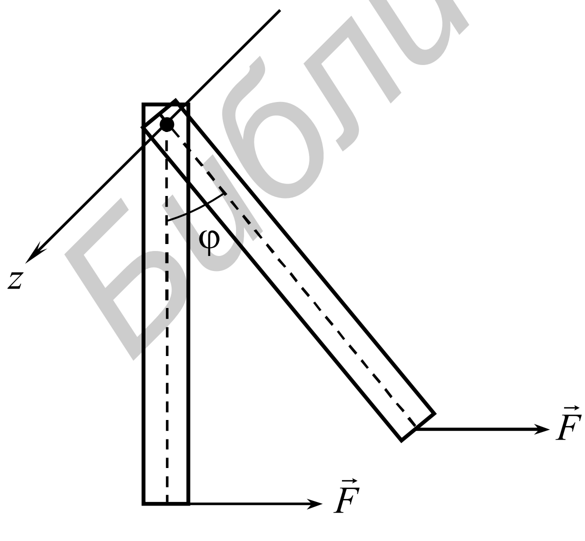
Ответ: $a_c = \frac{5}{7} g \sin\alpha$; $k = \frac{2}{7}\operatorname{tg}\alpha$.



2. В установке, показанной на рисунке, известны масса однородного сплошного цилиндра m, его радиус R и массы тел m_1 и m_2. Скольжения нити и трения в оси цилиндра нет. Найти угловое ускорение цилиндра и отношение натяжений $\frac{T_1}{T_2}$ вертикальных участков нити в процессе движения.

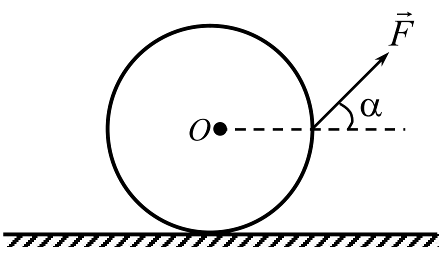
Ответ:

$$\beta = \frac{(m_2 - m_1)g}{\left(m_1 + m_2 + \frac{m}{2}\right)R}; \quad \frac{T_1}{T_2} = \frac{m_1(m + 4m_2)}{m_2(m + 4m_1)}.$$



3. Горизонтальный тонкий однородный стержень массой m и длиной l может свободно вращаться вокруг вертикальной оси, проходящей через его конец. В некоторый момент на противоположный конец начала действовать сила F, которая все время перпендикулярна первоначальному положению покоившегося стержня и направлена в горизонтальной плоскости. Найти угловую скорость стержня как функцию его угла поворота φ из начального положения.

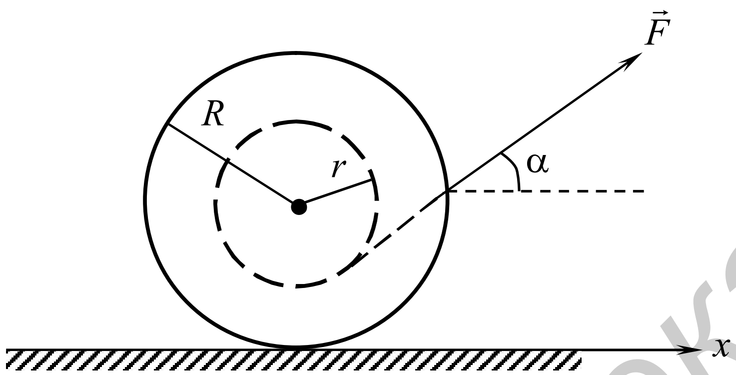
Ответ: $\omega = \sqrt{\frac{6F}{ml}\sin\varphi}$.



4. Однородный шар массой m движется поступательно по поверхности стола под действием постоянной силы, приложенной, как показано на рисунке. Коэффициент трения между шаром и столом k, угол $\alpha = 30^\circ$. Найти силу F и ускорение шара.

Ответ: $F = \dfrac{kmg}{(1+k)\sin\alpha}$;

$$a = \frac{kg}{1+k}(\mathrm{ctg}\alpha - 1).$$



5. На горизонтальной шероховатой плоскости лежит катушка ниток массой m. Ее момент инерции относительно собственной оси $I = \gamma m R^2$, где $\gamma -$ числовой коэффициент; $R -$ внешний радиус катушки. Радиус намотанного слоя ниток равен r. Катушку без скольжения начали тянуть за нить с постоянной силой $\vec{F}$, направленной под углом α к горизонтальной плоскости. Найти: а) проекцию на ось x ускорения оси катушки; б) работу силы $\vec{F}$ за первые t секунд движения.

Ответ: а) $a_x = \dfrac{F(\cos\alpha - \frac{r}{R})}{m(1+\gamma)}$;

б) $A = \dfrac{F^2 t^2 (\cos\alpha - \frac{r}{R})^2}{2m(1+\gamma)}$.

5. Работа и мощность силы. Закон сохранения импульса, момента импульса, полной механической энергии

5.1. Основные формулы

Элементарная работа силы $\vec{F}$ на бесконечно малом перемещении $d\vec{r}$

$$\delta A = (\vec{F}, d\vec{r}) = \left|\vec{F}\right|\left|d\vec{r}\right|\cos\alpha,$$

где α – угол между направлением силы $\vec{F}$ и направлением перемещения $d\vec{r}$.

Работа силы $\vec{F}$ на участке траектории 1–2:

$$A_{12} = \int_1^2 \delta A = \int_1^2 (\vec{F}, d\vec{r}) = \int_1^2 F_x dx + \int_1^2 F_y dy + \int_1^2 F_z dz,$$

где $d\vec{r} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}$ – бесконечно малое перемещение точки.

Элементарная работа силы $\vec{F}$ при повороте твердого тела относительно неподвижной оси на бесконечно малый угол $d\varphi$

$$\delta A = (\vec{M}_F, d\vec{\varphi}),$$

Работа силы при повороте твердого тела на угол $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$ относительно неподвижной оси вращения z

$$A = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} M_{F_z} d\varphi,$$

где M_{F_z} – проекция вектора $\vec{M}_F$ на ось z.

Мощность силы

$$N = \frac{дA}{dt} = \frac{(\vec{F}, d\vec{r})}{dt} = (\vec{F}, \vec{\upsilon}) = \left|\vec{F}\right|\left|\vec{\upsilon}\right|\cos\alpha,$$

где α – угол между направлением силы $\vec{F}$ и направлением скорости $\vec{\upsilon}$.

Импульс материальной точки

$$\vec{p} = m\vec{\upsilon}.$$

Импульс механической системы, состоящей из n материальных точек (частиц),

$$\vec{P} = \sum_{i=1}^{n} \vec{p}_i = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{\upsilon}_i.$$

Закон изменения импульса механической системы из n частиц

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i^{\text{внеш}},$$

где $\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i^{\text{внеш}}$ – векторная сумма всех внешних сил, действующих на механическую систему.

Если $\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i^{\text{внеш}}=0$, то выполняется закон сохранения импульса механической системы:

$$\sum_{i=1}^{n}\vec{P}_i=\sum_{i=1}^{n}m_i\vec{\upsilon}_i=\text{const}.$$

Закон изменения полной механической энергии механической системы в силовом поле

$$\Delta E=E_2-E_1=A_{\text{нк.с}}^{\text{внутр}}+A_{\text{нк.с}}^{\text{внеш}},$$

где $A_{\text{нк.с}}^{\text{внутр}}$ – работа всех внутренних неконсервативных сил; $A_{\text{нк.с}}^{\text{внеш}}$ – работа всех внешних неконсервативных сил, действующих на систему.

Если $A_{\text{нк.с}}^{\text{внеш}}+A_{\text{нк.с}}^{\text{внутр}}=0$, то выполняется закон сохранения полной механической энергии системы:

$$E=K+U_{\text{вз}}+U_{\text{внеш}}=\text{const},$$

где E – полная механическая энергия системы частиц; K – суммарная кинетическая энергия системы; $U_{\text{вз}}$ – потенциальная энергия взаимодействия системы частиц между собой; $U_{\text{внеш}}$ – потенциальная энергия частиц системы во внешнем силовом поле.

Закон изменения момента импульса механической системы (твердого тела)

$$\frac{d\vec{L}}{dt}=\sum_{i=1}^{n}\vec{M}_i^{\text{внеш}},$$

где $\vec{L}=\sum_{i=1}^{n}\left[\vec{r}_i,\vec{p}_i\right]$ – момент импульса системы; $\sum_{i=1}^{n}\vec{M}_i^{\text{внеш}}$ – сумма моментов всех внешних сил, действующих на систему.

Если $\sum_{i=1}^{n}\vec{M}_i^{\text{внеш}}=\vec{0}$, то $\frac{d\vec{L}}{dt}=0$ и будет выполняться закон сохранения момента импульса механической системы относительно точки:

$$\vec{L}=\text{const}.$$

Основной закон динамики вращательного движения твердого тела относительно неподвижной оси вращения z:

$$I\beta_z=\sum_{i=1}^{n}M_{iz}^{\text{внеш}},$$

где I – момент инерции тела; β_z – проекция углового ускорения тела на ось z; $\sum_{i=1}^{n} M_{iz}^{\text{внеш}}$ – сумма моментов всех внешних сил, действующих на тело, относительно оси

Если $\sum_{i=1}^{n} M_{iz}^{\text{внеш}} = 0$, то выполняется закон сохранения момента импульса механической системы (тела) относительно оси z:

$$L_z = I\omega_z = \text{const},$$

где ω_z – проекция угловой скорости тела на ось z; I – момент инерции тела относительно оси z.

5.2. Задания с пояснениями

5.2.1. Тело массой m начинают поднимать с поверхности земли под действием силы $\vec{F} = 2(\alpha y - 1)m\vec{g}$, где α – положительная постоянная. Найти работу этой силы и приращение потенциальной энергии тела в поле тяжести Земли на первой половине пути подъема h.

Пояснения

Поместим систему координат в центр масс тела, направив ось y вверх. Динамическое уравнение движения тела в векторном виде

$$m\frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \vec{F} + m\vec{g}.$$

Проекция этого уравнения на ось y, учитывая, что $F_y = -2(\alpha y - 1)mg$,

$$m\frac{d\upsilon}{dt} = F_y - mg = -2\alpha ymg + mg.$$

В полученном уравнении сделаем замену переменных, используя тождество

$$\frac{d\upsilon}{dt} = \upsilon\frac{d\upsilon}{dy}.$$

Затем разделим переменные в нем и проинтегрируем в пределах интегрирования от 0 до υ и от 0 до y, найдем $\upsilon = \upsilon(y)$.

Обозначим максимальную высоту подъема тела через h.

Работа силы F_y на первой половине пути подъема

$$A = \int_0^{\frac{h}{2}} F_y dy.$$

Приращение потенциальной энергии тела на первой половине пути подъема

$$\Delta U = U_{\frac{h}{2}} - U_0 .$$

Задания:

1. Найдите $\upsilon(y)$.

2. Из условия, что в высшей точке подъема скорость тела равна нулю, найдите максимальную высоту подъема h.

3. Найдите работу силы F_y на первой половине пути подъема.

4. Найдите приращение потенциальной энергии тела на первой половине пути подъема.

Ответ: $A = \dfrac{3mg}{4\alpha}$; $\Delta U = \dfrac{mg}{2\alpha}$.

5.2.2. Тело массой m бросили под углом α к горизонтальной плоскости с начальной скоростью υ_0. Найти среднюю мощность, развиваемую силой тяжести за все время движения тела, и мгновенную мощность этой силы как функцию времени.

Пояснения

Обозначим все время движения тела через τ.

Средняя мощность, развиваемая силой тяжести за время τ,

$$\langle P \rangle = \frac{1}{\tau}\int_0^{\tau} P(t)dt .$$

Мгновенная мощность силы тяжести определяется формулой

$$P = (\vec{F}, \vec{\upsilon}) = F_x\upsilon_x + F_y\upsilon_y = -F_y\upsilon_y = -mg\upsilon_y ,$$

так как $F_x = 0$, а сила тяжести направлена против оси y.

Проекция скорости υ_y тела, брошенного под углом α к горизонтальной плоскости,

$$\upsilon_y = \upsilon_{0y} - gt .$$

Кинематический закон движения тела относительно оси y в случае $y_0 = 0$

$$y(t) = \upsilon_{0y}t - \frac{gt^2}{2} .$$

Задания:

1. Найдите τ из условия $y(\tau) = 0$.

2. Найдите $\langle P \rangle$.

3. Найдите $P(t)$.

Ответ: $\langle P \rangle = 0$;

$P(t) = mg(gt - \upsilon_0 \sin\alpha)$.

5.2.3. Найти изменение кинетической энергии системы из двух шаров с массами m_1 и m_2 при их абсолютно неупругом центральном соударении. До соударения скорости шаров были $\vec{\upsilon}_1$ и $\vec{\upsilon}_2$.

Пояснения

Будем считать систему шаров замкнутой, тогда для нее выполняется закон сохранения импульса:

$$m_1\vec{\upsilon}_1 + m_2\vec{\upsilon}_2 = (m_1 + m_2)\vec{\upsilon}.$$

Изменение кинетической энергии шаров

$$\Delta K = K_2 - K_1,$$

где K_1 – кинетическая энергия шаров до соударения; K_2 – кинетическая энергия шаров после соударения.

Учтем, что

$$\vec{\upsilon}^2 = (\vec{\upsilon}, \vec{\upsilon}) = \upsilon^2,$$

$$(\vec{\upsilon}_1 - \vec{\upsilon}_2)^2 = \vec{\upsilon}_1^2 + \vec{\upsilon}_2^2 - 2(\vec{\upsilon}_1, \vec{\upsilon}_2).$$

Задания:

1. Найдите скорость $\vec{\upsilon}$ из закона сохранения импульса.
2. Найдите кинетическую энергию шаров до соударения K_1.
3. Найдите кинетическую энергию шаров после соударения K_2.
4. Найдите приращение кинетической энергии шаров ΔK.

Ответ: $\Delta K = -\dfrac{m_1 m_2}{(m_1 + m_2)} \dfrac{(\vec{\upsilon}_1 - \vec{\upsilon}_2)^2}{2}.$

5.2.4. На краю покоящейся тележки массой M стоят два человека, масса каждого из которых равна m. Пренебрегая трением, найти скорость тележки после того, как оба человека спрыгнут с одной и той же горизонтальной скоростью $\vec{u}$ относительно тележки: а) одновременно; б) друг за другом.

Пояснения

Будем рассматривать механическую систему: тележка и два человека. Выберем систему отсчета, связанную с землей. Так как трение пренебрежимо мало, а силы тяжести компенсируются силами реакции опоры, то для нашей механической системы будет выполняться закон сохранения импульса.

Рассмотрим пункт «а».

Скорость каждого человека во время прыжка относительно земли

$$\vec{u}' = \vec{u} + \vec{\upsilon}_1,$$

где $\vec{\upsilon}_1$ – скорость тележки относительно земли в момент одновременного отрыва от нее людей.

Задания к пункту «а»:

1. Запишите закон сохранения импульса для системы в векторном виде, выбрав за начальное состояние системы – момент до прыжка, а за конечное – момент сразу после одновременного прыжка людей.

2. Из полученного уравнения найдите скорость тележки $\vec{\upsilon}_1$.

Рассмотрим пункт «б».

Скорость 1-го человека во время прыжка относительно земли

$$\vec{u}_1' = \vec{u} + \vec{\upsilon}_1',$$

где $\vec{\upsilon}_1'$ – скорость тележки относительно земли в момент отрыва от нее 1-го человека.

Скорость 2-го человека во время прыжка относительно земли

$$\vec{u}_2' = \vec{u} + \vec{\upsilon}_2',$$

где $\vec{\upsilon}_2'$ – скорость тележки относительно земли в момент отрыва от нее 2-го человека.

Задания к пункту «б»:

1. Запишите закон сохранения импульса для системы в векторном виде, выбрав за начальное состояние системы – момент до прыжка 1-го человека, а за конечное – момент после прыжка 1-го человека.

2. Из закона сохранения импульса найдите $\vec{\upsilon}_1'$.

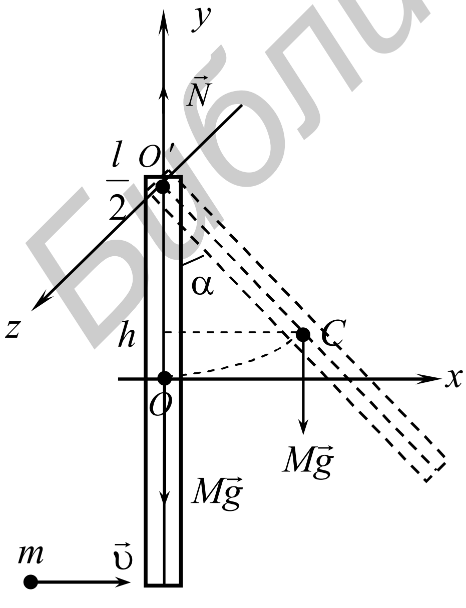
3. Запишите закон сохранения импульса для системы в векторном виде, выбрав за начальное состояние системы – момент до прыжка 2-го человека, а за конечное – момент после прыжка 2-го человека.

4. Из закона сохранения импульса найдите $\vec{\upsilon}_2'$.

Ответ: а) $\vec{\upsilon}_1 = -\dfrac{2m\vec{u}}{M + 2m}$;

б) $\vec{\upsilon}_2' = -\dfrac{m\vec{u}(2M + 3m)}{(M + 2m)(M + m)}$.

5.2.5. Вертикально расположенный однородный стержень массой M и длиной l может вращаться вокруг своего верхнего конца. В нижний конец стержня попала, застряв, горизонтально летевшая пуля массой m, в результате чего стержень отклонился на угол α. Считая $m \ll M$, найти скорость летевшей пули.



Пояснения

Будем рассматривать механическую систему: стержень и пуля.

В результате неупругого соударения стержень с пулей начнет отклоняться от положения равновесия в поле силы тяжести.

На систему пуля – стержень после соударения действуют внешние силы: сила тяжести $M\vec{g} + m\vec{g} \approx M\vec{g}$, сила реакции опоры $\vec{N}$, сила сопротивления воздуха $\vec{F}_c$.

Сила внутреннего трения действует между пулей и стержнем до тех пор, пока скорость пули относительно стержня не станет равной нулю.

Закон изменения момента импульса для нашей системы

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \vec{M}_i^{\text{внеш}} = \vec{M}_{mg} + \vec{M}_N + \vec{M}_{F_C}.$$

Так как сила реакции опоры приложена к точке o', то $\vec{M}_N = \vec{0}$, а силой сопротивления воздуха можно пренебречь, значит, $\vec{M}_{F_C} = \vec{0}$.

Если в течение времени соударения стержень незначительно отклонится от положения равновесия, то момент силы тяжести относительно точки o' можно считать равным нулю, т. е. $\vec{M}_{mg} = \vec{0}$.

Тогда в течение времени соударения

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{0} \quad \text{и, следовательно,} \quad \vec{L} = \text{const}, \quad \text{или} \quad \frac{dL_z}{dt} = 0 \quad \text{и} \quad L_z = \text{const}.$$

После прекращения сил внутреннего трения (неконсервативных) между пулей и стержнем и до момента остановки стержня в крайнем положении для системы будет выполняться закон сохранения полной механической энергии

$$E = \text{const}.$$

Момент инерции стержня относительно точки O': $I = \frac{Ml^2}{3}$.

Момент инерции пули относительно точки O': $I = ml^2$.

Задания:

1. Запишите закон сохранения момента импульса для системы, выбрав за начальное состояние системы – момент попадания пули в стержень, а за конечное – момент начала движения стержня с пулей вокруг оси z с угловой скоростью ω.

2. Найдите из закона сохранения момента импульса угловую скорость ω.

3. Запишите закон сохранения полной механической энергии системы, выбрав за начальное состояние момент начала движения стержня с пулей относительно оси z с угловой скоростью ω, а за конечное – момент максимального отклонения стержня от положения равновесия.

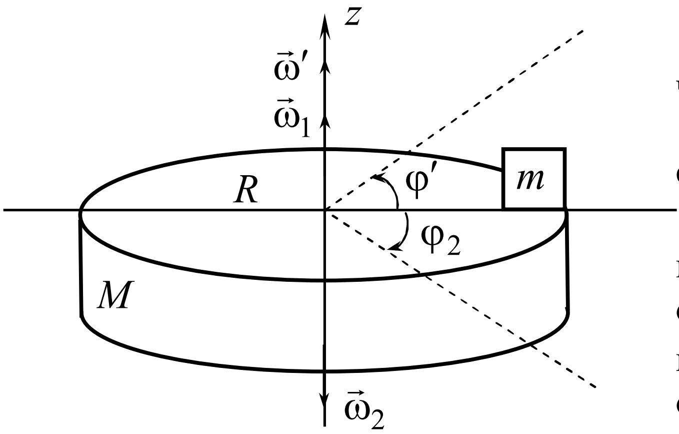
4. Из рисунка найдите высоту подъема центра масс стержня h.

5. Подставив ω и h в закон сохранения энергии, найдите скорость летевшей пули υ.

Ответ: $\upsilon = \frac{M}{m}\sqrt{\frac{2gl}{3}}\sin\frac{\alpha}{2}$.

5.2.6. Человек массой m стоит на краю горизонтального однородного диска массой M и радиусом R, который может свободно вращаться вокруг неподвижной вертикальной оси, проходящей через его центр. В некоторый момент человек начал двигаться по краю диска, совершил перемещение на угол

φ' относительно диска и остановился. Пренебрегая размерами человека, найти угол φ_2, на который повернулся диск к моменту остановки человека.



Пояснения

Будем рассматривать механическую систему: человек и диск.

Выберем систему отсчета связанную с землей.

Введем обозначения: I_1 – момент инерции человека относительно оси вращения z; I_2 – момент инерции диска относительно оси z; $\vec{\omega}'$ – угловая скорость человека относительно диска; $\vec{\omega}_1$ – угловая скорость человека относительно земли.

По закону сложения скоростей

$$\vec{\omega}_1 = \vec{\omega}_2 + \vec{\omega}' ,$$

где $\vec{\omega}_2$ – угловая скорость диска относительно земли.

Так как моменты внешних сил (сил тяжести, сил трения и реакции опоры), действующих на механическую систему относительно оси z, равны нулю, то момент импульса системы относительно этой оси сохраняется, т. е.

$$L_{1z} = L_{2z} ,$$

где L_{1z} – суммарный момент импульса диска и человека в начальном состоянии (момент времени, когда человек начал двигаться в одном направлении, а диск вместе с человеком стал двигаться в противоположном направлении); L_{2z} – суммарный момент импульса диска и человека в конечном состоянии (момент остановки).

Задания:

1. Запишите, чему равен момент инерции человека I_1, заменив его однородным тонким стержнем, перпендикулярным плоскости диска, и момент инерции диска I_2 относительно оси z.

2. Спроектируйте закон сложения угловых скоростей на ось z.

3. Запишите закон сохранения момента импульса системы относительно оси z.

4. Выразите ω' и ω_2 через производные по времени от соответствующих углов φ' и φ_2. Получите дифференциальное уравнение первого порядка, сократив dt.

5. Проинтегрируйте левую и правую часть полученного уравнения в пределах интегрирования от 0 до φ' и от 0 до φ_2.

6. Выразите искомую величину φ_2.

Ответ: $\varphi_2 = -\dfrac{2m}{2m+M}\varphi'$.

5.2.7. Телу на поверхности Земли сообщили скорость υ_0, направленную вертикально вверх. Найти высоту, на которую поднимется тело. Сопротивлением воздуха пренебречь. Известны радиус R и масса Земли M, а также гравитационная постоянная G.

Пояснения

По условию задачи на тело действует только сила тяготения Земли. Эта сила является консервативной.

Следовательно, полная механическая энергия тела, находящегося в поле силы тяготения Земли, сохраняется

$$E = K + U = \mathrm{const},$$

где $K = \dfrac{m\upsilon^2}{2}$, а $U = -G\dfrac{mM}{r}$, здесь υ – скорость тела в данной точке; r – расстояние от центра Земли до тела.

Задания:

1. Запишите, чему равна полная механическая энергия тела на поверхности Земли.
2. Запишите, чему равна полная механическая энергия тела на высоте h.
3. Примените закон сохранения полной механической энергии для этих двух состояний.
4. Из закона сохранения энергии найдите высоту h, на которую поднимется тело.

Ответ: $h = \dfrac{R}{\left(\dfrac{2GM}{R\upsilon_0^2} - 1\right)}$.

5.2.8. Однородный шар радиусом r скатывается без скольжения с вершины сферы радиусом R. Найти угловую скорость шара после отрыва от сферы. Начальная скорость шара пренебрежимо мала.

Пояснения

Будем рассматривать механическую систему: шар и сфера. Примем за нулевой уровень потенциальной энергии уровень центра масс сферы. Тогда на вершине сферы шар обладает потенциальной энергией

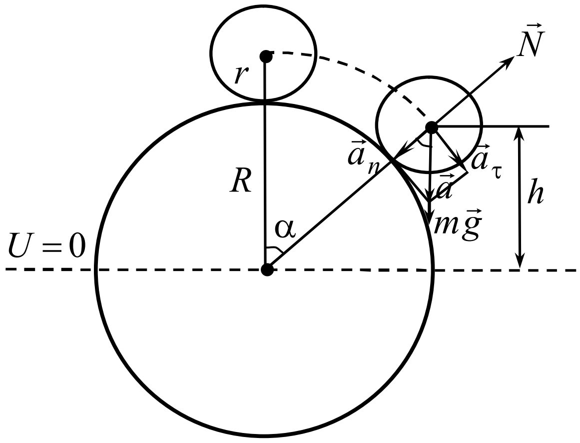
$$U_1 = mg(R+r).$$

В момент отрыва от сферы шар обладает потенциальной энергией

$$U_2 = mgh,$$

где $h = (R+r)\cos\alpha$, а также кинетической энергией

$$K_2 = \frac{m\upsilon^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2},$$



где υ – линейная скорость центра масс шара (центр масс движется по окружности радиусом $R+r$); I – момент инерции шара относительно центра масс; ω – угловая скорость шара после отрыва от сферы.

Пренебрегая силой трения качения между шаром и сферой, будем считать, что в системе сохраняется полная механическая энергия.

Для двух состояний: шар покоится на вершине сферы; шар отрывется от сферы – запишем закон сохранения полной механической энергии:

$$E_1 = E_2 .$$

Для нахождения $\cos\alpha$ запишем второй закон Ньютона для центра масс шара в проекции на нормальное направление:

$n): \; ma_n = mg\cos\alpha - N$.

В момент отрыва от сферы $N = 0$, тогда получим уравнение

$$m\frac{\upsilon^2}{R+r} = mg\cos\alpha .$$

Задания:

1. Запишите закон сохранения полной механической энергии для первого и второго состояний.

2. Найдите из закона сохранения $\cos\alpha$.

3. Найдите $\cos\alpha$ из второго закона Ньютона для центра масс шара в проекции на нормальное направление.

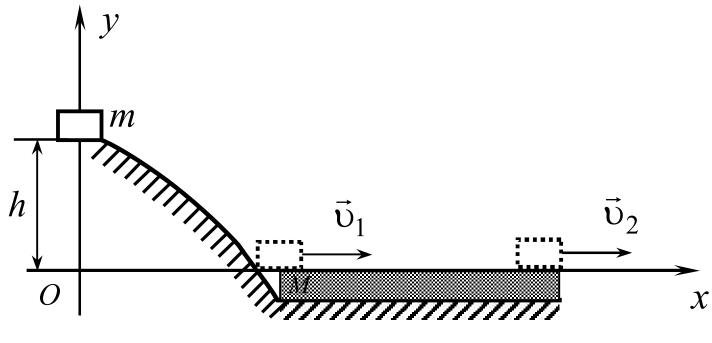
4. Приравняйте эти два выражения для $\cos\alpha$ и выразите из полученного уравнения ω, учитывая, что $\upsilon = \omega R$.

Ответ: $\omega = \sqrt{\dfrac{10g(R+r)}{17r^2}}$.

5.2.9. Небольшая шайба массой m без начальной скорости соскальзывает с гладкой горки высотой h и попадает на доску массой M, лежащую у основания горки на гладкой горизонтальной плоскости. Вследствие трения между шайбой и доской шайба тормозится и, начиная с некоторого момента, движется вместе с доской как единое целое. Найти работу силы трения в этом процессе.

Пояснения

Будем рассматривать механическую систему, состоящую из доски и шайбы.



По условию задачи поверхность горки и поверхности земли гладкая, следовательно, трентрение действует только между шайбой и доской.

На рисунке пунктиром обозначено положение шайбы, когда она попадает на доску со скоростью $\vec{\upsilon}_1$, и положение шайбы, когда она движется вместе с доской как единое целое со скоростью $\vec{\upsilon}_2$.

С момента попадания шайбы на доску сила тяжести будет скомпенсирована силой реакции опоры, и поэтому полный импульс системы шайба – доска в течение всего времени движения шайбы по доске сохраняется:

$$P_x = \text{const} .$$

Работа сил трения между шайбой и доской равна изменению полной механической энергии системы:

$$A_{\text{тр}} = E_2 - E_1 ,$$

где E_1 – полная механическая энергия системы в момент, когда шайба попадает на доску; E_2 – полная механическая энергия системы в момент, когда они движутся вместе с доской как единое целое.

Полная механическая энергия системы состоит из кинетической и потенциальной энергий входящих в нее тел в поле силы тяжести:

$$E = K + U .$$

Обозначим E_0 – полная механическая энергия системы в момент, когда шайба находится на вершине горки.

Выберем за нулевой уровень потенциальной энергии в поле силы тяжести поверхность доски. Тогда шайба на вершине горки будет обладать потенциальной энергией

$$E_0 = U_0 = mgh ,$$

а соскользнув к основанию горки, кинетической энергией

$$E_1 = K_1 = \frac{m\upsilon_1^2}{2} .$$

С момента соскальзывания шайбы с горки и до момента попадания ее на доску для системы горка – шайба будет выполняться закон сохранения полной механической энергии.

Пренебрегая толщиной доски, работа силы трения в этом процессе

$$A_{\text{тр}} = E_2 - E_1 = K_2 - K_1 ,$$

где $E_2 = K_2$ – кинетическая энергия системы в момент, когда шайба и доска движутся вместе как единое целое.

Задания:

1. Запишите закон сохранения полной механической энергии для системы

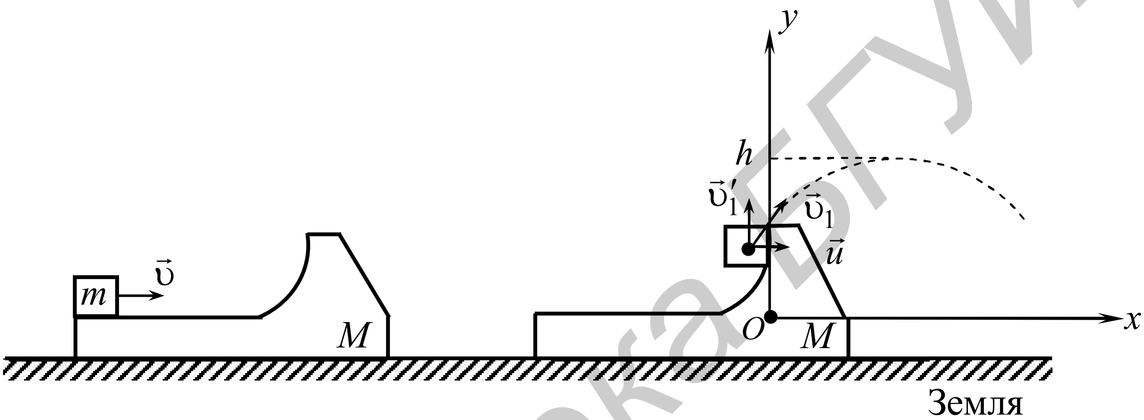
горка – шайба, найдите скорость υ_1, с которой шайба попадает на доску.

2. Запишите закон сохранения импульса для системы шайба – доска и найдите скорость υ_2, с которой они движутся вместе как единое целое.

3. Найдите работу силы трения $A_{\text{тр}}$.

Ответ: $$A_{\text{тр}} = -\frac{mMgh}{(m+M)}.$$

5.2.10. На гладкой горизонтальной плоскости находится тело массой M и на нем небольшая шайба массой m. Шайбе сообщили в горизонтальном направлении скорость υ. На какую высоту (по сравнению с первоначальным уровнем) она поднимется после отрыва от тела M ? Трения нет.



Пояснения

Будем рассматривать механическую систему, состоящую из шайбы и тела. Поскольку сила трения отсутствует, а внешние силы направлены вертикально, то в задаче будут выполняться два закона сохранения:

$$E = \text{const} \qquad \text{и} \qquad P_x = \text{const}.$$

Выберем за нулевой уровень потенциальной энергии шайбы уровень поверхности тела.

В начальный момент времени тело покоится, скорость шайбы $\vec{\upsilon}$. Полная механическая энергия системы в этот момент

$$E_1 = \frac{m\upsilon^2}{2} = \frac{m\upsilon_x^2}{2}.$$

В конечный момент времени скорость шайбы $\vec{\upsilon}_2$, а скорость тела $\vec{u}$.

Скорость шайбы в момент отрыва от тела (закон сложения скоростей)

$$\vec{\upsilon}_1 = \vec{\upsilon}_1' + \vec{u},$$

где $\vec{\upsilon}_1$ – скорость шайбы относительно земли; $\vec{\upsilon}_1'$ – скорость шайбы относительно тела; $\vec{u}$ – скорость тела относительно земли.

В проекции на ось x

$$\upsilon_{1x} = \upsilon_{1x}' + u_x.$$

Как видно из рисунка $\upsilon'_{1x} = 0$, следовательно,

$$\upsilon_{1x} = u_x .$$

После отрыва от тела шайба будет двигаться по параболе в поле силы тяжести и на высоте h проекция ее скорости $\vec{\upsilon}_{2x}$ будет равна $\vec{\upsilon}_{1x}$. Поэтому

$$\upsilon_{2x} = u_x .$$

Таким образом, закон сохранения проекции импульса для выбранных моментов времени, считая $\upsilon_x = \upsilon$, запишем

$$m\upsilon_x = m\upsilon_{1x} + Mu_x .$$

В конечный момент времени, когда шайба находится на высоте h, полная механическая энергия системы

$$E_2 = \frac{Mu_x^2}{2} + \frac{m\upsilon_{2x}^2}{2} + mgh .$$

Задания:

1. Найдите из закона сохранения проекции импульса вдоль оси x скорость u_x.

2. Найдите полную механическую энергию системы E_2 в конечный момент времени.

3. Запишите закон сохранения полной механической энергии системы для выбранных моментов времени.

4. Из закона сохранения энергии найдите высоту подъема шайбы после отрыва от тела.

Ответ: $h = \dfrac{M\upsilon^2}{2g(M+m)}$.

5.3. Задания для самостоятельного решения

1. Локомотив массой m начинает двигаться от станции так, что его скорость меняется по закону $\upsilon = \alpha\sqrt{s}$, где α – постоянная, s – пройденный путь. Найти суммарную работу всех сил, действующих на локомотив за первые t секунд после начала движения.

Ответ: $A = \dfrac{m\alpha^4 t^2}{8}$.

2. Частица массой m движется по окружности радиусом R с нормальным ускорением, которое меняется со временем по закону $a_n = \alpha t^2$, где α – постоянная. Найти зависимость от времени мощности всех сил, действующих на частицу, а также среднее значение этой мощности за первые t секунд после начала движения.

Ответ: $P = mr\alpha t$; $\langle P \rangle = \dfrac{mr\alpha t}{2}$.

3. Ствол пушки направлен под углом $\theta = 45^{\circ}$ к горизонтальной плоскости. Скорость снаряда относительно пушки $\upsilon_0 = 180$ м/с. Масса снаряда в $\eta = 50$ раз меньше массы пушки. Найти скорость пушки сразу после выстрела.

Ответ: $u = \dfrac{\upsilon_0 \cos\theta}{(1+\eta)} = 2{,}5$ м/с.

4. Две одинаковые тележки движутся друг за другом по инерции (без трения) с одной и той же скоростью $\vec{\upsilon}_0$. На задней тележке находится человек массой m. В некоторый момент человек прыгнул в переднюю тележку со скоростью $\vec{u}$ относительно своей тележки. Имея в виду, что масса каждой тележки равна M, найти скорости, с которыми будут двигаться обе тележки после этого.

Ответ: $\vec{\upsilon}_1 = \vec{\upsilon}_0 + \dfrac{mM\vec{u}}{(m+M)^2}$ (передняя тележка);

$\vec{\upsilon}_2 = \vec{\upsilon}_0 - \dfrac{m\vec{u}}{(m+M)}$ (задняя тележка).

5. Два горизонтальных диска свободно вращаются вокруг вертикальной оси, проходящей через их центры. Моменты инерции дисков относительно этой оси равны I_1 и I_2, а угловые скорости – $\vec{\omega}_1$ и $\vec{\omega}_2$. После падения верхнего диска на нижний оба диска благодаря трению между ними начали через некоторое время вращаться как единое целое. Найти: а) установившуюся угловую скорость вращения дисков; б) работу, которую совершили при этом силы трения.

Ответ: а) $\vec{\omega} = \dfrac{(I_1\vec{\omega}_1 + I_2\vec{\omega}_2)}{(I_1 + I_2)}$;

б) $A = -\dfrac{I_1 I_2 (\vec{\omega}_1 - \vec{\omega}_2)^2}{2(I_1 + I_2)}$.

6. Круглая горизонтальная платформа массой M и радиусом R вращается с угловой скоростью ω_1. На краю платформы стоит человек массой m. Найти угловую скорость платформы ω_2, если человек перейдет в центр платформы и остановится там, а также изменение кинетической энергии системы.

Ответ: $\omega_2 = \dfrac{(M + 2m)\omega_1}{M}$;

$\Delta K = \dfrac{mR^2\omega_1^2}{2M}(2m + M)$.

7. Телу на поверхности Земли сообщили скорость υ_1, направленную вертикально вверх. Определить скорость тела на высоте h над поверхностью Земли, считая A, φ_0. Известны радиус $R_{\text{З}}$ и масса Земли $M_{\text{З}}$, а также гравитационная постоянная G.

Ответ: $\upsilon_2 = \sqrt{\upsilon_1^2 - \dfrac{2GMh}{R(R+h)}}$.

8. Пуля массой m, летящая со скоростью υ, попадает в деревянный шар массой M, подвешенный на невесомой, нерастяжимой нити, и застревает в нем. На какую высоту h поднимется шар с пулей после столкновения?

Ответ: $h = \dfrac{m^2\upsilon^2}{2g(m+M)^2}$.

9. Летевшая горизонтально пуля массой m попала, застряв, в тело массой M, которое подвешено на двух одинаковых нитях длиной l. В результате нити отклонились на угол θ. Считая $m \ll M$, найти скорость пули перед попаданием в тело.

Ответ: $\upsilon = \dfrac{2M}{m}\sqrt{gl}\sin\dfrac{\theta}{2}$.

10. Частица движется по замкнутой траектории в центральном силовом поле, где ее потенциальная энергия $U = kr^2$, где r – расстояние частицы до центра поля o. Найти массу частицы, если наименьшее расстояние ее до точки o равно r_1, а скорость на наибольшем расстоянии от этой точки равна υ_2.

Ответ: $m = \dfrac{2kr_1^2}{\upsilon_2^2}$.

6. Механические колебания

6.1. Основные формулы

Второй закон Ньютона (уравнение гармонических колебаний) для частицы массой m, движущейся вдоль оси x, под действием упругой силы $F_x = -kx$:

$$ma_x = F_x = -kx,$$

где x – смещение точки от положения равновесия; $a_x = \ddot{x}$.

Дифференциальное уравнение гармонических колебаний

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0,$$

где $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$ – собственная циклическая частота гармонических колебаний.

Кинематический закон гармонических колебаний:

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi_0)$$

или

$$x(t) = A\sin(\omega_0 t + \varphi_0),$$

где A – амплитуда колебаний; φ_0 – начальная фаза колебаний (A, φ_0 – определяются из начальных условий); $\varphi(t) = \omega_0 t + \varphi_0$ – фаза колебаний в момент времени t.

Проекция скорости материальной точки при гармонических колебаниях

$$\upsilon_x(t) = \dot{x}(t) = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0).$$

Проекция ускорения материальной точки при гармонических колебаниях

$$a_x(t) = \ddot{x}(t) = -A\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi_0).$$

Период гармонических колебаний

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0}.$$

Период малых гармонических колебаний физического маятника

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgl}},$$

где I – момент инерции физического маятника; l – расстояние от оси вращения до центра масс маятника.

Период малых гармонических колебаний математического маятника

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}},$$

где l – длина математического маятника.

Полная механическая энергия гармонических колебаний

$$E = \frac{m\upsilon_x^2}{2} + \frac{kx^2}{2} = K^{\max} = U^{\max} = \frac{kA^2}{2}.$$

Второй закон Ньютона для затухающих колебаний вдоль оси x

$$ma_x = F_x + F_c = -kx - r\upsilon_x,$$

где F_c – сила сопротивления среды; r – коэффициент сопротивления среды.

Дифференциальное уравнение затухающих колебаний

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0,$$

где $2\beta = \frac{r}{m}$; $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$; β – коэффициент затухания.

В случае $\beta < \omega_0$ общее решение дифференциального уравнения затухающих колебаний

$$x(t) = A_0 e^{-\beta t}\cos(\omega' t + \varphi_0),$$

где $\omega' = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$ – частота затухающих колебаний; $A = A_0 e^{-\beta t}$ – амплитуда затухающих колебаний; $T = \frac{2\pi}{\omega'} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}$ – период затухающих колебаний.

Логарифмический декремент затухания

$$\lambda = \ln\frac{A(t)}{A(t+T)} = \ln\frac{A_0 e^{-\beta t}}{A_0 e^{-\beta(t+T)}} = \ln e^{\beta T} = \beta T,$$

Добротность колебательной системы

$$Q = \frac{\pi}{\lambda} = \frac{\pi}{\beta T}.$$

Второй закон Ньютона для вынужденных колебаний вдоль оси x

$$ma_x = F_x + F_c + F_B = -kx - r\upsilon_x + F_0\cos\omega t,$$

где $F_B = F_0\cos\omega t$ – внешняя вынуждающая сила; ω – частота вынуждающей силы.

Дифференциальное уравнение вынужденных колебаний

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = f_0\cos\omega t,$$

где $f_0 = \frac{F_0}{m}$.

Общее решение дифференциального уравнения вынужденных колебаний

$$x = A_0 e^{-\beta t}\cos(\omega' t + \varphi_0) + A(\omega)\cos(\omega t - \varphi(\omega)),$$

где $A(\omega)$ – амплитуда вынуждающей силы, равная

$$A(\omega) = \frac{f_0}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4\beta^2\omega^2}};$$

$\varphi(\omega)$ – величина сдвига по фазе вынужденных колебаний от обусловившей их вынуждающей силы;

$$\mathrm{tg}\varphi = \frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}.$$

При частоте вынуждающей силы (резонансной частоте) $\omega_р = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$ амплитуда смещения достигает максимального значения

$$A_{\max} = A(\omega_р) = \frac{f_0}{2\beta\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}.$$

6.2. Задания с пояснениями

6.2.1. Частица массой 20 г совершает гармонические колебания по закону $x(t) = 0,5\sin(\pi t + \frac{\pi}{2})$ (м). Найти зависимость от времени скорости и ускорения частицы. Чему равна фаза колебаний φ и смещение точки x в момент времени $t = \frac{T}{4}$ с начала колебаний? Чему равна полная механическая энергия частицы.

Пояснения

Кинематический закон гармонических колебаний частицы вдоль оси x имеет вид

$$x(t) = A\sin(\omega_0 t + \varphi_0).$$

Как видно в нашем случае: $A = 0,5$ м; $\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$; $\omega_0 = \pi$ рад/с.

Период колебаний $T = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{2\pi}{\pi} = 2$ с.

Проекция скорости частицы, совершающей колебания вдоль оси x, определяется по формуле

$$\upsilon_x = \dot{x}.$$

Проекция ускорения частицы

$$a_x = \ddot{x}.$$

Фаза колебаний

$$\varphi = (\omega_0 t + \varphi_0).$$

Полная механическая энергия частицы

$$E = \frac{kA^2}{2},$$

где $k = m\omega_0^2$ – коэффициент упругости.

Задания

1. Найдите зависимость от времени скорости и ускорения частицы.

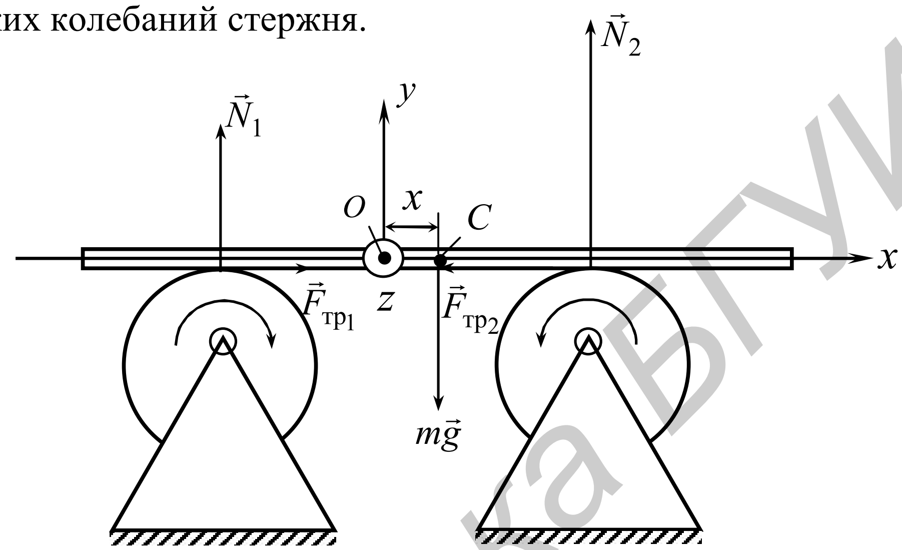
2. Найдите фазу колебаний и смещение частицы в момент времени $t = \frac{T}{4}$.

3. Найдите полную механическую энергию частицы.

Ответ: $\upsilon_x(t) = 0,5\pi\cos\left(\pi t + \frac{p}{2}\right)$; $a_x(t) = -0,5\pi^2\sin\left(\pi t + \frac{p}{2}\right)$; $\varphi = \pi$; $x = 0$;

$E = 2,46\cdot 10^{-2}$ Дж.

6.2.2 Однородный стержень положили на два быстро вращающихся блока, как показано на рисунке ниже. Расстояние между осями блоков l, коэффициент трения между стержнем и блоками k. Найти период гармонических колебаний стержня.



Пояснения

В данной системе центр масс стержня будет совершать колебания вдоль оси x относительно точки O. Покажем, что колебания будут гармонические.

Запишем второй закон Ньютона для стержня в векторном виде.

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N}_1 + \vec{N}_2 + \vec{F}_{тр1} + \vec{F}_{тр2}.$$

Спроектируем это уравнение на ось x и на ось y:

$$x)\ \ ma = F_{тр1} - F_{тр2};$$

$$y)\ \ 0 = N_1 + N_2 - mg.$$

Здесь сила трения связана с силой реакции опоры соотношением:

$$F_{тр} = kN.$$

Тогда

$$x)\ \ ma = k(N_1 - N_2).$$

Чтобы найти $N_1 - N_2$, воспользуемся уравнением моментов сил относительно оси z. Так как стержень не перемещается относительно оси z, то $\sum M_z = 0$ относительно точки O, поэтому

$$z)\ \ 0 = mgx + N_1\frac{l}{2} - N_2\frac{l}{2}.$$

Получив из второго закона Ньютона для стержня (проекции уравнения на ось x) дифференциальное уравнение колебаний в виде $\ddot{x}+\omega_0^2 x=0$, становится понятно, что колебания стержня относительно точки O являются гармоническими, где ω_0 – собственная циклическая частота колебаний стержня, определяемая заданными константами.

Период колебаний связан с циклической частотой соотношением

$$T=\frac{2\pi}{\omega_0}.$$

Задания:

1. Из уравнения моментов сил найдите N_1-N_2.

2. Преобразуйте второй закон Ньютона для стержня в дифференциальное уравнение второго порядка относительно x.

3. Найдите ω_0, а затем период колебаний стержня T.

Ответ: $T=\pi\sqrt{\frac{2l}{kg}}$.

6.2.3. Затухающие колебания точки происходят по закону $x=A_0e^{-\beta t}\sin\omega t$. Найти: а) амплитуду смещения и скорость точки в момент $t=0$; б) моменты времени, когда точка достигает крайних положений.

Пояснения

Амплитуда затухающих колебаний $A=A_0e^{-\beta t}$. Скорость точки есть первая производная по времени от x. Зная, как меняется амплитуда колебаний и скорость точки со временем, легко найти A и υ в любой момент времени.

В крайних положениях точка останавливается, т. е. в этих точках $\upsilon=0$. Следовательно, можно найти время, когда точка оказывается в крайних положениях.

Задания:

1. Найдите A в момент $t=0$.

2. Продифференцируйте x по времени, найдите $\upsilon(t)$.

3. Найдите υ в момент $t=0$.

4. Приравняв $\upsilon(t)=0$, найдите моменты времени, когда точка находится в крайних положениях.

Ответ: а) $A=A_0$ и $\upsilon=A_0\omega$;

б) $t=\dfrac{\operatorname{arctg}(\frac{\omega}{\beta})+n\pi}{\omega}$.

6.2.4. Найти добротность математического маятника длиной l, если за промежуток времени τ его полная механическая энергия уменьшилась в η раз.

Пояснения

Добротность колебательной системы определяется по формуле $Q = \dfrac{\pi}{\beta T}$,

где β – коэффициент затухания; T – период колебательной системы. В нашем случае колебательной системой является математический маятник. Период затухающих колебаний математического маятника $T = \dfrac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}$, где

ω_0 – собственная частота математического маятника, равная $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{g}{l}}$.

Смещение математического маятника от положения равновесия при затухающих колебаниях найдем по формуле ($\varphi_0 = 0$):

$$x(t) = A_0 e^{-\beta t} \cos\omega' t,$$

где $\omega' = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$. При большой добротности системы (малом затухании) $\beta << \omega_0$, тогда можно считать $\omega' \approx \omega_0$.

Следовательно, полную механическую энергию затухающих колебаний математического маятника приближенно можно рассчитать по формуле

$$E = \frac{m\omega'^2 A^2(t)}{2} = \frac{m\omega_0^2 A_0^2 e^{-2\beta t}}{2}.$$

Задания:

1. Найдите полную механическую энергию математического маятника E_0 в момент времени $t = 0$.

2. Найдите полную механическую энергию математического маятника E_τ в момент времени $t = \tau$.

3. Из условия, что $\dfrac{E_0}{E_\tau} = \eta$, найдите β.

4. Зная ω_0 и β, найдите T, а затем Q.

Ответ: $Q = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{4g\tau^2}{l \ln^2 \eta} - 1}$.

6.2.5. Амплитуды смещений вынужденных гармонических колебаний при частотах ω_1 и ω_2 равны между собой. Найти частоту $\omega_р$, при которой амплитуда смещения максимальна.

Пояснения

Амплитуда смещения вынужденных колебаний определяется формулой

$$A = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}}.$$

Резонансная частота, при которой амплитуда смещения достигает максимального значения, равна $\omega_р = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$.

Задания:

1. Найдите амплитуды смещений A_1 и A_2, соответствующие частотам ω_1 и ω_2, приравняйте их.

2. Преобразовав полученное равенство, выразите из него $\omega_0^2 - 2\beta^2$.

3. Найденное выражение и будет $\omega_р$.

Ответ: $\omega_р = \sqrt{\dfrac{\omega_1^2 + \omega_2^2}{2}}$.

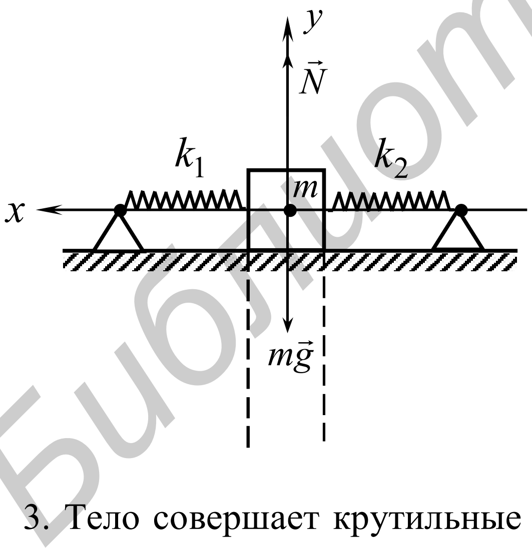
6.3. Задания для самостоятельного решения

1. Точка совершает гармонические колебания вдоль некоторой прямой с периодом $T = 0{,}6$ с и амплитудой $A = 0{,}1$ м. Найти среднюю скорость точки за время, в течение которого она проходит путь $\dfrac{A}{2}$:

а) из крайнего положения; б) из положения равновесия.

Ответ: а) $\langle \upsilon \rangle = 0{,}5$ м/с; б) $\langle \upsilon \rangle = 1$ м/с.

2. Определить период малых продольных колебаний тела массой m в системе, показанной на рисунке, если жесткости пружинок равны k_1 и k_2, а их массы и трение пренебрежимо малы. В положении равновесия можно считать, что пружинки не деформированы.



Ответ: $T = 2\pi \sqrt{\dfrac{m}{(k_1 + k_2)}}$.

3. Тело совершает крутильные колебания по закону $\varphi = \varphi_0 e^{-\beta t} \cos \omega t$, где φ_0, β, ω – постоянные величины. Найти: а) угловую скорость $\dot{\varphi}$ и угловое ускорение $\ddot{\varphi}$ тела в момент $t = 0$;

б) моменты времени, когда угловая скорость максимальна.

Ответ: а) $\dot{\varphi}\big|_{t=0} = -\beta\varphi_0$; $\ddot{\varphi}\big|_{t=0} = (\beta^2 - \omega^2)\varphi_0$;

б) $t_n = \dfrac{1}{\omega}(\mathrm{arctg}\dfrac{\omega^2 - \beta^2}{2\beta\omega}) + n\pi$, где n = 0, 1, 2, …

4. Однородный диск радиусом R может вращаться вокруг горизонтальной оси, перпендикулярной его плоскости и проходящей через край диска. Найти период малых колебаний этого диска, если логарифмический декремент затухания равен λ.

Ответ: $T = \sqrt{\dfrac{3R}{2g}(4\pi^2 + \lambda^2)}$.

5. Найти разность фаз φ между смещением и вынуждающей силой при резонансе смещения, если собственная частота колебаний ω_0 и коэффициент затухания β.

Ответ: $\mathrm{tg}\varphi = \sqrt{\dfrac{\omega_0^2}{\beta^2} - 2}$.

7. Упругие волны

7.1. Основные формулы

Волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 o}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 o}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 o}{\partial z^2}=\frac{1}{\upsilon^2}\frac{\partial^2 o}{\partial t^2},$$

где $o=o(x,\ y\ ,z\ ,t)$ – смещение точек среды от положения равновесия в момент времени t; υ– скорость распространения колебаний в среде (фазовая скорость волны).

Решение волнового уравнения в виде плоской незатухающей волны

$$o(\vec{r},\ t)=A\cos(\omega t-\vec{k}\vec{r}+\varphi_0),$$

где $o(\vec{r},\ t)$ – смещение частицы среды от положения равновесия с радиусом-вектором $\vec{r}$ в момент времени t; A – амплитуда волны; ω – циклическая частота волны; $\vec{k}=\dfrac{\omega}{\upsilon}\vec{n}$ – волновой вектор; $\vec{n}$ – единичный вектор в направлении распространения волны; $\vec{k}\vec{r}$ – скалярное произведение векторов $\vec{k}$ и $\vec{r}$; φ_0 – начальная фаза волны; r – радиус-вектор любой точки волновой поверхности.

Скалярное произведение $\vec{k}\vec{r}$ можно представить через координаты $x,\ y,\ z$:

$$\vec{k}\vec{r}=k_x x+k_y y+k_z z,$$

где $k=\dfrac{2\pi}{\lambda}$ – волновое число, а $k_z=\dfrac{2\pi}{\lambda}\cos\gamma$, $k_x=\dfrac{2\pi}{\lambda}\cos\alpha$, $k_y=\dfrac{2\pi}{\lambda}\cos\beta$; $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ – углы, которые вектор $\vec{k}$ образует с координатными осями.

Уравнение плоской затухающей волны

$$o(\vec{r},\ t)=A_0 e^{-\gamma\vec{r}\vec{n}}\cos(\omega t-\vec{k}\vec{r}+\varphi_0),$$

где $A_0 e^{-\gamma\vec{r}\vec{n}}=A$ – амплитуда затухающей волны; γ – коэффициент затухания среды.

Решение волнового уравнения в виде сферической незатухающей волны

$$o(\vec{r},\ t)=\frac{A}{r}\cos(\omega t-kr+\varphi_0),$$

где r – расстояние от источника до рассматриваемой точки.

Уравнение сферической затухающей волны

$$o(\vec{r},\ t)=\frac{A}{r}e^{-\gamma r}\cos(\omega t-kr+\varphi_0).$$

Длина волны

$$\lambda=\upsilon T=\frac{\upsilon}{\nu},$$

где υ – фазовая скорость волны; T – период колебаний; ν – частота колебаний.

Уравнение стоячей волны

$$о = о_1 + о_2 = 2A\cos kx\cos\omega t = 2A(\cos\frac{2\pi x}{\lambda})\cos\omega t,$$

где $A_{\text{ст}} = 2A\,|\cos\frac{2\pi x}{\lambda}|$ – амплитуда стоячей волны.

В точках среды, где $\frac{2\pi x}{\lambda} = \pm m\pi$, $(m = 0,\ 1,\ 2,...)$, ее частицы колеблются с максимальными амплитудами, т. е. $A_{\text{ст}} = 2A$, образуя пучности стоячей волны.

Координаты пучностей

$$x_m^{\text{пучн}} = \pm m\frac{\lambda}{2}.$$

В точках среды, где $\frac{2\pi x}{\lambda} = \pm(m + \frac{1}{2})\pi$, $(m = 0,\ 1,\ 2,...)$, ее частицы покоятся, т. е. $A_{\text{ст}} = 0$. Эти точки называются узлами стоячей волны.

Координаты узлов

$$x_m^{\text{узл}} = \pm(m + \frac{1}{2})\frac{\lambda}{2}.$$

Энергия упругой волны определяется формулой

$$W = \int\limits_{(V)} w\,dV,$$

где w – объемная плотность энергии; V – объем волнового пространства.

Объемная плотность энергии упругой плоской волны, распространяющейся вдоль оси x в среде с плотностью ρ:

$$w = \frac{1}{2}\rho((\frac{\partial о}{\partial t})^2 + \upsilon^2(\frac{\partial о}{\partial x})^2),$$

где $w_{\text{п}} = \frac{\rho}{2}\upsilon^2(\frac{\partial о}{\partial x})^2$ – объемная плотность потенциальной энергии;

$w_{\text{к}} = \frac{\rho}{2}(\frac{\partial о}{\partial t})^2$ – объемная плотность кинетической энергии.

Формула Доплера для звуковых волн (источник и приемник движущихся вдоль соединяющей их прямой)

$$н = н_0\frac{\upsilon \pm \upsilon_{\text{пр}}}{\upsilon \pm \upsilon_{\text{ист}}},$$

где $н$ – циклическая частота, воспринимаемая приемником; $н_0$ – собственная циклическая частота источника; υ – скорость волны в данной среде; $\upsilon_{\text{ист}}$, $\upsilon_{\text{пр}}$ – скорости источника и приемника относительно среды (верхние знаки соответствуют приближению источника и приемника друг к другу, нижние – их взаимному удалению).

7.2. Задания с пояснениями

7.2.1. Плоская гармоническая волна с частотой ω распространяется со скоростью υ в направлении, составляющем углы α, β, γ с осями x, y, z. Найти разность фаз колебаний в точках среды с координатами x_1, y_1, z_1 и x_2, y_2, z_2.

Пояснения

Уравнение плоской волны с $\varphi_0 = 0$ имеет вид

$$o(\vec{r},\ t) = A\cos(\omega t - \vec{k}\vec{r}).$$

Фаза колебаний

$$\varphi = (\omega t - \vec{k}\vec{r}).$$

Задания:

1. Найдите $o(\vec{r}_1,\ t)$ и $o(\vec{r}_2,\ t)$.

2. Выразите φ_1 и φ_2 через x_1, y_1, z_1 и x_2, y_2, z_2, а волновой вектор $\vec{k}$ через его проекции на оси x, y, z и соответствующие углы α, β, γ.

3. Найдите $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$.

Ответ: $\Delta\varphi = (\dfrac{\omega}{\upsilon})\big((x_1 - x_2)\cos\alpha + (y_1 - y_2)\cos\beta + (z_1 - z_2)\cos\gamma\big)$.

7.2.2. В неподвижной среде K распространяется упругая плоская волна $o = A\cos(\omega t - kx)$. Найти уравнение этой волны в системе отсчета K', движущейся в положительном направлении оси x с постоянной скоростью V, по отношению к среде K.

Пояснения

Фазовая скорость волны относительно системы K равна $\upsilon = \dfrac{\omega}{k}$. Уравнение колебаний каждой точки среды относительно системы K задано по условию задачи, тогда смещение каждой точки относительно системы K' можно представить в виде

$$o' = A\cos(\omega' t - k'x'),$$

где $k' = \dfrac{\omega'}{\upsilon - V}$ – волновой вектор в системе K'; ω' – частота колебаний точек среды в системе K'.

Согласно эффекту Доплера

$$\omega' = \omega\frac{\upsilon - V}{\upsilon}.$$

Фаза колебаний в системе K'

$$\varphi' = (\omega' t - k'x'),$$

где $x' = x - Vt$.

Задания:

1. Найдите фазу колебаний точек среды в системе K'.
2. Найдите уравнение упругой плоской волны в системе K'.

Ответ: $o' = A\cos\left[(1-\dfrac{V}{\upsilon})\omega t - kx'\right]$.

7.2.3. Уравнение плоской звуковой волны имеет вид $o = 60\cos(1800t - 5{,}3x)$, где o – в микрометрах, t – в секундах, x – в метрах.

Найти:

а) отношение амплитуды смещения частиц среды к длине волны;

б) амплитуду колебаний скорости частиц среды и ее отношение к скорости распространения волны;

в) амплитуду колебаний относительной деформации среды и ее связь с амплитудой колебаний скорости частиц среды.

Пояснения

Запишем уравнение плоской незатухающей волны, распространяющейся вдоль оси x, в общем виде

$$o = A\cos(\omega t - kx),$$

где A – амплитуда смещения.

Как видно из условия задачи, $A = 60\ \text{мкм} = 6\cdot 10^{-5}\ \text{м}$, $k = 5{,}3\ \text{м}^{-1}$, $\omega = 1800\ \text{с}^{-1}$.

Длину волны найдем по формуле

$$\lambda = \frac{2\pi}{k}.$$

Скорость колебаний частиц среды есть первая производная по времени от $o = A\cos(\omega t - kx)$:

$$\upsilon_x = \frac{\partial o}{\partial t} = -A\omega\sin(\omega t - kx).$$

Таким образом, амплитуда колебаний скорости частиц среды $A_\upsilon = A\omega$.

Фазовая скорость волны

$$\upsilon = \frac{\omega}{k}.$$

Относительная деформация среды ε есть первая производная по координате x от $o = A\cos(\omega t - kx)$:

$$\varepsilon = \frac{\partial o}{\partial x} = -Ak\sin(\omega t - kx).$$

Таким образом, амплитуда колебаний относительной деформации среды

$$A_\varepsilon = Ak.$$

Задания:

1. Найдите отношение амплитуды смещения частиц среды к длине волны.

2. Найдите отношение амплитуды колебаний скорости частиц среды к скорости распространения волны.

3. Найдите связь амплитуды колебаний относительной деформации среды с амплитудой колебаний скорости частиц среды.

Ответ: а) $\dfrac{A}{\lambda} = 5{,}1 \cdot 10^{-5}$; б) $\dfrac{A_\upsilon}{\upsilon} = 3{,}2 \cdot 10^{-4}$; в) $A_\upsilon = \dfrac{1}{\upsilon} A_\varepsilon$.

7.2.4. Найти энергию упругой стоячей волны в однородном тонком стержне массой M, один из концов которого закреплен, если на свободном конце созданы колебания с собственной частотой ν_m и амплитудой A.

Пояснения

Расположим стержень вдоль оси x. В стержне, как сказано в условии, образуются стоячие волны.

Уравнение стоячей волны

$$o(x,\ t) = 2A\cos k_m x \cos \omega_m t,$$

где $\omega_m = 2\pi\nu_m$; $k_m = \dfrac{\omega_m}{\upsilon}$; ($m$ = 0, 1, 2, …).

Энергия упругой волны определяется формулой

$$W = \int\limits_{(V)} w dV .$$

Объемная плотность энергии упругой стоячей волны в стержне

$$w = \frac{1}{2}\rho((\frac{\partial o}{\partial t})^2 + \upsilon^2(\frac{\partial o}{\partial x})^2);$$

где $dV = Sdx$; $S -$ площадь поперечного сечения стержня; $\rho -$ плотность вещества стержня.

Поскольку по условию задачи один конец стержня закреплен, то в этой точке образуется узел стоячей волны, т. е.

$$k_m l = \pi m - \frac{\pi}{2}, \text{ или } \quad 2k_m l = (2m-1)\pi .$$

Откуда $\sin 2k_m l = 0$.

Задания:

1. Найдите $\dfrac{\partial o}{\partial t}$.

2. Найдите $\dfrac{\partial o}{\partial x}$.

3. Найдите объемную плотность энергии упругой стоячей волны w.

4. Вычислите интеграл $W = \int\limits_0^l wSdx$, где $l -$ длина стержня.

5. Используя условие $\sin 2k_m l = 0$, найдите окончательно W.

6. Выразите полученный ответ через массу стержня M.

Ответ: $W = \rho A^2 \omega_m^2 Sl = 4\pi^2 \nu_m A^2 M$.

7.2.5. В однородной среде распространяется плоская упругая волна вида $o = Ae^{-\gamma x}\cos(\omega t - kx)$, где A, γ, ω и k – постоянные. Найти разность фаз колебаний в точках, где амплитуды смещения частиц среды отличаются друг от друга на η.

Пояснения

Разность фаз колебаний в точках среды с координатами x_1 и x_2

$$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = k(x_2 - x_1).$$

Амплитуды смещения при затухающих колебаниях в точках с координатами x_1 и x_2

$$A_1 = A_0 e^{-\gamma x_1}, \qquad A_2 = A_0 e^{-\gamma x_2}.$$

По условию задачи

$$\frac{A_1 - A_2}{A_1} = \eta.$$

Задания:

1. Из условия $\dfrac{A_1 - A_2}{A_1} = \eta$ найдите $x_1 - x_2$.

2. Найдите $\Delta\varphi$, используя полученное выражение.

Ответ: $\Delta\varphi = -\dfrac{2\pi}{\gamma\lambda}\ln(1-\eta)$.

7.3. Задания для самостоятельного решения

1. Найти волновой вектор $\vec{k}$ и скорость υ волны, имеющей вид

$$o = A\cos(\omega t - \alpha x - \beta y - \gamma z).$$

Ответ: $\vec{k} = \alpha\vec{i} + \beta\vec{j} + \gamma\vec{k}$; $\upsilon = \dfrac{\omega}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}}$.

2. Определить длину плоской упругой волны, если известно, что смещение точки, отстоящей от источника волн на расстоянии $x = 0{,}1$ м в момент $t = \dfrac{T}{4}$ равно $\dfrac{A}{2}$.

Ответ: $\lambda = 1{,}2$ м.

3. Определить скорость распространения волн в упругой среде υ, если разность фаз колебаний двух точек среды, отстоящих друг от друга на расстоянии Δx, равна $\Delta\varphi$. Частота колебаний ν.

Ответ: $\upsilon = 6\nu\Delta x$.

4. В однородной среде с плотностью ρ установилась продольная стоячая волна $о = A\cos kx\cos\omega t$. Найти выражения для объемной плотности:

а) потенциальной энергии $\omega_{п}$;

б) кинетической энергии $\omega_{к}$.

Ответ: $w_{п} = \dfrac{\rho A^2\omega^2}{2}\sin^2 kx\cos^2\omega t$;

$$w_{к} = \frac{\rho A^2\omega^2}{2}\cos^2 kx\sin^2\omega t.$$

5. В однородном стержне, площадь сечения которого S и плотность ρ, установилась стоячая волна $о = A\sin kx\cos\omega t$. Найти полную механическую энергию, заключенную между сечениями, которые проходят через соседние узлы смещения.

Ответ: $W = \dfrac{\pi S\rho\omega^2 A^2}{4k}$.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Производные и интегралы

Производные

1. $(Cu)' = Cu'$.
2. $(u + \upsilon)' = u' + \upsilon'$.
3. $(u\upsilon)' = u'\upsilon + \upsilon' u$.
4. $\left(\dfrac{u}{\upsilon}\right)' = \dfrac{u'\upsilon - u\upsilon'}{\upsilon^2}$.
5. $(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$.
6. $(C)' = 0$.
7. $(x)' = 1$.
8. $(x^n)' = nx^{n-1}$.
9. $\left(\dfrac{1}{x}\right)' = -\dfrac{1}{x^2}$.
10. $(e^x)' = e^x$
11. $(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
12. $(e^{nx})' = ne^{nx}$.
13. $(a^x)' = a^x \ln a$.
14. $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$.
15. $(\sin ax)' = a\cos x$.
16. $(\cos ax)' = -a\sin x$.
17. $(\mathrm{tg}x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$.
18. $(\mathrm{ctg}x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$.

Неопределенные интегралы

1. $\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1)$.
2. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln x + C$.
3. $\int \sin x dx = -\cos x + C$.
4. $\int \cos x dx = \sin x + C$.
5. $\int \dfrac{dx}{a^2 + x^2} = \dfrac{1}{a}\mathrm{arctg}\dfrac{x}{a} + C$.
6. $\int \dfrac{dx}{a^2 - x^2} = \dfrac{1}{2a}\ln\dfrac{a+x}{a-x} + C$.
7. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \ln(x + \sqrt{x^2 - a^2}) + C$.
8. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\dfrac{x}{a} + C$.

Определенный интеграл

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a), \quad \text{где} \quad F'(x) = f(x).$$

Литература

1. Савельев, И. В. Курс физики. В 3 т. / И. В. Савельев. – М. : Наука, 1989.
2. Курс общей физики. В 3 т. / А. А. Детлаф [и др.]. – М. : Высш. шк., 1989.
3. Иродов, И. Е. Задачи по общей физике / И. Е. Иродов. – М. : Наука, 1988.
4. Савельев, И. В. Сборник вопросов и задач по общей физике / И. В. Савельев. – М. : Наука, 1988.
5. Общая физика в задачах и решениях / В. И. Мурзов [и др.]. – Минск : Выш. шк., 1986.
6. Механика, колебания и волны, специальная теория относительности / Ж. П. Лагутина [и др.]. – Минск : МРТИ, 1992.
7. Беликов, Б. С. Решение задач по физике. Общие методы / Б. С. Беликов. – М. : Высш. шк., 1986.
8. Горячун, Н. В. Физика. Методическое пособие к выполнению контрольных работ для студентов ФЗО / Н. В. Горячун. – Минск : БГУИР, 2011.

Св. план 2014, поз. 45

Учебное издание

Горячун Наталья Владимировна

ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАДАНИЯ ПО ФИЗИКЕ. МЕХАНИКА

ПОСОБИЕ

Редактор *Е. И. Герман*
Корректор *Е. Н. Батурчик*
Компьютерная правка, оригинал-макет *В. М. Задоля*

Подписано в печать 24.02.2015. Формат 60x84 1/16. Бумага офсетная. Гарнитура «Таймс». Отпечатано на ризографе. Усл. печ. л. 4,3. Уч.-изд. л. 4,0. Тираж 200 экз. Заказ 202.

Издатель и полиграфическое исполнение: учреждение образования «Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники». Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя, распространителя печатных изданий №1/238 от 24.03.2014, №2/113 от 07.04.2014, №3/615 от 07.04.2014. ЛП №02330/264 от 14.04.2014. 220013, Минск, П. Бровки, 6