

Министерство образования Республики Беларусь  
Учреждение образования  
«Белорусский государственный университет  
информатики и радиоэлектроники»

Факультет компьютерных систем и сетей

Кафедра высшей математики

**О. Ф. Борисенко, А. А. Карпук**

**СПЕЦИАЛЬНЫЕ ГЛАВЫ МАТЕМАТИКИ:  
ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ,  
ОПЕРАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ**

*Рекомендовано УМО по образованию в области информатики  
и радиоэлектроники в качестве учебно-методического пособия  
для специальностей I ступени высшего образования, закрепленных за УМО*

Минск БГУИР 2020

УДК 517.5(076)  
ББК 22.16я73  
Б82

**Рецензенты:**

кафедра высшей математики учреждения образования  
«Военная академия Республики Беларусь»  
(протокол №11 от 28.10.2019);

профессор кафедры математической кибернетики  
Белорусского государственного университета  
академик НАН Беларуси, доктор физико-математических наук,  
профессор В. И. Корзюк

**Борисенко, О. Ф.**

Б82      Специальные главы математики : функции комплексной переменной,  
операционное исчисление : учеб.-метод. пособие / О. Ф. Борисенко,  
А. А. Карпук. – Минск : БГУИР, 2020. – 270 с. : ил.  
ISBN 978-985-543-565-6.

Приведено большое количество типовых задач и примеров с подробными решениями, что поможет студентам вузов при выполнении типовых расчетов по ФКП и операционному исчислению, а студентам заочных отделений вузов – при выполнении контрольных работ.

**УДК 517.5(076)**  
**ББК 22.16я73**

**ISBN 978-985-543-565-6**

© Борисенко О. Ф., Карпук А. А., 2020  
© УО «Белорусский государственный  
университет информатики  
и радиоэлектроники», 2020

## ВВЕДЕНИЕ

Данное учебно-методическое пособие имеет четко выраженный практико-ориентированный характер. Изложение материала лекционное, приведено большое количество типовых задач и примеров с подробными решениями, в конце каждой лекции приводятся задачи и упражнения (с ответами) для самостоятельной работы. Все это дает возможность студентам очной, заочной и дистанционной форм обучения, а также магистрантам не только успешно овладеть методами теории функций комплексной переменной и операционного исчисления, но и применить их в решении уравнений математической физики, научных и инженерных задач, возникающих в профессиональной деятельности будущих специалистов.

Нумерация формул, теорем и примеров в пособии лекционная. Начало доказательства теорем, решений примеров отмечено знаком  $\Delta$ , а конец доказательства и решения – знаком  $\blacktriangle$ ; примеры повышенной сложности – знаком \*.

Когда работа над рукописью этой книги подходила к концу, ушел из жизни соавтор, душа всего этого проекта, профессор А. А. Карпук. Светлая память об Андрее Андреевиче надолго сохранится в его добрых делах. Настоящее пособие – одно из таких дел.

# ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

## Лекция 1

### ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ

**Последовательности комплексных чисел.**

**Предел последовательности комплексных чисел.**

**Кривые и области на комплексной плоскости.**

**Задачи и упражнения**

Напомним некоторые сведения о комплексных числах.

Комплексным числом (далее – к. ч.) называется число вида  $z = x + iy$ , где  $x = \operatorname{Re} z$  – действительная,  $y = \operatorname{Im} z$  – мнимая части к. ч.  $z$ ,  $i^2 = -1$ . На плоскости  $XU$  число  $z = x + iy$  изображается точкой с абсциссой  $x$  и ординатой  $y$ . Таким образом, множество к. ч.  $\mathbb{C}$  отождествляется с множеством точек плоскости  $XU$ , которое будем обозначать также  $\mathbb{C}$ . Модуль к. ч.  $z = x + iy$  вычисляется по формуле  $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ , а его аргумент  $\varphi = \arg z$  находится из соотношений

$$\cos \varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \sin \varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad (1.1)$$

причем  $-\pi < \varphi \leq \pi$  или  $0 \leq \varphi < 2\pi$ .

**Пример 1.1.** Для к. ч.  $z = -1 + i\sqrt{3}$  его модуль  $|z| = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$ , а аргумент  $\varphi$  согласно (1.1) находится из равенств

$$\cos \varphi = -\frac{1}{2}, \quad \sin \varphi = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \varphi = \frac{2\pi}{3}.$$

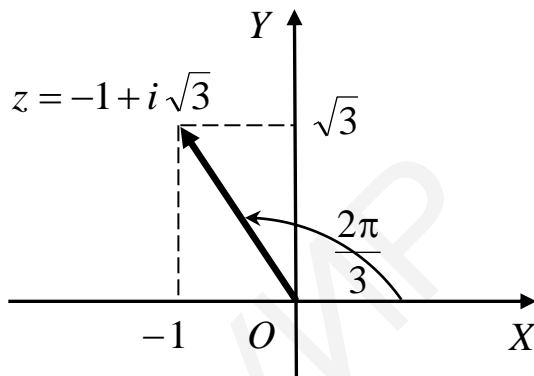
Это число изображено на рис. 1.1.



Расстояние между точками  $z_1 = x_1 + i y_1$  и  $z_2 = x_2 + i y_2$  определяется равенством

$$\rho(z_1, z_2) = |z_2 - z_1| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}. \quad (1.2)$$

Согласно (1.2) уравнение окружности  $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$  радиусом  $R$  с центром в точке  $z_0 = x_0 + i y_0$  в комплексной форме примет вид  $|z - z_0| = R$ , где  $z = x + i y$ .



Неравенство  $|z - z_0| < \varepsilon$  при  $\varepsilon > 0$

Рис. 1.1

определяет на комплексной плоскости  $\mathcal{C}$  множество точек  $z$ , называемое  $\varepsilon$ -окрестностью точки  $z_0$ , и обозначается  $U_\varepsilon(z_0)$ . Если из нее исключить точку  $z_0$ , то получим *проколотую окрестность*  $\dot{U}_\varepsilon(z_0)$ .

Пусть задана последовательность к. ч.  $(z_n) = (x_n + i y_n)$ , где  $(x_n)$  и  $(y_n)$  – последовательности действительных чисел. Для  $A = a + i b$  будем писать  $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = A$  тогда и только тогда, когда  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$  и  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b$ . В этом случае говорят, что последовательность  $(z_n)$  *сходится* к  $A$  при  $n \rightarrow \infty$ .

Множество  $D \subset \mathcal{C}$  называется *ограниченным*, если существует круг радиусом  $k$ ,  $|z| \leq k$ , такой, что любое  $z \in D$  является точкой этого круга. Как и в случае последовательности с действительными числами, можно доказать, что *всякая сходящаяся последовательность  $(z_n)$  ограничена*. Последовательность

$(z_n)$  *сходится к бесконечности*  $\left( \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \infty \right)$ , если  $\lim_{n \rightarrow \infty} |z_n| = \infty$ .

Дополнив комплексную плоскость  $\mathcal{C}$  точкой  $z = \infty$ , получим так называемую *расширенную комплексную плоскость*  $\bar{\mathcal{C}}$ .

**Пример 1.2.** Найти предел последовательности к. ч.

$$z_n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n + in \sin \frac{1}{n}.$$

Δ В нашем случае

$$x_n = \operatorname{Re} z_n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \quad y_n = \operatorname{Im} z_n = \frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\left(\frac{1}{n}\right)}.$$

Так как  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = e$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 1$ , то  $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n + i \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = e + i$ . ▲

Пусть  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$  – непрерывно дифференцируемые функции действительной переменной (параметра)  $t \in T$ . Комплекснозначная функция

$$z(t) = x(t) + iy(t), \quad z'(t) = x'(t) + iy'(t) \neq 0 \quad (1.3)$$

определяет на плоскости  $\bar{C}$  некоторую гладкую кривую  $l$ . Уравнение (1.3) задает на плоскости  $XU$  кривую, заданную параметрически равенствами  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$ ,  $t \in T$ .

**Пример 1.3.** Составить в комплексной форме (1.3) уравнение окружности радиусом  $R$  с центром в начале координат.

Δ Параметрические уравнения такой окружности есть  $x = R \cos t$ ,  $y = R \sin t$ ,  $t \in [0, 2\pi]$ . Согласно (1.3) получаем

$$z(t) = R \cos t + iR \sin t = R(\cos t + i \sin t).$$

Но по формуле Эйлера  $\cos t + i \sin t = e^{it}$ . Поэтому  $z(t) = R e^{it}$  – искомое уравнение окружности. ▲

**Пример 1.4.** Записать в комплексной форме уравнение окружности радиусом  $R$  с центром в точке  $z_0 = x_0 + iy_0$ .

Δ На плоскости  $XU$  эта окружность имеет уравнение

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2 \Leftrightarrow x = x_0 + R \cos t, \quad y = y_0 + R \sin t.$$

Тогда согласно (1.3) получаем

$$z = z(t) = (x_0 + R \cos t) + i(y_0 + R \sin t) = \\ = (x_0 + iy_0) + R(\cos t + i \sin t) = z_0 + R e^{it}, \quad t \in [0, 2\pi].$$

Итак, в комплексной форме данная окружность описывается уравнением

$$z = z_0 + R e^{it}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi. \quad \blacktriangle$$

**Пример 1.5.** Определить вид кривой, заданной на комплексной плоскости  $\mathbb{C}$  уравнением

$$z = 3e^{it} - \frac{1}{2e^{it}}, \quad t \in [2\pi].$$

$\Delta$  Имеем

$$z(t) = 3e^{it} - \frac{1}{2}e^{-it} = 3(\cos t + i \sin t) - \frac{1}{2}(\cos t - i \sin t) = \frac{5}{2} \cos t + i \frac{7}{2} \sin t \Rightarrow \\ \Rightarrow x = \frac{5}{2} \cos t, \quad y = \frac{7}{2} \sin t.$$

А это и есть параметрические уравнения эллипса  $\frac{x^2}{\left(\frac{5}{2}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{7}{2}\right)^2} = 1$

с полуосями  $a = \frac{5}{2}$ ,  $b = \frac{7}{2}$ .  $\blacktriangle$

Пусть  $D$  – множество точек расширенной комплексной плоскости  $\bar{\mathbb{C}}$ . Точка  $z_1 \in D$  называется *внутренней точкой множества  $D$* , если существует  $\varepsilon$ -окрестность этой точки, целиком содержащаяся в  $D$  (рис. 1.2). Точка  $z_2$  называется *граничной точкой множества  $D$* , если в любой ее окрестности  $U_\delta(z_2)$  имеются точки как принадлежащие, так и не принадлежащие  $D$  (рис. 1.2).

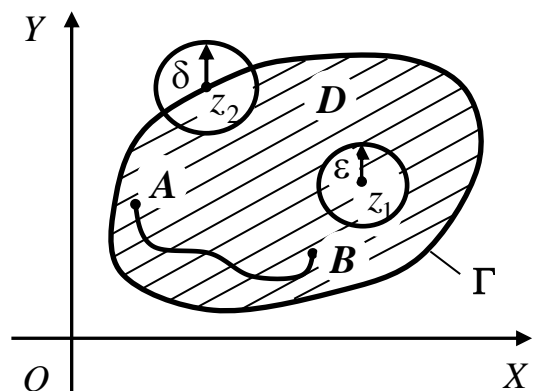


Рис. 1.2

Совокупность граничных точек  $\Gamma$  множества  $D$  называется его *границей*. В дальнейшем на рисунках штриховой линией будем обозначать границу множества, не принадлежащую самому множеству. Множество  $D$  с присоединенной к нему границей  $\Gamma$  называется *замкнутым*, а множество  $D$  – *открытым*, если все его точки внутренние. Множество  $D$  называется *связным*, если для любой пары его точек  $A$  и  $B$  существует непрерывная кривая (в частности, ломаная линия) с началом в  $A$  и концом в  $B$ , целиком принадлежащая  $D$  (рис. 1.2). Связное открытое множество  $D \subset \bar{C}$  называется *областью*. Область  $D$  называется *односвязной*, если любой гладкий замкнутый  $\gamma$ , лежащий в этой области, можно стянуть (деформировать) в любую точку  $M_0$  этой же области. Область  $D$  называется  *$n$ -связной*, если ее граница состоит из  $n$ -замкнутых непересекающихся кривых. В частности, одной из кривых может быть точка. На рис. 1.3, а изображена пятисвязная область (заштрихована), а на рис. 1.3, б – трехсвязная область с выколотыми точками  $M_1$  и  $M_2$ , ограниченная кривой  $\Gamma$ .



Рис. 1.3

**Пример 1.6.** Примерами областей являются следующие множества:

- а) кольцо  $r < |z - z_0| < R$ ,  $0 \leq r < R$  (рис. 1.4); б) полоса  $a \leq \operatorname{Re} z < b$ ,  $a < b$ ,  $a$  и  $b$  из  $\mathbf{R}$  (рис. 1.5).

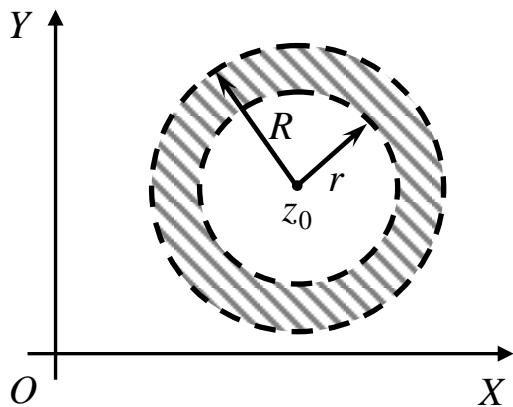


Рис. 1.4

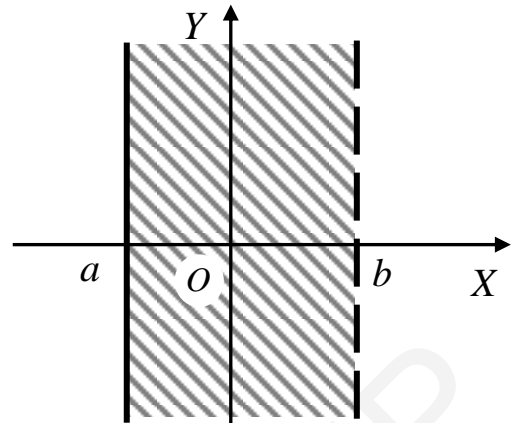


Рис. 1.5

**Пример 1.7.** На комплексной плоскости изобразить множество, определяемое неравенствами:

а)  $|z - 2 - i| \geq 1, 1 \leq \operatorname{Re} z < 3, 0 < \operatorname{Im} z \leq 3;$

б)  $|z - 1| < 1, \arg z \leq \frac{\pi}{4}, \arg(z - 1) > \frac{\pi}{4};$

в)  $|z - 1| < |z - i|;$  г)  $|z| > 2 + \operatorname{Im} z;$

г)  $|z| > 2 + \operatorname{Im} z.$

Δ а) Неравенство  $|z - 2 - i| \geq 1 \Leftrightarrow |z - (2 + i)| \geq 1$  определяет внешность круга (включая границу) радиусом 1 с центром в точке  $z_0 = 2 + i$ . Неравенство  $1 \leq \operatorname{Re} z < 3 \Leftrightarrow 1 \leq x < 3$  определяет полосу, заключенную между прямыми  $x = 1$  и  $x = 3$ , причем точки прямой  $x = 1$  входят в эту область, а точки прямой  $x = 3$  не входят. Неравенство  $0 < \operatorname{Im} z \leq 3 \Leftrightarrow 0 < y \leq 3$  определяет полосу, заключенную между прямыми  $y = 0$  и  $y = 3$ , причем точки прямой  $y = 0$  в область не входят, а точки прямой  $y = 3$  – входят. Искомое множество (заштриховано) изображено на рис. 1.6.

б) Множество  $|z-1| < 1$  есть внутренность круга радиусом 1 с центром в точке  $A$ , где  $A=1$ . Для этого множества  $\operatorname{Re} z \geq 0$ . Неравенство  $\arg z \leq \frac{\pi}{4}$  определяет множество точек плоскости  $XY$ , расположенных в первом квадранте между осью  $X$  и лучом  $\varphi = \frac{\pi}{4}$ .

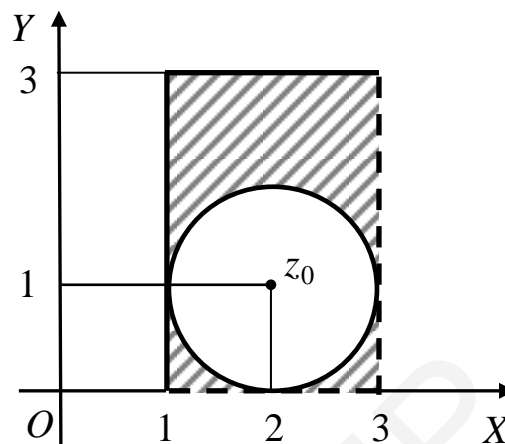


Рис. 1.6

Для этого множества  $\operatorname{Im} z \geq 0$ . Тем самым неравенства  $|z-1| < 1$  и  $\arg z \leq \frac{\pi}{4}$  определяют

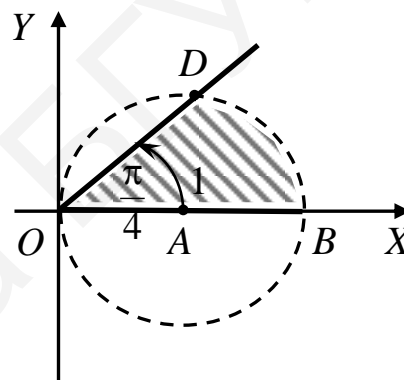


Рис. 1.7

область  $OABDO$  (рис. 1.7). Комплексное число  $z-1$  изображается вектором, началом которого является точка  $z=1$ , а концом точка  $z$ . Угол между этим вектором и осью  $X$  и есть  $\arg(z-1)$  – он изменяется согласно условию в пределах от  $\frac{\pi}{4}$  до  $2\pi$ . Следовательно,

неравенство  $\arg(z-1) > \frac{\pi}{4}$  определяет внешность угла  $CAH$ , причем точки лучей

$AC$  и  $AH$  в это множество не входят (рис. 1.8). В итоге с учетом рис. 1.8 искомое множество, определяемое неравенствами «б» (заштриховано на рис. 1.9), – область  $OACDO$ .

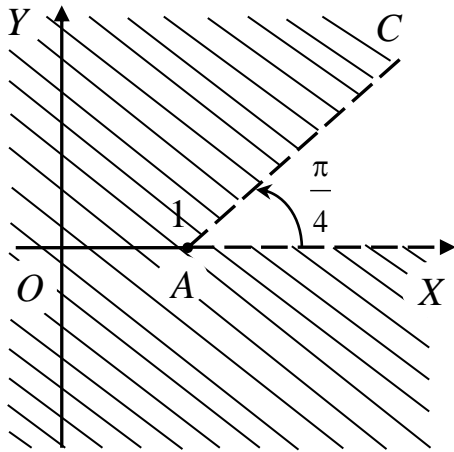


Рис. 1.8

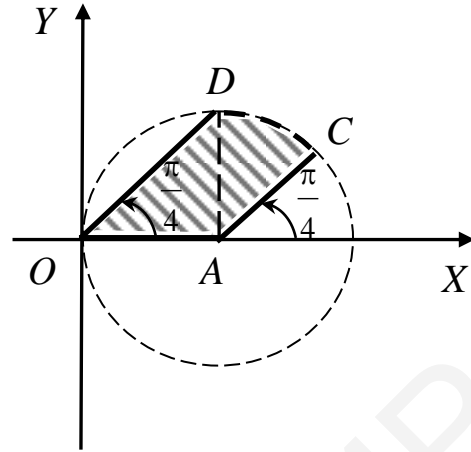


Рис. 1.9

в) Множество

$$|z-1| < |z+i| \Leftrightarrow \sqrt{(x-i)^2 + y^2} < \sqrt{x^2 + (y-1)^2} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (x-1)^2 + y^2 < x^2 + (y-1)^2 \Leftrightarrow x > y.$$

Таким образом, искомое множество есть полуплоскость без границы  $y = x$  (рис. 1.10).

г) Для  $z = x + iy$  согласно условию имеем  $\sqrt{x^2 + y^2} > 2 + y \Leftrightarrow y < \frac{x^2}{4} - 1$

(искомая область заштрихована на рис. 1.11). ▲

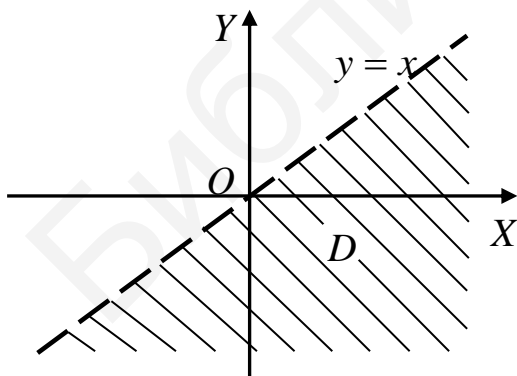


Рис. 1.10

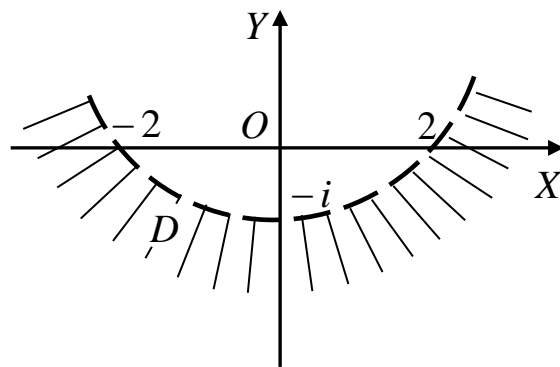


Рис. 1.11

## Задачи и упражнения

1. Выяснить характер множества чисел, принимаемых последовательностью  $z_n$ :

а)  $z_n = ni$ ; б)  $z_n = 2 \cos \left[ \frac{2}{3} \pi (n-1) \right]$ ; в)  $z_n = \left( \frac{1-i}{\sqrt{2}} \right)^{4n-6} + i \cos n\pi$ .

Ответ: а)  $i, 2i, 3i, \dots$ ; б)  $2, -1, -1, 2, -1, -1, \dots$ ; в)  $0, 0, 0, \dots, 0, \dots$ .

2. Доказать, что если  $z_n \rightarrow a, n \rightarrow \infty$ , то  $\bar{z}_n \rightarrow \bar{a}, n \rightarrow \infty$ .

3. Доказать, что если  $z_n \rightarrow \infty, n \rightarrow \infty$ , то  $\frac{1}{z_n} \rightarrow 0$ . Обратно, если  $z_n \rightarrow 0$ , то  $\frac{1}{z_n} \rightarrow \infty$ . При этом предполагается, что  $z_n$  не принимает значений, равных нулю.

4. Если  $z_n \rightarrow x_n + iy_n \rightarrow \infty, n \rightarrow \infty$ , то следует ли отсюда, что  $x_n \rightarrow \infty$  и  $y_n \rightarrow \infty$ ?

Ответ: нет, не следует. Достаточно, например, одному  $x_n$  стремиться к  $\infty$ .

5. Доказать, что если  $z_n \rightarrow a, n \rightarrow \infty$ , то и  $\frac{z_1 + z_2 + \dots + z_n}{n} \rightarrow a$ . Верно ли это, когда  $a = \infty$ ?

Ответ: когда  $a = \infty$ , то это может быть и неверно, например,  $z_n = (-1)^n n$ .

6. Найти  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1+i}{\sqrt{2}} \right)^n$ .

Ответ: предел не существует.



7. Известно, что  $e^x = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$ ,  $x \in \mathbf{R}$ . Взяв за определение чисто

мнимой степени  $e$  аналогичное равенство  $e^{ix} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{ix}{n}\right)^n$ , вывести отсюда

формулу Эйлера  $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ .

8. Найти пределы последовательностей:

а)  $z_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right) e^{\frac{i\pi}{n}}$ ; б)  $z_n = \frac{i^n}{n}$ ; в)  $(1 + 3i)^n$ ; г)  $z_n = e^{-i\left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2n}\right)}$ ;

д)  $z_n = n \sin \frac{i}{n}$ ; е)  $z_n = n \cos \frac{n\pi}{2} + in \sin \frac{n\pi}{2}$ ; ж)  $\lim_{z \rightarrow -i} \frac{z^2 + 3iz - 2}{z + i}$ .

Ответ: а) 1; б) 0; в) не существует; г)  $-i$ ; д)  $i$ ; е) не существует; ж)  $i$ .

9. Найти множества точек комплексной плоскости  $\mathbf{C}$ , определяемые заданными условиями:

а)  $\frac{1}{|z|} \geq 1$ ; б)  $1 < |z + i| < 2$ ; в)  $\left|\frac{z-1}{z+1}\right| \leq 1$ ; г)  $\operatorname{Im} \bar{z}^2 < 1$ ; д)  $\operatorname{Im} \left(\frac{1}{z}\right) < -\frac{1}{2}$ ;

е)  $\frac{1}{4} < \operatorname{Re} \left(\frac{1}{z}\right) + \operatorname{Im} \left(\frac{1}{z}\right) < \frac{1}{2}$ .

Ответ: а) круг радиусом  $R=1$  с «выколотым» центром (началом координат); б) кольцо с центром в точке  $z_0 = -i$ , ограниченное окружностями радиусов  $R=1$  и  $R=2$ ; в) правая полуплоскость, включая и ось  $Y$ ; г) внутренность гиперболы  $xy = -\frac{1}{2}$ ; д) внутренность окружности  $x^2 + (y-1)^2 = 1$ ; б) область между окружностями  $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 2$  и  $(x-2)^2 + (y-2)^2 = 8$ .

10. Указать, какие линии определяются уравнением:

а)  $\operatorname{Re} \bar{z}^2 = 1$ ; б)  $\operatorname{Im}(\overline{z^2 - \bar{z}}) = 2 - \operatorname{Im} z$ ; в)  $2z\bar{z} + (2+i)z + (2-i)\bar{z} = 2$ ;

г)  $|z| - 3\operatorname{Im} z = 6$ ; д)  $|z - z_1| = |z - z_2|$ ; е)  $\operatorname{Re}(1+z) = |z|$ .

Ответ: а) гипербола  $x^2 - y^2 = 1$ ; б) гипербола  $xy = -1$ ; в) окружность

$$(x+1)^2 + (y-1/2)^2 = \frac{9}{4}; \quad \text{г) гипербола } \frac{(y+\frac{9}{4})^2}{9} - \frac{x^2}{9} = 1; \quad \text{д) прямая,}$$

перпендикулярная отрезку  $z_1 z_2$  и проходящая через его середину; е) парабола  $y^2 = 2x + 1$ .

**11.** Какая линия на плоскости  $XU$  определяется уравнением  $z\bar{z} + i(z - \bar{z}) = 2$ ?

Ответ:  $x^2 + (y-1)^2 = 3$ .

**12.** Написать в комплексной форме уравнения линий:

а) координатных осей  $X$  и  $Y$ ; б) прямой  $y = x$ ; в) прямой  $y = kx + b$ ;

г) гиперболы  $x^2 - y^2 = a^2$ .

Ответ: а)  $\bar{z} - z = 0$  и  $\bar{z} + z = 0$ ; б)  $z + \bar{z} + i(z - \bar{z}) = 0$ ;

в)  $k(z + \bar{z}) + 2b + i(z - \bar{z}) = 0$ ; г)  $z^2 + \bar{z}^2 = 2a^2$ .

## Лекция 2

### ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

**Понятие функций комплексной переменной (ФКП). Геометрическая интерпретация ФКП. Предел и непрерывность ФКП.**

**Основные элементарные ФКП:**

- а) степенная функция; б) целая рациональная функция;
- в) дробно-рациональная функция; г) показательная функция;
- д) тригонометрические функции; е) гиперболические функции;
- ж) логарифмическая функция; з) обратные тригонометрические функции.

**Отображение областей.**

**Задачи и упражнения**

Пусть комплексная переменная  $z = x + iy$  определена в области  $D \subset \bar{C}$ . Новая комплексная переменная  $w = f(z)$  называется *функцией комплексной переменной  $z$*  (ФКП), если каждой  $z \in D$  поставлено в соответствие одно (в случае однозначной функции  $f$ ) или большее число (в случае многозначной функции  $f$ ) значений  $w$ .

В дальнейшем, как правило, будем рассматривать функции, заданные либо на всей плоскости  $\bar{C}$ , за исключением отдельных ее точек, либо на части этой плоскости, ограниченной одной или несколькими замкнутыми кривыми.

**Пример 2.1.** Функция  $w = \frac{1}{z}$  определена на всей расширенной комплексной плоскости  $\bar{C}$ , кроме точки  $z = 0$ . Для  $z = x + iy$  имеем

$$w = \frac{1}{x + iy} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2} = \frac{x}{x^2 + y^2} + \frac{-iy}{x^2 + y^2}. \quad (2.1)$$

Эта функция однозначна при любом  $z \neq 0$ .

ФКП  $w = f(z)$  ставит в соответствие к. ч.  $z = x + iy$  к. ч. вида  $w = f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$ . (2.2)

Функция  $u = u(x, y)$  называется *действительной частью* функции  $w = f(z)$ , а функция  $v = v(x, y)$  – ее *мнимой частью*, т. е. в (2.2)

$$u(x, y) = \operatorname{Re} f(z), \quad v(x, y) = \operatorname{Im} f(z).$$

Так, согласно (2.1) для функции  $w = \frac{1}{z}$

$$u(x, y) = \operatorname{Re} f(z) = \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad v(x, y) = \operatorname{Im} f(z) = -\frac{y}{x^2 + y^2}.$$

**Пример 2.2.** Для функции

$$w = f(z) = e^z = e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy} = e^x (\cos y + i \sin y) = e^x \cos y + ie^x \sin y$$

имеем  $u(x, y) = e^x \cos y$ ,  $v(x, y) = e^x \sin y$ .

**Геометрическая интерпретация ФКП.** Пусть  $D$  – область на комплексной плоскости переменной  $z$  и  $w = f(z)$  – однозначная функция, определенная на  $D$ . Каждой точке  $z \in D$  функция  $f$  ставит в соответствие к. ч.  $w = u + iv$  (рис. 2.1).

Введем следующие обозначения:  $C_z$  – комплексная плоскость переменной  $z = x + iy$ ,  $C_w$  – плоскость комплексной переменной  $w = u + iv$ . Тогда образом множества  $D \subset C_z$  при отображении  $f$  является некоторое множество  $E = f(D)$  (рис. 2.1).

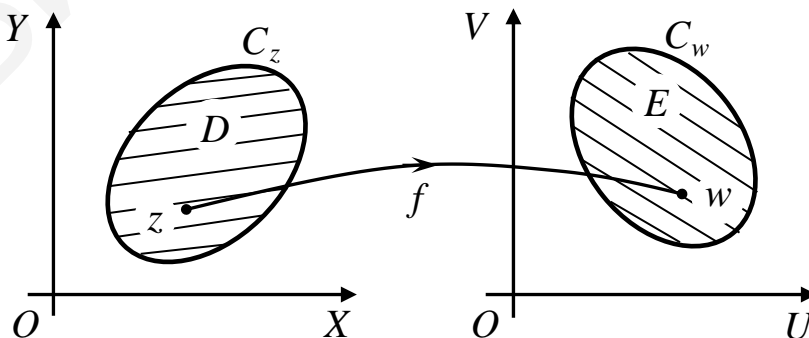


Рис. 2.1

**Пример 2.3.** Пусть  $D$  – полукруг  $x^2 + y^2 \leq 1, y \geq 0$ . Найти образ  $f(D)$  этой области при отображении  $w = f(z) = z^2$ .

Δ Представим  $z \in D$  в показательной форме  $z = |z| e^{i\varphi}$ , где  $\varphi = \arg z$ , причем для верхнего полукруга  $0 \leq \varphi \leq \pi$ .

Тогда

$$w = u + iv = z^2 = |z|^2 e^{i2\varphi} = |z|^2 (\cos 2\varphi + i \sin 2\varphi), \quad 0 \leq \varphi \leq \pi.$$

Исключив здесь параметр  $\varphi$ , получим  $u^2 + v^2 = |z|^4, 0 \leq |z| \leq 1$ . При фиксированном значении переменной  $z$  уравнение  $u^2 + v^2 = |z|^4$  на плоскости  $C_w$  определяет окружность радиусом  $|z|^2$  с центром в начале координат. Поскольку этот радиус изменяется от нуля до единицы, то эти окружности полностью «заматают» (заполняют) круг  $u^2 + v^2 \leq 1$ . Таким образом, функция  $w = z^2$  отображает полукруг  $x^2 + y^2 \leq 1, y \geq 0$  в плоскости  $C_z$  на круг  $u^2 + v^2 \leq 1$  в плоскости  $C_w$ . ▲

**Пример 2.4.** Найти образ линии  $x = c$  при отображении функцией  $w = z^2$ .

Δ На плоскости  $XU$   $x = c$  описывается уравнениями  $x = c, y = y, y \in \mathbf{R}$  ( $y$  – параметр). На плоскости  $C_z$  согласно равенству (2.1) эта прямая задается уравнением  $z = c + iy, y \in \mathbf{R}$ .

Тогда

$$w = u + iv = z^2 = (c + iy)^2 = c^2 - y^2 + i2cy.$$

Отсюда

$$u = c^2 - y^2, \quad v = 2cy.$$

Исключив параметр  $y$  из этой системы, получим уравнение параболы

$$u = c^2 - \frac{v^2}{4c^2}.$$

Итак, образом прямой  $x = c$  при отображении  $w = z^2$  является парабола  $u = c^2 - \frac{v^2}{4c^2}$ . Отсюда следует, что если на плоскости  $XU$  задать полосу  $c \leq x \leq b$ , то образом ее на плоскости  $UV$  при отображении  $w = z^2$  будет полоса, заключенная между параболой  $u = c^2 - \frac{v^2}{4c^2}$  и  $u = b^2 - \frac{v^2}{4b^2}$  (рис. 2.2).

Пусть функция  $w = f(z)$  определена в проколотой окрестности  $\dot{U}(z_0)$  точки  $z_0$ . Число  $A = a + ib$  называется *пределом функции  $f(z)$  в точке  $z_0$*  и обозначается  $A = \lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$

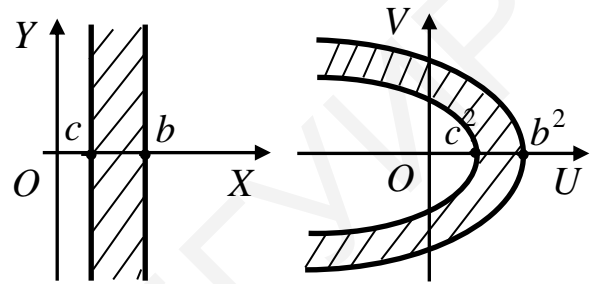


Рис. 2.2

или  $f(z) \rightarrow A, z \rightarrow z_0$ , если для любой  $\varepsilon$ -окрестности  $\dot{U}_\varepsilon(A)$   $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ , такое, что для всех  $z \in \dot{U}_\delta(z_0)$   $f(z) \in \dot{U}_\varepsilon(A)$ . Это определение эквивалентно следующему: число  $A$  называется *пределом функции  $f(z)$  в точке  $z_0$* , если для любой последовательности  $(z_n), z_n \in \dot{U}(z_0)$ , сходящейся к  $z_0$ , соответствующая числовая последовательность  $(f(z_n))$  значений функции  $f(z)$  сходится к  $A$ .

Подчеркнем, что при определении предела функции  $f(z)$  в точке  $z_0$  сама эта точка из рассмотрения исключается.

ФКП, имеющие предел в точке  $z_0$ , обладают следующими свойствами:

- 1) если  $f(z)$  имеет предел в точке  $z_0$ , то он единственен;
- 2) функция  $f(z)$ , имеющая предел в точке  $z_0$ , ограничена в некоторой проколотой окрестности этой точки.

Напомним, что ограниченность функции  $f(z)$  на множестве  $D$  означает наличие константы  $k > 0$ , такой, что  $|f(z)| \leq k, \forall z \in D$ ;

3) если  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = A \neq 0$ , то существует проколота окрестность  $\dot{U}(z_0)$

точки  $z_0$ , такая, что  $f(z) \neq 0, \forall z \in \dot{U}(z_0)$ ;

4) если  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = A, \lim_{z \rightarrow z_0} g(z) = B$ , то справедливы следующие

арифметические операции над пределами функций:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} (f(z) \pm g(z)) = A \pm B; \quad \lim_{z \rightarrow z_0} (f(z) \cdot g(z)) = A \cdot B;$$

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{A}{B}, \quad B \neq 0.$$

Доказательства этих свойств опускаются, поскольку они дословно повторяют доказательства соответствующих свойств функций действительной переменной имеющих предел в точке.

Функция  $f(z)$ , определенная в некоторой окрестности точки  $z_0$ , называется *непрерывной* в этой точке, если  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$ .

Так как ФКП  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  можно рассматривать как вектор-функцию  $f = (u(x, y), v(x, y))$  переменных  $x$  и  $y$ , то из свойств векторных функций следует, что  $f(z)$  непрерывна в точке  $z_0 = x_0 + iy_0$  тогда и только тогда, когда функции  $u = u(x, y), v = v(x, y)$  непрерывны в точке  $(x_0, y_0)$ .

Функция  $f(z)$  называется *непрерывной на множестве  $D$* , если она непрерывна в каждой точке этого множества.

**Пример 2.5.** Найти  $\lim_{z \rightarrow -i} \frac{z^2 + 3iz - 2}{z + i}$ .

Δ При  $z = -i$  и числитель, и знаменатель функции  $f(z) = \frac{z^2 + 3iz - 2}{z + i}$

обращаются в нуль. Так как  $z^2 + 3iz - 2 = (z + i)(z + 2i)$ , то

$$\lim_{z \rightarrow -i} f(z) = \lim_{z \rightarrow -i} \frac{(z + i)(z + 2i)}{z + i} = \lim_{z \rightarrow -i} (z + 2i) = i. \quad \blacktriangle$$

**Пример 2.6.** Показать, что функция  $\operatorname{Re}(z^2)$  непрерывна на всей комплексной плоскости  $\mathbb{C}$ .

Δ Действительно, функция  $\operatorname{Re}(z^2) = \operatorname{Re}((x^2 - y^2) + i2xy) = x^2 - y^2$  непрерывна на всей плоскости  $XY$ , как непрерывная функция  $\varphi(x, y^2) = x^2 - y^2$  двух переменных  $x$  и  $y$ . ▲

Переходим к изучению некоторых свойств основных элементарных ФКП:

**I. Степенная функция**  $w = z^n$ , где  $n$  – целое положительное число. Положив  $z = x + iy$  и разложив  $(x + iy)^n$  по формуле бинома Ньютона, получим действительную  $u(x, y)$  и мнимую  $v(x, y)$  части функции  $w = z^n$ .

Например,

$$\begin{aligned} w = z^3 &= (x + iy)^3 = x^3 + 3x^2iy + 3x(iy)^2 + (iy)^3 = \\ &= (x^3 - 3xy^2) + i(3x^2y - y^3) \Rightarrow u(x, y) = x^3 - 3xy^2, v(x, y) = 3x^2y - y^3. \end{aligned}$$

Функция  $w = z^n$  однозначна. Она определена и непрерывна на всей комплексной плоскости  $\mathbb{C}$ .

### II. Целая рациональная функция (многочлен)

Она имеет вид

$$w = a_0z^n + a_1z^{n-1} + \dots + a_{n-1}z + a_n. \quad (2.3)$$

Здесь коэффициенты  $a_i$  – комплексные числа,  $i = \overline{0, n}$ . Функция (2.3) однозначна. Она определена и непрерывна  $\forall z \in \mathbb{C}$ . Положив  $w = \infty$  при  $z = \infty$ , получим функцию однозначную и непрерывную  $\forall z \in \overline{\mathbb{C}}$ .

### III. Дробно-рациональная функция или рациональная дробь

Она имеет вид

$$w = \frac{a_0z^n + a_1z^{n-1} + \dots + a_{n-1}z + a_n}{b_0z^m + b_1z^{m-1} + \dots + b_{m-1}z + b_m}. \quad (2.4)$$



Здесь также в общем случае коэффициенты  $a_i, b_j$  – комплексные числа,  $i = \overline{0, n}, j = \overline{0, m}$ . Функция (2.4) очевидно есть отношение двух многочленов. Если  $n \geq m$ , то из нее можно выделить целую часть.

Например,

$$\frac{3z^3 + 5z^2 + z + 1}{3z^2 - z + 1} = z + 2 + \frac{2z - 1}{3z^2 - z + 1}.$$

Здесь целой частью является линейная функция  $z + 2$ . Дробь (2.4), как частное двух многочленов, однозначна и непрерывна для  $\forall z \in \mathbf{C}$ , за исключением тех точек, где знаменатель дроби обращается в нуль.

Если  $n < m$ , то дробь (2.4) называется *правильной* и  $w \rightarrow 0$  при  $z = \infty$ . Если же  $n > m$ , то  $w \rightarrow \infty$  при  $z \rightarrow \infty$ . Если  $n = m$ , то, разделив числитель и знаменатель на  $z^n$ , получим

$$w = \frac{a_0 + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \dots + \frac{a_n}{z^n}}{b_0 + \frac{b_1}{z} + \frac{b_2}{z^2} + \dots + \frac{b_n}{z^n}}, \text{ откуда следует, что } \lim_{z \rightarrow \infty} w = \frac{a_0}{b_0}.$$

**IV. Показательная функция**  $e^z$  комплексной переменной  $z = x + iy$  определяется равенством

$$e^z = e^{x+iy} = e^x (\cos y + i \sin y). \quad (2.5)$$

Отсюда

$$u = e^x \cos y, \quad v = e^x \sin y. \quad (2.6)$$

Заметим, что при  $z$  действительном, т. е. при  $z = x \in \mathbf{R}$ , функция  $e^z$  совпадает с обычной показательной функцией, так как в этом случае  $\sin y = 0, \cos y = 1$ .

Функция  $e^z$  обладает следующими свойствами:

1. Справедливо равенство  $e^{z_1} \cdot e^{z_2} = e^{z_1+z_2}, \forall_{z_1, z_2}$ .

В самом деле, если  $z_1 = x_1 + iy_1$ ,  $z_2 = x_2 + iy_2$ , то из определения (2.5) и известных свойств функции  $e^{iy}$  получаем

$$\begin{aligned} e^{z_1} \cdot e^{z_2} &= e^{x_1} (\cos y_1 + i \sin y_1) \cdot e^{x_2} (\cos y_2 + i \sin y_2) = \\ &= e^{x_1+x_2} [(\cos y_1 \cos y_2 - \sin y_1 \sin y_2) + i(\sin y_1 \cos y_2 + \sin y_2 \cos y_1)] = \\ &= e^{x_1+x_2} [\cos(y_1 + y_2) + i \sin(y_1 + y_2)] = e^{x_1+x_2} \cdot e^{i(y_1+y_2)} = e^{x_1+x_2+i(y_1+y_2)} = \\ &= e^{(x_1+iy_1)+(x_2+iy_2)} = e^{z_1+z_2}. \end{aligned}$$

2. Функция  $e^z$  периодична с периодом  $T = 2\pi i$ , т. е.  $e^z = e^{z+2\pi i}$ .

Действительно,

$$\begin{aligned} e^{z+2\pi i} &= e^{z+i(y+2\pi)} = e^x (\cos(y+2\pi) + i \sin(y+2\pi)) = \\ &= e^x (\cos y + i \sin y) = e^{x+iy} = e^z. \end{aligned}$$

3. Функция  $e^z$  непрерывна на всей комплексной плоскости  $\mathbb{C}$ . Это следует из непрерывности на плоскости  $XU$  ее действительной и мнимой частей  $u(x, y)$ ,  $v(x, y)$  функции  $f(z)$ .

Покажем, что функция  $e^z$  не имеет предела при  $z \rightarrow \infty$ . В самом деле, так как предел функции, если он существует, не зависит от пути, по которому  $z$  стремится к бесконечности, то, выбрав этот вдоль положительной части оси  $Y$ , получим

$$z = 0 + iy = iy \rightarrow \infty \Rightarrow e^z = e^{iy} = \cos y + i \sin y.$$

Эта функция предела при  $y \rightarrow \infty$  не имеет, так как его не имеют функции  $\cos y$  и  $\sin y$ .

## V. Тригонометрические функции

Тригонометрические функции  $\sin z$  и  $\cos z$  комплексной переменной  $z$  определяются равенствами

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = -i \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2}. \quad (2.6)$$

1. Из непрерывности показательной функции на  $\mathbb{C}$  следует, что функции  $\cos z$ ,  $\sin z$  непрерывны во всех точках комплексной плоскости  $\mathbb{C}$ .

Для них справедливы формулы:

а)  $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$ ;

б)  $\sin 2z = 2 \sin z \cos z$ ;

в)  $\sin (z_1 \pm z_2) = \sin z_1 \cos z_2 \pm \cos z_1 \sin z_2$ ;

г)  $\cos (z_1 \pm z_2) = \cos z_1 \cos z_2 \pm \sin z_1 \sin z_2$ ;

д)  $\cos 2z = \cos^2 z - \sin^2 z$ .

Докажем, к примеру, одну из формул «в», т. е. что

$$\sin (z_1 + z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \sin z_2 \cos z_1.$$

Имеем

$$\begin{aligned} & \sin z_1 \cos z_2 + \sin z_2 \cos z_1 = \\ &= \frac{e^{iz_1} - e^{-iz_1}}{2i} \cdot \frac{e^{iz_2} + e^{-iz_2}}{2} + \frac{e^{iz_1} + e^{-iz_1}}{2} \cdot \frac{e^{iz_2} - e^{-iz_2}}{2i} = \\ &= \frac{e^{i(z_1+z_2)} - e^{-i(z_1+z_2)} + e^{i(z_1-z_2)} - e^{-i(z_1+z_2)}}{4i} + \\ &+ \frac{e^{i(z_1+z_2)} + e^{-i(z_1-z_2)} - e^{i(z_1-z_2)} - e^{-i(z_1+z_2)}}{4i} = \\ &= \frac{e^{i(z_1+z_2)} - e^{-i(z_1+z_2)}}{2i} = \sin (z_1 + z_2). \end{aligned}$$

2. Функции  $\sin z$  и  $\cos z$  являются периодическими с периодом  $2\pi$ .

Это свойство следует из свойства 2 периодичности функции  $e^z$  с периодом  $2\pi i$ .

3. Для функций  $\sin z$  и  $\cos z$  справедливы равенства

$$\sin (-z) = -\sin z, \quad \cos (-z) = \cos z, \tag{2.7}$$

т. е.  $\sin z$  – нечетная, а  $\cos z$  – четная функции.

Равенства (2.7) легко проверяются исходя из определения (2.6) функций  $\sin z$  и  $\cos z$ .

*Замечание.* Может оказаться, что  $|\cos z| > 1$  или  $|\sin z| > 1$ .

В действительном анализе эти неравенства не имеют места, так как  $|\sin x| \leq 1$  и  $|\cos x| \leq 1, \forall x$ .

**Пример 2.7.** Имеем:

$$a) \cos i = \frac{e^{i^2} + e^{-i^2}}{2} = \frac{e^{-1} + e}{2} > 1;$$

$$б) \sin 2i = \frac{e^{-2} + e^2}{2} 2i \Rightarrow |\sin 2i| = \frac{e^2 - e^{-2}}{2} > 1.$$

**Пример 2.8.** Решить уравнение  $\sin z = 2$ .

$\Delta$  Имеем

$$\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = 2 \Rightarrow e^{2iz} - 4ie^{iz} - 1 = 0 \Rightarrow e^{iz} = 2i \pm \sqrt{-3} = i(2 \pm \sqrt{3}).$$

Отсюда при  $z = x + iy$  получаем

$$e^{-y+ix} = i(2 \pm \sqrt{3}) \Leftrightarrow \begin{cases} e^{-y} \cos x = 0; \\ e^{-y} \sin x = 2 \pm \sqrt{3}. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}; \\ e^{-y} = (-1)^k (2 \pm \sqrt{3}). \end{cases}$$

Следовательно, так как  $e^{-y} > 0$ , то  $k$  должно быть четным, т. е.  $k = 2n$ , и значит,  $y = -\ln(2 \pm \sqrt{3}), n \in \mathbf{Z}$ .

Итак, решениями уравнения  $\sin z = 2$  является

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + 2n\pi, n = 0, 1, 2, \dots; \\ y = -\ln(2 \pm \sqrt{3}), n \in \mathbf{Z}. \end{cases}$$

4. Имеют место формулы

$$\begin{aligned} \sin z &= \sin(x + iy) = \sin x \operatorname{ch} y + i \cos x \operatorname{sh} y; \\ \cos z &= \cos(x + iy) = \cos x \operatorname{ch} y - i \sin x \operatorname{sh} y. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Докажем первое из равенств (2.8). Имеем

$$\begin{aligned}\sin z &= -\frac{i}{2} \left( e^{i(x+iy)} - e^{-i(x+iy)} \right) = -\frac{i}{2} \left( e^{-y} e^{ix} - e^y e^{-ix} \right) = \\ &= -\frac{i}{2} \left( e^{-y} \cos x + i e^{-y} \sin x - e^y \cos x + i e^y \sin x \right) = \\ &= \sin x \frac{e^y + e^{-y}}{2} + i \cos x \frac{e^y - e^{-y}}{2} = \sin x \operatorname{ch} y + i \cos x \operatorname{sh} y.\end{aligned}$$

**Пример 2.9.** Представить в алгебраической форме число  $\cos\left(\frac{\pi}{6} + 2i\right)$ .

Δ По второй формуле (2.8) имеем

$$\cos\left(\frac{\pi}{6} + 2i\right) = \cos \frac{\pi}{6} \operatorname{ch} 2 - i \sin \frac{\pi}{6} \operatorname{sh} 2 = \frac{1}{2} (\sqrt{3} \operatorname{ch} 2 - i \operatorname{sh} 2). \quad \blacktriangle$$

Тригонометрические функции  $\operatorname{tg} z$  и  $\operatorname{ctg} z$  определяются соотношениями

$$\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z}; \quad \operatorname{ctg} z = \frac{\cos z}{\sin z}.$$

Согласно свойствам функций  $\sin z$  и  $\cos z$  получаем, что функция  $\operatorname{tg} z$

непрерывна  $\forall z \in \mathbf{C}$ ,  $z \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ , а  $\operatorname{ctg} z$  непрерывна  $\forall z \in \mathbf{C}$ ,  $z \neq k\pi$ ,  $k \in \mathbf{Z}$ .

## VI. Гиперболические функции

Гиперболические функции определяются формулами

$$\begin{aligned}\operatorname{sh} z &= \frac{e^z - e^{-z}}{2}; \quad \operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}; \\ \operatorname{th} z &= \frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z}; \quad \operatorname{cth} z = \frac{\operatorname{ch} z}{\operatorname{sh} z}.\end{aligned} \tag{2.9}$$

$$\text{Отсюда } \operatorname{sh} z = \frac{1}{2} \left( e^{-i^2 z} - e^{i^2 z} \right) = -i \left( \frac{e^{i(iz)} - e^{-i(iz)}}{2i} \right) = -i \sin(iz).$$

Итак,

$$\operatorname{sh} z = -i \sin(iz). \tag{2.10}$$

Аналогично покажем, что

$$\operatorname{ch} z = \cos (i z) . \quad (2.11)$$

Из равенств (2.10) и (2.11) следует, что  $\operatorname{sh} z = 0$  при  $z = k \pi i$ , а  $\operatorname{ch} z = 0$

при  $z = \left(\frac{\pi}{2} + k \pi\right) i$ ,  $k \in \mathbf{Z}$ .

**VII. Логарифмическая функция** переменной  $z$ , обозначаемая в комплексном анализе  $w = \operatorname{Ln} z$ , определяется как обратная показательной функции  $z = e^w$ . Положив  $w = u + iv$ ,  $z = |z| e^{i\varphi}$ , где  $\varphi = \arg z$ , будем иметь

$$z = |z| e^{i\varphi} = e^{u+iv} = e^u \cdot e^{iv} . \quad (2.12)$$

Отсюда при  $z \neq 0$  получаем  $|z| = e^u \Rightarrow u = \ln |z|$  ( $\ln |z|$  – действительное значение натурального логарифма от положительного числа  $|z|$ ). Далее, поскольку функция  $e^{iv}$  периодична с периодом  $2\pi$ , то из равенства (2.12) получаем

$$e^{iv} = e^{i\varphi} = e^{i(\varphi+2k\pi)} \Rightarrow v = \varphi + 2k\pi, \quad k \in \mathbf{Z} .$$

Таким образом,

$$w = \operatorname{Ln} z = u + iv = \ln |z| + i(\arg z + 2k\pi), \quad k \in \mathbf{Z} . \quad (2.13)$$

Положив в формуле (2.13)  $k = 0$ , получим *главное значение логарифма*

$$\ln z = \ln |z| + i \arg z .$$

Тогда

$$\operatorname{Ln} z = \ln z + 2k \pi i, \quad k \in \mathbf{Z} .$$

Итак, функция  $\operatorname{Ln} z$  является многозначной и определена для всех  $z \neq 0$ .

Используя логарифмическую функцию, можно определить *общую степенную функцию*  $z^\alpha$  с комплексным показателем  $\alpha$ :

$$w = z^\alpha = e^{\alpha \operatorname{Ln} z} . \quad (2.14)$$

Аналогично для любого постоянного комплексного числа  $a \neq 0$  определяется *общая показательная функция* равенством

$$w = a^z = e^{z \operatorname{Ln} a}. \quad (2.15)$$

Функции (2.14) и (2.15) являются, очевидно, многозначными, так как многозначной является логарифмическая функция.

**Пример 2.10.** Представить в алгебраической форме число  $i^i$ .

Δ Согласно формулам (2.14) и (2.15), имеем

$$i^i = e^{i \operatorname{Ln} i} = e^{i(\ln|i| + i(\arg i + 2k\pi))} = e^{-\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)}, \quad k \in \mathbf{Z},$$

так как  $\ln|i| = \ln 1 = 0$ ,  $\arg i = \frac{\pi}{2}$ . ▲

*Замечание.* При  $\alpha = \frac{1}{n}$ ,  $n \in \mathbf{N}$  из (2.14) получаем функцию  $w = z^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{z}$ .

Известно, что  $\sqrt[n]{z}$  имеет  $n$  значений, т. е. функция  $\sqrt[n]{z}$  является многозначной ( $n$ -значной).

**VIII. Функции**  $\operatorname{Arcsin} z$ ,  $\operatorname{Arccos} z$ ,  $\operatorname{Arctg} z$ ,  $\operatorname{Arcctg} z$  определяются как обратные для функций  $\sin z$ ,  $\cos z$ ,  $\operatorname{tg} z$  и  $\operatorname{ctg} z$  соответственно.

Так, если  $z = \sin w$ , то  $w$  называется *арксинусом* числа  $z$  и обозначается

$$w = \operatorname{Arcsin} z. \quad \text{Так как } z = \sin w = \frac{e^{iw} + e^{-iw}}{2i}, \quad \text{то отсюда } e^{iw} = iz \pm \sqrt{1 - z^2}.$$

Минус можно опустить, если понимать квадратный корень как двузначную функцию. Таким образом,  $e^{iw} = iz + \sqrt{1 - z^2}$ . Логарифмируя это равенство, получаем

$$w = \operatorname{Arcsin} z = -i \operatorname{Ln} \left( iz + \sqrt{1 - z^2} \right). \quad (2.16)$$

Аналогично из равенства  $z = \cos w = \frac{e^{iw} + e^{-iw}}{2}$  находим

$$w = \operatorname{Arccos} z = -i \operatorname{Ln} \left( z + \sqrt{z^2 - 1} \right). \quad (2.17)$$

Точно так же можно получить формулы

$$\operatorname{Arctg} z = \frac{1}{2i} \operatorname{Ln} \frac{1+iz}{1-iz}; \quad \operatorname{Arcctg} z = -\frac{1}{2i} \operatorname{Ln} \frac{iz+1}{iz-1}. \quad (2.18)$$

Нетрудно увидеть, что все обратные тригонометрические функции комплексной переменной  $z$  являются бесконечнозначными.

**Пример 2.11.** Представить в алгебраической форме число  $\operatorname{Arctg} \frac{3\sqrt{3}+8i}{7}$ .

Δ По первой из формул (2.18)

$$\begin{aligned} \operatorname{Arctg} \frac{3\sqrt{3}+8i}{7} &= \frac{1}{2i} \operatorname{Ln} \frac{1+\frac{i(3\sqrt{3}+8i)}{7}}{1-\frac{i(3\sqrt{3}+8i)}{7}} = \frac{1}{2i} \operatorname{Ln} \frac{-1+i3\sqrt{3}}{15-i3\sqrt{3}} = \\ &= \frac{1}{2i} \operatorname{Ln} \left( -\frac{1}{6} + i \frac{\sqrt{3}}{6} \right) = \frac{1}{2i} \left( \ln \frac{1}{3} + i \left( \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \right) \right) = \frac{\pi}{3} + k\pi + \frac{i}{2} \ln 3, \quad k \in \mathbf{Z}. \quad \blacktriangle \end{aligned}$$

**IX.** Аналогичным образом можно получить *обратные гиперболические функции*  $w = \operatorname{Arsh} z$  (ареасинус),  $w = \operatorname{Arch} z$  (ареакосинус),  $w = \operatorname{Arth} x$  (ареатангенс),  $w = \operatorname{Arcth} z$  (ареакотангенс). Для этих функций справедливы формулы.

$$\begin{aligned} \operatorname{Arsh} z &= \operatorname{Ln} \left( z + \sqrt{z^2+1} \right); \quad \operatorname{Arch} z = \operatorname{Ln} \left( z + \sqrt{z^2-1} \right); \\ \operatorname{Arth} z &= \frac{1}{2} \operatorname{Ln} \frac{1+z}{1-z}; \quad \operatorname{Arcth} z = \frac{1}{2} \operatorname{Ln} \frac{z+1}{z-1}. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Из-за присутствия в формулах (2.19) логарифмической функции все обратные гиперболические являются бесконечнозначными.

Рассмотрим несколько примеров *отображения областей* с помощью элементарных ФКП.

**Пример 2.12.** Выяснить, во что преобразуется область  $D$  при отображении функцией  $w = f(z)$ :

а)  $w = e^z$ ,  $D$  – полоса  $0 < \operatorname{Im} z < a \leq 2\pi$ ;



б)  $w = e^z$ ,  $D$  – полоса между прямыми  $y = x$  и  $y = x - 2\pi$  (граница полосы области  $D$  не принадлежит);

в)  $w = \cos z$ ,  $D$  – полуполоса  $0 < x < \frac{\pi}{2}$ ,  $y > 0$ .

Доказательства:

Δ а) Область  $D$  изображена на рис. 2.3, а. Пусть  $z = x + iy \in D$ . Тогда  $w = e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} \Rightarrow \rho = |w| = e^x$ ,  $\theta = \arg w = y$ .

Следовательно, отображение  $w = e^z$  преобразует прямые  $y = 0$  и  $y = a$  в лучи  $\theta = 0$  и  $\theta = a$  соответственно. Точки же области  $D$  плоскости  $C_z$  функцией  $w = e^z$  отображаются во внутренние точки  $w$  угла  $0 < \theta < a$  плоскости  $C_w$  (рис. 2.3, б). В самом деле, для точки  $z = x + iy \in D$  получаем  $0 < y < a$ ,  $-\infty < x < +\infty$ . На плоскости  $C_w$  ей отвечает точка  $w = e^z = e^x e^{iy} = \rho e^{i\theta}$ ,  $0 < \theta < a$ ,  $0 < \rho < +\infty$ , т. е.  $w$  принадлежит заштрихованному углу (рис. 2.3, б).

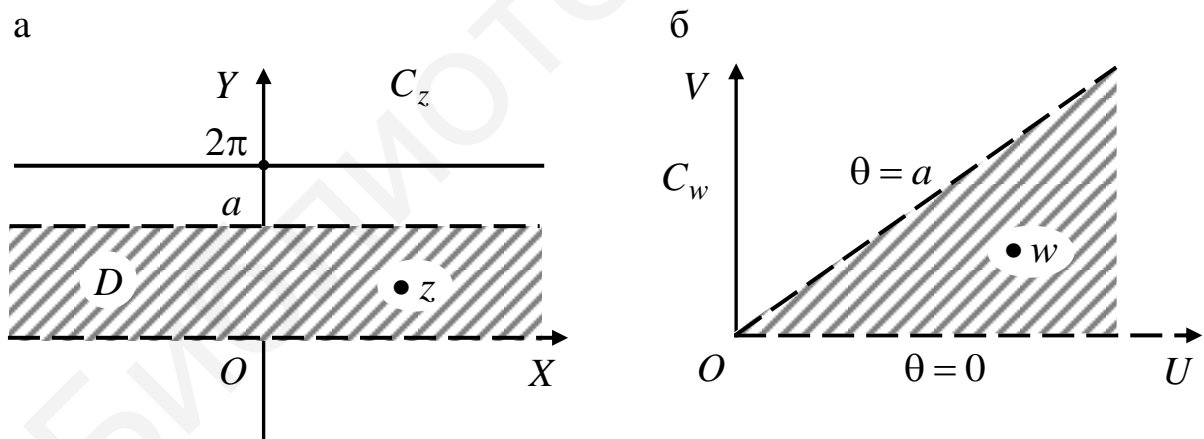


Рис. 2.3

Очевидно, что полоса  $0 < \text{Im } z < \pi$  функций  $w = e^z$  отображается на верхнюю полуплоскость  $\text{Im } w > 0$ , а полоса  $0 < \text{Im } z < 2\pi$  – на всю плоскость  $C_w$ , кроме точек положительной полуоси  $U$ . В этом случае говорят, что

функция  $w = e^z$  отображает полосу  $0 < \text{Im } z < 2\pi$  на всю плоскость  $C_w$  с разрезом вдоль положительной полуоси  $U$ . ▲

Δ б) Область  $D$  изображена на рис. 2.4. Для  $w = e^z$  согласно (2.5)  $u = e^x \cos y$ ,  $v = e^x \sin y$ .

Найдем образы прямых  $y = x$  и  $y = x - 2\pi$  при отображении  $w = e^z$ .

Прямая  $y = x$  отображается в кривую  $\Gamma$ , параметрические уравнения которой в плоскости  $UV$  есть  $u = e^x \cos y$ ,  $v = e^x \sin y$ , где  $x = \arg z = y$ , а  $z$  — точка прямой  $y = x$ ,  $x \in \mathbf{R}$ . Отсюда  $u^2 + v^2 = e^{2x}$  или  $\rho = e^x$ , где  $\rho = \sqrt{u^2 + v^2}$  — расстояние от точек кривой  $\Gamma$  до начала координат в плоскости  $UV$ . Кривая  $\rho = e^x \equiv e^y$  является спиралью. При  $x \rightarrow -\infty$  она, суживаясь, «накручивается» на точку  $(0, 0)$ , так как

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} u = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x \cos x = 0, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} v = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x \sin x = 0.$$

Для прямой  $y = x - 2\pi$  аналогично получаем  $u = e^x \cos x$ ,  $v = e^x \sin x$ ,  $x \in \mathbf{R}$ . Это та же спираль  $\Gamma$ , изображенная на рис. 2.5.

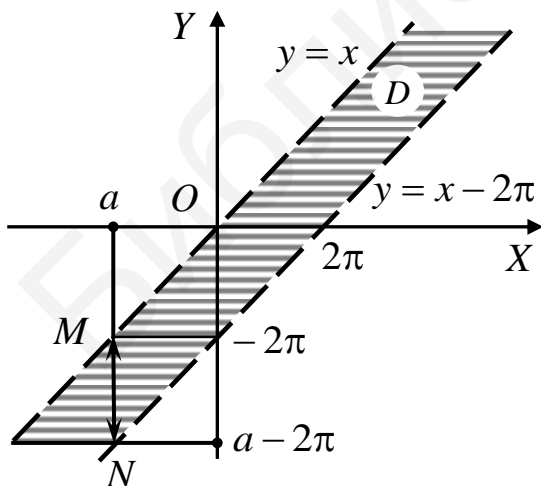


Рис. 2.4

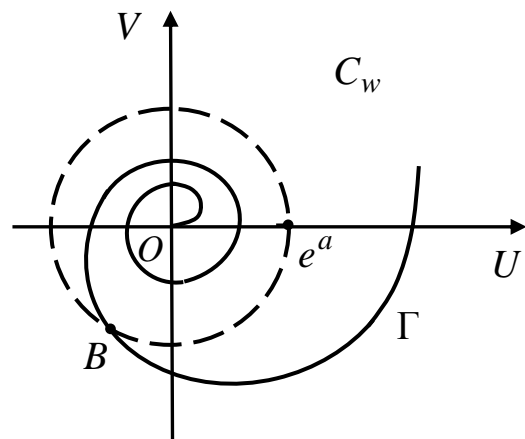


Рис. 2.5

Образом отрезка  $MN = \{x = a, a - 2\pi < y < a\}$  из  $D$  на плоскости  $UV$  является окружность

$$u = e^a \cos y, \quad v = e^a \sin y, \quad a - 2\pi < y < a, \quad (2.20)$$

радиусом  $e^a$  с центром в начале координат плоскости  $UV$ . Этой окружности не принадлежит точка  $B = (e^a \cos a, e^a \sin a) \in \Gamma$ . При изменении  $a$  от  $-\infty$  до  $+\infty$  окружности (2.20) заполняют всю плоскость  $UV$ , кроме точек спирали  $\Gamma$ .

Таким образом, полоса  $D$  функцией  $w = e^z$  отображается на всю комплексную плоскость  $C_w$ , из которой исключены точка  $O$  и спираль  $\Gamma$ . Говорят, что функция  $e^z$  отображает данную полосу на всю плоскость  $C_w$  с разрезом вдоль спирали  $\Gamma$ . ▲

Δ в) Для функции  $w = \cos z$  согласно (2.8) имеем

$$\cos z = \cos x \operatorname{ch} y - i \sin x \operatorname{sh} y \Rightarrow u = \cos x \operatorname{ch} y, \quad v = \sin x \operatorname{sh} y.$$

Область  $D$  изображена на рис. 2.6. Найдем в плоскости  $UV$  образ луча  $l_1 : x = 0, y > 0$ . Для него  $u = \operatorname{ch} y, v = 0, y > 0$ . В плоскости  $UV$  эти уравнения параметрически определяют луч  $L_1 : v = 0, u > 1$ , так как при  $y > 0$

всегда  $u = \operatorname{ch} y > 1$  (рис. 2.7). Далее определим отрезок  $l_2 : 0 < x < \frac{\pi}{2}, y = 0$ ,

который в плоскости  $UV$  отображается в часть прямой

$$u = \cos x, \quad v = 0, \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}, \quad \text{являющуюся отрезком } L_2 : 0 < u < 1, \quad v = 0.$$

Наконец, определим прямую  $l_3 : x = \frac{\pi}{2}, y > 0$ , которая преобразуется в луч  $L_3$ .

$u = 0, v = -\operatorname{sh} y < 0$ , являющийся отрицательной частью оси  $V$  (рис. 2.7).

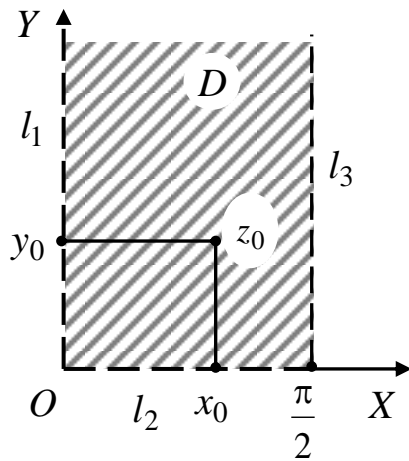


Рис. 2.6

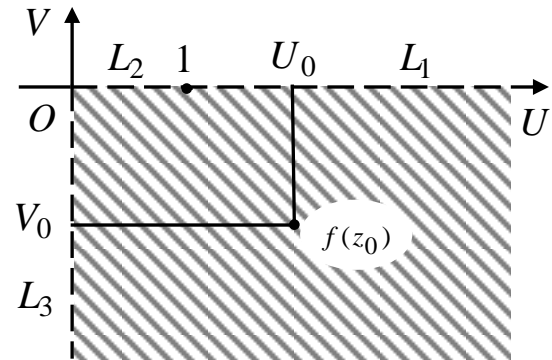


Рис. 2.7

Внутренние точки  $z_0$  области  $D$  отображаются во внутренние точки  $f(z_0)$  четвертой четверти плоскости  $UV$ . В самом деле, пусть  $z_0 = x_0 + iy_0$ ,  $0 < x_0 < \frac{\pi}{2}$ ,  $y_0 > 0$ . Для этой точки  $u_0 = \cos x_0 \operatorname{ch} y_0 > 0$  и  $v_0 = -\sin x_0 \operatorname{sh} y_0$ , т. е. действительно,  $f(z_0)$  принадлежит четвертой четверти плоскости  $UV$ .

Итак, область  $D$  функцией  $w = \cos z$  отображается на внутренность четвертой четверти комплексной плоскости  $UV$ .

### Задачи и упражнения

1. Выделить действительную и мнимую части функций:

а)  $w = e^{\bar{z}^2}$ ; б)  $w = \operatorname{ch}(z - i)$ ; в)  $w = 2^{z^2}$ ; г)  $w = \operatorname{sh} z$ ; д)  $w = (\sin iz - 1)$ .

Ответ:

а)  $u = e^{x^2 - y^2} \cos 2xy$ ,  $v = -e^{x^2 - y^2} \sin 2xy$ ;

б)  $u = \operatorname{ch} x \cos (y - 1)$ ,  $v = u = \operatorname{sh} x \sin (y - 1)$ ;

в)  $u = e^{(x^2 - y^2) \ln 2 - 4k\pi xy} \cos [2k\pi (x^2 - y^2) + 2xy \ln 2]$ ;

г)  $v = e^{(x^2 - y^2) \ln 2 - 4k\pi xy} \sin [2k\pi (x^2 - y^2) + 2xy \ln 2]$ ,  $k \in \mathbf{Z}$ ;

д)  $u = \operatorname{sh} x \cos y$ ,  $v = \operatorname{ch} x \sin y$ .

2. Вычислить:

а)  $\operatorname{ch}(1+2i)$ ; б)  $\operatorname{Arcsin} i$ ; в)  $\operatorname{Arch} 2$ ; г)  $\sin(1-3i)$ ; д)  $\operatorname{th}\left(\ln 3 + \frac{\pi i}{6}\right)$ ;

е)  $\operatorname{sh}(-1+5i)$ ; ж)  $\operatorname{th}\left(\ln 5 - \frac{\pi i}{4}\right)$ ; з)  $\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{1-i}$ ; и)  $(3-4i)^{i-2}$ ; к)  $\operatorname{Arcsin} 1$ ;

л)  $\operatorname{Arccos} i$ .

Ответ:

а)  $\operatorname{ch} 1 \cos 2 + i \operatorname{sh} 1 \sin 2$ ;

б)  $2k\pi - i \ln(\sqrt{2}-1)$ ,  $(2k+1)\pi - i \ln(\sqrt{2}+1)$ ,  $k \in \mathbf{Z}$ ;

в)  $\ln(2+\sqrt{3}) + 2k\pi i$ ,  $k \in \mathbf{Z}$ ; г)  $\operatorname{ch} 3 \sin 1 - i \operatorname{sh} 3 \cos 1$ ; д)  $\frac{80}{91} + \frac{i 9\sqrt{3}}{91}$ ;

е)  $-\operatorname{sh} 1 \cos 5 + i \operatorname{ch} 1 \sin 5$ ; ж)  $\frac{312}{313} - \frac{i 25}{313}$ ; з)  $e^{\frac{\pi(2k-1)-\pi i}{4}}$ ,  $k \in \mathbf{Z}$ ;

и)  $e^{-2 \ln 5 + \operatorname{arctg} \frac{4}{3} - 2k\pi + i(\ln 5 + 2 \operatorname{arctg} \frac{4}{3})}$ ,  $k \in \mathbf{Z}$ ; к)  $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ ,  $k \in \mathbf{Z}$ ;

л)  $\frac{\pi}{2} + 2k\pi - i \ln(\sqrt{2}+1)$ ,  $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi - i \ln(\sqrt{2}-1)$ ,  $k \in \mathbf{Z}$ ;

## Лекция 3

### ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ ФКП

**Производная ФКП. Дифференцируемость ФКП, необходимое и достаточное условия дифференцируемости. Условия Коши – Римана. Условия Коши – Римана в полярных координатах. Аналитические функции. Гармонические функции. Восстановление аналитической функции по ее известной действительной или мнимой части. Аналитичность многозначной функции. Точки ветвления многозначной функции.**

#### Задачи и упражнения

Пусть однозначная функция  $w = f(z)$  определена в некоторой окрестности точки  $z_0$ . Производной функции  $f$  в этой точке называется число, обозначаемое  $f'(z_0)$  и равное пределу отношения  $\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$  при  $z \rightarrow z_0$ , если этот предел существует.

Итак, по определению

$$f'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}. \quad (3.1)$$

Положив  $z - z_0 = \Delta z$ ,  $f(z) - f(z_0) = \Delta f(z_0)$ , из (3.1) получим, что

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta f(z_0)}{\Delta z}. \quad (3.2)$$

Функция  $w = f(z)$ , имеющая в точке  $z_0$  производную, называется *дифференцируемой* в этой точке. Функция  $f$  называется *дифференцируемой в области  $D$* , если она дифференцируема в каждой точке этой области.

Дифференцируемость функции  $w = f(z)$  в точке  $z_0$  означает, что ее приращение  $\Delta f(z_0) = f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)$  представляется в виде

$$\Delta f(z_0) = A\Delta z + o(|\Delta z|), \quad (3.3)$$

где  $A$  – некоторое комплексное число,  $o(|\Delta z|)$  удовлетворяет соотношению

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{o(|\Delta z|)}{|\Delta z|} = 0.$$

В самом деле, так как функция  $f(z)$  дифференцируема в точке  $z_0$ , то из равенства (3.2) следует, что для любого  $\varepsilon > 0$  существует  $\delta > 0$ , такое, что

$$\left| \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} - f'(z_0) \right| < \varepsilon,$$

если  $0 < |\Delta z| < \delta$ . Отсюда  $|f(z_0 + \Delta z) - f(z_0) - f'(z_0)\Delta z| < \varepsilon|\Delta z|$ , что равносильно равенству (3.3) при  $A = f'(z_0)$ . Если же выполнено соотношение (3.3), то разделив обе части его на  $\Delta z \neq 0$  и перейдя затем к пределу при  $\Delta z \rightarrow 0$ , получим  $f'(z_0) = A$ .

Таким образом, равенство (3.3) является *необходимым и достаточным условием дифференцируемости функции  $w = f(z)$  в точке  $z_0$* . Так как  $A = f'(z_0)$ , перепишем эти условия в виде

$$f(z_0 + \Delta z) - f(z_0) = f'(z_0)\Delta z + o(|\Delta z|). \quad (3.4)$$

Отсюда, в частности, следует, что *функция  $f(z)$ , дифференцируемая в точке  $z_0$ , непрерывна в ней*.

Из определения производной ФКП и свойств пределов следуют все известные из курса математического анализа правила дифференцирования. Приведем формулировки некоторых из них.

1. Если функции  $f_1(z)$  и  $f_2(z)$  дифференцируемы в точке  $z_0$ , то и функции  $\alpha f_1(z) + \beta f_2(z)$ ,  $\alpha, \beta \in \mathbf{C}$ ;  $f_1(z) \cdot f_2(z)$ ;  $f_1(z)/f_2(z)$ ,  $f_2(z_0) \neq 0$  тоже дифференцируемы в этой точке, причем:

$$(\alpha f_1(z_0) + \beta f_2(z_0))' = \alpha f_1'(z_0) + \beta f_2'(z_0);$$

$$(f_1(z) \cdot f_2(z))' = f_1'(z) f_2(z) + f_1(z) f_2'(z);$$

$$\left( \frac{f_1(z)}{f_2(z)} \right)'_{z=z_0} = \left( \frac{f_1'(z) f_2(z) - f_1(z) f_2'(z)}{f_2^2(z)} \right)_{z=z_0}.$$

2. Если  $w = f(z)$  в точке  $z$  имеет производную  $f'(z)$ , а функция  $W = F(w)$  имеет в точке  $w = f(z)$  производную  $F'(w)$ , то сложная функция  $W = F(f(z))$  дифференцируема в точке  $z$ , причем

$$W' = (F(f(z)))' = F'(w) f'(z), \quad w = f(z).$$

3. Если  $w = f(z)$  – взаимно однозначная функция в окрестности точки  $z$

и  $z = f^{-1}(w)$  – обратная ей функция, то  $f'(z) = \frac{1}{(f^{-1}(w))'}$  или

$$(f^{-1}(w))' = \frac{1}{f'(z)}, \quad f'(z) \neq 0.$$

В определении производной (3.1) предполагается, что  $z$  стремится к  $z_0$  по произвольным путям, но предел отношения  $\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$  должен быть

один и тот же. Соответствует ли свойство дифференцируемости функции  $f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$  какому-либо простому свойству функций  $u(x, y)$  и  $v(x, y)$ ? На этот вопрос отвечает следующая теорема.

**Теорема 3.1.** Если функция  $f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$  дифференцируема в точке  $z_0 = x_0 + i y_0$ , то функции  $u(x, y)$  и  $v(x, y)$  имеют частные производные первого порядка в точке  $(x_0, y_0)$ , удовлетворяющие соотношениям

$$\frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial x} = \frac{\partial v(x_0, y_0)}{\partial y}; \quad \frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial y} = -\frac{\partial v(x_0, y_0)}{\partial x}. \quad (3.5)$$



При этом

$$f'(z_0) = \frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial x} + i \frac{\partial v(x_0, y_0)}{\partial x} = \frac{\partial v(x_0, y_0)}{\partial y} - i \frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial y}. \quad (3.6)$$

Соотношения (3.5) называются *условиями Коши – Римана*.

Δ Так как предел (3.1) не зависит от пути интегрирования, то выберем следующие два из возможных путей:  $z \rightarrow z_0$  по прямой, параллельной оси  $X$ ;  $z \rightarrow z_0$  по прямой, параллельной оси  $Y$  (рис. 3.1).

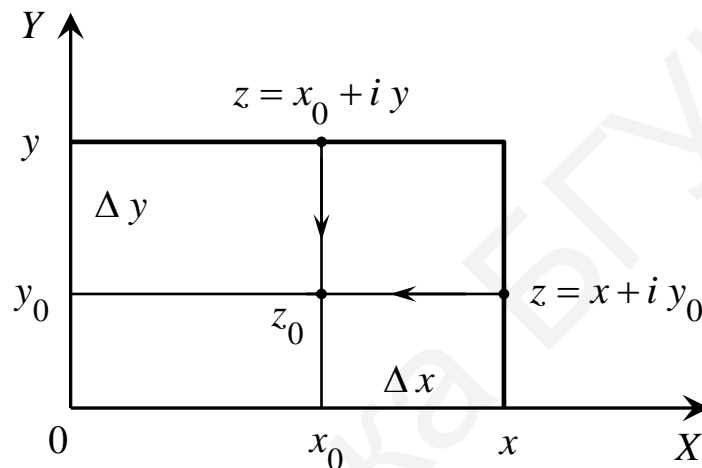


Рис. 3.1

В первом случае  $z_0 = x_0 + iy_0$ ,  $z = x + iy_0$  и, значит,  $z - z_0 = x - x_0$ . Тогда

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{u(x, y_0) + i v(x, y_0)}{x - x_0} - \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{u(x_0, y_0) + i v(x_0, y_0)}{x - x_0} = \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{u(x, y_0) - u(x_0, y_0)}{x - x_0} + i \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{v(x, y_0) - v(x_0, y_0)}{x - x_0}. \end{aligned}$$

Отсюда вследствие существования предела в левой части этого равенства равно  $f'(z_0)$ , получаем, что предел его правой части при  $x \rightarrow x_0$  существует и равен

$$\frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial x} + i \frac{\partial v(x_0, y_0)}{\partial x}.$$

Таким образом, справедливо равенство

$$f'(z_0) = \frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial x} + i \frac{\partial v(x_0, y_0)}{\partial x}. \quad (3.7)$$

Во втором случае  $z_0 = x_0 + iy_0$ ,  $z = x_0 + iy$ , откуда  $z - z_0 = i(y - y_0)$ .

Тогда

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} &= \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{(u(x_0, y) + iv(x_0, y)) - (u(x_0, y_0) + iv(x_0, y_0))}{i(y - y_0)} = \\ &= -i \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{u(x_0, y) - u(x_0, y_0)}{y - y_0} + \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{v(x_0, y) - v(x_0, y_0)}{y - y_0}. \end{aligned}$$

Отсюда в силу существования  $f'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$  получаем

$$f'(z_0) = -i \frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial y} + \frac{\partial v(x_0, y_0)}{\partial y}. \quad (3.8)$$

Это и доказывает справедливость формул (3.6). Из равенств (3.7) и (3.8) имеем

$$\frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial x} + i \frac{\partial v(x_0, y_0)}{\partial x} = \frac{\partial v(x_0, y_0)}{\partial y} - i \frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial y}.$$

Приравнявая здесь по отдельности действительные и мнимые части, получаем условия Коши – Римана (3.5). ▲

Из условий (3.5) и (3.6) следует, что производная ФКП  $f'(z)$  вычисляется по одной из формул

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} - i \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} + i \frac{\partial v}{\partial x}. \quad (3.9)$$

*Замечание.* Произвольная комплекснозначная функция  $u(x, y) + iv(x, y)$ , вообще говоря, не является дифференцируемой в смысле определения (3.1), даже если функции  $u(x, y)$  и  $v(x, y)$  дифференцируемы. Это связано с тем, что для ее дифференцируемости функции  $u(x, y)$  и  $v(x, y)$  должны быть связаны условиями Коши – Римана. Например, пусть  $f(z) = \bar{z} = x - iy$ . Здесь  $u = x$ ,  $v = -y \Rightarrow u'_x = 1$ ,  $v'_y = -1$ ,  $u'_y = 0$ ,  $v'_x = 0$ , т. е. условия Коши – Римана не выполняются ни в одной точке  $(x, y)$ . Следовательно, функция  $\bar{z} = x - iy$  не дифференцируема ни в одной точке.

Условия Коши – Римана являются необходимыми для дифференцируемости функции  $f(z)$  в точке  $z$ . Достаточные условия дифференцируемости ФКП устанавливаются в следующей теореме.

**Теорема 3.2.** Пусть функции  $u(x, y)$  и  $v(x, y)$ , непрерывно дифференцируемые в точке  $(x_0, y_0)$ , удовлетворяют в ней условиям Коши – Римана. Тогда функция  $w = u(x, y) + iv(x, y)$  дифференцируема в точке  $z_0 = x_0 + iy_0$ .

Δ Пусть функции  $u(x, y)$  и  $v(x, y)$  непрерывно дифференцируемы в точке  $(x_0, y_0)$ . Для  $z = x_0 + \Delta x + i(y_0 + \Delta y)$  имеем  $\Delta z = z - z_0 = \Delta x + i\Delta y$ . Найдем приращение  $\Delta u$  и  $\Delta v$ . Вследствие дифференцируемости функций  $u$  и  $v$  в точке  $(x_0, y_0)$  имеем

$$\begin{aligned}\Delta u &= u(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - u(x_0, y_0) = \frac{\partial u}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial u}{\partial y} \Delta y + o_1(|\Delta z|), \\ \Delta v &= v(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - v(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial v}{\partial y} \Delta y + o_2(|\Delta z|),\end{aligned}\quad (3.10)$$

где  $\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{o_i(|\Delta z|)}{|\Delta z|} = 0, \quad i = 1, 2.$

Из равенств (3.10) получаем

$$\begin{aligned}\Delta u + i\Delta v &= \\ &= \left( \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} \right) \Delta x + \left( \frac{\partial u}{\partial y} + i \frac{\partial v}{\partial y} \right) \Delta y + o_1(|\Delta z|) + o_2(|\Delta z|).\end{aligned}\quad (3.11)$$

Используя условия Коши – Римана (3.5), из (3.11) получаем

$$\begin{aligned}\Delta u + i\Delta v &= \left( \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} \right) \Delta x + \left( -\frac{\partial v}{\partial x} + i \frac{\partial u}{\partial x} \right) \Delta y + o(|\Delta z|) = \\ &= \left( \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} \right) (\Delta x + i\Delta y) + o(|\Delta z|) = \left( \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} \right) (\Delta z) + o(|\Delta z|),\end{aligned}\quad (3.12)$$

где  $o(|\Delta z|) = o_1(|\Delta z|) + o_2(|\Delta z|).$

Разделив обе части равенства (3.12) на  $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$  и перейдя к пределу при  $\Delta z \rightarrow 0$ , будем иметь

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta u + i\Delta v}{\Delta z} = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = f'(z_0),$$

т. е. функция  $w = u(x, y) + iv(x, y)$  дифференцируема в точке  $z_0$ . ▲

**Пример 3.1.** Проверить выполнение условий Коши – Римана для функции  $w = e^{iz^2}$ . В случае их выполнимости найти значение производной функции в точке  $\frac{i\sqrt{\pi}}{2}$ .

Δ Так как  $z = x + iy$ , то

$$\begin{aligned} w &= e^{i(x+iy)^2} = e^{i(x^2 - y^2 + i2xy)} = e^{-2xy} \cos(x^2 - y^2) + i e^{-2xy} \sin(x^2 - y^2) \Rightarrow \\ \Rightarrow u &= e^{-2xy} \cos(x^2 - y^2), v = e^{-2xy} \sin(x^2 - y^2) \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = \\ &= -2e^{-2xy}(y \cos(x^2 - y^2) + x \sin(x^2 - y^2)) \equiv \frac{\partial v}{\partial y}. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Аналогично

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -2e^{-2xy}(x \cos(x^2 - y^2) - y \sin(x^2 - y^2)) \equiv -\frac{\partial v}{\partial x}. \quad (3.14)$$

Итак, для функции  $w = e^{iz^2}$  условия Коши – Римана выполнены  $\forall z \in \mathbb{C}$ .

Поскольку частные производные функции  $u(x, y)$  и  $v(x, y)$  непрерывны в плоскости  $XU$ , то по теореме 3.2 функция  $w$  дифференцируема в любой точке  $z \in \mathbb{C}$  и ее производная в точке  $z_0 = \frac{i\sqrt{\pi}}{2} = 0 + \frac{i\sqrt{\pi}}{2}$ , согласно формулам

(3.9), (3.13), (3.14) равна

$$f'(z_0) = \left( \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} \right) \Big|_{x_0=0, y_0=\frac{\sqrt{\pi}}{2}} = -2 \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cos \frac{\pi}{4} + i 2 \left( \frac{\sqrt{\pi}}{2} \sin \frac{\pi}{4} \right) =$$

$$= \frac{\sqrt{2\pi}}{2} (-1 + i). \quad \blacktriangle$$

Выясним теперь, как выглядят условия Коши – Римана в полярных координатах.

Так как  $z = \rho e^{i\varphi} = x + iy = \rho (\cos \varphi + i \sin \varphi)$ , где  $\rho = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$  и  $x = \rho \cos \varphi$ ,  $y = \rho \sin \varphi$ , то для функции  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  в полярных координатах  $\rho$  и  $\varphi$  имеем

$$f(z) = f(\rho e^{i\varphi}) = u(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) + iv(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi),$$

т. е.

$$\begin{aligned} u(x, y) &= u(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi), \\ v(x, y) &= v(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi). \end{aligned} \quad (3.15)$$

Из равенств (3.15) по цепочному правилу дифференцирования находим

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial \rho} &= \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \rho} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \rho} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos \varphi + \frac{\partial u}{\partial y} \sin \varphi; \\ \frac{\partial u}{\partial \varphi} &= \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \varphi} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \varphi} = -\frac{\partial u}{\partial x} \rho \sin \varphi + \frac{\partial u}{\partial y} \rho \cos \varphi; \\ \frac{\partial v}{\partial \rho} &= \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \rho} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \rho} = \frac{\partial v}{\partial x} \cos \varphi + \frac{\partial v}{\partial y} \sin \varphi; \\ \frac{\partial v}{\partial \varphi} &= \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \varphi} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \varphi} = -\frac{\partial v}{\partial x} \rho \sin \varphi + \frac{\partial v}{\partial y} \rho \cos \varphi. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Из первого и четвертого равенств (3.16) с учетом условий Коши – Римана  $u'_x = v'_y$ ,  $u'_y = -v'_x$  получим

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial y} \cos \varphi - \frac{\partial v}{\partial x} \sin \varphi &= \frac{\partial u}{\partial \rho}; \\ \frac{\partial v}{\partial y} \rho \cos \varphi - \frac{\partial v}{\partial x} \rho \sin \varphi &= \frac{\partial v}{\partial \varphi}; \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial \rho} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial v}{\partial \varphi}.$$

Аналогично из второго и третьего равенств (3.16) имеем

$$\left. \begin{aligned} -\frac{\partial v}{\partial y} \rho \sin \varphi - \frac{\partial v}{\partial x} \rho \cos \varphi &= \frac{\partial u}{\partial \varphi}; \\ \frac{\partial v}{\partial y} \sin \varphi + \frac{\partial v}{\partial x} \cos \varphi &= \frac{\partial v}{\partial \rho}; \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial \varphi} = -\rho \frac{\partial v}{\partial \rho}.$$

Таким образом, условия Коши – Римана в полярных координатах имеют вид

$$\frac{\partial u}{\partial \rho} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial v}{\partial \varphi}; \quad \frac{\partial u}{\partial \varphi} = -\rho \frac{\partial v}{\partial \rho}, \quad \rho > 0. \quad (3.17)$$

Умножим второе из равенств (3.16) на  $i$  и вычтем полученный результат из четвертого равенства (3.16):

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial \varphi} - i \frac{\partial u}{\partial \varphi} &= \rho \sin \varphi \left( -\frac{\partial v}{\partial x} + i \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \rho \cos \varphi \left( -\frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \\ &= \rho \sin \varphi \left( i^2 \frac{\partial v}{\partial x} + i \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \rho \cos \varphi \left( \frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \\ &= \left( \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} \right) i \rho \sin \varphi + \left( \frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y} \right) \rho \cos \varphi. \end{aligned}$$

Но согласно (3.9)

$$\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y} = f'(z).$$

Таким образом,

$$\frac{\partial u}{\partial \varphi} - i \frac{\partial u}{\partial \varphi} = f'(z) \rho (\cos \varphi + i \sin \varphi) = z \cdot f'(z).$$

Отсюда получаем, что в полярных координатах согласно условиям Коши – Римана (3.17) производная  $f'(z)$  имеет вид

$$f'(z) = \frac{1}{z} \left( \frac{\partial v}{\partial \varphi} - i \frac{\partial u}{\partial \varphi} \right) = \frac{\rho}{z} \left( \frac{\partial u}{\partial \rho} + i \frac{\partial v}{\partial \rho} \right), \quad z \neq 0. \quad (3.18)$$

**Пример 3.2.** Пусть  $f(z) = \ln z = \ln \rho + i\varphi$ , где  $\varphi = \arg z$ ,  $\rho = |z|$ . Имеем

$$u = \ln \rho, v = \varphi. \quad \text{Тогда} \quad \frac{\partial u}{\partial \rho} = \frac{1}{\rho}; \quad \frac{\partial u}{\partial \varphi} = 0; \quad \frac{\partial v}{\partial \rho} = 0; \quad \frac{\partial v}{\partial \varphi} = 1. \quad \text{Отсюда}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \rho} = \frac{1}{\rho} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial v}{\partial \varphi}, \quad \frac{\partial u}{\partial \varphi} = 0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial v}{\partial \rho}, \quad \text{т. е. условия Коши – Римана выполнены,}$$

и поэтому согласно равенству (3.18)

$$(\ln z)' = \frac{1}{z} \left( \frac{\partial v}{\partial \varphi} - i \frac{\partial u}{\partial \varphi} \right) = \frac{1}{z}.$$

Одним из основных понятий в теории ФКП является понятие *аналитичности*.

Однозначная функция  $w = f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$  называется *аналитической в точке  $z$* , если она непрерывно дифференцируема как в самой точке  $z$ , так и в некоторой ее окрестности. Функция  $w = f(z)$  называется *аналитической в области  $D$* , если она аналитична в каждой точке этой области. Точка  $z_0$ , в которой функция  $f(z)$  аналитична, называется *правильной точкой функции*. Если же функция аналитична в некоторой проколотовой окрестности точки  $z_0$  и не аналитична в самой точке  $z_0$  или не определена в ней, то  $z_0$  называется *особой точкой* этой функции. Однозначная аналитическая функция называется *регулярной*.

**Пример 3.3.** Функция  $e^z = e^x \cos y + i e^x \sin y$  аналитична на всей комплексной плоскости, так как

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^x \cos y = \frac{\partial v}{\partial y}; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -e^x \sin y = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

По формуле (3.9)

$$(e^z)' = u'_x + i v'_x = e^x \cos y + i e^x \sin y = e^z.$$

Используя определение элементарных ФКП, получаем следующую таблицу производных:

1.  $(a^z)' = a^z \ln a, 0 < a \neq 1;$
2.  $(e^z)' = e^z;$
3.  $(z^\alpha)' = \alpha z^{\alpha-1};$
4.  $(\ln z)' = \frac{1}{z};$
5.  $(\sin z)' = \cos z;$
6.  $(\cos z)' = -\sin z;$
7.  $(\operatorname{tg} z)' = \frac{1}{\cos^2 z};$
8.  $(\operatorname{ctg} z)' = \frac{-1}{\sin^2 z};$
9.  $(\operatorname{sh} z)' = \operatorname{ch} z;$
10.  $(\operatorname{ch} z)' = \operatorname{sh} z;$
11.  $(\operatorname{th} z)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 z};$
12.  $(\operatorname{cth} z)' = \frac{-1}{\operatorname{sh}^2 z};$
13.  $(\arcsin z)' = \frac{1}{\sqrt{1-z^2}};$
14.  $(\arccos z)' = \frac{-1}{\sqrt{1-z^2}};$
15.  $(\operatorname{arctg} z)' = \frac{1}{(1+z^2)};$
16.  $(\operatorname{arcctg} z)' = \frac{-1}{(1+z^2)}.$

**Пример 3.4.**

$$\begin{aligned}
 (\ln (\sin (z^2 - \sqrt{z})))' &= \frac{(2z - 1/2\sqrt{z}) \cos (z^2 - \sqrt{z})}{\sin (z^2 - \sqrt{z})} = \\
 &= \frac{4z\sqrt{z} - 1}{2\sqrt{z}} \operatorname{ctg} (z^2 - \sqrt{z}).
 \end{aligned}$$

Пусть функция  $w = f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$  аналитична в области  $D$ , причем функции  $u(x, y)$  и  $v(x, y)$  имеют непрерывные частные производные до второго порядка включительно. Так как в  $D$  выполнены условия Коши – Римана

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}, \tag{3.19}$$



то, дифференцируя первое из этих равенств по  $x$ , а второе – по  $y$ , получаем  $u''_{xx} = v''_{yx}$ ,  $u''_{yy} = -v''_{xy}$ . Отсюда с учетом равенства  $v''_{yx} = v''_{xy}$  будем иметь  $u''_{xx} + u''_{yy} = 0$ .

Дифференцируя теперь первое из равенств в (3.19) по  $y$ , а второе – по  $x$  и вычитая получившиеся при этом соотношения, будем иметь  $v''_{xx} + v''_{yy} = 0$ .

Итак, функции  $u(x, y)$  и  $v(x, y)$  в области  $D$  удовлетворяют уравнению Лапласа:

$$\Delta T = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0, \quad (3.20)$$

т. е. действительная  $u(x, y)$  и мнимая  $v(x, y)$  части аналитической функции  $f(z) = u + iv$  являются гармоническими в  $D$  функциями.

Гармонические функции  $u(x, y)$  и  $v(x, y)$ , удовлетворяющие в области  $D$  условиям Коши – Римана, называются *сопряженными*. Таким образом, мы показали, что действительная и мнимая части аналитической функции  $f(z)$  являются в  $D$  сопряженными.

Возникает вопрос: можно ли для заданной в области  $D$  произвольной действительной гармонической функции  $u(x, y)$  найти сопряженную к ней функцию  $v(x, y)$ , такую, что функция  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  будет аналитической в области  $D$ ? На этот вопрос отвечает следующая теорема.

**Теорема 3.3.** *Всякая гармоническая в односвязной области  $D$  функция служит действительной (мнимой) частью некоторой аналитической в  $D$  функции.*

Δ Пусть  $u(x, y)$  – гармоническая в односвязной области  $D$  функция. Рассмотрим дифференциальную форму

$$W = -\frac{\partial u}{\partial y} dx + \frac{\partial u}{\partial x} dy = P dx + Q dy. \quad (3.21)$$

Согласно уравнению (3.20)

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( -\frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Отсюда следует, что форма (3.21) является полным дифференциалом некоторой функции  $v(x, y)$ , т. е.

$$d v(x, y) = \frac{\partial v}{\partial x} d x + \frac{\partial v}{\partial y} d y = -\frac{\partial u}{\partial y} d x + \frac{\partial u}{\partial x} d y.$$

Отсюда для функций  $u$  и  $v$  получаем условия Коши – Римана, т. е. функции  $u$  и  $v$  сопряжены в области  $D$ .

Так как функция  $v(x, y)$  восстанавливается по ее полному дифференциалу с точностью до произвольной действительной постоянной, то функция  $f(z) = u + iv$  определяется тем самым до произвольной «чисто» мнимой постоянной.

Аналогично показывается, что в односвязной области  $D$  аналитическая функция  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  по своей мнимой части  $v$  определяется с точностью до действительного постоянного слагаемого. Для этого достаточно ввести в рассмотрение дифференциальную форму

$$W = -\frac{\partial v}{\partial y} d x - \frac{\partial v}{\partial x} d y$$

и повторить рассуждения, приведенные в первой части теоремы. ▲

Для восстановления аналитической функции по ее известной действительной или мнимой части следует исходить из условий Коши – Римана:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \quad (3.22)$$

Пусть, например, известна действительная часть  $u(x, y)$  аналитической функции  $f(z) = u + iv$ . Из первого условия (3.22) условий Коши – Римана получаем

$$\left(\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x}\right) \Rightarrow v(x, y) = \int \frac{\partial u}{\partial x} dy + \varphi(x), \quad (3.23)$$

где  $\varphi(x)$  – некоторая константа интегрирования функции при интегрировании по  $y$ . Найденную функцию  $v(x, y)$  подставляем во второе условие Коши – Римана:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} = \int \frac{\partial u}{\partial x} dy - \varphi'(x).$$

Отсюда находим функцию  $\varphi(x)$ . Подставив ее в (3.23), получим сопряженную функцию  $v(x, y)$ .

Аналогично, если известна функция  $v(x, y)$ , то

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}\right) \Rightarrow u = \int \frac{\partial v}{\partial y} dx + \psi(y), \quad (3.24)$$

где  $\psi(y)$  – некоторая дифференцируемая функция. Отсюда и из второго условия Коши – Римана следует

$$\frac{\partial}{\partial y} \int \frac{\partial v}{\partial y} dx + \psi'(y) = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Найденную из этого соотношения функцию  $\psi(y)$  подставляем в формулу (3.24) и получаем искомую функцию  $u(x, y)$ .

**Пример 3.6.** Восстановить аналитическую функцию по известной ее действительной части  $u = 1 - e^x \sin y$ .

Δ Так как

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} = -e^x \sin y \Rightarrow v = -\int e^x \sin y dy + \varphi(x) = e^x \cos y + \varphi(x),$$

то из равенства  $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$  будем иметь  $-e^x \cos y = -e^x \cos y - \varphi'(x) \Rightarrow$

$\Rightarrow \varphi'(x) = 0 \Rightarrow \varphi(x) = \text{const} = C$ . В таком случае  $v = e^x \cos y + C$ .

Следовательно,

$$f(z) = u + iv = 1 - e^x \sin y + i(e^x \cos y + C) = 1 + i^2 e^x \sin y + i e^x \cos y + iC = i(e^x \cos y + i e^x \sin y) + 1 + iC = i e^z + 1 + iC. \blacktriangle$$

**Пример 3.7.** Восстановить аналитическую функцию  $f(z) = u + iv$  по ее

известной мнимой части  $v = \frac{(e^{2x} - 1)(\sin y)}{e^x}$ , причем  $f(0) = 2$ .

$\Delta$  Из уравнения Коши – Римана  $u'_x = v'_y$  имеем

$$\frac{\partial u}{\partial x} = (e^x - e^{-x}) \cos y \Rightarrow u = \int (e^x - e^{-x}) \cos y dx + g(y).$$

Используя теперь второе уравнение Коши – Римана  $u_y = -v_x$ , получаем

$$-(e^x + e^{-x}) \sin y + g'(y) = -(e^x + e^{-x}) \sin y \Rightarrow g(y) = C = \text{const}.$$

Тогда  $u = (e^x + e^{-x}) \cos y + C$ , а функция

$$f(z) = u + iv = (e^x + e^{-x}) \cos y + C + i(e^x + e^{-x}) \sin y = e^x(\cos y + i \sin y) + e^{-x}(\cos y - i \sin y) + C = e^z + e^{-z} + C = 2 \operatorname{ch} z + C.$$

Из условия  $f(0) = 2 + C = 2 \Rightarrow C = 0$ . Итак,  $f(z) = 2 \operatorname{ch} z$ .  $\blacktriangle$

**Пример 3.8.** Найти сопряженную функцию  $u(x, y)$  для гармонической функции  $v = x^2 - y^2 - x$ .

$\Delta$  Имеем  $v'_x = 2x - 1$ ,  $v'_y = -2y$ . Используя условия Коши – Римана, получаем

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy = \frac{\partial v}{\partial y} dx - \frac{\partial v}{\partial x} dy = -2y dx - (2x - 1) dy.$$

Отсюда при  $x_0 = 0$ ,  $y_0 = 0$  имеем

$$u = \int_0^x (-2y_0) dt - \int_0^y (2x - 1) dt = -2xy + y.$$

Тогда

$$f(z) = u + iv = -2xy + y + i(x^2 - y^2 - x) = i^2 2xy + ix^2 + i^3 y^2 - i^2 y = \\ = i(x^2 + 2ixy + i^2 y^2) - (x + iy) = iz^2 - iz. \blacktriangle$$

Рассмотрим теперь *вопрос об аналитичности многозначной функции.*

Аналитичность в области  $D$  функции  $f(z)$  предполагает ее однозначность и дифференцируемость. Если функция  $f(z)$  многозначна в  $D$ , то простейшим методом ее исследования в этой области является выделение так называемых однозначных ее *ветвей* в этой области. Говорят, что в области  $D$  выделена однозначная ветвь функции, если в каждой точке области выбрано одно из значений многозначной функции таким образом, что полученная однозначная функция (ветвь) непрерывна в  $D$ .

Введем следующее определение. Пусть кривая  $L$  не проходит через точку  $z = a$ . *Приращением* аргумента  $z$  вдоль кривой  $L$  называется угол поворота вектора  $z$  при движении точки  $z$  вдоль  $L$  от начальной до конечной точек этой кривой. Это приращение обозначим  $\Delta_L \varphi$ .

Рассмотрим пример, поясняющий выделение однозначной ветви многозначной функции.

**Пример 3.9.**  $\Delta$  Рассмотрим функцию  $w = \sqrt[n]{z-a}$ . В каждой точке  $z$ , ( $z \neq a$ ), она имеет  $n$  значений. Положив  $z-a = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ , получим

$$w = \sqrt[n]{r} \left( \cos \frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right) = \sqrt[n]{r} e^{i \frac{\varphi + 2k\pi}{n}}, \quad k = \overline{0, n-1}. \quad (3.25)$$

Зафиксировав  $k$ , выберем из  $n$  значений какое-нибудь одно и посмотрим, как будет меняться выбранное значение корня при перемещении  $z$  вдоль непрерывной кривой, двигаясь по этой кривой против часовой стрелки (рис. 3.2).

Из рис. 3.2, а видно, что  $r$  и  $\varphi$  изменяются непрерывно, и выражение (3.25) при фиксированном  $k$  тоже изменяется непрерывно. Если  $z$ , перемещаясь вдоль  $L$ , вернется в первоначальное положение, то  $r$  вернется также к первоначальному значению, то  $\varphi$ , возрастая, получит приращение  $\Delta_L \varphi = 2\pi$ .

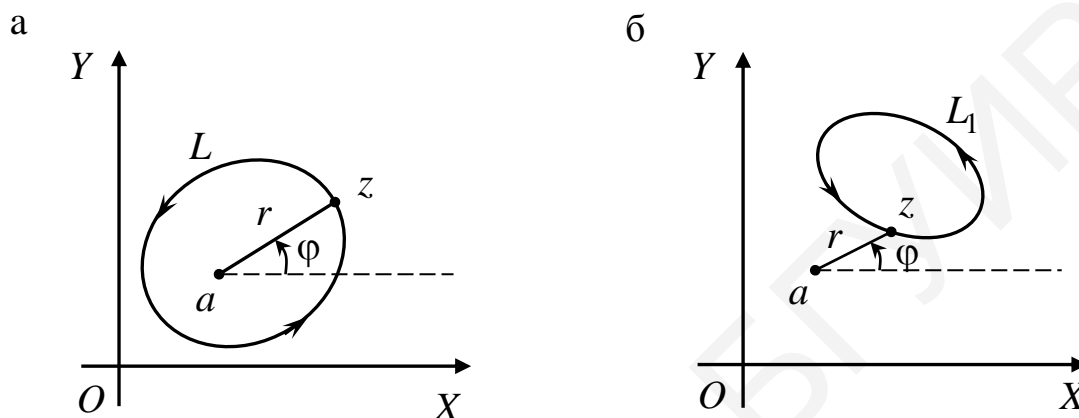


Рис. 3.2

В силу этого  $w$  получит новое значение:

$$w_H = \sqrt[n]{r} e^{i \frac{(\varphi+2\pi)+2k\pi}{n}} = \sqrt[n]{r} e^{i \frac{\varphi+2k\pi}{n}} \cdot e^{i \frac{2\pi}{n}}.$$

Отсюда получаем связь между новым  $w_H$  и первоначальным (старым  $w_c$ )

значениями:  $w_H = w_c e^{\frac{2\pi i}{n}}$ .

Итак, новое значение корня равно первоначальному, умноженному на число  $\omega = e^{i \frac{2\pi}{n}}$

Заметим, что  $\omega^n = e^{2\pi i} = 1$ , т. е.  $\omega$  – один из корней  $n$ -й степени из единицы. Полученный вывод, очевидно, не зависит от того, по какому замкнутому контуру  $L$  совершается обход точки  $a$  против часовой стрелки.

Выясним теперь, как изменяется значение корня, когда  $z$ , перемещаясь по замкнутому пути  $L_1$ , не обходит точку  $a$ . Из рис. 3.2, б видно, что в этом

случае  $z$ , пробежав весь замкнутый путь  $L_1$ , вернется в первоначальное положение, тогда  $r$  и  $\varphi$  также вернутся к первоначальным значениям. Следовательно, к первоначальному значению вернется и выбранное значение корня. Ясно, что этот вывод не зависит от замкнутой кривой, не обходящей вокруг точки  $a$ .

Итак, если переменная точка  $z$  опишет какой-нибудь замкнутый путь, обходящий точку  $a$  один раз против часовой стрелки, то любое значение корня  $\sqrt[n]{z-a}$  перейдет в новое:

$$\sqrt[n]{z-a}\Big|_H = \sqrt[n]{z-a}\Big|_C e^{i\frac{2\pi}{n}}.$$

Если же  $z$  опишет замкнутый путь, не обходящий точку  $a$ , то значение корня не изменится, т. е. оно вернется к первоначально выбранному значению. ▲

Дадим теперь следующее определение.

Если для точки  $z_0$  можно указать такую  $\varepsilon$ -окрестность, что при однократном обходе точки  $z_0$  по любому замкнутому контуру, целиком лежащему в этой окрестности, одна ветвь многозначной функции  $w = f(z)$  переходит в другую ветвь, то  $z_0$  называется *точкой ветвления* данной многозначной функции. В окрестности точки ветвления отдельные ветви многозначной функции уже нельзя рассматривать как различные однозначные функции, так как при обходе точки ветвления их значения меняются. Как выяснено в примере (3.9), для функции  $\sqrt[n]{z-a}$  точка  $z = a$  есть точка ветвления.

Рассмотрим несколько частных случаев этого примера.

1. При  $n = 2$  число  $\omega = e^{i\frac{2\pi}{2}} = e^{i\pi} = -1$ . Тогда  $\sqrt{z-a}\Big|_H = -\sqrt{z-a}\Big|_C$ , т. е.

при обходе точки ветвления  $a$  квадратный корень  $\sqrt{z-a}$  меняет знак на противоположный.

2. При  $n = 3$  число  $\omega = e^{i\frac{2\pi}{3}} = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ , т. е.  $\sqrt[3]{z-a}|_H = \sqrt[3]{z-a}|_C \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ ,

т. е. в этом случае при обходе точки ветвления  $z = a$  кубический корень

$\sqrt[3]{z-a}$  умножается на число  $\frac{-1+i\sqrt{3}}{2} = \sqrt[3]{1}$ .

3. При  $n = 4$  число  $w = e^{i\frac{\pi}{2}} = i$ . Тогда  $\sqrt[4]{z-a}|_H = i\sqrt[4]{z-a}|_C$ , т. е. при обходе

точки ветвления  $a$  корень  $\sqrt[4]{z-a}$  умножается на  $i = \sqrt[4]{1}$ .

**Пример 3.10.**  $\Delta$  Рассмотрим функцию

$$f(z) = \frac{z + \sqrt{1+z^2}}{1 - \sqrt[3]{z}}.$$

Так как  $\sqrt{1+z^2} = \sqrt{z-i} \cdot \sqrt{z+i}$ , то  $\pm i$  – точки ветвления этой функции.

Если  $z$  обойдет одну из этих точек, то один корень изменит знак (в силу установленного выше в частном случае 1), другой же корень не изменится.

Следовательно, произведение радикалов изменит знак. Если же  $z$  не обойдет

ни одну из точек  $\pm i$  или обойдет обе, то  $\sqrt{1+z^2}$  не изменится. Кроме того,

функция  $f(z)$ , имеет еще одну точку ветвления  $z = 0$ , при обходе которой  $\sqrt[3]{z}$

умножается на число  $\omega = \frac{(-1+\sqrt{3})}{2}$ . Значит, шесть выражений

$$\begin{aligned} & \frac{z + \sqrt{1+z^2}}{1 - \sqrt[3]{z}}, \quad \frac{z - \sqrt{1+z^2}}{1 - \sqrt[3]{z}}, \quad \frac{z + \sqrt{1+z^2}}{1 - \omega \sqrt[3]{z}}, \\ & \frac{z - \sqrt{1+z^2}}{1 - \omega \sqrt[3]{z}}, \quad \frac{z + \sqrt{1+z^2}}{1 - \omega^2 \sqrt[3]{z}}, \quad \frac{z - \sqrt{1+z^2}}{1 - \omega^2 \sqrt[3]{z}} \end{aligned} \quad (3.26)$$

являются ветвями (различными) одной и той же функции, переходящими друг

в друга, где  $z$  описывает надлежащие замкнутые пути. Например, первая ветвь

перейдет во вторую, если  $z$  обойдет одну из точек  $\pm i$ ; первая перейдет

в четвертую, если  $z$  одновременно обойдет точку  $O$  и одну из точек  $\pm i$ .  $\blacktriangle$



В каком случае можно однозначно выделить однозначную ветвь многозначной функции? Ясно, что для этого область  $D$  не должна содержать точек ветвления, так как при обходе этой точки одна ветвь функции переходит в другую. Но отсутствие внутри области  $D$  точек ветвления еще не гарантирует выделения однозначной ветви. Нужно еще проверить, что внутри области  $D$  нельзя взять замкнутого пути, при обходе которого одна ветвь функции переходит в другую. В примере (3.10) внутри правой полуплоскости

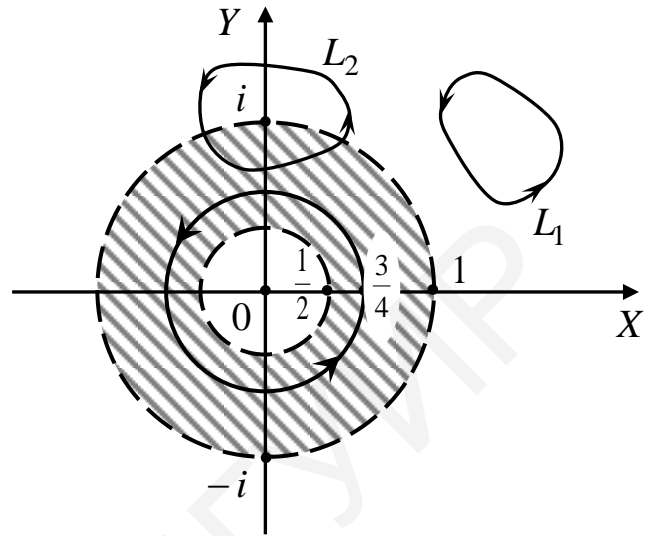


Рис. 3.3

$\text{Re } z > 0$  нет ни одной точки ветвления, ибо все они  $(0, \pm i)$  лежат на границе области, а граница не принадлежит ей. Более того, каким бы ни был замкнутый путь  $L_1$  в правой полуплоскости, мы никогда не обойдем ни одной из точек  $0, \pm i$ . Значит все шесть ветвей (3.26) функции в правой полуплоскости однозначны. Если же рассмотреть верхнюю полуплоскость  $\text{Im } z > 0$ , то в ней лежит точка ветвления  $z = i$ . При обходе ее по замкнутому контуру каждая ветвь переходит в другую. Значит, в верхней полуплоскости ни одна ветвь многозначной функции не однозначна. Не однозначны ее ветви и в круге  $|z| < 1$ , так как в нем находится точка ветвления  $z = 0$ . В кольце  $\frac{1}{2} < |z| < 1$  нет ни одной точки ветвления, но ни одна ветвь заданной многозначной функции в этом кольце не однозначна, так как в нем можно указать контур, например,  $|z| = \frac{3}{4}$  (рис. 3.3), обходящий точку ветвления  $z = 0$ .

Итак, отсутствие внутри области точек ветвления гарантирует однозначность внутри нее функции только в том случае, когда область односвязна. В противном случае необходимо дополнительное исследование.

Однозначная в области  $D$  ветвь функции называется *аналитической* в ней, если в каждой точке области она имеет непрерывную производную.

Рассмотрим функцию  $f(z)$  примера (3.10). Ее производная существует всюду, кроме точек  $z = 0; 1; \pm i$ . Однозначность в различных областях рассмотрена выше. Поэтому ясно, что все шесть ветвей (3.26) – аналитические в левой полуплоскости комплексной плоскости, но в правой первые две ветви не аналитические, так как в этой полуплоскости лежит точка  $z = 1$  разрыва функции. Ни одна ветвь не является аналитической ни в верхней, ни в нижней полуплоскости, ни внутри круга  $|z| < 1$ , ни вне его. Но все шесть ветвей – аналитические функции в каждом квадранте комплексной плоскости.

**Пример 3.11.** Функция  $\sqrt{z^2 - 1}$  – аналитическая внутри и вне круга  $|z| < 1$ .

Δ В самом деле, производная  $\left(\sqrt{z^2 - 1}\right)' = \frac{z}{\sqrt{z^2 - 1}}$  существует всюду, кроме точек  $z = \pm 1$ . Значит, нужно проверить однозначность. Внутри круга  $|z| < 1$  нельзя обойти точки ветвления  $\pm 1$ . Следовательно, обе функции  $\pm \sqrt{z^2 - 1}$  – аналитические внутри этого круга. Вне круга функция  $f(z)$  тоже аналитическая, так как всякий замкнутый контур в этой области либо не обойдет ни одной из точек ветвления  $\pm 1$ , либо охватит их обе сразу, и поэтому каждый множитель  $\pm \sqrt{z^2 - 1}$  изменит знак, а их произведение не изменится. ▲

**Пример 3.12.** Функция  $\sqrt[3]{z^2 - 1}$  имеет две точки ветвления  $\pm 1$ . При их обходе значение функции умножается на число  $\omega = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$ . Каждая из трех ветвей функции аналитична внутри круга  $|z| < 1$ , но не аналитична вне его. Например, если  $z$  обойдет окружность  $|z| = 2$ , то значение функции умножится дважды на  $\frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$ .

*Замечание.* Из рассмотренных примеров видно, что для нахождения точек ветвления иррациональных выражений, нужно подкоренные выражения приравнять к нулю и найти корни полученных уравнений. Эти корни могут быть искомыми точками ветвления. Но это не обязательно. Например, функция  $w = \sqrt{z^2}$  распадается на две однозначные ветви  $w = z$  и  $w = -z$ , которые не переходят друг в друга при обходе точки  $z = 0$ , т. е.  $z = 0$  не является точкой ветвления данной функции.

### Задачи и упражнения

1. Доказать, что функция  $w = e^{-z^2}$  является аналитической на всей комплексной плоскости.

2. Пользуясь условиями Коши – Римана выяснить, какие из следующих функций являются аналитическими хотя бы в одной точке, а какие – нет.

а)  $w = z^2 \bar{z}$ ; б)  $w = |z| \bar{z}$ ; в)  $w = \sin 3z - i$ .

Ответ: а) – нет; б) – нет; в) да.

3. Показать, что в области  $\operatorname{Re} z > 0$  функция  $w = \ln z$  – аналитическая.

4. Показать, что если функция  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  аналитична в области  $D$ , то в этой области  $\frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} = 0$ .

5. Восстановить аналитическую в окрестности точки  $z_0$  функцию  $f(z)$  по известной действительной части  $u(x, y)$  или мнимой части  $v(x, y)$  и значению  $f(z_0)$ .

$$\text{а) } u = \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad f(\pi) = \frac{1}{\pi}; \quad \text{б) } v = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}, \quad (x > 0), \quad f(1) = 0;$$

$$\text{в) } v = 2(\operatorname{ch} x \sin y - xy), \quad f(0) = 0; \quad \text{г) } u = 2 \sin x \operatorname{ch} y - x, \quad f(0) = 0.$$

Ответ: а)  $f(z) = \frac{1}{z}$ ; б)  $f(z) = \ln z$ ; в)  $f(z) = 2 \operatorname{sh} z - z^2$ ; г)  $2 \sin z - z$ .

6. Показать, что следующие функции являются гармоническими:

$$\text{а) } u = -\frac{y}{x^2 + y^2}; \quad \text{б) } u = \ln(x^2 + y^2).$$

7. Являются ли пары гармонических функций сопряженными:

$$\text{а) } u = 3(x^2 + y^2), \quad v = 3x^2y - y^3; \quad \text{б) } u = \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad v = -\frac{y^2}{x^2 + y^2}.$$

Ответ: а) нет; б) да.

8. Найти все гармонические функции вида:

$$\text{а) } u = f(ax + by); \quad \text{б) } u = f(x + \sqrt{x^2 + y^2}).$$

Ответ: а)  $u = c_1(ax + by)$ ; б)  $u = c_1 \sqrt{x + \sqrt{x^2 + y^2}} + c_2$ ,  $c_1, c_2$  –

произвольные постоянные.

## Лекция 4

### КОНФОРМНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ

**Геометрический смысл модуля и аргумента производной аналитической функции. Конформность отображения, критерий конформности.**

**Теорема Римана.**

**Задачи и упражнения**

Пусть  $f(z)$  – аналитическая в точке  $z_0$  функция, причем  $f'(z_0) \neq 0$ .

По определению

$$f'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}.$$

Отсюда

$$|f'(z_0)| = \lim_{z \rightarrow z_0} \left| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \right|. \quad (4.1)$$

При движении точки  $z$  в плоскости  $XU$  по некоторой кривой  $\gamma$  соответствующая ей точка  $w = f(z)$  будет описывать в плоскости  $UV$  линию  $\Gamma$ , являющуюся образом кривой  $\gamma$  (рис. 4.1).

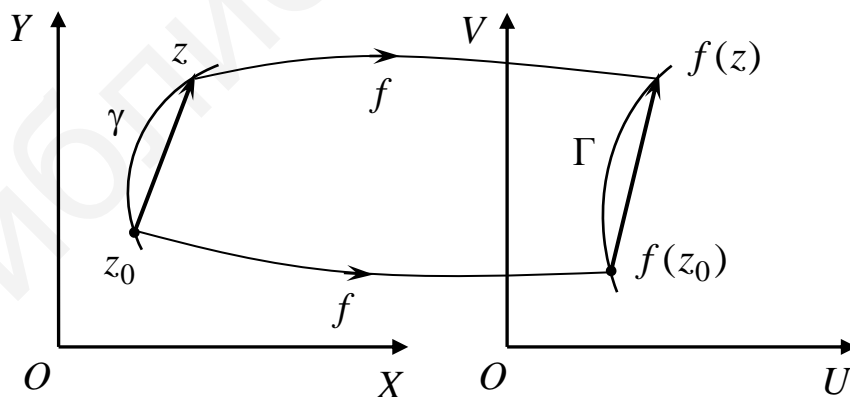


Рис. 4.1

Величина  $|z - z_0|$  равна длине отрезка, соединяющего точки  $z_0$  и  $z$  на плоскости  $XU$ , а  $|f(z) - f(z_0)|$  – длина отрезка, соединяющего точки  $f(z)$  и  $f(z_0)$  на комплексной плоскости  $UV$ .

Тогда величина  $\left| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \right| = \frac{|f(z) - f(z_0)|}{|z - z_0|}$  есть отношение этих

длин. Число  $k = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{|f(z) - f(z_0)|}{|z - z_0|}$  называется коэффициентом линейного

растяжения кривой  $\gamma$  в точке  $z_0$  при отображении  $w = f(z)$ . Отсюда и из формулы (4.1) следует, что коэффициент линейного растяжения в точке  $z_0$  не зависит от вида и направления вида кривой  $\gamma$  и равен  $|f'(z_0)|$ .

Итак, геометрический смысл модуля производной  $|f'(z_0)|$  равен коэффициенту линейного растяжения в точке  $z_0$  при отображении  $w = f(z)$ .

Рассмотрим теперь гладкую кривую  $l: z = z(t) = x(t) + i y(t), t \in [\alpha, \beta]$  на плоскости  $XU$ , проходящую через точку  $z_0 = z(t_0) = x(t_0) + i y(t_0) = x_0 + i y_0, t_0 \in [\alpha, \beta]$ . Пусть  $\varphi$  – угол между касательной к кривой  $l$  в точке  $z_0$  и положительным направлением оси  $X$  (рис. 4.2). Тогда  $\varphi = \arg z'(t_0)$ . Пусть  $L = f(l)$  – образ кривой  $l$  на плоскости  $UV$  при отображении  $f$ , т. е.  $L: w = f(z(t)), t \in [\alpha, \beta]$ . По правилу дифференцирования сложной функции получаем  $w'(t_0) = f'(z_0) z'(t_0)$ . Так как  $f'(z_0) \neq 0$  (при  $f'(z_0) = 0$   $\arg f'(z_0)$  не определен), то

$$\varphi' = \arg w'(t_0) = \arg f'(z_0) + \arg z'(t_0) = \arg f'(z_0) + \varphi, \quad (4.2)$$

поскольку  $\arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2$ .

Величина  $\varphi' - \varphi$  называется углом поворота кривой в точке  $z_0$  при отображении  $f$ . Из равенства (4.2) следует, что если  $f'(z_0) \neq 0$ , то угол поворота в точке  $z_0$  равен  $\arg f'(z_0)$ . Итак, геометрический смысл аргумента производной аналитической функции:  $\arg f'(z_0)$  равен углу поворота кривой  $l$  в точке  $z_0$  при отображении  $w = f(z)$ . Отсюда следует, что если  $f'(z_0) \neq 0$ , то все кривые, проходящие через точку  $z_0$  на плоскости  $XU$ , поворачиваются при отображении  $w = f(z)$  на плоскости  $UV$  на один и тот же угол  $\arg f'(z_0)$ . Следовательно, при  $f'(z_0) \neq 0$  угол  $\psi$  между любыми кривыми,

пересекающимися в точке  $z_0$  плоскости  $XU$ , равен по величине и направлению отсчета углу между кривыми  $L_1$  и  $L_2$  на плоскости  $UV$ , являющимися образами кривых  $l_1$  и  $l_2$  при отображении  $w = f(z)$  (рис. 4.3). Это так называемое *свойство консерватизма углов*.

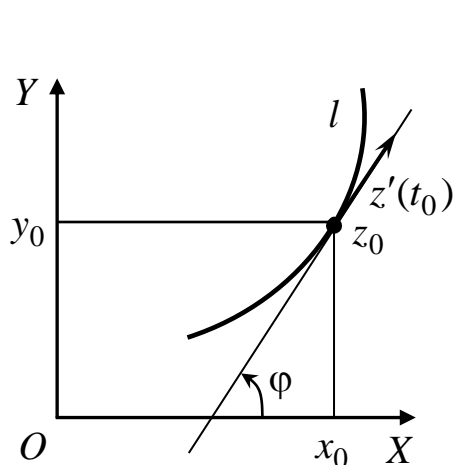


Рис. 4.2

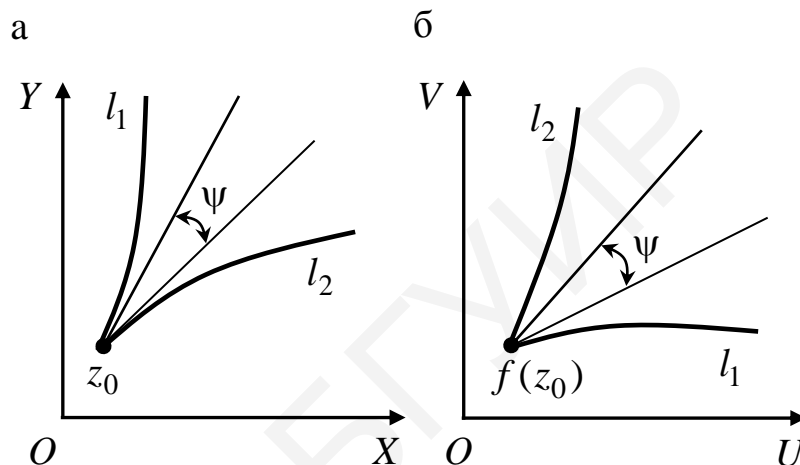


Рис. 4.3

**Пример 4.1.** Найти коэффициент линейного растяжения и угол поворота  $\varphi$  при отображении  $w = z^3$  в точке  $z_0 = 2 - i$ .

$\Delta$  Имеем  $w'(z) = 3z^2$ ,  $w'(2 - i) = 9 - 12i$ . Отсюда  $|w'(2 - i)| = 15$ ,  $\arg w'(2 - i) = -\arctg\left(\frac{4}{3}\right)$ . Так как  $|w'(z_0)| = 15$ , то коэффициент линейного растяжения  $k = 15$ , а угол поворота  $\varphi = -\arctg\left(\frac{4}{3}\right)$ .  $\blacktriangle$

Итак, если  $f(z)$  – аналитическая функция и  $f'(z_0) \neq 0$ , то отображение  $w = f(z)$  сохраняет неизменными по величине и направлению углы, между кривыми и их образами, а также обладает в точке  $z_0$  растяжением, независимым от направления.

Отображение  $w = f(z)$  называется *конформным* в точке  $z_0$ , если оно сохраняет углы между кривыми и обладает свойством постоянства растяжений

в точке  $z_0$ . Однозначное отображение  $w = f(z)$  называется *конформным* в области  $D$ , если оно конформно в каждой точке этой области.

Полученные выше результаты сформулируем в виде следующего утверждения.

**Критерий конформности.** Пусть однозначная функция  $w = f(z)$  аналитична в области  $D$  и  $f'(z) \neq 0, \forall z \in D$ . Тогда отображение, осуществляемое этой функцией, конформно в  $D$ , причем  $|f'(z)|$  – коэффициент линейного растяжения, а  $\arg f'(z)$  означает угол поворота при этом отображении в точке  $z \in D$ .

**Пример 4.2.** В каких областях  $D$  комплексной плоскости конформны следующие отображения: а)  $w = e^{-2z}$ ; б)  $w = -i z^2$ ?

а) Отображение  $w = e^{-2z}$  является конформным на всей комплексной плоскости  $C_z$ , так как функция  $w = e^{-2z}$  аналитична во всей этой плоскости, а производная  $w' = -2e^{-2z} \neq 0 \forall z \in C_z$ ;

б) Отображение  $w = -i z^2$  является конформным на всей комплексной плоскости  $C_z$ , за исключением точки  $z = 0$ , где  $w' = -2i z|_{z=0} = 0$ . ▲

В теории конформных отображений имеет место **принцип сохранения области**: пусть функция  $f(z) \neq \text{const}$  регулярна в области  $D$ . Тогда при отображении  $w = f(z)$  образом области  $D$  является область.

Основная задача теории конформных отображений заключается в следующем: для двух односвязных областей  $D$  и  $\Omega$ , взятых в плоскостях  $C_z$  и  $C_w$  соответственно, найти аналитическую в  $D$  функцию  $w = f(z)$ , осуществляющую взаимно однозначное и, следовательно, конформное отображение этих областей друг на друга.

Не уменьшая общности, можно считать, что одна из областей, например  $D$ , есть круг единичного радиуса с центром в начале координат, так



как чтобы осуществить взаимно однозначное и конформное отображение двух произвольных односвязных областей друг на друга, достаточно получить взаимно однозначные и конформные отображения каждой из данных областей на такой круг.

Приведем следующую теорему Римана.

**Теорема 4.1 (Римана).** *Каждая односвязная область  $D$ , отличная от расширенной комплексной плоскости  $C$  или от плоскости с выколотой точкой, может быть с помощью аналитической функции отображена взаимно однозначно и конформно на внутренность единичного круга и притом так, что произвольно заданным в  $D$  точке и направлению в этой точке будет соответствовать нулевая точка и направление положительной действительной оси.*

Теорему примем без доказательства. Она устанавливает факт существования функции  $f(z)$ , но не дает способа ее построения.

Итак, теорема Римана 4.1 утверждает: каковы бы ни были односвязные области  $D$  и  $\Omega$  с границами, состоящими более чем из одной точки, и какими бы ни были точки  $z_0 \in D$ ,  $w_0 \in \Omega$  и число  $\alpha \in \mathbf{R}$ , существует одно и только одно конформное отображение  $w = f(z)$  области  $D$  на область  $\Omega$ , такое, что  $f'(z_0) = \alpha$ .

В теории конформных отображений большую роль играет теорема принципа соответствия границ.

**Теорема 4.2 (Принцип соответствия границ).** *Пусть даны две односвязные области  $D$  и  $D_1$  с границами  $\gamma$  и  $\gamma_1$  соответственно, причем область  $D_1$  ограничена. Если функция  $w = f(z)$  аналитична или непрерывна в  $D$  и осуществляет взаимно однозначное отображение  $\gamma$  на  $\gamma_1$  с сохранением направления обхода, то она осуществляет и конформное отображение области  $D$  на  $D_1$ .*

**Пример 4.3.** Показать, что с помощью функции  $w = e^{\frac{\rho z}{8}}$  полоса  $0 < \text{Im } z < 2$  отображается на угол  $0 < \arg z < \frac{\pi}{4}$  плоскости  $C_w$ .

Δ Заметим, что если  $z = x + iy$ ,  $w = \rho e^{i\theta}$ , то  $\rho e^{i\theta} = e^{\frac{\pi(x+iy)}{8}}$ . Будем обходить границу области  $0 < \text{Im } z < 2$  так, чтобы область оставалась слева. Тогда, если  $z$  таково, что  $y = 0$ , а  $x$  изменяется от  $-\infty$  до  $+\infty$ , то  $\rho' = e^{\frac{\pi x}{8}}$ ,  $\theta = 0$ , т. е.  $w$  действительно изменяется от 0 до  $\infty$ . Пусть теперь  $y = 2$ , а  $x$  изменяется от  $+\infty$  до  $-\infty$ . Тогда  $w = e^{\frac{\pi x}{8}} \cdot e^{\frac{i\pi}{4}}$ , т. е.  $\rho = e^{\frac{\pi x}{8}}$ ,  $\theta = \frac{\pi}{4}$  и, следовательно, точка  $w$  обходит границу  $\theta = \frac{\pi}{4}$  угла от бесконечно удаленной точки до 0. В силу принципа соответствия границ отсюда следует, что полоса  $0 < \text{Im } z < 2$  отображается на угол  $0 < \arg w < \frac{\pi}{4}$  (рис. 4.4). ▲

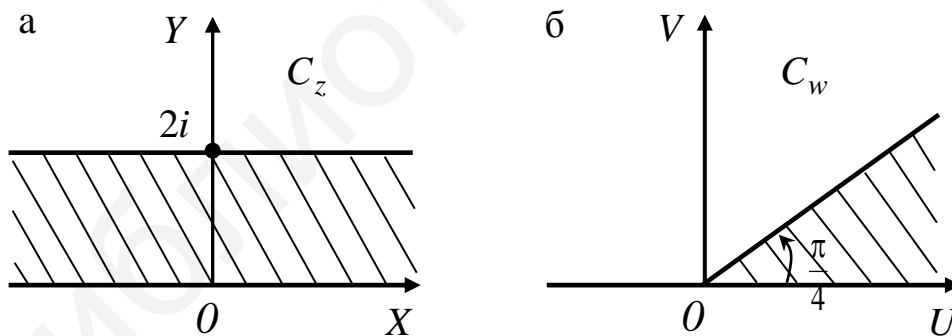


Рис. 4.4

## Задачи и упражнения

1. Указать области конформности для отображений:

а)  $w = e^{-3z}$ ; б)  $w = z^2 - 4z$ ; в)  $w = -iz^2$ ; г)  $w = \operatorname{sh}(1 - z)$ ;

д)  $w = (z + 2i)^3$ .

Ответ: а) вся плоскость; б) вся плоскость, кроме точки  $z = 2$ ; в) вся плоскость, кроме точки  $z = 0$ ; г) вся плоскость, кроме точек

$z_k = 1 - \left(k + \frac{1}{2}\right) \cdot \pi i$ ,  $k \in \mathbf{Z}$ ; д) вся плоскость, кроме точки  $z = -2i$ .

2. Область  $D$  ограничена контуром  $\gamma: x^2 + y^2 - 2x = 0$ . В какую область  $\Omega$  отобразится  $D$  с помощью функции  $w = 3z + i$ ?

Ответ:  $\Omega$  – внутренность окружности, ограниченной контуром  $(u - 3)^2 + (v - 1)^2 = 9$ .

3. Точки  $z_1 = 2 + 3i$  и  $z_2 = 3 + 2i$  симметричны относительно прямой  $y = x$ . Показать, что функция  $w = e^{-i\frac{\pi}{2}} \cdot z$  переводит  $z_1$  и  $z_2$  в точки  $w_1 = 3 - 2i$  и  $w_2 = 2 - 3i$ , симметричные относительно прямой  $y = -x$ .

4. Показать, что функция  $w = e^{\frac{\pi z}{n}}$  отображает полосу  $D: 0 < \operatorname{Im} z < h$  на верхнюю полуплоскость  $\operatorname{Im} w > 0$ .

5. Показать, что полукольцо  $1 \leq |z| \leq 2, 0 \leq \arg z \leq \pi$  с помощью функции  $w = z^2$  отображается на кольцо  $1 \leq |w| \leq 4, 0 \leq \arg w \leq 2\pi$ .

6. Показать, что угол  $0 < \arg z \leq \frac{\pi}{5}, 0 < |z| < +\infty$  функцией  $w = z^5$  отображается на верхнюю полуплоскость  $\operatorname{Im} w > 0$ , так, что точка  $z = 0$  переходит в точку  $w = 0$ .

7. Показать, что полоса  $1 \leq y < 1 + 2\pi$  функцией  $w = e^z$  отображается на всю плоскость  $w$  с разрезом вдоль положительной части оси  $U$ .

## Лекция 5

### КОНФОРМНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ ЭЛЕМЕНТАРНЫМИ ФКП

**Линейные преобразования. Каноническая форма линейного преобразования.**

**Инверсия. Дробно-линейное преобразование и его свойства.**

**Круговое свойство. Анггармоническое отношение четырех точек.**

**Свойство симметрии. Отображение степенной функцией.**

**Отображение функцией  $w = \sqrt[n]{z}$ . Точки ветвления. Функция Жуковского.**

**Преобразование  $w = e^z$ . Преобразование  $w = \operatorname{Ln} z$ . Преобразование гиперболическими и тригонометрическими функциями.**

#### Задачи и упражнения

Преобразование

$$w = az + b, \quad a \neq 0, \quad (5.1)$$

называется *линейным*. Его частными случаями являются: а)  $w = z + c$ ,  $c \in \mathbf{C}$ , – преобразование переноса; б)  $w = e^{i\alpha} z$  – преобразование вращения,  $\alpha \in \mathbf{R}$ ; в)  $w = kz$  – преобразование подобия – ( $k > 0$ ).

При преобразовании  $w = z + c$  каждая точка смещается на вектор  $c$ . Ясно, что при этом на вектор  $c$  смещается и всякая кривая, и всякая площадка (рис. 5.1).

При преобразовании  $w = e^{i\alpha} z$  положим  $z = r e^{i\varphi}$ ,  $r = |z|$ ,  $\varphi = \arg z$ . Тогда

$$|w| = r e^{i(\varphi+\alpha)}, \quad \text{т. е.}$$

$$|w| = r, \quad \arg w = \varphi + \alpha = \arg z + \alpha.$$

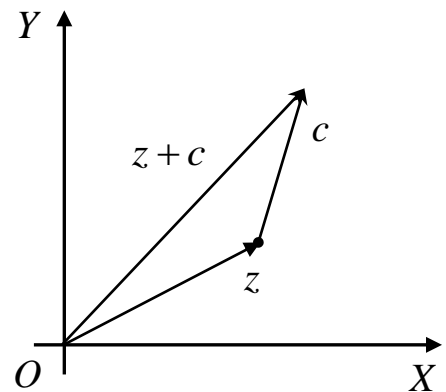


Рис. 5.1

Таким образом, при переходе от  $z$  к  $w$  модуль не меняется, а аргумент изменяется на угол  $\alpha$ . Если обе комплексные плоскости – плоскость аргумента  $z$  и плоскость аргумента  $w$  – наложить друг на друга так, чтобы оси координат совпали, то придем к выводу, что точка  $w$  получается поворотом точки  $z$  на угол  $\alpha$  вокруг начала координат. Подвергая такому преобразованию каждую точку кривой или площадки, увидим, что они повернутся вокруг начала координат на угол  $\alpha$  (рис. 5.2).

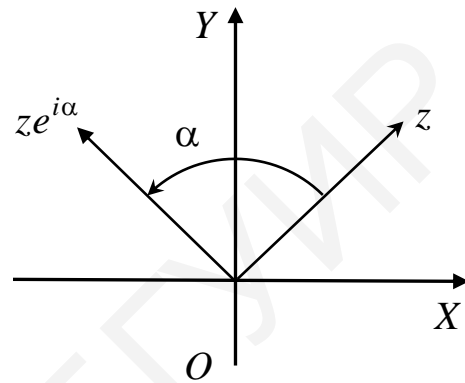


Рис. 5.2

При преобразовании подобия  $w = kz, k > 0$ , где  $z = r e^{i\varphi}$ , получим  $w = k r e^{i\varphi}$ , т. е.  $|w| = k r = k |z|$ ,  $\arg w = \varphi = \arg z$ .

Отсюда следует, что модуль увеличивается в  $k$  раз, а аргумент не изменяется. Другими словами, точка  $w$  получается перемещением точки  $z$  по лучу, соединяющему ее с началом координат так, что расстояние от начала координат изменяется в  $k$  раз. Подвергнув такому преобразованию каждую точку кривой или каждую точку области, увидим, что они перейдут в подобную кривую или подобную область (рис. 5.3). Точка  $z = 0$  называется центром подобия, число  $k$  – коэффициентом подобия.

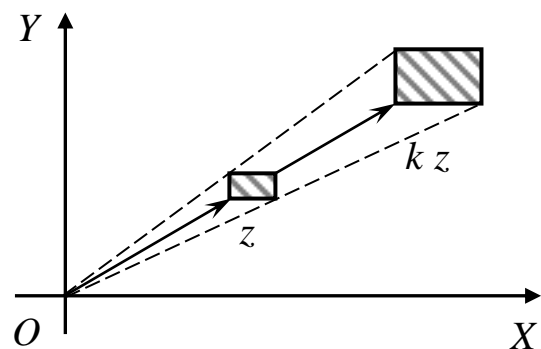


Рис. 5.3

Положив в общем линейном преобразовании (5.1)  $a = k e^{i\alpha}$ , получим

$w = k e^{i\alpha} \cdot z + b$ . Точку  $w$  можно получить в три этапа: сначала найдем точку  $w_1 = e^{i\alpha} z$  поворотом точки  $z$  вокруг точки  $z = 0$  на угол  $\alpha$ , затем найдем точку

$w_2 = k w_1$  преобразованием подобия точки  $w_1$  с центром подобия в начале координат и коэффициентом подобия  $k$  и, наконец, найдем искомую точку  $w$ , перенеся точку  $w_2$  на вектор  $b$ .

Итак, всякое линейное преобразование есть последовательное выполнение преобразований вращения, подобия и переноса. Это преобразование при  $a \neq 0$  конформно отображает комплексную плоскость  $C_z$  на комплексную плоскость  $C_w$ , причем оно представляет собой композицию поворота на угол  $\alpha = \arg a$ , преобразования подобия с центром в начале координат и коэффициентом подобия, равным  $k = |a|$ , и параллельного переноса на вектор, который изображается комплексным числом  $b$ .

Введем следующее понятие. *Неподвижной точкой* преобразования  $f(z)$  называется такая точка  $z_0$ , для которой  $f(z_0) = z_0$ . *Канонической формой линейного преобразования* называется линейное преобразование вида  $w - z_0 = \lambda(z - z_0)$ , где  $z_0$  — неподвижная точка преобразования  $w = f(z)$ ,  $\lambda \in C$ .

**Пример 5.1.** Привести к канонической форме преобразование  $w = 2z + 1 - 3i$ .

Δ Найдем сначала неподвижную точку этого преобразования. Имеем  $z_0 = 2z_0 + 1 - 3i \Rightarrow z_0 = -1 + 3i$ . Далее, так как  $b = z_0 - \lambda z_0$ , то  $\lambda = \frac{z_0 - b}{z_0}$ .

Поэтому

$$\lambda = \frac{-1 + 3i - 1 + 3i}{-1 + 3i} = 2.$$

Следовательно,  $w + 1 - 3i = 2(z + 1 - 3i)$  — искомая каноническая форма преобразования. ▲

**Пример 5.2.** Найти линейное преобразование, переводящее круг  $|z - 2i| < 3$  на круг  $|w - 1| < 2$ .

Δ Сделаем в плоскости  $C_z$  параллельный перенос на вектор, которым изображается комплексное число  $b = -2i$ , а затем преобразование подобия с центром в точке  $O$  с коэффициентом подобия  $k = \frac{2}{3}$ . Кроме того, сделаем параллельный перенос в плоскости  $C_w$  на вектор изображающим число  $b_1 = -1$  (рис. 5.4). Тогда получим  $w - 1 = \frac{2}{3}(z - 2i)$ . Это и есть искомое линейное отображение. ▲

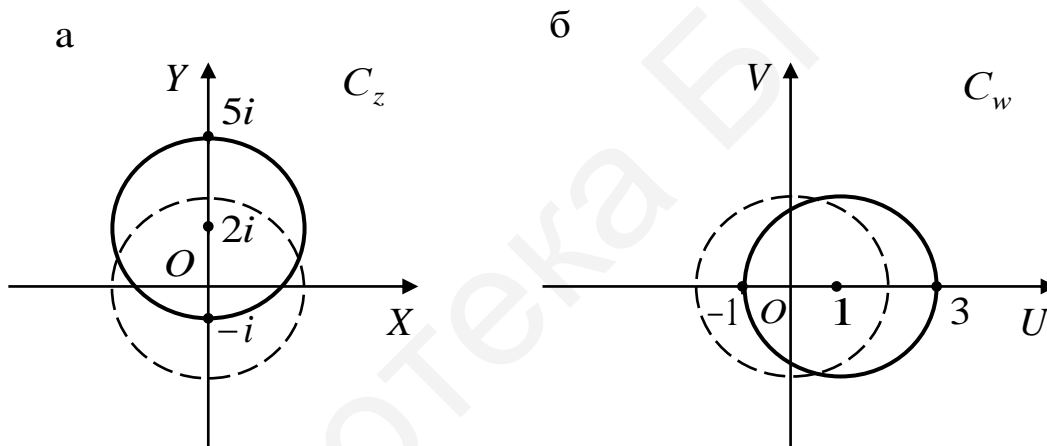


Рис. 5.4

**Пример 5.3.** Найти линейное преобразование, переводящее треугольник с вершинами в точках  $1 + 2i$ ,  $2 + 2i$  и  $1 + 4i$  плоскости  $C_z$  на треугольник с вершинами в точках  $2 - i$ ,  $2 + i$  и  $-2 - i$  плоскости  $C_w$ .

Δ Заметим, что треугольник в плоскости  $C_z$  подобен треугольнику в плоскости  $C_w$ . Поэтому сначала сделаем параллельный перенос треугольника из плоскости  $C_z$  в плоскость  $C_{w_1}$ , поместив одну из вершин его, например  $1 + 2i$ , в начало координат, и повернем этот треугольник вокруг начала координат на угол  $\frac{\pi}{2}$ , что равносильно умножению точек  $z$  треугольника на

$e^{\frac{i\pi}{2}} = i$ . Это означает, что соответствующее преобразование имеет вид  $w_1 = i(z - 1 - 2i)$ . Далее, сделав преобразование подобия с центром в точке  $w_1 = 0$  и коэффициентом подобия  $k = 2$ , а затем параллельный перенос на вектор, изображаемый комплексным числом  $b = -2 - i$ , получим  $w = 2w_1 - 2 - i$  (рис. 5.5). Итак, окончательно:  $w = 2i(z - 1 - 2i) - 2 - i = 2iz + 2 - 3i$ . ▲

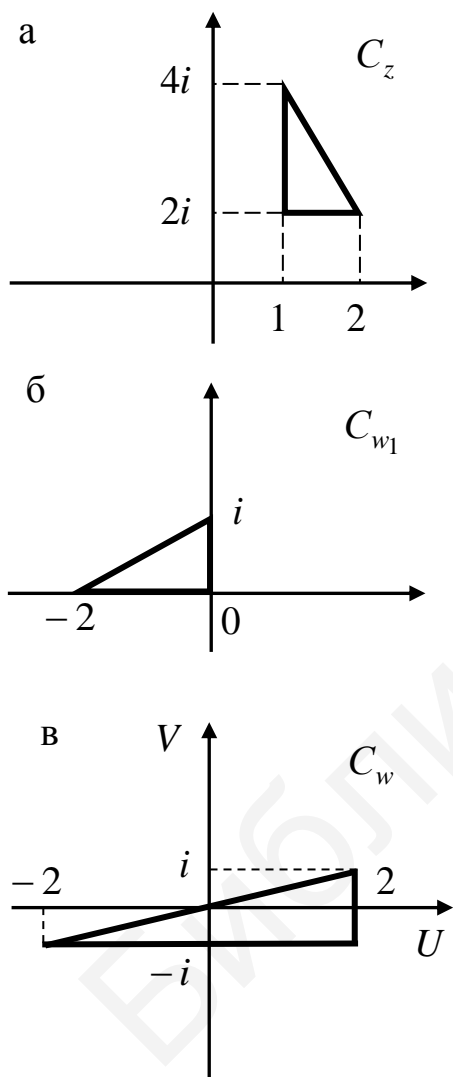


Рис. 5.5

Покажем, как из точки  $z$  можно получить точку  $\frac{1}{z}$ . Обозначим  $\tilde{z} = \frac{1}{z}$ .

Так как  $|\bar{z}| = |z|$ , то  $|\tilde{z}| = \frac{1}{|z|} \Leftrightarrow |z| \cdot |\tilde{z}| = 1$  и

$\arg \tilde{z} = -\arg \bar{z} = \arg z$ , т. е. точка  $\frac{1}{z}$  получается

из точки  $z$  путем применения преобразования симметрии, состоящего в следующем: на луче  $Oz$  отыскивается точка  $\tilde{z}$  на расстоянии от  $O$ , равном  $\frac{1}{|z|}$ . Если  $|z| < 1$ , то это построение

осуществляется так. Описывая из нулевой точки как из центра окружность радиусом 1, соединяем прямой линией ее центр с точкой  $z$  и восстанавливаем в этой точке перпендикуляр к проведенной прямой до пересечения в точке  $A$  с окружностью. Проведя касательную к окружности в точке  $A$ , получим в пересечении

ее с прямой  $Oz$  искомую точку  $\tilde{z}$  (рис. 5.6).



Действительно, из треугольника  $OA\tilde{z}$

находим  $|\tilde{z}| = \frac{1}{|z|}$  или  $|z| \cdot |\tilde{z}| = 1$ . С другой

стороны,  $\arg \tilde{z} = \arg z$ . Такие две точки  $z$  и  $\tilde{z}$  называются *взаимно симметричными относительно окружности с центром в нулевой точке  $O$  радиусом  $1$* . Заметив, далее,

что  $\frac{1}{z} = \tilde{z}$ , мы должны выполнить

симметричное отображение точки  $\tilde{z}$  относительно действительной оси  $X$ , чтобы получить искомую точку  $\frac{1}{z}$  (см. рис. 5.6).

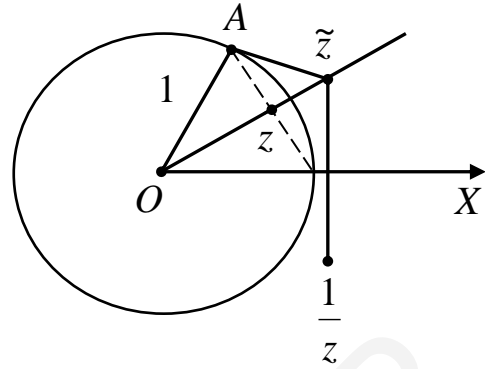


Рис. 5.6

Итак, преобразование *инверсии*  $w = \frac{1}{z}$  представляет собой композицию двух отображений: симметрии относительно единичной окружности с центром в начале координат и симметрии относительно действительной оси  $OX$ . Это преобразование взаимно однозначно для всех точек плоскости, причем нулевой точке  $z = 0$  (или  $w = 0$ ) соответствует бесконечно удаленная точка  $w = \infty$  (или  $z = \infty$ ). Преобразование инверсии сохраняет углы во всех точках плоскости  $z$ , включая  $z = 0$  и  $z = \infty$ , если под углом двух линий при  $z = \infty$  понимать угол, образованный отображенными линиями посредством функции  $w = \frac{1}{z}$  в плоскости  $w$  при  $w = 0$ . Следовательно, отображение инверсии конформно в расширенной комплексной плоскости  $\bar{C}$ , в которую входит точка  $z = \infty$ .

**Пример 5.4.** Найти образы множества параллельных прямых  $y = x + b$ ,  $b \in \mathbf{R}$ , при преобразовании  $w = \frac{1}{z}$ .

Δ Пусть  $b \neq 0$ . Для  $z = x + iy, w = 4 + iv$  имеем

$$u + iv = \frac{1}{x + iy} \Leftrightarrow x + iy = \frac{1}{u + iv}. \text{ Откуда}$$

$$x = \frac{u}{u^2 + v^2}, \quad y = -\frac{v}{u^2 + v^2}. \quad (5.2)$$

Подставив в уравнение множества параллельных прямых соотношения (5.2), получаем

$$b(u^2 + v^2) + u + v = 0 \Rightarrow \left(u + \frac{1}{2b}\right)^2 + \left(v + \frac{1}{2b}\right)^2 = \frac{1}{2b^2}.$$

Таким образом, если  $b \neq 0$ , то образом множества параллельных прямых  $y = x + b$  при отображении инверсии является семейство окружностей (рис. 5.7), центры которых лежат на прямой  $v = u$ , а радиусы равны  $R = \frac{1}{b\sqrt{2}}$ .

Если  $b = 0$ , то образом прямой  $y = x$  является прямая  $v = -u$ . ▲

**Пример 5.5.** Найти образы семейства окружностей  $x^2 + y^2 = ax$  при преобразовании  $w = \frac{1}{z}$ .

Δ Из (5.2) находим, что  $u = \frac{1}{a}$ , если  $a \neq 0$ . Другими словами, при  $a \neq 0$

образами семейства окружностей будет семейство прямых  $u = \frac{1}{a}$  (рис. 5.8).

Если  $a = 0$ , то исходное уравнение запишется в виде  $x^2 + y^2 = 0 \Leftrightarrow z = 0$ .

Тогда образом точки  $z = 0$  при отображении  $w = \frac{1}{z}$  будет точка  $w = \infty$ .

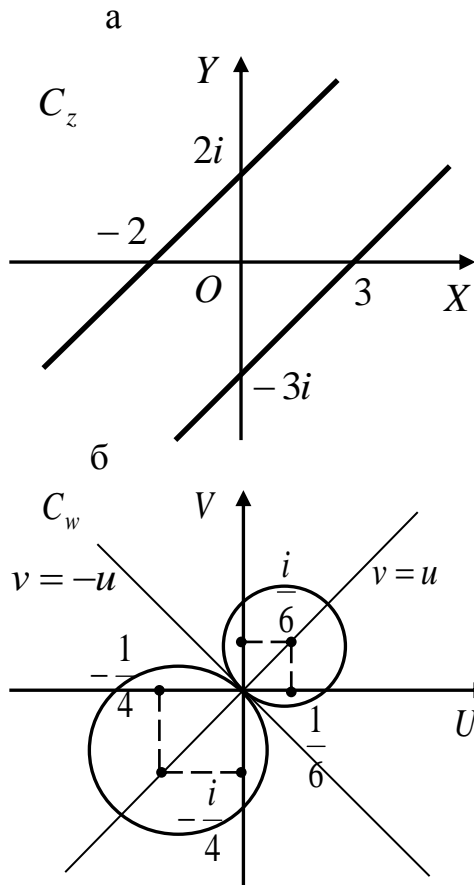


Рис. 5.7

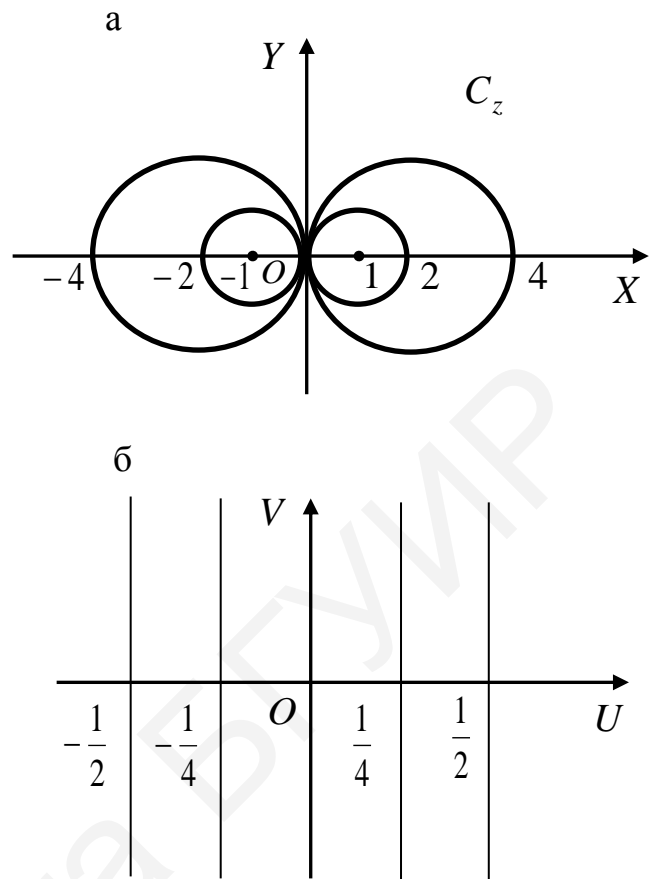


Рис. 5.8

### Преобразование

$$w = \frac{az + b}{cz + d}, \text{ где } ad - bc \neq 0, \quad (5.3)$$

называется *дробно-линейным*. В случае  $ad - bc = 0$  имеем  $\frac{a}{c} = \frac{b}{d} = k$

(при условии  $cd \neq 0$ ). Отсюда  $a = ck, b = dk$  и, значит, плоскость  $C_z$  переходит в одну точку  $w = k$ , что не представляет интереса. Очевидно, если  $c = 0$ , то

$d \neq 0$  (в противном случае  $ad - bc = 0$ ). Тогда  $w = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d}$ . Таким образом,

дробно-линейное преобразование в качестве частного случая содержит в себе линейное преобразование (5.1). Если же  $c = d = 0$ , то имеем также одну точку  $w = \infty$ .

Выясним некоторые свойства дробно-линейного преобразования.

1. Дробно-линейное преобразование взаимно однозначно отображает комплексную плоскость  $C_z$  в плоскость  $C_w$ , пополненную бесконечно удаленными точками.

Δ Рассмотрим случай, когда  $c \neq 0$ . Тогда из равенства (5.3) следует, что каждому  $z \neq -\frac{d}{c}$  соответствует только одно значение  $w$ , и наоборот, каждому

$$w \text{ отвечает только одно значение } z = \frac{-dw + b}{cw - a}, \quad w \neq \frac{a}{c}.$$

Чтобы от этих исключений избавиться, отнесем точке  $z = -\frac{d}{c}$  точку

$w = \infty$  (если  $z = -\frac{d}{c}$ , то  $w = \frac{bc - ad}{c^2} = \infty$ , так как числитель, согласно (5.3) не равен нулю), а точке  $w = \frac{a}{c}$  отнесем точку  $z = \infty$  (при  $w = \frac{a}{c}$  имеем

$$z = \frac{(bc - ad)}{c \cdot 0} = \infty).$$

Следовательно, взаимно однозначное соответствие между точками плоскостей  $C_z$  и  $C_w$  будет иметь место для всех точек без исключения, если эти плоскости пополнить бесконечно удаленными точками. Если же  $c = 0$ , то

$$w = \frac{a}{d} z + \frac{b}{d}, \quad z = \frac{d}{a} w - \frac{b}{a}$$

( $c = 0 \Rightarrow a \neq 0, d \neq 0$ , так как  $ad - bc \neq 0$ ) и бесконечно удаленные точки переходят друг в друга.

Конформность отображения (5.3) при  $z \neq -\frac{d}{c}$  и  $z \neq \infty$  следует из того,

что производная  $w' = \frac{ad - bc}{(cz + d)^2}$  его конечна и не равна нулю.

Для доказательства конформности в точке  $z = -\frac{d}{c}$ ,  $c \neq 0$  положим  $w = \frac{1}{\tilde{w}}$

и вместо точки  $w = \infty$  будем рассматривать точку  $\tilde{w} = 0$ . Тогда

$$\tilde{w} = \frac{cz + d}{az + b} \Rightarrow \frac{d\tilde{w}}{dz} = \frac{bc - ad}{(az + b)^2}.$$

При  $z = -\frac{d}{c}$  эта производная равна  $\frac{c^2}{bc - ad} \neq 0$ . Следовательно,

отображение конформно в точке  $z = -\frac{d}{c}$ .

Аналогично для доказательства конформности в точке  $z = \infty$  положим  $z = \frac{1}{\tilde{z}}$ , и тогда вместо  $z = \infty$  рассматриваем точку  $\tilde{z} = 0$ . Имеем

$$w = \frac{a + b\tilde{z}}{c + d\tilde{z}} \Rightarrow \frac{dw}{d\tilde{z}} = \frac{bc - ad}{(c + d\tilde{z})^2}.$$

При  $\tilde{z} = 0$  производная равна  $\frac{bc - ad}{c^2} \neq 0$ . Следовательно, преобразование конформно в точке  $z = \infty$ .

Наконец, если  $c = 0$ , то  $w = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d}$ , и точка  $z = \infty$  переходит в точку

$w = \infty$ . Положив  $z = \frac{1}{\tilde{z}}$ ,  $w = \frac{1}{\tilde{w}}$ , получим

$$\tilde{w} = \frac{d\tilde{z}}{a + b\tilde{z}} \Rightarrow \frac{d\tilde{w}}{d\tilde{z}} = \frac{ad}{(a + b\tilde{z})^2}.$$

При  $\tilde{z} = 0$  производная равна  $\frac{d}{a} \neq 0$ , и отображение конформно в точке

$z = \infty$  и в этом случае. ▲

2. *Круговое свойство* состоит в следующем. Если точка  $z$  описывает окружность на плоскости  $C_z$ , то точка  $w$  на плоскости  $C_w$  тоже описывает окружность или прямую линию. Если же точка  $z$  описывает прямую линию, то точка  $w$  описывает прямую линию или окружность. Считая прямую линию за

окружность бесконечно большого радиуса, описанное свойство можно сформулировать так: *при дробно-линейном преобразовании окружность переходит в окружность.*

Δ В самом деле, легко видеть, что при сдвиге, растяжении с постоянным коэффициентом  $k$  и повороте ее окружности отображаются на окружности. Остается лишь установить, что при преобразовании инверсии  $w = \frac{1}{z}$  окружности отображаются на окружности.

Уравнение произвольной окружности в плоскости  $XV$  имеет вид

$$A(x^2 + y^2) + Bx + Cy + D = 0. \quad (5.4)$$

При отображении  $w = \frac{1}{z}$ , согласно (5.2), получаем  $x = \frac{u}{u^2 + v^2}$ ,

$y = -\frac{v}{u^2 + v^2}$ . Подставляя  $x$  и  $y$  в (5.4), приходим к уравнению

$$D(u^2 + v^2) + Bu - Cv + A = 0, \quad (5.5)$$

являющемуся уравнением окружности в плоскости  $C_w$ .

Из (5.5) следует, что окружность, проходящая в плоскости  $C_z$  через начало координат ( $D = 0$ ), отображается в плоскости  $C_w$  на прямую линию, и, наоборот, прямая линия из плоскости  $C_z$  ( $A = 0$ ) при отображении  $\frac{1}{z}$  переходит в окружность, проходящую через точку  $w = 0$ . В остальных случаях ( $A \neq 0, D \neq 0$ ) окружности отображаются в окружности.

Система взаимно перпендикулярных прямых, параллельных осям координат в плоскости  $C_z$ , переходит в плоскости  $C_w$  в систему взаимно ортогональных окружностей, проходящих через начало координат. Сетка из концентрических окружностей с центром в начале координат и лучей, исходящих из этой точки, переходит в такую сетку в плоскости  $w$ . ▲

3. *Ангармоническое отношение четырех точек.* Существует единственное дробно-линейное отображение, определяемое формулой

$$\frac{w - w_1}{w - w_2} \cdot \frac{w_3 - w_2}{w_3 - w_1} = \frac{z - z_1}{z - z_2} \cdot \frac{z_3 - z_2}{z_3 - z_1}, \quad (5.6)$$

при котором три различные  $z_1, z_2, z_3$  плоскости  $C_z$  переходят соответственно в три различные точки  $w_1, w_2, w_3$  плоскости  $C_w$ .

Δ Преобразование  $w = \frac{az + b}{cz + d}$  зависит от четырех параметров  $a, b, c, d$ .

Если же разделить числитель и знаменатель этой дроби на любой из этих параметров, отличный от нуля, то дробно-линейное преобразование будет уже зависеть от трех параметров. Для определения этих трех параметров и самого преобразования необходимо иметь три уравнения, связывающие  $a, b, c$  и  $d$ . Их можно получить, задав три точки  $w_1, w_2, w_3$ , в которые искомым преобразованием переводятся некоторые три точки  $z_1, z_2$  и  $z_3$ . Задавая точки  $z_1, z_2, z_3$  произвольно, получаем три уравнения:

$$w_k = \frac{a z_k + b}{c z_k + d}, \quad k = 1, 2, 3. \quad (5.7)$$

Для исключения  $a, b, c$  и  $d$  из этих уравнений и из равенства  $w = \frac{az + b}{cz + d}$

образуем разность

$$w - w_1 = \frac{(ad - bc)(z - z_1)}{(cz + d)(cz_1 + d)}; \quad w - w_2 = \frac{(ad - bc)(z - z_2)}{(cz + d)(cz_2 + d)};$$

$$w_3 - w_1 = \frac{(ad - bc)(z_3 - z_1)}{(cz_3 + d)(cz_1 + d)}; \quad w_3 - w_2 = \frac{(ad - bc)(z_3 - z_2)}{(cz_3 + d)(cz_2 + d)}.$$

Разделив почленно первое из этих уравнений на второе, а третье на четвертое, затем полученные таким образом равенства снова делим почленно друг на друга и получаем

$$\frac{w - w_1}{w - w_2} \cdot \frac{w_3 - w_1}{w_3 - w_2} = \frac{z - z_1}{z - z_2} \cdot \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2},$$

что совпадает с (5.6). ▲

Так как за точки  $z_1, z_2, z_3, z$  и точки  $w_1, w_2, w_3, w$  могут быть взяты любые четверки точек, то соотношение (5.6) выражает общее свойство этого

преобразования: отношение  $\frac{z - z_1}{z - z_2} \cdot \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2}$  сохраняется при дробно-линейном

отображении, т. е. является инвариантом. Это отношение называется *двойным* или *ангармоническим отношением четырех точек* и обозначается  $(z_1, z_2, z, z_3)$ .

4. *Свойство симметрии.* При дробно-линейном отображении любые две точки, симметричные относительно окружности, переходят в две точки, симметричные относительно образа этой окружности.

Напомним понятие симметрии (инверсии) относительно окружности. Точки  $P$  и  $P'$  называются симметричными относительно окружности  $\Gamma$ , если они лежат на одном луче, выходящем из точки  $O$ , и

$OP \cdot OP' = R^2$  (рис. 5.9). В частности, каждая точка окружности  $\Gamma$  является симметричной сама себе относительно этой окружности. Таким образом, на комплексной плоскости точки  $z$  и  $z'$  являются симметричными относительно окружности

$\Gamma: |z - a| = R$ , если они лежат на одном луче,

выходящем из точки  $a$  и  $|z - a| \cdot |z' - a| = R^2$ .

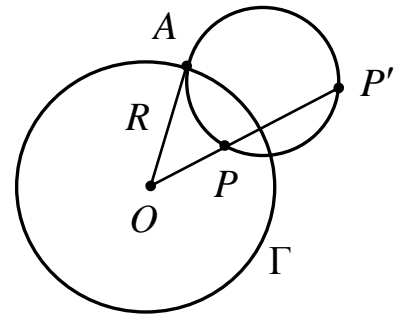


Рис. 5.9

Точка  $z = -\infty$  считается симметричной относительно окружности  $\Gamma$  с точкой  $a$  – центром этой окружности. Из этого определения вытекает, что симметричные относительно окружности  $|z| = R$  точки  $z$  и  $z'$  связаны

соотношением  $|z'| = \frac{R^2}{|z|}$ . В частности, симметричные относительно единичной



окружности  $|z|=1$  точки  $z$  и  $z'$  связаны соотношением  $|z'| = \frac{1}{|z|}$ .

Покажем теперь, что если с помощью дробно-линейного преобразования отобразить окружность, то пара взаимно симметричных точек переходит в пару взаимно симметричных точек относительно отображаемой окружности. В этом и заключается свойство симметрии дробно-линейного преобразования.

Покажем далее, что пара взаимно симметричных точек  $P$  и  $P'$  характеризуется тем свойством, что пучок окружностей, проходящих через эти точки, является ортогональным к основной окружности  $\Gamma$ . В самом деле, через точку  $P$  и произвольную точку  $A$  окружности  $\Gamma$  можно провести окружность, ортогональную  $\Gamma$ , и притом только одну (эта окружность превращается в прямую  $OP$ , если точка  $A$  лежит на этой прямой). Рассматривая точку пересечения  $P'$  построенной окружности с полупрямой  $OP$ , из рис. 5.9 получаем

$$|AO|^2 = |OP| \cdot |OP'| \Leftrightarrow R^2 = |OP| \cdot |OP'|,$$

т. е. точки  $P$  и  $P'$  являются взаимно симметричными относительно основной окружности  $\Gamma$ .

Таким образом, любая окружность, проходящая через точку  $P$ , ортогональна к основной окружности, принадлежит пучку окружностей, проходящих через точку  $P$  и  $P'$ . Обратно, произвольная окружность этого пучка пересекает основную окружность  $\Gamma$  в некоторой точке  $A$ , ибо точка  $P$  лежит внутри, а точка  $P'$  – вне основной окружности, и значит, совпадает с некоторой окружностью, ортогональной к основной.

Докажем теперь свойство 4. Заметим, что дробно-линейное преобразование переводит данную окружность (основную) и пучок ортогональных к ней окружностей, проходящих через точки  $P$  и  $P'$ , в некоторую другую окружность и пучок ортогональных к ней окружностей, проходящих через соответствующие точки  $Q$  и  $Q'$ . Из доказанного ранее точки  $Q$  и  $Q'$  симметричны. В частности, если данная окружность переходит при

дробно-линейном преобразовании в прямую, то центры всех окружностей преобразованного ортогонального пучка лежат на этой прямой. Отсюда следует, что соответствующие точки  $Q$  и  $Q'$  симметричны этой прямой.

**Следствие.** Функция  $w = f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ ,  $ad-bc \neq 0$  конформно

отображает круг, граница которого проходит через точки  $z_1, z_2, z_3$  на круг, граница которого проходит через точки  $w_1, w_2, w_3$ .

Здесь и далее под понятием «круг» понимается внутренность или внешность окружности или полуплоскость.

*Замечание.* Из доказательства свойства 3 следует, что дробно-линейное отображение может иметь не более двух неподвижных точек  $z_1, z_2$ : это отображение определяется формулой

$$\frac{w - z_1}{w - z_2} = A \frac{z - z_1}{z - z_2}, \quad w \neq z_2, \quad (5.8)$$

где  $A$  – комплексное число.

**Пример 5.6.** Всякое дробно-линейное отображение, переводящее точку  $z_1$  в точку  $w = 0$ , а точку  $z_2$  – в точку  $w = \infty$ , имеет вид

$$w = A \frac{z - z_1}{z - z_2}, \quad (5.9)$$

где  $A$  – некоторое комплексное число.

**Пример 5.7.** Найти образ круга  $D: |z-1| \leq 2$  при отображении  $w = \frac{iz}{z+4}$  (рис. 5.10, а).

Δ Окружность  $|z-1| = 2$  не проходит через точку  $z = -4$ . Поэтому согласно круговому свойству преобразование  $w = \frac{iz}{z+4}$  переводит окружность

$|z-1| = 2$  в окружность конечного радиуса. Пусть  $z = x \in \mathbf{R}$ .

Тогда  $w = \frac{ix}{x+4}$  является чисто мнимым числом. Следовательно,

действительная ось переходит в мнимую ось. Если  $z = -1$ , то  $w(-1) = -\frac{i}{3}$ ; если

$z = 3$ , то  $w(3) = \frac{3i}{7}$ . Поэтому диаметр  $AB$  круга  $D$  переходит в диаметр  $A'B'$ ,

и значит, образом круга  $D$  будет круг  $\left|w - \frac{i}{21}\right| \leq \frac{8}{21}$  (рис. 5.10, б). ▲

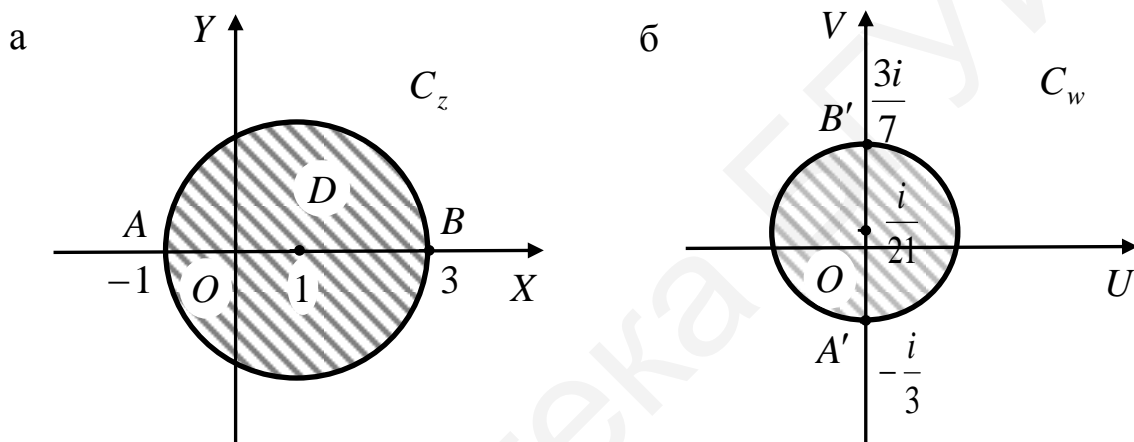


Рис. 5.10

**Пример 5.8.** Найти образ круга  $D: |z - 1 + i| \leq \sqrt{2}$ ,  $\text{Im } z \leq 0$ , при отображении  $w = \frac{z}{z-2}$ .

Δ Окружность  $|z - 1 + i| = \sqrt{2}$  пересекает действительную ось в точках  $z = 0$  и  $z = 2$  под углом  $\frac{3\pi}{4}$  (рис. 5.11, а). При преобразовании  $w = \frac{z}{z-2}$  точка  $z = 0$  переходит в точку  $w = 0$ , а точка  $z = 2$  – в точку  $w = \infty$ . Поэтому оба участка границы круга  $D$  переходят в лучи, выходящие из начала координат, и в силу конформности дробно-линейного преобразования угол между ними равен  $\frac{3\pi}{4}$ .

Найдем положение одного из лучей. Пусть для этого  $z = 1$ , тогда  $w = -i$ . При обходе прямолинейного участка границы круга  $D$  от точки  $z = 0$  к точке  $z = 1$  круг остается справа. Поэтому при обходе образа этого участка границы, т. е. луча, совпадающего с отрицательной действительной полуосью плоскости  $C_w$ , от точки  $w = 0$  к точке  $w = -1$  искомая область также должна находиться справа (рис. 5.11, б). ▲

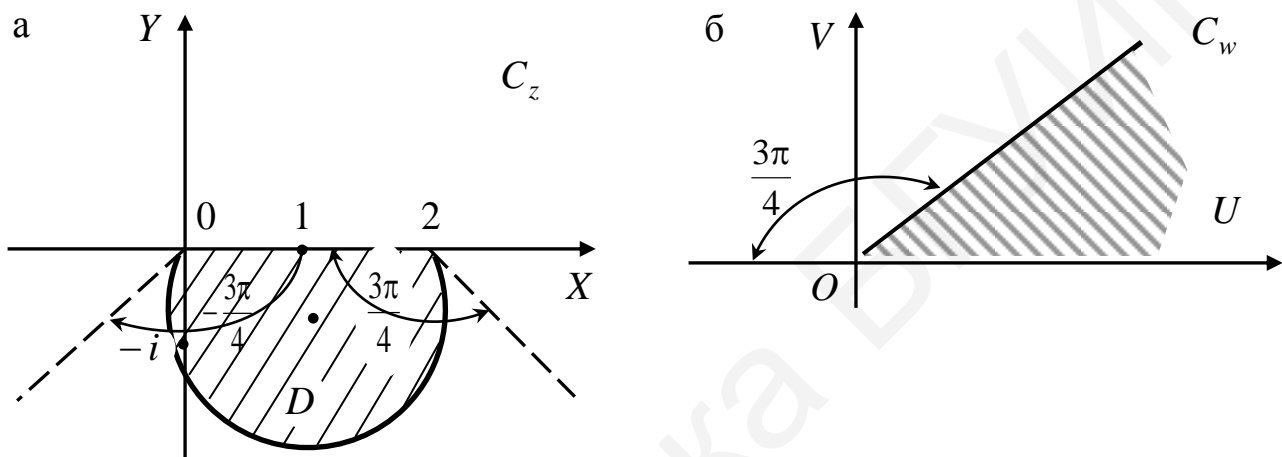


Рис. 5.11

**Пример 5.9.** Найти дробно-линейное преобразование, переводящее точки  $z_1 = -1$ ,  $z_2 = i$ ,  $z_3 = 1 + i$  соответственно в точки  $w_1 = 0$ ,  $w_2 = 2i$ ,  $w_3 = 1 - i$ .

Δ Воспользуемся формулой (5.6):

$$\frac{w}{w-2i} \cdot \frac{1-i-2i}{1-i} = \frac{z+1}{z-i} \cdot \frac{1+i-i}{1+i+i} \Rightarrow w = -\frac{2iz+2i}{4z-1-5i}.$$

Заметим, что если одна из точек  $z_k$  или  $w_k$ ,  $k = 1, 2, 3$ , – бесконечно удаленная, то в формуле (5.6) следует все разности, содержащие эту точку, заменить единицами. ▲

**Пример 5.10.** Найти дробно-линейное преобразование, переводящее точки  $z_1 = -1$ ,  $z_2 = \infty$ ,  $z_3 = i$  в точки  $w_1 = \infty$ ,  $w_2 = i$  и  $w_3 = 1$ .

Δ Согласно (5.6) и замечанию в примере 5.9 будем иметь

$$\frac{w-\infty}{w-i} \cdot \frac{1-i}{1-\infty} = \frac{z+1}{z-\infty} \cdot \frac{i-\infty}{i+1} \Rightarrow \frac{1}{w-i} \cdot \frac{1-i}{1} = \frac{z+1}{1} \cdot \frac{1}{i+1} \Rightarrow w = \frac{iz+2+i}{z+1}.$$

**Пример 5.11.** Найти дробно-линейное преобразование, отображающее верхнюю полуплоскость  $C_z (\text{Im} > 0)$  в единичный круг так, чтобы точка  $z_0$  перешла в центр круга (рис. 5.12).

Δ В плоскости  $C_z$  точки  $z_0$  и  $\bar{z}_0$  симметричны относительно оси  $X$ . Точка  $z_0$  должна перейти в точку  $w=0$ . Точка  $w=0$  симметрична точке  $w = \frac{1^2}{0} = \infty$ . Значит, согласно принципу симметрии точка  $\bar{z}_0$  переходит в точку  $w = \infty$ . Итак, искомое дробно-линейное преобразование таково, что при  $z = z_0$  должно быть  $w = 0$ , а при  $z = \bar{z}_0$  —  $w = \infty$ .

Согласно (5.8) это отображение имеет вид

$$w = k \frac{z - z_0}{z - \bar{z}_0}. \quad (5.10)$$

Остается определить коэффициент  $k$ .

Так как при отображении граница переходит в границу, то когда  $z$  пробегает действительную ось  $X$ ,  $w$  должно пробежать единичную окружность, т. е. при  $z = x \Rightarrow |w| = 1$ . Но

$$|w| = |k| \cdot \left| \frac{z - z_0}{z - \bar{z}_0} \right| \Rightarrow 1 = |k| \cdot \left| \frac{z - z_0}{z - \bar{z}_0} \right|.$$

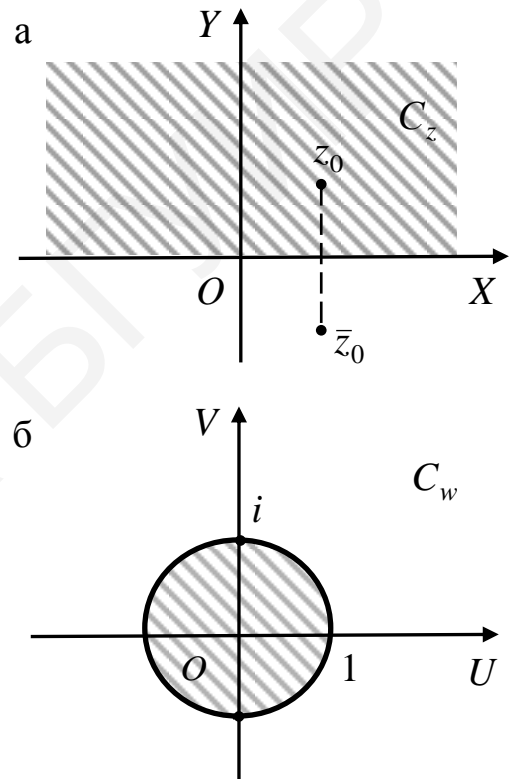


Рис. 5.12

Так как здесь  $z$  – действительное число, то  $|z - z_0| = |z - \bar{z}_0|$ . Отсюда заключаем, что  $|k| = 1$ , т. е.  $k = e^{i\varphi}$ ,  $\varphi \in \mathbf{R}$ . Окончательно заключаем, что искомое преобразование (5.10) имеет вид

$$w = e^{i\varphi} \frac{z - z_0}{z - \bar{z}_0}. \quad (5.11)$$

Переходим теперь к изучению отображений, осуществляемых элементарными ФКП.

**1. Отображение степенной функцией.** Отображение, осуществляемое функцией  $w = z^n$ , где  $n$  – целое положительное число,  $n \geq 2$ , конформно на всей комплексной плоскости за исключением точки  $z = 0$ , так как  $w'(0) = 0$ . Вводя в плоскостях  $C_z$  и  $C_w$  полярные координаты  $z = re^{i\varphi}$  и  $w = \rho e^{i\theta}$ , получим  $\rho = r^n$ ,  $\theta = n\varphi$ , откуда следует, что отображение  $w = z^n$  переводит окружность с центром в точке  $z = 0$  в окружность с центром в точке  $w = 0$ , а лучи  $\varphi = \varphi_0$ , выходящие из начала координат плоскости  $C_z$ , в лучи  $\theta = \theta_0 = n\varphi_0$ , выходящие из начала координат плоскости  $C_w$ .

**Пример 5.12.** Отобразить на верхнюю полуплоскость полукруг  $D: |z - i| \leq 1, \operatorname{Re} z < 0$  (см. рис. 5.13, а).

Δ Для решения этой задачи отобразим сначала полукруг  $D$  на первый квадрат плоскости  $C_{w_1}$  (см. рис. 5.13, а). Для этого точку  $z_1 = 2i$  переведем в точку  $w_1 = 0$ , а точку  $z_2 = 0$  – в точку  $w_2 = \infty$ . Согласно (5.9) такое

(промежуточное) преобразование имеет вид  $w_1 = A \frac{z - 2i}{i}$ . Известно, что если

дробно-линейное преобразование какую-либо точку переводит в  $\infty$ , то преобразование саму эту окружность переводит в прямую. В нашем случае точка  $z = 0$  на границе полукруга переводится в бесконечность  $w_1 = \infty$ . Тогда ось  $Y$  и окружность  $|z - i| = 1$  согласно круговому свойству отобразятся в

окружности, проходящие через  $w_1 = \infty$ , т. е. отображаются в прямые.

Для нахождения коэффициента  $A$  потребуем, чтобы точка  $z = i$  из границы полукруга преобразованием  $w_1 = A \frac{z - 2i}{z}$  перешла, например, в точку

$w_1 = 1$ . Из этого условия получим

$$w_1 = -\frac{z - 2i}{z}. \quad (5.12)$$

Заметим, что если точку  $z = i$  преобразованием  $w_1 = A \frac{z - 2i}{z}$  перевести в какую-либо другую точку прямой  $\text{Im } w_1 = 0$ , отличную от 1, то коэффициент  $A$  этого преобразования будет, естественно, другим.

С помощью преобразования  $w = w_1^2$  область, изображенная на рис. 5.13, б, перейдет в верхнюю полуплоскость  $\text{Im } w \geq 0$  (рис. 5.13, в).

Итак, одним из возможных решений поставленной задачи, является преобразование

$$w = \left( \frac{z - 2i}{z} \right)^2. \quad \blacktriangle$$

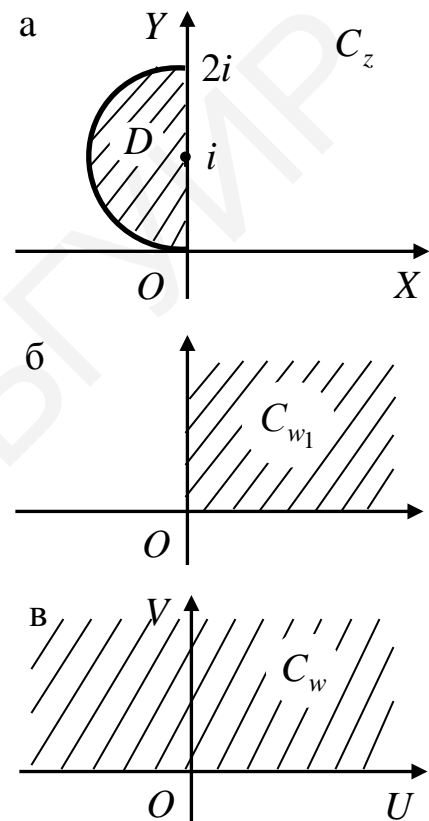


Рис. 5.13

**Пример 5.13.** Отобразить сектор  $0 < \arg z < \frac{\pi}{2}$  на единичный круг  $|w| < 1$ , чтобы точка  $z_0 = e^{\frac{i\pi}{4}}$  перешла в центр круга  $w_0 = 0$ , а точка  $z_1 = 0$  – в точку  $w_1 = 1$ .

Δ Промежуточное преобразование  $w_1 = z^2$  переводит сектор  $0 < \arg z < \frac{\pi}{2}$  в сектор  $0 < \arg w_1 < \pi$  (рис. 5.14, а, б). При этом точка

$z_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$  перейдет в точку  $w_0 = e^{\frac{i\pi}{2}} = 1$ , а точка  $z_1 = 0$  – в точку  $w_1 = 0$ .

Преобразование же, переводящее верхнюю полуплоскость в единичный круг, при котором точка  $w_1 = i$  переводит в его центр, имеет вид (5.11), т. е. в нашем случае

$$w = e^{i\varphi} \frac{w_1 - i}{w_1 + i} = e^{i\varphi} \frac{z^2 - i}{z^2 + i}. \quad (5.13)$$

Условие, что точка  $z_1 = 0$  переходит в точку  $w = 1$ , позволяет найти  $e^{i\varphi}$ . В самом деле, из (5.14) при  $z_1 = 0$  имеем  $1 = -e^{i\varphi} \Rightarrow e^{i\varphi} = -1$ . Окончательно получаем,

что  $w = -\frac{z^2 - i}{z^2 + i}$  (рис. 5.14, в). ▲

## 2. Отображение функцией $w = \sqrt[n]{z}$ .

Функция  $w = \sqrt[n]{z}$  является обратной

к степенной функции  $w = z^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \neq 1$ . Известно, что для всякого  $z \neq 0$  корень степени  $n$  из числа  $z$  имеет  $n$  различных значений, и если положить  $z = re^{i\varphi}$ , то они получаются из формулы

$$w = \sqrt[n]{r} e^{i \frac{\varphi + 2k\pi}{n}} = \sqrt[n]{r} e^{i \frac{\varphi}{n}} e^{\frac{2k\pi i}{n}}, k = \overline{0, n-1}. \quad (5.14)$$

Таким образом, функция  $\sqrt[n]{z}$  – многозначная ( $n$ -значная). Обозначим множество всех значений (5.14), соответствующих  $k = 0$ , через  $w_1$ ; соответствующих  $k = 1$  – через  $w_2$ ; ... ;  $k = n-1$  – через  $w_n$ . Тогда получим  $n$  функций:

$$w_1 = \sqrt[n]{r} e^{i \frac{\varphi}{n}}; w_2 = \sqrt[n]{r} e^{i \frac{\varphi}{n}} \cdot e^{\frac{2\pi i}{n}}; \dots; w_n = \sqrt[n]{r} e^{i \frac{\varphi + (n-1)2\pi}{n}} = w_{n-1} e^{\frac{2\pi i}{n}}.$$

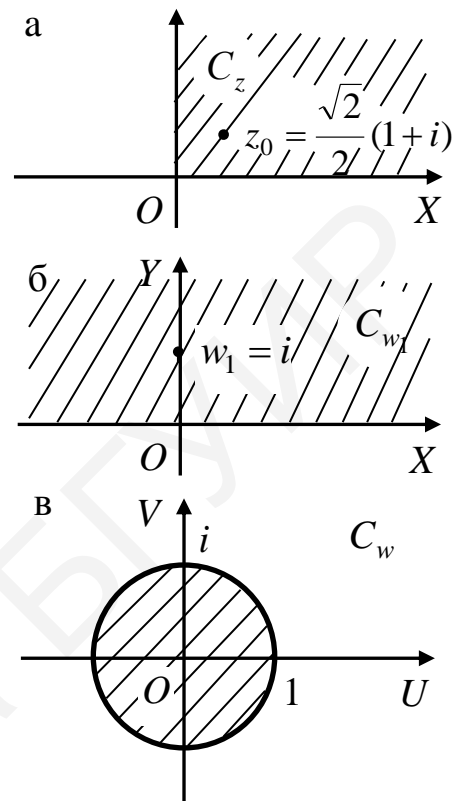


Рис. 5.14



Если начав с точки  $z = 0$ , обойти в положительном направлении точку  $z = 0$  так, чтобы она оказалась внутри контура обхода (рис. 5.15), то после одного обхода мы возвратимся в точку  $z_0$  с аргументом, увеличенным на  $2\pi$ , после двух обходов – на  $4\pi$  и т. д., а через  $n$  обходов – на  $2n\pi$ . Поэтому значение каждой функции  $w_1, w_2, \dots, w_n$  после одного такого оборота приобретает множитель  $e^{\frac{2\pi i}{n}}$ , отчего  $w_1$  перейдет в  $w_2$ , а  $w_2$  перейдет в  $w_3$  и т. д. После  $n$  оборотов в положительном направлении каждая из функций примет в точке  $z_0$  свое первоначальное значение. Отсюда следует, что функция  $w_1$  (а также  $w_2, \dots, w_n$ ), которая определена в плоскости  $C_z$  будет в ней однозначной лишь в том случае, если невозможен обход вокруг точки  $z = 0$ .

Это можно достичь видоизменением плоскости, сделав разрез плоскости от точки  $z = 0$  до точки  $z = \infty$  вдоль положительной части действительной оси (рис. 5.16).

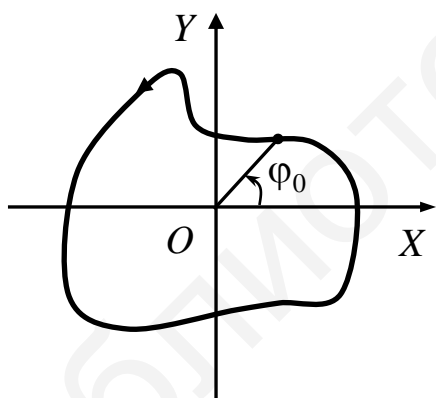


Рис. 5.15

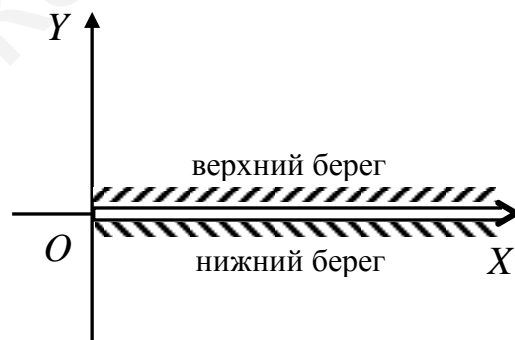


Рис. 5.16

На такой видоизмененной плоскости каждая из этих функций  $w_1, w_2, \dots, w_n$  будет однозначной и непрерывной. В любой конечной точке  $z \neq 0$  функции  $w_1, w_2, \dots, w_n$  различны и лишь в точке  $z = 0$  имеют значение, равное нулю. Если рассматривать расширенную комплексную плоскость, то в точке  $z = \infty$  все эти функции обращаются в бесконечность.

Функции  $w_1, w_2, \dots, w_n$ , рассматриваемые на плоскости  $C_z$  с разрезом между точками  $z = 0$  и  $z = \infty$ , называются *ветвями многозначной ( $n$ -значной) функции*  $w = \sqrt[n]{z}$ . Точка  $z = 0$ , обход вокруг которой меняет значение функции  $\sqrt[n]{z}$ , а  $n$  обходов одного направления приводит к исходному значению, называется *точкой ветвления  $n$ -го порядка* этой функции.

Рассмотрим теперь отображение с помощью функции  $w = \sqrt[n]{z}$ . Эта функция регулярна во всех конечных точках плоскости  $C_z$ , кроме точки  $z = 0$ ,

и ее производная  $w' = \frac{1}{n \sqrt[n]{z^{n-1}}} \neq 0$ . Следовательно, отображение  $w = \sqrt[n]{z}$

конформно во всех таких точках. В точке  $z = 0$  функция  $w = \sqrt[n]{z}$  в  $n$  раз уменьшает углы. Так как эта функция обратна функции  $w = z^n$ , то характер отображения с ее помощью ясен. Поэтому ограничимся лишь перечислением наиболее важных случаев отображения, считая, что  $\arg z = \varphi$  удовлетворяет условию  $0 \leq \varphi < 2\pi$ :

а) при  $k = 0$  ветвь  $w = \sqrt[n]{r} e^{i\frac{\varphi}{n}}$  отображает расширенную плоскость  $\bar{C}_z$  с разрезом вдоль действительной положительной полуоси на сектор  $0 \leq \arg w < \frac{\varphi}{n}$ . При  $k = 1$  другая ветвь  $w_2 = \sqrt[n]{r} e^{i\frac{\varphi}{n}} \cdot e^{i\frac{2\pi}{n}}$  отображает эту

плоскость с разрезом на сектор  $\frac{\varphi}{n} \leq \arg w < \frac{\varphi + 2\pi}{n}$  и т. д;

б) круг  $|z| < 1$  с разрезом по радиусу от  $z = 0$  до  $z = 1$  отображается на сектор  $|w| < 1$ , где  $\arg w$  зависит от выбранной ветви  $w_k$ ,  $k = \overline{1, n}$ .

**Пример 5.14.** Найти конформное отображение сектора  $0 < \arg z < \frac{\pi}{4}$  на

круг  $|w| < 1$  так, чтобы точки  $z_1 = e^{i\frac{\pi}{8}}$  и  $z_2 = 0$  перешли в точки  $w_1 = 0$  и  $w_2 = 1$  соответственно.

Δ Сектор  $0 < \arg z < \frac{\pi}{4}$  (рис. 5.17, а) с помощью функции  $w_1 = z^4$

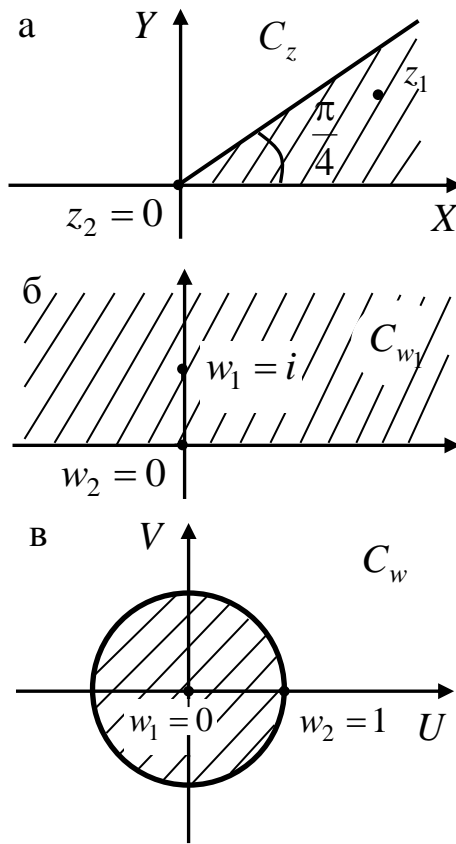


Рис. 5.17

отобразим конформно на верхнюю полуплоскость  $\text{Im } w_1 > 0$  (рис. 5.17, б). При этом

точка  $z_1 = e^{\frac{i\pi}{4}}$  перейдет в точку

$w_1 = z_1^4 = e^{\frac{i\pi}{2}} = i$ , а  $z_2 = 0$  перейдет в точку

$w_2 = 0$ . Теперь полуплоскость  $\text{Im } w_1 > 0$

отобразим на круг  $|w_1| < 1$  (рис. 5.17, в) так,

чтобы точка  $w_1 = i$  перешла в центр круга. Это

согласно (5.11) осуществляет функция

$w = e^{i\varphi} \frac{w_1 - i}{w_1 + i}$ . Величину  $e^{i\varphi}$  определим из

условия, что точка  $w_1 = 0$  должна перейти в

точку  $w = 1$ . Это дает  $1 = e^{i\varphi} \frac{-i}{i} \Rightarrow e^{i\varphi} = -1$ .

Подставив в выражение для  $w$  значение  $e^{i\varphi} = -1$  и  $w_1 = z^4$ , окончательно получим решение задачи:

$$w = -\frac{z^4 - i}{z^4 + 1} = \frac{i - z^4}{i + z^4}. \blacktriangle$$

**Пример 5.15.** Отобразить плоскость  $C_z$  с разрезом вдоль отрезка, соединяющего точки  $z_1 = 2i$  и  $z = 2$  (рис. 5.18), на верхнюю полуплоскость плоскости  $C_w$ .

Δ Промежуточное отображение  $w_1 = \frac{z - 2i}{z - 2}$  переводит плоскость  $C_z$  с разрезом вдоль отрезка в плоскость  $C_w$  с разрезом вдоль отрицательной части

действительной оси, так как точка  $z = 1 + 2i$  отображением  $w_1 = \frac{z - 2i}{z - 2}$  переводится в точку  $w_1 = -1$  (рис. 5.18, б). Следующим отображением  $w_2 = e^{i\pi} w_1 = -w_1$  получаем плоскость  $C_{w_2}$  с разрезом вдоль положительной части действительной оси (рис. 5.18, в). Наконец, выбирая соответствующую ветвь функции  $w = \sqrt{w_2}$ , отображаем плоскость  $C_{w_2}$  с разрезом (см. рис. 5.18, в) на верхнюю полуплоскость плоскости  $C_w$  (рис. 5.18, г).

Итак, окончательно

$$w = \sqrt{\frac{-z + 2i}{z - 2}}. \blacktriangle$$

**Пример 5.16.** Отобразить на верхнюю полуплоскость  $\text{Im } z > 0$  единичный круг  $|z| < 1$  с размером, идущим от центра по положительной действительной полуоси (рис. 5.19, а).

Δ Промежуточное отображение  $w_1 = \sqrt{z}$  (точнее, одна из ветвей функции  $\sqrt{z}$  переводит исходную область на область  $|w_1| < 1, \text{Im } w_1 > 0$  (рис. 5.19, б).

Далее отображение  $w_2 = \frac{w_1 - 1}{w_1 + 1}$  переводит область на рис. 5.19, б на область на

рис. 5.19, в. Функция  $w_3 = e^{i\pi} w_2 = -w_2$  переводит область на рис. 5.19, в на

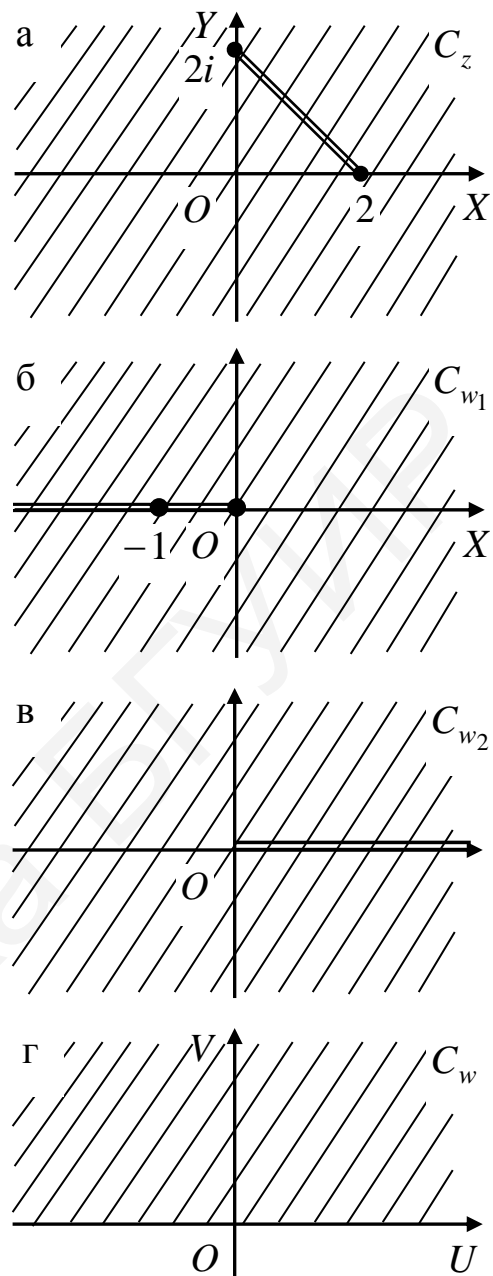


Рис. 5.18

область на рис. 5.19, г. Наконец, функция  $w = w_3^2$  отображает первый квадрант на верхнюю полуплоскость (рис. 5.19, д).

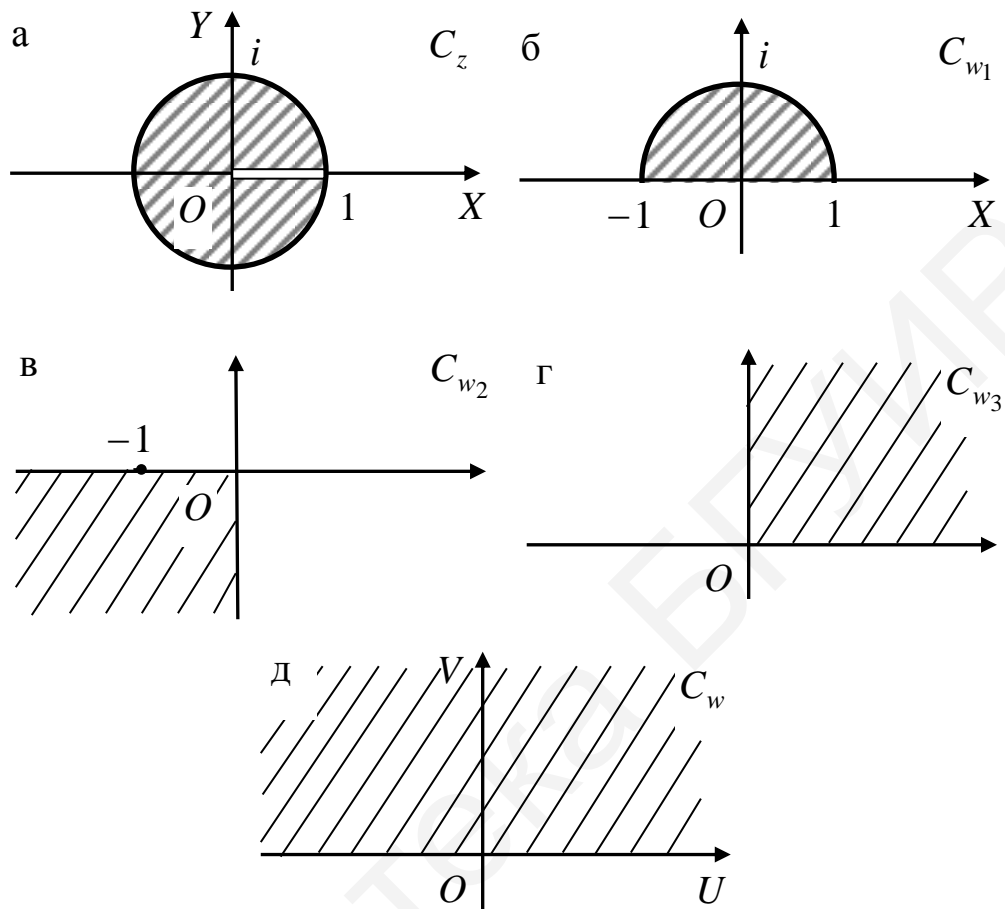


Рис. 5.19

Таким образом, искомая функция имеет вид

$$w = w_3^2 = (-w_2)^2 = \left( -\frac{w_1 - 1}{w_1 + 1} \right)^2 = \left( \frac{1 - \sqrt{z}}{1 + \sqrt{z}} \right)^2. \blacktriangle$$

### 3. Функция Жуковского.

Отображение

$$w = \frac{1}{2} \left( z + \frac{1}{z} \right) \tag{5.16}$$

называется *функцией Жуковского*.

Так как  $w' = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{1}{z^2} \right)$ , то функция Жуковского аналитична во всей комплексной плоскости, кроме точки  $z = 0$ , и ее производная отлична от нуля всюду, кроме точек  $z = \mp 1$ , которым соответствуют точки  $w = \mp 1$  плоскости  $C_w$ . Полагая  $z = r \cdot e^{i\varphi}$ , находим

$$w = u + iv = \frac{1}{2} \left( r e^{i\varphi} + \frac{1}{r} e^{-i\varphi} \right) = \frac{1}{2} \left( r (\cos \varphi + i \sin \varphi) + \frac{1}{r} (\cos \varphi - i \sin \varphi) \right) = \\ = \frac{1}{2} \left( r + \frac{1}{r} \right) \cos \varphi + i \frac{1}{2} \left( r - \frac{1}{r} \right) \sin \varphi .$$

Откуда

$$u = \frac{1}{2} \left( r + \frac{1}{r} \right) \cos \varphi, \quad v = \frac{1}{2} \left( r - \frac{1}{r} \right) \sin \varphi . \quad (5.17)$$

Отсюда следует, что окружность радиусом  $r = R$  плоскости  $C_z$  отображается функцией Жуковского на линию

$$u = \frac{1}{2} \left( R + \frac{1}{R} \right) \cos \varphi, \quad v = \frac{1}{2} \left( R - \frac{1}{R} \right) \sin \varphi \quad (5.18)$$

в плоскости  $C_w$ . Если  $R \neq 1$ , то уравнения (5.18) являются параметрическими уравнениями эллипса:

$$\frac{u^2}{\frac{1}{4} \left( R + \frac{1}{R} \right)^2} + \frac{v^2}{\frac{1}{4} \left( R - \frac{1}{R} \right)^2} = 1 \quad (5.19)$$

с полуосями  $a = \frac{1}{2} \left( R + \frac{1}{R} \right)$ ,  $b = \frac{1}{2} \left( R - \frac{1}{R} \right)$  и фокусами, лежащими в точках

$u = \pm \sqrt{a^2 - b^2} = \pm 1$ ,  $v = 0$ . Так как  $w'(z) \neq 0$  при  $z \neq \pm 1$ , то отображение, осуществляемое функцией Жуковского, конформно при  $R \geq 1$  во внешности круга  $|z| > R$ , а при  $R \leq 1$  – во внутренности круга  $|z| < R$ .

Пусть для определенности  $R > 1$ . Тогда из уравнений (5.17) видно, что если точка  $z$  движется по окружности  $|z| = R$  против часовой стрелки ( $\varphi$  возрастает), то точка  $w = u + iv$  движется по эллипсу (5.18) также против часовой стрелки. Поэтому с учетом принципа соответствия границ получаем, что функция Жуковского отображает конформно и взаимно однозначно внешность круга  $|z| > R > 1$  на внешность эллипса (5.18). При  $R > 1$ ,  $\frac{1}{R} < 1$  замена  $R$  на  $\frac{1}{R}$  сохраняет эллипс (5.18). Поэтому одновременно на внешность эллипса (5.19) отображается взаимно однозначно внутренность круга радиусом  $R_1 = \frac{1}{R} < 1$ . При этом обходу его границы (окружности) против часовой стрелки соответствует обход эллипса по часовой стрелке.

Из уравнений (5.17) видно, что если  $R = 1$ , то  $v = 0$ ,  $u = \cos \varphi$  и, следовательно, когда точка  $z$  обходит границу единичного круга  $|z| = 1$ ,  $0 \leq \varphi < 2\pi$ , то точка  $w = u + iv$  дважды пробегает отрезок действительной оси между точками 1 и  $-1$ , и в силу принципа соответствия границ можно утверждать, что функция Жуковского отображает как внутренность, так и внешность единичного круга на всю расширенную плоскость с разрезом по отрезку  $[-1; 1]$  (рис. 5.20).

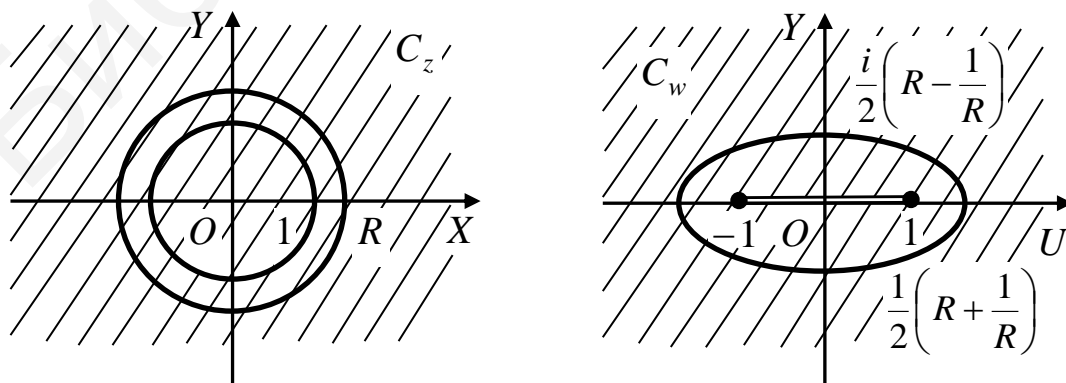


Рис. 5.20

Из (5.15) следует, что

$$z^2 - 2wz + 1 = 0 \Rightarrow z = w + \sqrt{w^2 - 1}. \quad (5.19)$$

Это значит, что одна ветвь функции  $z = z(w)$ , обратной функции Жуковского, отображает всю расширенную плоскость  $C_w$  с разрезом по отрезку  $[-1, 1]$  на внутренность единичного круга, а другая – на внешность единичного круга, причем выбор ветви функции  $z(w)$  определяется выбором ветви функции  $\sqrt{w^2 - 1}$  в равенстве (5.19).

Из равенств (5.16) заключаем, что лучи  $\arg z = \varphi$  ( $\varphi \neq 0, \pm \frac{\pi}{2}, \pi$ ) отображаются функцией Жуковского на соответствующие ветви гиперболы  $\frac{u^2}{\cos^2 \varphi} - \frac{v^2}{\sin^2 \varphi} = 1$ , а лучи  $\arg z = 0$ ,  $\arg z = \pi$  и  $\arg z = \pm \frac{\pi}{2}$  – на дважды пробегаемые бесконечные отрезки действительной или мнимой оси. ▲

**Пример 5.17.** Отобразить круг  $|z| < 1$  с разрезом по отрезку  $[\frac{1}{2}, 1]$  на круг  $|w| < 1$ .

Δ Промежуточное отображение с помощью функции Жуковского  $w_1 = \frac{1}{2} \left( z + \frac{1}{z} \right)$  переводит круг  $|z| < 1$  с разрезом по отрезку  $[\frac{1}{2}, 1]$  (рис. 5.21, а) на всю плоскость с разрезом  $[-1, \frac{5}{4}]$  (рис. 5.21, б). Длина этого отрезка равна  $\frac{9}{4}$ , а его центр находится в точке  $w_1 = \frac{1}{8}$ . Полученную область  $C_{w_1}$  отобразим на всю плоскость  $C_{w_2}$  с разрезом по отрезку  $[-1, 1]$ , для чего центр отрезка  $[-1, \frac{5}{4}]$  надо сдвинуть в точку  $w_2 = 0$ , после чего применить преобразование подобия с коэффициентом подобия  $k = \frac{8}{9}$  и с центром в точке  $w_2 = 0$ . Тогда его длина станет равной 2.



Нужное преобразование имеет вид  $w_2 = \frac{8}{9} \left( w_1 - \frac{1}{8} \right)$  (рис. 5.21, в).

Область на рис. 5.21, в с помощью одной из ветвей функции, обратной функции Жуковского, т. е.  $w = w_2 + \sqrt{w_2^2 - 1}$ , отображается на внутренность единичного круга  $|w| < 1$  плоскости  $C_w$  (рис. 5.21, г). Искомая функция, таким образом, имеет вид

$$w = w_2 + \sqrt{w_2^2 - 1} = \frac{8}{9} \left( w_1 - \frac{1}{8} \right) + \sqrt{\frac{64}{81} \left( w_1 - \frac{1}{8} \right)^2 - 1} = \frac{8}{9} \left[ \frac{1}{2} \left( z + \frac{1}{z} \right) - \frac{1}{8} \right] + \sqrt{\frac{64}{81} \left[ \frac{1}{2} \left( z + \frac{1}{z} \right) - \frac{1}{8} \right]^2 - 1} = \frac{4}{9} \left( z + \frac{1}{z} \right) - \frac{1}{9} + \sqrt{\left[ \frac{4}{9} \left( z + \frac{1}{z} \right) - \frac{1}{9} \right]^2 - 1}. \blacktriangle$$

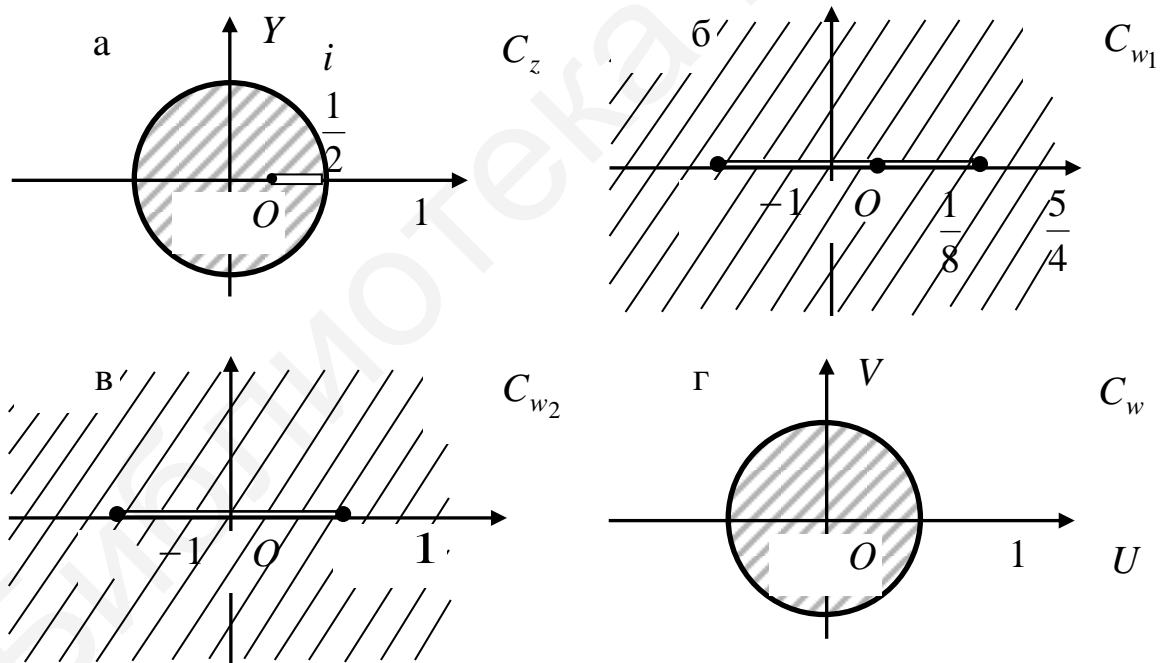


Рис. 5.21

4. Преобразование  $w = e^z$ . Так как  $w' = e^z \neq 0$ , то отображение  $w = e^z$  конформно на всей плоскости  $\bar{C}$ . В силу  $2\pi i$  – периодичности  $e^z$  из равенства  $\frac{e^{z_1}}{e^{z_2}} = e^{z_1 - z_2} = 1$  заключаем, что  $z_1 - z_2 = 2n\pi i, n \in \mathbf{Z}$ . Это показывает, что во всей плоскости  $C_z$  функция  $w = e^z$  является неоднозначной, более того, эта функция неоднозначна в любой области, содержащей с некоторой точкой  $z_1$  точку  $z_2 = z_1 + 2n\pi i$ . Напротив, в полосе  $G: 0 < \text{Im } z < 2\pi$  (рис. 5.22, а) функция однозначна и, следовательно, конформно отображает эту полосу на некоторую область  $D$  плоскости  $C_w$  (рис. 5.22).

Для установления вида области  $D$  применим принцип соответствия границ. Действительная ось  $\{-\infty < x < +\infty, y = 0\}$  при отображении  $w = e^z$  переходит в луч  $w = e^x = u, 0 \leq u < +\infty$ , т. е. в положительную действительную полуось плоскости  $C_w$ , проходящую от точки  $(0, 0)$  до точки  $(+\infty, 0)$ . Далее при движении по верхней границе полосы  $z = x + 2\pi i$  от  $x = +\infty$  до  $x = -\infty$  на плоскости  $C_z$  получаем луч  $\arg w = 2\pi$ , проходимый от точки  $(+\infty, 0)$  до точки  $(0, 0)$  (рис. 5.22, б).

Итак, функция  $w = e^z$  конформно отображает полосу  $0 < \text{Im } z < 2\pi$

на плоскость  $C_w$  с разрезом вдоль положительной действительной полуоси  $w = u, 0 \leq u < +\infty$ , причем  $\text{Im } z = 0$  переходит в верхний берег разреза, проходимый от точки  $(0, 0)$  до точки  $(+\infty, 0)$ , а прямая  $\text{Im } z = 2\pi$  – в нижний берег разреза, проходимый от точки  $(+\infty, 0)$  до точки  $(0, 0)$  (см. рис. 5.22, б).

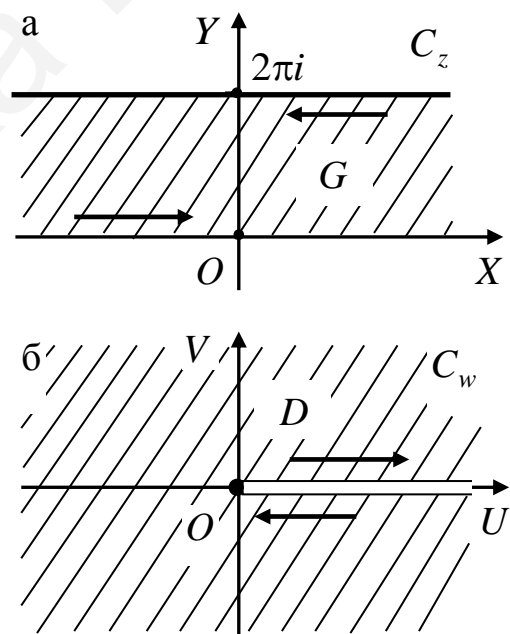


Рис. 5.22

Если  $e^z = re^{i\varphi}$ , то для  $z = x + iy$  имеем  $r = e^x$ ,  $\varphi = y$ . Отсюда следует, что прямые  $x = x_0$  плоскости  $C_z$  показательной функцией  $w = e^z$  отображаются в окружности  $\rho = \rho_0 = e^{x_0}$  плоскости  $C_w$ , а прямая  $y = y_0$  — в лучи  $\theta = \theta_0 = y_0$ , выходящие из начала координат плоскости  $C_w$ .

**Пример 5.18.** Во что преобразуется полуполоса  $0 < \text{Im } z < 2\pi$ ,  $\text{Re } z < 0$  (рис. 5.23, а) с помощью функции  $w = e^z$ ?

Δ Если  $w = e^z$ ,  $z = x + iy$ , то  $r = e^x$ ,  $\varphi = y$ , где  $-\infty < x < 0$ ,  $0 < y < 2\pi$ , так что  $0 < \rho < 1$ ,  $0 < \varphi < 2\pi$ . Очевидно, точки  $w = re^{i\varphi}$ , удовлетворяющие этим условиям, заполняют круг  $|w| < 1$  с разрезом по отрезку прямой, соединяющей точки  $w = 0$  и  $w = 1$ . В самом деле, обойдем контур  $\gamma = I \cup II \cup III$  области  $D$  в положительном направлении, начиная с участка  $I: (-\infty < x < 0, y = 0)$ , далее —  $II: (x = 0, 0 < y < 2\pi)$  и, наконец, —  $III: \{y = 2\pi, \text{ а } x \text{ изменяется от } 0 \text{ до } -\infty\}$ . Этим участкам в плоскости  $C_w$  будут соответствовать участки  $I', II', III'$ , где участок  $I'$  совпадает с верхним краем разреза, а  $III'$  — с нижним краем (рис. 5.23, б). ▲

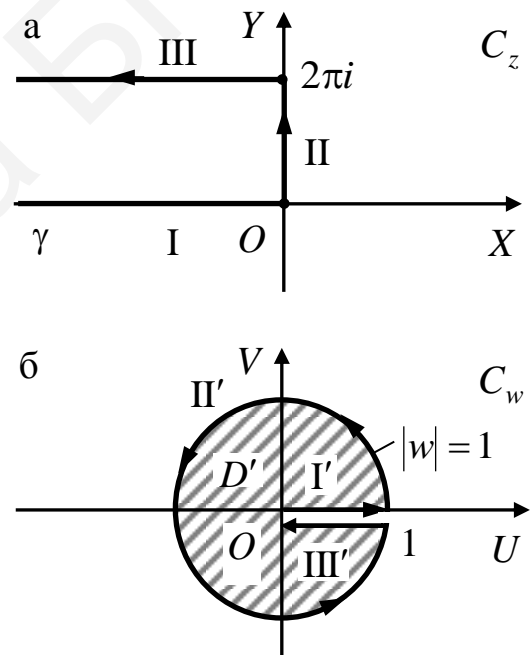


Рис. 5.23

**Пример 5.19.** Отобразить на верхнюю полуплоскость  $\text{Im } w > 0$  круговую луночку  $D: \{|z - 1| > 1, |z| < 2\}$  (рис. 5.24, а).

Δ Промежуточным отображением  $w_1 = \frac{z}{z - 2}$  переведем область  $D$  на полосу  $0 < \text{Re } w_1 < \frac{1}{2}$  (рис. 5.24, б), так как  $w_1(1 + i) = i$ ,  $w_1(2i) = \frac{1 - i}{2}$ .

Следующее отображение  $w_2 = e^{\frac{i\pi}{2}} \cdot 2\pi w_1 = 2\pi i w_1$  переводит полосу  $D_1$  на полосу  $D_2 : 0 < \text{Im } w_2 < \pi$  (рис. 5.24, в), а функция  $w = e^{w_2}$  отображает полосу  $D_2$  на верхнюю полуплоскость (рис. 5.24, г). Окончательно приходим к преобразованию  $w = e^{w_2} = e^{2\pi i w_1} = e^{\frac{2\pi i z}{z-2}}$ . ▲

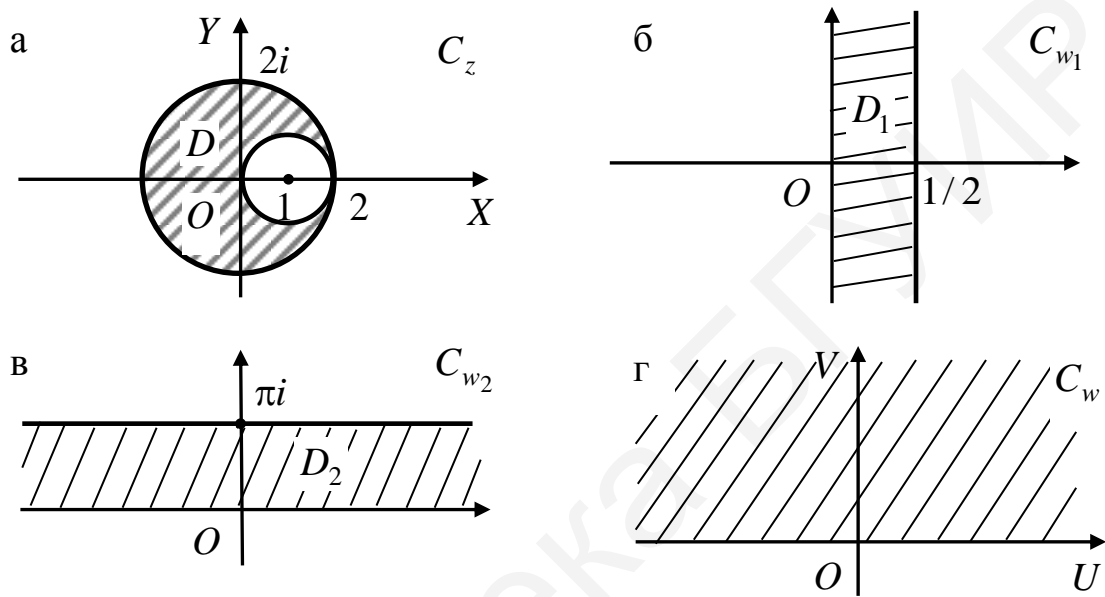


Рис. 5.24

**Пример 5.20.** Отобразить на верхнюю полуплоскость  $\text{Im } w > 0$  область  $D$  плоскости  $C_z$ , заданную неравенствами  $|z| > 1$ ,  $\text{Im } z > -1$  (рис. 5.25, а).

▲ Промежуточное отображение  $w_1 = \frac{z-i}{z+i}$  переводит область  $D$  на область  $D_1$  (рис. 5.25, б), так как  $w_1(-i) = \infty$ ,  $w_1(i) = 0$ ,  $w_1(1) = -i$ ,  $w_1(1-i) = 1-2i$ ,  $w_1(2i) = \frac{1}{3}$ . Далее преобразование  $w_2 = e^{\frac{i\pi}{2}} \pi w_1 = \pi i w_1$  переводит полосу  $D_1 : 0 < \text{Im } w_1 < 1$  на полосу  $D_2 : 0 < \text{Im } w_2 < \pi$  плоскости  $C_{w_2}$  (рис. 5.25, в). Наконец, преобразование  $w = e^{w_2}$  переводит полосу

$D_2 : 0 < \text{Im } w_2 < \pi$  на верхнюю полуплоскость плоскость  $C_w$  (рис. 5.25, г).

Итак,  $w = e^{w_2} = e^{\pi i w_1} = e^{\frac{\pi i(z-i)}{z+i}}$  – искомое преобразование. ▲

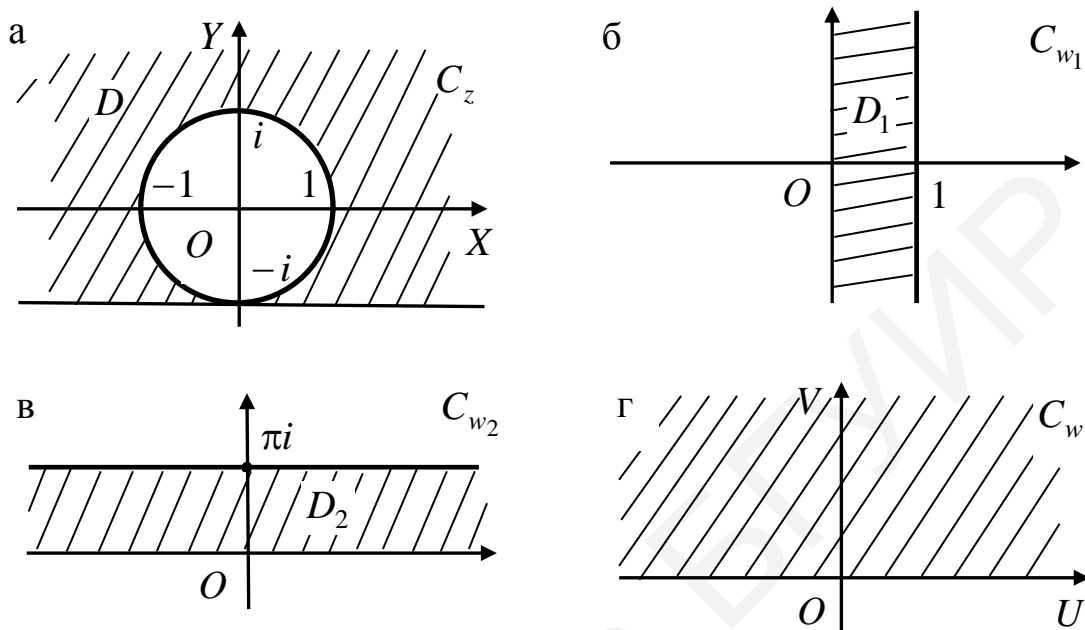


Рис. 5.25

**5. Преобразования тригонометрическими и гиперболическими функциями.** Так как тригонометрические и гиперболические функции выражаются через показательную функцию формулами

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}; \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i};$$

$$\text{ch } z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}; \quad \text{sh } z = \frac{e^z - e^{-z}}{2},$$

то при изучении отображений, задаваемых этими функциями, можно рассматривать композицию отображений с помощью показательной и дробно-линейной функций. Приведем примеры.

**Пример 5.21.** Отобразить на верхнюю полуплоскость  $\text{Im } w > 0$  полуполосу  $D : \text{Re } z < 1, -h < \text{Im } z < 0$  плоскости  $C_z$  (рис. 5.26, а).

$\Delta$  Промежуточным преобразованием  $w_1 = e^{\frac{i\pi}{2}} \cdot \frac{\pi}{h}(z-1)$  переводится на полуполосу  $D_1$  (рис. 5.26, б). Далее функция  $w = \operatorname{ch} w$  отображает эту полуполосу на верхнюю плоскость (рис. 5.26, в).  $\blacktriangle$

**Пример 5.22.** Отобразить на нижнюю полуплоскость  $\operatorname{Im} w < 0$  область  $D$  плоскости  $C_z$ , определяемую неравенствами  $|z-1| > 1, |z+1| > 1, \operatorname{Im} z > 0$  (рис. 5.27, а).

$\Delta$  Промежуточное отображение  $w_1 = \frac{z-2}{z}$  переводит эту область в область

$D_1 : 0 < \operatorname{Re} w_1 < 2, \operatorname{Im} w_1 > 0$  плоскости  $C_{w_1}$ , так как верхняя полуокружность  $|z-1|=1$  отображается в положительную часть мнимой оси; верхняя полуокружность  $|z+1|=1$  – в полупрямую  $w_1 = 2, \operatorname{Im} w_1 > 0$ ; интервал  $(2, +\infty)$  оси  $X$  – в полуинтервал  $[0, 1]$ ; интервал  $(-\infty, -2)$  – в полуинтервал  $[1, 2]$  действительной оси с плоскости  $C_{w_1}$  (рис. 5.27, б). Далее преобразование

$w_2 = \frac{\pi}{2}(w_1 - 2)$  переводит область  $D_1$  в область  $D_2$  (рис. 5.27, в).

Наконец, функция  $w = \sin w_2$  отображает область  $D_2$  на верхнюю полуплоскость плоскости  $C_w$  (рис. 5.27, г). Окончательно получаем

$$w = \sin w_2 = \sin \left( \frac{\pi w_1}{2} - \pi \right) = \sin \left( \frac{\pi(z-2)}{2} - \pi \right). \blacktriangle$$

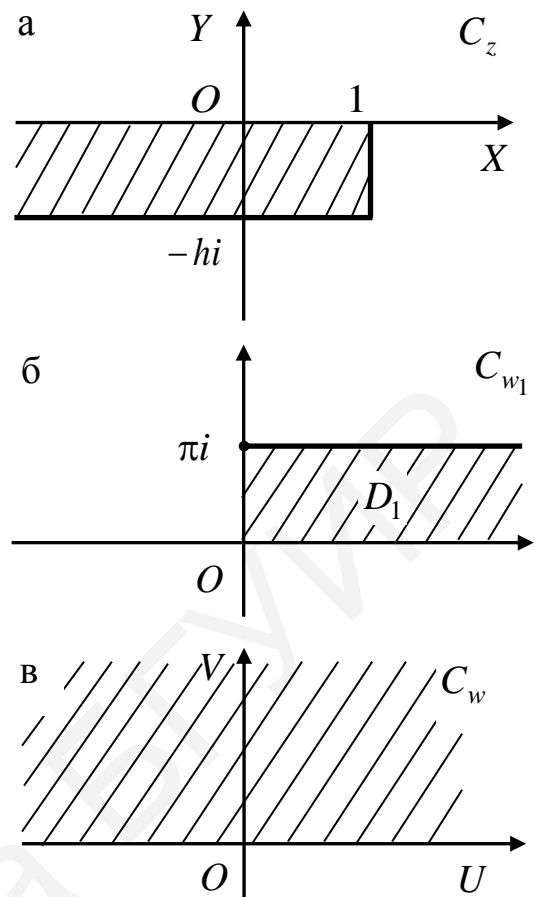


Рис. 5.26

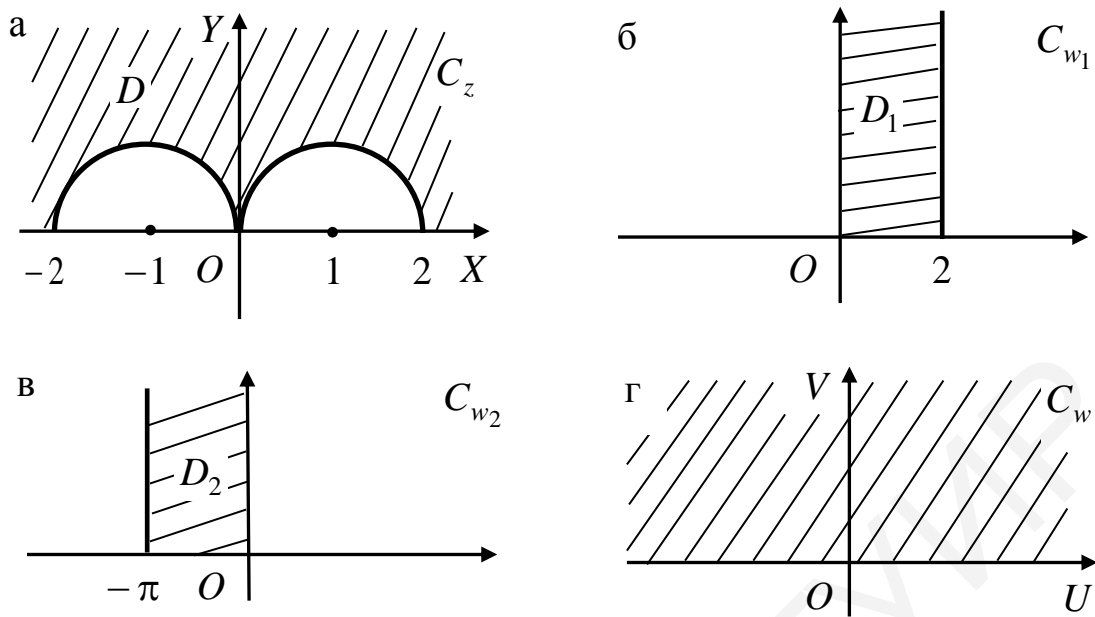


Рис. 5.27

### Задачи и упражнения

1. Найти линейную функцию, отображающую треугольник с вершинами в точках  $0, 1, i$  в плоскость  $C_z$  на подобный ему треугольник с вершинами  $1+i, 0, 2$  в плоскости  $C_w$ .

Ответ:  $w = (1 - z)(1 + i)$ .

2. Найти линейные отображения  $w = az + b$ , оставляющие точку  $z_0$  неподвижной и переводящие точку  $z_1 \in C_z$  в точку  $w_1 \in C_w$ :

- а)  $z_0 = 1 - i, z_1 = 2 + i, w_1 = 4 - 3i$ ; б)  $z_0 = -i, z_1 = 1 - 2i, w_1 = 2 - 3i$ ;  
 в)  $z_0 = -1 - i, z_1 = 3 - 2i, w_1 = 3i$ .

Ответ: а)  $w = \frac{1}{5}[(-1 - 8i)z + 14 + 2i]$ ; б)  $w = 2z + i$ ; в)  $w = iz - 2$ .

3. Найти образ окружности  $|z| = 3$  при отображении  $w = \frac{25}{z}$ .

Ответ:  $|w| = \frac{25}{3}$ .

4. Найти образы следующих множеств при отображении  $w = \frac{1}{z}$ :

а)  $\arg z = \frac{\pi}{3}$ ; б)  $|z| = 1, \frac{\pi}{4} < \arg z < \pi$ ; в)  $2 \leq x \leq 4, y = 0$ ; г)  $0 < \operatorname{Re} z < 1$ .

Ответ: а)  $\arg w = -\frac{\pi}{3}$ ; б)  $|w| = 1, -\pi < \arg w < -\frac{\pi}{4}$ ; в)  $\frac{1}{4} \leq u \leq \frac{1}{2}$ ;

г)  $\left|w - \frac{1}{2}\right| > \frac{1}{2}, u > 0$ .

5. Найти дробно-линейное преобразование, переводящее точки  $z_1 = 1, z_2 = i, z_3 = -1$  в точки  $w_1 = -1, w_2 = 0, w_3 = 1$ .

Ответ:  $w = i \frac{i - z}{i + z}$ .

6. Найти образы следующих областей при заданных дробно-линейных преобразованиях  $w$ :

а) кольцо  $1 < |z| < 2, w = \frac{z+1}{z+2}$ ; б) внешность круга  $|z| > 1, w = \frac{z+i}{z-i}$ ;

в) круг  $|z| < 1, w = \frac{z-1}{z+i}$ .

Ответ: а)  $\left|\frac{w-1}{3}\right| > \frac{1}{3}, u < \frac{3}{4}$ ; б)  $\operatorname{Re} w > 0$ ; в)  $u < v$ .

7. Найти конформное отображение круга  $|z| < 5$  в круг  $|w| < 1$  так, чтобы точки  $-5, 4 + 3i, 5$  перешли в точки  $-1, i, 1$ .

Ответ:  $w = \frac{2z-5}{10-z}$ .

8. Найти функцию  $w = f(z)$ , отображающую конформно единичный круг на себя, такую, что  $f(0) = 0, \arg f'(0) = -\frac{\pi}{2}$ .

Ответ:  $w = -iz$ .



9. Отобразить верхнюю полуплоскость  $\text{Im } z > 0$  с разрезом по отрезку от точки  $z_1 = 0$  до точки  $z_2 = ai$ ,  $a > 0$ , на верхнюю полуплоскость  $\text{Im } w > 0$  (устранить разрез).

Ответ:  $w = \sqrt{z^2 + a^2}$ .

10. Найти отображения на верхнюю полуплоскость следующих областей:

а) полосы  $0 < x < 1$  с разрезом по лучу  $x = \frac{1}{z}$ ,  $0 \leq y < \infty$ ,  $a > 0$ ;

б) плоскости с разрезами по лучам  $y = 0$ ,  $-\infty < x \leq a$  и  $y = 0$ ,  $b \leq x < +\infty$  ( $a < b$ ).

Ответ: а)  $w = \sqrt{e^{2\pi zi} + e^{-2\pi a}}$ ; б)  $w = \sqrt{\frac{z-b}{z-a}}$ .

11. Пользуясь функцией Жуковского, найти образ области  $0 < |z| < 1$ ,  $0 < \arg z < \frac{\pi}{4}$ .

Ответ:  $u^2 - v^2 > 1$ ,  $u > \frac{\sqrt{2}}{2}$ ,  $v < 0$ .

## Лекция 6

### ИНТЕГРИРОВАНИЕ ФКП

**Интеграл от ФКП, его вычисление и свойства. Интегральная теорема Коши для односвязной и многосвязной областей. Интеграл с переменным верхним пределом. Теорема Мореры. Первообразная для ФКП. Неопределенный интеграл от ФКП. Интегральная формула Коши для односвязной и многосвязной областей.**

#### Задачи и упражнения

Пусть в области  $D$  комплексной плоскости  $C$  определена однозначная и непрерывная функция  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  и  $l$  – кусочно-гладкая ориентированная кривая в  $D$  с начальной точкой  $A$  и конечной точкой  $B$  (рис. 6.1). Разобьем кривую  $l$

на части  $l_k$  точками  $z_0, z_1, \dots, z_n$ , взятыми в порядке следования по  $l$  от  $z_0 = A$  до  $z_n = B$ . Пусть  $|l_k|$  – длина части дуги  $l_k$  с началом в точке  $z_{k-1}$  и концом в точке  $z_k$ ,

а  $\Delta = \max_{1 \leq k \leq n} |l_k|$ . В каждой части  $l_k$

выберем произвольную точку  $\zeta_k = \xi_k + i\eta_k$  и составим

интегральную сумму

$$\sigma_n = \sum_{k=1}^n f(\zeta_k)(z_k - z_{k-1}) = \sum_{k=1}^n f(\zeta_k) \Delta z_k. \quad (6.1)$$

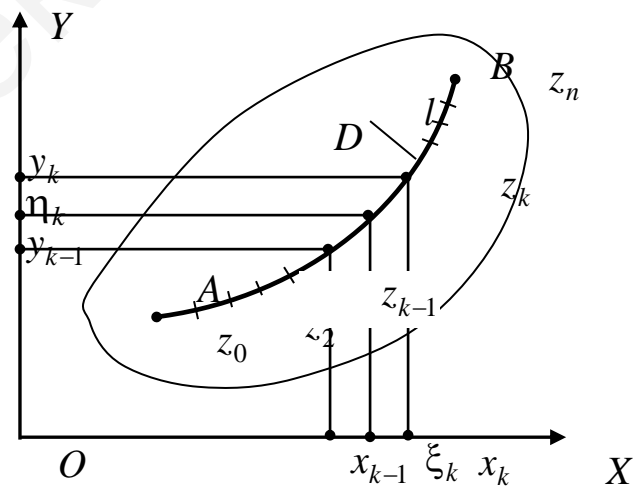


Рис. 6.1

Если существует конечный предел сумм (6.1) при  $\Delta \rightarrow 0$ , не зависящий ни от способа разбиения кривой  $l$  на элементарные части  $l_k$ , ни от выбора точек  $\zeta_k \in l_k$ , то он называется *интегралом от ФКП  $f(z)$  по кривой  $l$*  и обозначается  $\int_l f(z) dz$ .

Итак, по определению

$$\int_l f(z) dz = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\zeta_k) \Delta z_k. \quad (6.2)$$

Так как

$$z_k = x_k + iy_k, f(z_k) = u(x_k, y_k) + iv(x_k, y_k),$$

$$\zeta_k = \xi_k + i\eta_k, \Delta z_k = \Delta x_k + i\Delta y_k, \Delta x_k = x_k - x_{k-1}, \Delta y_k = y_k - y_{k-1},$$

то

$$\begin{aligned} f(\zeta_k) \Delta z_k &= (u(\xi_k, \eta_k) + iv(\xi_k, \eta_k))(\Delta x_k + i\Delta y_k) = \\ &= (u(\xi_k, \eta_k) \Delta x_k - v(\xi_k, \eta_k) \Delta y_k) + i(v(\xi_k, \eta_k) \Delta x_k + u(\xi_k, \eta_k) \Delta y_k). \end{aligned}$$

Следовательно, интегральная сумма (6.1)

$$\begin{aligned} \sigma_n &= \sum_{k=1}^n (u(\xi_k, \eta_k) \Delta x_k - v(\xi_k, \eta_k) \Delta y_k) + \\ &+ i(v(\xi_k, \eta_k) \Delta x_k + u(\xi_k, \eta_k) \Delta y_k). \end{aligned} \quad (6.3)$$

Ясно, что если  $\Delta \rightarrow 0$ , то  $\Delta_1 = \max_{1 \leq k \leq n} \Delta x_k \rightarrow 0$  и  $\Delta_2 = \max_{1 \leq k \leq n} \Delta y_k \rightarrow 0$ .

В силу непрерывности функций  $u = u(x, y)$ ,  $v = v(x, y)$  в  $D$  существуют

пределы интегральных сумм  $\sum_{k=1}^n u(\xi_k, \eta_k) \Delta x_k$ ,  $\sum_{k=1}^n v(\xi_k, \eta_k) \Delta x_k$  при  $\Delta_1 \rightarrow 0$

и сумм  $\sum_{k=1}^n u(\xi_k, \eta_k) \Delta y_k$ ,  $\sum_{k=1}^n v(\xi_k, \eta_k) \Delta y_k$  при  $\Delta_2 \rightarrow 0$ . Тогда, перейдя в

равенстве (6.3) к пределу при  $\Delta \rightarrow 0$ , получим

$$\int_l f(z) dz = \int_l u(x, y) dx - v(x, y) dy + i \int_l v(x, y) dx + u(x, y) dy. \quad (6.4)$$

Итак, существование интеграла (6.2) равносильно существованию криволинейных интегралов

$$\int_l u dx - v dy; \int_l v dx + u dy, \quad (6.5)$$

т. е. вычисление интеграла от функции  $f(z) = u + iv$  сводится к вычислению криволинейных интегралов (6.5) от функций  $u(x, y)$  и  $v(x, y)$  действительных переменных  $x$  и  $y$ .

Пусть гладкая кривая  $l$  задана соотношением  $z = z(t) = x(t) + iy(t)$ ,  $t \in [\alpha, \beta]$ . Тогда по формуле (6.4)

$$\begin{aligned} \int_l f(z) dz &= \int_l u dx - v dy + i \int_l v dx + u dy = \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} [u(x(t), y(t)) x'(t) - v(x(t), y(t)) y'(t)] dt + \\ &+ i \int_{\alpha}^{\beta} [v(x(t), y(t)) x'(t) + u(x(t), y(t)) y'(t)] dt. \end{aligned} \quad (6.6)$$

Перепишем равенство (6.6) в виде

$$\int_{\alpha}^{\beta} ((ux' - vy') + i(vx' + uy')) dt = \int_{\alpha}^{\beta} (u + iv)(x' + iy') dt = \int_{\alpha}^{\beta} f(z) z'(t) dt.$$

Итак,

$$\int_l f(z) dz = \int_{\alpha}^{\beta} f(z(t)) z'(t) dt, \quad (6.7)$$

где  $z = z(t)$  — уравнение гладкой кривой  $l$ ,  $t \in [\alpha, \beta]$ .

**Пример 6.1.** Вычислить интеграл  $I = \int_l |z| dz$ ,

где  $l: \{|z| = \sqrt{2}, \frac{3\pi}{4} \leq \arg z \leq \frac{5\pi}{4}\}$ , (рис. 6.2).

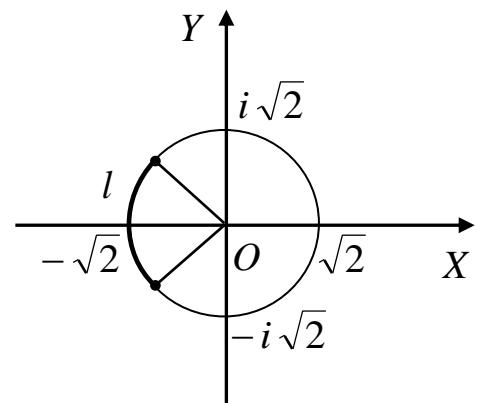


Рис. 6.2

Δ Кривая  $l$  – дуга окружности радиусом  $\sqrt{2}$  с центром в точке  $(0, 0)$ , заключенная между лучами  $\arg z = \frac{3\pi}{4}$  и  $\arg z = \frac{5\pi}{4}$ . Она описывается

параметрическим уравнением  $z = \sqrt{2} e^{it}$ ,  $\frac{3\pi}{4} \leq t \leq \frac{5\pi}{4}$ . По формуле (6.7)

$$I = \int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} i e^{it} dt = 2i \int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} (\cos t + i \sin t) dt = 2i (\sin t - i \cos t) \Big|_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} = -2\sqrt{2} i. \quad \blacktriangle$$

**Пример 6.2.** Вычислить интеграл  $\oint_{\Gamma} (z - a)^m dz$ , где  $\Gamma$  – окружность радиусом  $R$  с центром в точке  $a$ ;  $m$  – произвольное целое число.

Δ Уравнение окружности  $\Gamma$  радиусом  $R$  с центром в точке  $a$ , как известно, описывается соотношением  $z = a + Re^{it}$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$ . Тогда по формуле (6.7)

$$\begin{aligned} \oint_{\Gamma} (z - a)^m dz &= \int_0^{2\pi} (Re^{it})^m R i e^{it} dt = iR^{m+1} \int_0^{2\pi} e^{i(m+1)t} dt = \\ &= \begin{cases} \int_0^{2\pi} dt = 2\pi i, & m = -1; \\ \frac{R^{m+1}}{m+1} e^{i(m+1)t} \Big|_0^{2\pi} = 0, & m \neq -1. \end{cases} \end{aligned}$$

Итак,

$$\oint_{|z-a|=R} (z - a)^m dz = \begin{cases} 2\pi i, & m = -1; \\ 0, & m \neq -1. \end{cases} \quad (6.8)$$

**Пример 6.3.** Вычислить интеграл  $I = \int_l e^{|z|^2} \operatorname{Re} z dz$ , где  $l$  – отрезок, соединяющий точки  $z_1 = 0$  и  $z_2 = 1 + i$  (рис. 6.3).

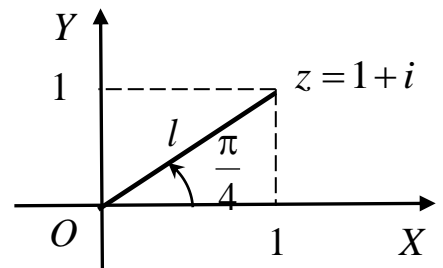


Рис. 6.3

$\Delta$  Параметрические уравнения отрезка  $l$  имеют вид  $x = t, y = t, t \in [0, 1]$ ,

или  $z = x + iy = t(1 + i) \Rightarrow dz = (1 + i) dt$ . Так как

$\operatorname{Re} z = x = t, |z| = \sqrt{x^2 + y^2} = t\sqrt{2}$ , то по формуле (6.7)

$$I = \int_l e^{2t^2} t(1+i) dt = \frac{1+i}{4} \int_0^1 d(e^{2t^2}) = \frac{1+i}{4} e^{2t^2} \Big|_0^1 = \frac{1+i}{4} (e^2 - 1). \blacktriangle$$

Свойства интеграла от ФКП непосредственно вытекают из соответствующих свойств криволинейных интегралов.

1. *Линейность.*

$$\int_l (\alpha f(z) + \beta g(z)) dz = \alpha \int_l f(z) dz + \beta \int_l g(z) dz, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C}.$$

2. При изменении ориентации кривой интеграл от ФКП меняет знак на противоположный:

$$\int_{l^+} f(z) dz = - \int_{l^-} f(z) dz.$$

3. *Оценка модуля интеграла.* Пусть функция  $f(z)$  непрерывна в точках кривой  $l$ . Тогда

$$\left| \int_l f(z) dz \right| \leq M \cdot L, \quad (6.9)$$

где  $M = \max_{z \in l} |f(z)|$ , а  $L$  — длина дуги  $l$ .

$\Delta$  Из определения интегральной суммы (6.1) получаем

$$\left| \sum_{k=1}^n f(\zeta_k) \Delta z_k \right| \leq \sum_{k=1}^n |f(\zeta_k)| \cdot |\Delta z_k| = \sum_{k=1}^n |f(\zeta_k)| |l_k|,$$

где  $|l_k|$  — длина части  $l_k$  с начальной точкой  $z_{k-1}$  и конечной  $z_k$ . Перейдя в этом неравенстве к пределу при  $\Delta \rightarrow 0$ , будем иметь

$$\left| \int_l f(z) dz \right| \leq \int_l |f(z)| dz. \quad (6.10)$$

Отсюда при  $M = \max_{z \in l} |f(z)|$  и получаем неравенство (6.9).

Одним из важнейших результатов ТФКП является интегральная теорема Коши.

$$\oint_{\Gamma} f(z) dz = 0. \quad (6.11)$$

Δ Пусть  $D \subset G$  – область, ограниченная контуром  $\Gamma$ . Согласно равенству (6.4)

$$\oint_{\Gamma} f(z) dz = \oint_{\Gamma} u dx - v dy + i \oint_{\Gamma} v dx + u dy.$$

Применив здесь к криволинейным интегралам формулу Грина

$$\oint_{\Gamma} P dx + Q dy = \iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy,$$

с учетом условий Коши – Римана, получим

$$\oint_{\Gamma} f(z) dz = \iint_D \left( -\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx dy + i \iint_D \left( \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx dy = 0. \quad \blacktriangle$$

В виде следствия сформулируем **интегральную теорему Коши для многосвязных областей.**

**Следствие.** Пусть функция  $f(z)$  аналитична в многосвязной области  $D$  и на ее границе, состоящей из внешнего контура  $\Gamma$  и внутренних контуров  $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ . Тогда

$$\oint_{\Gamma} f(z) dz = \sum_{k=1}^n \oint_{\gamma_k} f(z) dz. \quad (6.12)$$

Δ Заметим, что условие аналитичности на границе  $\Gamma$  будет выполнено, если замкнутая область  $D$  принадлежит другой области  $G \supset D$ , в которой  $f(z)$  является аналитической функцией.

Для доказательства ограничимся случаем  $n = 2$ . Рассмотрим область  $D$  с внешним контуром  $\Gamma$  и внутренними контурами  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  (рис. 6.4). Проведем два разреза  $AB$  и  $CE$ . К границе области  $D$  добавятся отрезки  $AB, BA, CE$  и  $EC$ . Область  $D$  тем самым превратится в односвязную. По теореме Коши (6.1)

$$\oint_{\Gamma} + \oint_{\gamma_1^-} + \int_{\gamma_2^-} + \int_{AB} + \int_{BA} + \int_{CE} + \int_{EC} = 0, \quad (6.13)$$

где  $\gamma_k^-$ ,  $k = 1, 2$ , – контур, имеющий ориентацию, противоположную ориентации контура  $\gamma_k$ , т. е. контур  $\gamma_k^-$  ориентирован по часовой стрелке. Так как

$$\int_{AB} = - \int_{BA} ; \int_{CE} = - \int_{EC} ; \oint_{\gamma_k^-} = - \oint_{\gamma_k} ,$$

то отсюда и из равенства (6.13) получаем формулу (6.12). ▲

**Пример 6.4.** Вычислить  $I = \oint_{|z-1|=2} \cos^3 z dz$ .

Δ Функция  $f(z) = \cos^3 z$  аналитическая во всей плоскости  $C$ , в том числе и в круге  $|z-1| \leq 2$ . По интегральной теореме Коши интеграл  $I = 0$ . ▲

Пусть  $f(z) = u + iv$  – аналитическая в области  $D$  функция. Так как для криволинейных интегралов (6.5) в силу соотношений Коши – Римана выполнены условия независимости криволинейных интегралов от пути интегрирования, то они не зависят от пути интегрирования. Отсюда следует, что интеграл  $\int_l f(z) dz$  не зависит от кривой  $l$ , расположенной в области  $D$  и соединяющей точки  $z_0$  и  $z$ , а зависит от этих начальной и конечной точек пути интегрирования. В этом случае интеграл принято обозначать

$$F(z) = \int_{z_0}^z f(s) ds \quad (6.14)$$

и называть *определенным интегралом с переменным верхним пределом интегрирования*. Справедлива теорема Мореры.

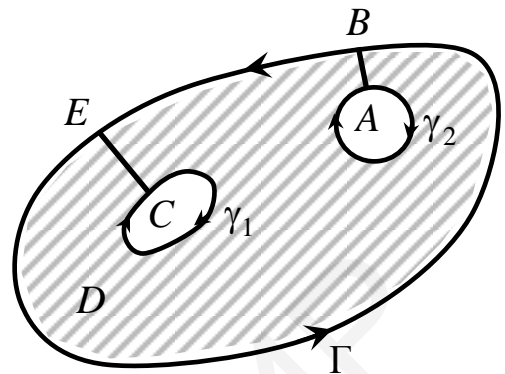


Рис. 6.4



**Теорема 6.2 (Мореры).** Пусть функция  $f(z)$  непрерывна в области  $D$  и интеграл  $\int_l f(z) dz$  не зависит от пути интегрирования  $l \in D$ , соединяющего данную начальную и конечную точку из  $D$ . Тогда функция (6.14) аналитична в  $D$ , причем  $F'(z) = f(z)$ .

**Следствие.** Пусть  $f(z)$  непрерывна в области  $D$  и интеграл от этой функции по любой замкнутой кривой, лежащей в  $D$ , равен нулю. Тогда функция  $F(z) = \int_{z_0}^z f(s) ds$  аналитична в  $D$  и  $F'(z) = f(z)$ .

Функция  $F(z)$  называется первообразной для  $f(z)$  в области  $D$ , если  $F'(z) = f(z)$ . Если  $F(z)$  – первообразная для  $f(z)$  в  $D$ , то и  $F(z) + C$ , где  $C$  – постоянная, в общем случае комплексная, тоже первообразная для  $f(z)$ . Любые две первообразные  $F(z)$  и  $\Phi(z)$  для функции  $f(z)$  отличаются на постоянную.

Если  $F(z)$  – первообразная для  $f(z)$  в  $D$ , то совокупность всех первообразных этой функции определяется выражением  $F(z) + C$ . Это множество называется *неопределенным интегралом* от  $f(z)$  и обозначается  $\int f(z) dz$ .

Таким образом,

$$\int f(z) dz = F(z) + C. \quad (6.15)$$

Методы вычисления неопределенных интегралов от аналитических функций те же, что и в действительном анализе. Так, например, справедливы формулы

$$\int e^z dz = e^z + C; \quad \int z^n dz = \frac{z^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \neq -1;$$

$$\int \frac{dz}{z} = \text{Ln } z + C; \quad \int \cos z dz = \sin z + C, \dots, \text{ и т. д.}$$

Пусть  $F(z)$  – первообразная для функции  $f(z)$  в односвязной области  $D$ . Тогда, в силу теоремы 6.2 Мореры, интеграл  $\int_{z_0}^z f(s) ds$  – тоже первообразная для  $f(z)$ . По формуле (6.15)

$$\int_{z_0}^z f(s) ds = F(z) + C. \quad (6.16)$$

При  $z = z_0$  из формулы (6.16) имеем

$$F(z_0) + C = 0 \Rightarrow C = -F(z_0).$$

Отсюда и из (6.16) имеем *формулу Ньютона – Лейбница*:

$$\int_{z_0}^z f(s) ds = F(z) - F(z_0). \quad (6.17)$$

**Пример 6.5.** Вычислить интеграл  $I = \int_l (\sin z + z^5) dz$ , где  $l$  – ломаная, соединяющая точки  $z_0 = 0$ ,  $z_1 = 1$ ,  $z_2 = 2i$ .

Δ Так как  $\sin z + z^5$  – аналитическая функция на всей комплексной плоскости  $C$ , то интеграл  $I$  зависит только от начальной точки  $z_0 = 0$  и конечной точки  $z_2 = 2i$ , т. е.

$$\begin{aligned} \int_l (\sin z + z^5) dz &= \int_0^{2i} (\sin z + z^5) dz = \left( -\cos z + \frac{z^6}{6} \right) \Big|_0^{2i} = \\ &= -\cos 2i + \frac{(2i)^6}{6} + \cos 0 = -\operatorname{ch} 2 - \frac{29}{3}. \quad \blacktriangle \end{aligned}$$

**Пример 6.6.** Доказать равенство

$$\int_{-\infty+ib}^{+\infty+ib} e^{-z^2} dz = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx, \quad (6.18)$$

где интеграл в левой части вычисляется вдоль бесконечной прямой  $L: y = b$  (рис. 6.5).

$\Delta$  Рассмотрим интеграл  $I = \oint_{ABCD} e^{-z} dz$  по замкнутому контуру (см. рис. 6.5). Так как подынтегральная функция аналитична внутри контура  $ABCD$ , то по теореме Коши  $I = 0$ , т. е.

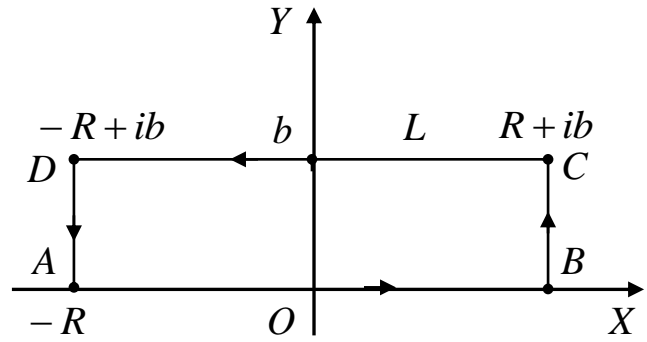


Рис. 6.5

$$\oint_{ABCD} e^{-z^2} dz = \int_{-R}^R e^{-x^2} dx + \int_R^{R+ib} e^{-z^2} dz + \int_{R+ib}^{-R+ib} e^{-z^2} dz + \int_{-R+ib}^{-R} e^{-z^2} dz = 0$$

(на оси  $X$  комплексная переменная  $z = x$ ). Покажем, что интеграл  $\int_R^{R+ib} e^{-z^2} dz \rightarrow 0$  при  $R \rightarrow +\infty$ . Действительно, на отрезке  $BC$  имеем  $x = R$ ,  $y = t$ ,  $t \in [0, b]$ , т. е.

$$z = R + it, \quad \int_R^{R+ib} e^{-z^2} dz = i \int_0^b e^{-(R+it)^2} dt = i e^{-R^2} \int_0^b e^{t^2 - 2Rti} dt.$$

Так как интеграл  $\int_0^b e^{t^2 - 2Rti} dt = \int_0^b e^{t^2} (\cos 2Rt - i \sin 2Rt) dt$  есть конечное

число, то

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} i e^{-R^2} \cdot \int_0^b e^{t^2 - 2Rti} dt = 0.$$

Аналогично показывается, что

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{DA} e^{-z^2} dz = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R+ib}^{-R} e^{-z^2} dz = 0.$$

В таком случае при  $R \rightarrow +\infty$  получаем

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \left( \int_{-R}^R e^{-x^2} dx + \int_{R+ib}^{-R+ib} e^{-z^2} dz \right) = 0 \Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx + \int_{+\infty+ib}^{-\infty+ib} e^{-z^2} dz = 0,$$

откуда и следует равенство (6.18).  $\blacktriangle$

Также важным результатом в ТФКП является **интегральная формула Коши**, связывающая значение аналитической функции  $f(z)$  в любой точке  $z$  замкнутой области  $D$  со значениями этой функции в граничных точках области  $D$ . Справедлива следующая теорема.

**Теорема 6.3.** Пусть  $f(z)$  – аналитическая функция в ориентированной области  $D$  с границей  $\Gamma$ . Тогда для любой внутренней точки  $z \in D$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{f(s)}{s-z} ds. \quad (6.19)$$

Формула (6.19) называется *интегральной формулой Коши для односвязной области*.

$\Delta$  Пусть  $z$  – внутренняя точка области  $D$ . Функция  $f(s) = \frac{f(s)}{s-z}$  аналитична в замкнутой области  $D$ , кроме точки  $s = z$ . Так как  $z$  – внутренняя точка  $D$ , то можно взять  $\rho > 0$ , такое, что круг  $|s-z| \leq \rho$  и его граница  $\gamma$  будут принадлежать области  $D$  (рис. 6.6). По теореме Коши для многосвязной области

$$\begin{aligned} \oint_{\Gamma} \frac{f(s)}{s-z} ds &= \oint_{\gamma} \frac{f(s)}{s-z} ds = \oint_{\gamma} \frac{f(s) - f(z) + f(z)}{s-z} ds = \\ &= \oint_{\gamma} \frac{f(s) - f(z)}{s-z} ds + f(z) \oint_{\gamma} \frac{ds}{s-z}. \end{aligned} \quad (6.20)$$

Согласно формуле (6.8) второй интеграл в правой части равенства (6.21) равен  $2\pi i$ . Оценим первый интеграл  $\oint_{\gamma} \frac{f(s) - f(z)}{s-z} ds$  по модулю. Так

как  $f(z)$  – непрерывная функция, то для любого  $\varepsilon > 0$  можно указать  $\delta > 0$ , такое, что  $|f(s) - f(z)| < \varepsilon$ , если только  $\rho = |s-z| < \delta$ .

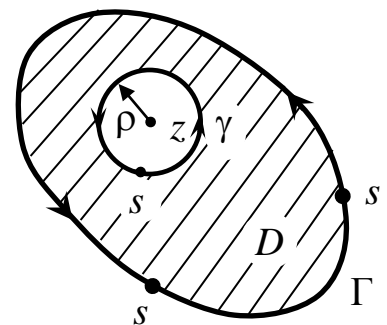


Рис. 6.6

Тогда при  $\rho < \delta$  с учетом оценки (6.9) получаем

$$\left| \int_{\gamma} \frac{f(s) - f(z)}{s - z} ds \right| \leq \int_{\gamma} \frac{|f(s) - f(z)|}{|s - z|} ds < \frac{\varepsilon}{\rho} 2\pi\rho = 2\pi\varepsilon.$$

Так как  $\varepsilon$  – произвольно, то первый интеграл справа в (6.20) равен нулю.

Тем самым равенство (6.20) приобретает вид

$$\oint_{\Gamma} \frac{f(s)}{s - z} ds = 2\pi i f(z),$$

равносильный формуле (6.19). ▲

Положим в формуле (6.19)  $z = a$ ,  $s = z$ , и перепишем ее в виде

$$\oint_{\Gamma} \frac{f(z)}{z - a} dz = 2\pi i f(a). \quad (6.21)$$

Из теоремы (6.3) и интегральной теоремы Коши для многосвязной области следует следующая теорема.

**Теорема 6.4.** Пусть  $f(z)$  – аналитическая функция в многосвязной области  $D$  с внешним контуром  $\Gamma$  и внутренними непересекающимися между собой контурами  $\gamma_k$ ,  $k = \overline{1, n}$ . Тогда для любой внутренней точки  $z \in D$  справедлива **интегральная формула Коши для многосвязной области:**

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{f(s)}{s - z} ds - \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=1}^n \oint_{\gamma_k} \frac{f(s)}{s - z} ds. \quad (6.22)$$

Получим теперь интегральную формулу Коши для высших производных аналитической функции.

Пусть  $D$  – односвязная область с границей  $\Gamma$  и  $z$  – внутренняя точка  $D$ . Возьмем  $\Delta z$  таким, чтобы точка  $z + \Delta z$  оставалась в области  $D$ . Если  $f(z)$  – аналитическая в  $D$  функция, то по формуле (6.19)

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{f(s) ds}{s - z}; \quad f(z + \Delta z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{f(s) ds}{s - (z + \Delta z)}.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} &= \frac{1}{\Delta z} \cdot \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} f(s) \left( \frac{1}{s - z - \Delta z} - \frac{1}{s + z} \right) ds = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{f(s) ds}{(s - z)(s - z - \Delta z)}. \end{aligned} \quad (6.23)$$

Покажем, что

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \oint_{\Gamma} \frac{f(s) ds}{(s - z)(s - z - \Delta z)} = \oint_{\Gamma} \frac{f(s) ds}{(s - z)^2}. \quad (6.24)$$

Для этого рассмотрим разность

$$\oint_{\Gamma} \frac{f(s) ds}{(s - z)(s - z - \Delta z)} - \oint_{\Gamma} \frac{f(s) ds}{(s - z)^2} = \Delta z \oint_{\Gamma} \frac{f(s) ds}{(s - z)^2 (s - z - \Delta z)}. \quad (6.25)$$

Пусть  $M = \max_{s \in \Gamma} |f(s)|$ , а  $\delta = \min_{s \in \Gamma} |z - s|$ . Если  $L$  — длина контура  $\Gamma$ , то

при  $|\Delta z| < \delta$  согласно формуле (6.9) оценки модуля интеграла

$$\oint_{\Gamma} \left| \frac{f(s) ds}{(s - z)^2 (s - z - \Delta z)} \right| \leq \frac{ML}{\delta^2 (\delta - |\Delta z|)}.$$

Отсюда следует, что правая часть равенства (6.25) стремится к нулю при  $\Delta z \rightarrow 0$ . Следовательно, равенство (6.24) имеет место. С учетом этого из (6.23) получаем

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{f(s)}{(s - z)^2} ds. \quad (6.26)$$

Равенство (6.26) и есть *формула Коши для производной  $f'(z)$  аналитической функции  $f(z)$* .

Повторяя предыдущие рассуждения и, исходя из формулы (6.26), получаем

$$f''(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f'(z + \Delta z) - f'(z)}{\Delta z} = \frac{2 \cdot 1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{f(s) ds}{(s - z)^3}.$$

Это процесс дифференцирования можно повторять неограниченное число раз (в силу бесконечной дифференцируемости аналитической функции). В результате получим *интегральную формулу для  $n$ -й производной аналитической функции  $f(z)$* :

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{f(s) ds}{(s-z)^{n+1}}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (6.27)$$

где  $f^{(0)}(z) = f(z)$ .

Положив в формуле (6.27)  $s = z$ ,  $z = a$ , получим

$$\oint_{\Gamma} \frac{f(z) dz}{(z-a)^{n+1}} = \frac{2\pi i}{n!} f^{(n)}(a). \quad (6.28)$$

**Пример 6.9.** Вычислить интеграл  $I = \oint_{|z-i|=1} \frac{\sin z dz}{(z-i)^3}$ .

Δ Так как точка  $z = i$  лежит внутри окружности  $|z-i|=1$ , то согласно формуле Коши (6.28) при  $n = 2$  получаем

$$I = \oint_{|z-i|=1} \frac{\sin z dz}{(z-i)^{2+1}} = \frac{2\pi i}{2!} (\sin z)'' \Big|_{z=i} = -\pi i \sin i = \pi \operatorname{sh} 1. \quad \blacktriangle$$

### Задачи и упражнения

1. Вычислить интеграл  $\int_{\Gamma} (1+i-2\bar{z}) dz$  по ломаной  $\Gamma: z_1 z_2 z_3$ , где  $z_1 = 0$ ,  $z_2 = 1+i$ ,  $z_3 = 1$ .

Ответ:  $-2$ .

2. Вычислить интеграл  $\int_{\Gamma} (z^2 + z\bar{z}) dz$ , где  $\Gamma$  – дуга окружности  $|z|=1$  ( $0 \leq \arg z \leq \pi$ ).

Ответ:  $-\frac{8}{3}$ .

3. Вычислить  $\int_{1-i}^{2+i} (3z^2 + 2z) dz$ .

Ответ:  $7 + 19i$ .

4. Вычислить  $\int_1^i \frac{\ln^3 z}{z} dz$ .

Ответ:  $\frac{\pi^4}{64}$ .

5. Вычислить интегралы:

а)  $\int_{1+i}^{2i} (z^3 - z) e^{\frac{z^2}{2}} dz$ ; б)  $\int_1^i z \sin z dz$ ; в)  $\int_0^{1+i} \sin z \cos z dz$ ; г)  $\int_1^i \frac{1 + \operatorname{tg} z}{\cos^2 z} dz$

по прямой, соединяющей точки  $z_1 = 1$ ,  $z_2 = i$ .

Ответ: а)  $-7e^{-2} + (3 - 2i)e^i$ ; б)  $\cos 1 - \sin 1 - ie^{-1}$ ; в)  $\frac{1}{4}(1 - \cos(2 + 2i))$ ;

г)  $-\left(\operatorname{tg} 1 + \frac{1}{2}\operatorname{tg}^2 1 + \frac{1}{2}\operatorname{th}^2 1\right) + i \operatorname{th} 1$ .

6. С помощью интегральной формулы Коши вычислить интегралы:

а)  $\oint_{|z|=2} \frac{\sin iz dz}{z^2 - 4z + 3}$ ; б)  $\oint_{|z|=4} \frac{dz}{(z^2 + 9)(z + 9)}$ ; в)  $\oint_{|z|=2} \frac{\operatorname{ch} z dz}{(z + 1)^3(z - 1)}$ ;

г)  $\oint_{|z-2|=3} \frac{\operatorname{ch} e^{i\pi z}}{z^3 - 4z^2} dz$ .

Ответ: а)  $\pi \operatorname{sh} 1$ ; б)  $-\frac{\pi i}{45}$ ; в)  $-\frac{\pi i}{2e}$ ; г)  $-\frac{\pi^2}{2} \operatorname{sh} 1$ .



## Лекция 7

### РЯДЫ В КОМПЛЕКСНОЙ ОБЛАСТИ

**Функциональные ряды (ФР). Равномерная сходимость ФР. Теорема Вейерштрасса. Свойства равномерно сходящихся ФР. Степенные ряды в комплексной области. Радиус и круг сходимости степенного ряда. Ряды Тейлора. Основные тейлоровские разложения. Неравенство Коши. Теорема Лиувилля. Основная теорема алгебры. Ряды Лорана.**

#### Задачи и упражнения

Функциональным рядом в комплексной области называется ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z) = f_1(z) + f_2(z) + \dots + f_n(z) + \dots, \quad (7.1)$$

где  $f_n(z)$  – ФКП, определенные на некотором множестве  $G$ .

Пусть  $S_n(z) = f_1(z) + f_2(z) + \dots + f_n(z)$  –  $n$ -я частичная сумма ряда (7.1).

Этот ряд называется сходящимся к сумме  $f(z)$ , если

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(z) = f(z),$$

т. е. если для любого  $\varepsilon > 0$  можно указать такой номер  $N = N(\varepsilon, z)$ , что при всех  $n \geq N$

$$|S_n(z) - f(z)| < \varepsilon. \quad (7.2)$$

Множество  $D \subset G$  точек  $z$ , в которых ряд (7.1) сходится, называется *областью сходимости* этого ряда.

Если ряд (7.1) сходится к сумме  $f(z)$ , то будем писать

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(z) = f_1(z) + \dots + f_n(z) + f_{n+1}(z) + \dots = S_n(z) + r_n(z),$$

где выражение

$$r_n(z) = f_{n+1}(z) + f_{n+2}(z) + \dots = f(z) - S_n(z) \quad (7.3)$$

называется *остатком ряда*. Из равенства (7.3) следует, что ряд (7.1) сходится в точке  $z$  тогда и только тогда, когда  $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n(z) = 0$ .

Ряд (7.1) называется *равномерно сходящимся* в области  $D$  к сумме  $f(z)$ , если для любого  $\varepsilon > 0$  можно указать такой номер  $N = N(\varepsilon)$ , зависящий только от  $\varepsilon > 0$ , что при всех  $n \geq N$

$$|f(z) - S_n(z)| = |r_n(z)| < \varepsilon, \forall z \in D. \quad (7.4)$$

Справедлива теорема Вейерштрасса.

**Теорема 7.1 (Вейерштрасса).** Если члены ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$  удовлетворяют неравенствам  $|f_n(z)| \leq a_n, \forall z \in D, n = 1, 2, \dots$ , где  $a_n \geq 0$ , а ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  сходится, то ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$  сходится равномерно в  $D$ .

Доказательство этой теоремы дословно повторяет доказательство аналогичного признака равномерной сходимости Вейерштрасса для действительных функциональных рядов.

Комплексные равномерно сходящиеся ряды обладают следующими свойствами.

1. Если члены ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$  являются аналитическими функциями в  $D$  и этот ряд сходится к  $f(z)$  в  $D$  равномерно, то ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$  можно почленно интегрировать вдоль любой кривой  $l$ , расположенной в  $D$ , причем

$$\int_l f(z) dz = \int_l \left( \sum_{n=1}^{\infty} f_n(z) \right) dz = \sum_{n=1}^{\infty} \int_l f_n(z) dz.$$

2. Пусть ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$  аналитических функций сходится в каждой точке области  $D$ , а ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} f'_n(z)$  сходится в  $D$  равномерно. Тогда ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$

можно почленно дифференцировать в  $D$ , причем

$$f'(z) = \left( \sum_{n=1}^{\infty} f_n(z) \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(z),$$

где  $f(z)$  – сумма ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ .

3. Пусть члены ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$  являются в области  $D$  аналитическими функциями, и этот ряд сходится равномерно в  $D$  к своей сумме  $f(z)$ . Тогда  $f(z)$  – аналитическая в  $D$  функция.

Доказательства свойств 1 и 2 аналогичны доказательствам теорем о почленном интегрировании и дифференцировании равномерно сходящихся действительных рядов. Докажем свойство 3.

Δ Функция  $f(z)$  как сумма равномерно сходящегося ряда непрерывных функций  $f_n(z)$  непрерывна в  $D$ . В силу свойства 1 для любой замкнутой

кривой  $\Gamma \subset D$  верно равенство  $\int_{\Gamma} f(z) dz = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\Gamma} f_n(z) dz$ . В силу аналитичности

$f_n(z)$  по интегральной теореме Коши имеем  $\int_{\Gamma} f_n(z) dz = 0$ . Откуда получаем

$\int_{\Gamma} f(z) dz = 0$ . Тогда по теореме Мореры функция  $f(z)$  аналитична в  $D$ . ▲

Для определения области сходимости комплексных функциональных рядов можно пользоваться признаками Коши или Даламбера. Именно: если существует

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|f_n(z)|} = L(z) \tag{7.5}$$

или

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{f_{n+1}(z)}{f_n(z)} \right| = L(z), \tag{7.6}$$

то ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$  сходится абсолютно при  $L(z) < 1$  и расходится при  $L(z) > 1$ .

**Пример 7.1.** Найдите область сходимости ряда:

$$\text{а) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1-i)^n z^n}; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n 2^{-n}}{(z-2-i)^n}.$$

$\Delta$  а) Так как  $f_n(z) = \frac{1}{(1-i)^n z^n}$ , то по формуле (7.5)

$$L(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{|1-i|^n \cdot |z|^n}} = \frac{1}{|1-i| \cdot |z|} = \frac{1}{\sqrt{2}|z|}.$$

Отсюда ряд в области  $D$ , задаваемой неравенством  $\frac{1}{\sqrt{2}|z|} < 1 \Leftrightarrow |z| > \frac{1}{\sqrt{2}}$ ,

т. е. во внешности круга  $|z| \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$ .

б) По формуле (7.6)

$$L(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(n+1) 2^{-n-1} (z-2-i)^n}{(z-2-i)^{n+1} n 2^{-n}} \right| = \frac{1}{2|z-(2+i)|} < 1 \Leftrightarrow |z-(2+i)| > \frac{1}{2}.$$

Итак, данный ряд сходится во внешности круга с центром в точке  $z_0 = 2+i$  и радиусом  $\frac{1}{2}$ .  $\blacktriangle$

Ряд вида

$$\sum c_n (z-a)^n = c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \dots + c_n(z-a)^n + \dots, \quad (7.7)$$

где  $c_n = a_n + ib_n$ ;  $a_n, b_n \in \mathbf{R}$ ;  $a = x_0 + iy_0$ ,  $z = x + iy$ , называется *комплексным степенным рядом*. При  $a = 0$  он принимает вид

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \dots + c_n z^n + \dots.$$

Пусть ряд (7.7) сходится в точке  $z_0$ . По теореме Абеля он сходится в круге  $|z-a| < |z_0-a|$ , т. е. для каждого степенного существует так называемый *круг сходимости ряда* с центром в точке  $z = a$  и радиусом  $R \geq 0$ . Число  $R$  называется *радиусом сходимости* степенного ряда, если этот ряд сходится при

$|z - a| < R$  и расходится при  $|z - a| > R$ . Если  $R = 0$ , то степенной ряд сходится в единственной точке  $z = a$ .

В соответствии с признаком Даламбера или Коши радиус сходимости степенного ряда (7.7) вычисляется по формуле

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right| \quad (7.8)$$

или

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{c_n}}, \quad (7.9)$$

если эти пределы существуют.

Так же как и в действительном анализе, доказывается следующая теорема.

**Теорема 7.2.** Пусть  $R > 0$  – радиус сходимости степенного ряда (7.7). Тогда этот ряд можно почленно дифференцировать в круге  $|z - a| < R$  любое число раз. Получаемые при этом дифференцировании степенные ряды имеют тот же радиус сходимости, что и исходный ряд. Кроме того, степенной ряд можно почленно интегрировать вдоль любой гладкой кривой, расположенной в круге  $|z - a| < R$ .

Почленное дифференцирование и интегрирование комплексных степенных рядов позволяет иногда найти их сумму.

Имеем  $c_n = n$ . По формуле (7.8)  $R = 1$ , т. е. ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} n z^n$  сходится в круге  $|z| < 1$  к своей сумме  $S(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n z^n = z \cdot \sum_{n=1}^{\infty} n z^{n-1}$ . Отсюда  $\frac{S(z)}{z} = \sum_{n=1}^{\infty} n z^{n-1}$  при

$z \neq 0$ . Интегрируя это равенство почленно, имеем

$$\int_0^z \frac{S(t)}{t} dt = \int_0^z \left( \sum_{n=1}^{\infty} n t^{n-1} \right) dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^z n t^{n-1} dt = \sum_{n=1}^{\infty} z^n = \frac{z}{1-z}.$$

(Здесь использовалась формула суммы бесконечно убывающей геометрической

прогрессии  $\sum_{n=1}^{\infty} q^n = \frac{q}{1-q}, |q| < 1$ ).

Отсюда дифференцированием находим

$$\frac{S(z)}{z} = \frac{1}{(1-z)^2} \Rightarrow S(z) = \frac{z}{(1-z)^2}. \blacktriangle$$

Аналитическую функцию в каждой внутренней точке области аналитичности можно разложить в степенной ряд, аналогичный ряду Тейлора для функций действительной переменной.

**Теорема 7.3.** Пусть функция  $f(z)$  аналитична в замкнутой односвязной области с границей  $\Gamma$  и  $a$  – внутренняя точка области. Тогда справедливо разложение

$$f(z) = f(a) + f'(a)(z-a) + \frac{f''(a)}{2!}(z-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n + \dots, \quad (7.10)$$

причем ряд (7.10) сходится в круге  $|z-a| < \delta$ , где  $\delta$  – расстояние от точки  $a$  до контура  $\Gamma$  (рис. 7.1).

$\Delta$  Пусть  $\gamma$  – окружность с центром в точке  $a$  радиусом  $\rho < \delta$ . Согласно интегральной формуле Коши (6.19)

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \cdot \oint_{\gamma} \frac{f(s)}{s-z} ds \quad (7.11)$$

для любой точки  $z$  внутри окружности  $\gamma$ . Так как  $s$  принадлежит

окружности  $\gamma$ , то  $|s-a| = \rho$ . Отсюда при  $|z-a| < \rho = |s-a|$  имеем  $\left| \frac{z-a}{s-a} \right| < 1$ .

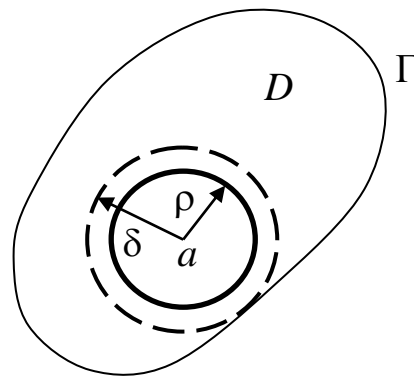


Рис. 7.1

Тогда

$$\begin{aligned} \frac{1}{s-z} &= \frac{1}{(s-a)-(z-a)} = \frac{1}{(s-a)\left(1-\frac{z-a}{s-a}\right)} = \frac{1}{s-a} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-a}{s-a}\right)^n = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-a)^n}{(s-a)^{n+1}}. \end{aligned} \quad (7.12)$$

(Здесь использована формула суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии, у которой  $|q| = \left|\frac{z-a}{s-a}\right| < 1$ ).

Согласно теореме Вейерштрасса ряд (7.12) сходится равномерно. Подставив выражение (7.12) для  $\frac{1}{s-z}$  в формулу (7.11) и проинтегрировав почленно по контуру  $\gamma$ , будем иметь

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \cdot \oint_{\gamma} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-a)^n f(s)}{(s-a)^{n+1}} ds = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{1}{2\pi i} \cdot \oint_{\gamma} \frac{f(s) ds}{(s-a)^{n+1}} \right) (z-a)^n = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left( \frac{n!}{2\pi i} \cdot \oint_{\gamma} \frac{f(s) ds}{(s-a)^{n+1}} \right) (z-a)^n. \end{aligned}$$

Отсюда с учетом формул (6.27) получаем

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (z-a)^n,$$

что совпадает с равенством (7.10).

Ряд (7.10) называется *рядом Тейлора функции  $f(z)$  в окрестности точки  $z = a$* . При  $a = 0$  он превращается в *ряд Маклорена*:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n. \quad (7.13)$$

Итак, всякая функция  $f(z)$ , аналитическая в круге  $|z - a| < \delta$ , разлагается в сходящийся в этом круге степенной ряд

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - a)^n, \quad (7.14)$$

коэффициенты которого находятся по формулам

$$c_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(a) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(s) ds}{(s - a)^{n+1}}. \quad (7.15)$$

Здесь  $\gamma$  – окружность  $|z - a| = \rho < \delta$ ;  $\delta$  – расстояние от точки  $z = a$  до границы области  $D$  или до ближайшей особой точки функции  $f(z)$  в области  $D$ .

*Разложим в ряд Тейлора по степеням  $z$  основные элементарные ФКП.*

1.  $f(z) = e^z$ . Так как  $f^{(n)}(z) = e^z$ ,  $\forall n \in \mathbf{N}$ , то  $f^{(n)}(0) = 1$ . По формуле (7.13)

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \dots + \frac{z^n}{n!} + \dots, \quad |z| < +\infty. \quad (7.16)$$

2.  $f(z) = \sin z$ . Для этой функции  $f^{(n)}(z) = \sin\left(z + \frac{\pi n}{2}\right)$  и, значит,

$$f^{(n)}(0) = \sin \frac{\pi n}{2} = \begin{cases} 0, & n = 2k; \\ (-1)^k, & n = 2k + 1; \end{cases} \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Следовательно, по формуле (7.13)

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots + (-1)^k \cdot \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} + \dots, \quad |z| < +\infty. \quad (7.17)$$

3.  $f(z) = \cos z$ . Для этой функции

$$f^{(n)}(z) = \cos\left(z + \frac{\pi n}{2}\right), \quad f^{(n)}(0) = \cos \frac{\pi n}{2}.$$



Тогда

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \dots + (-1)^k \cdot \frac{z^{2k}}{(2k)!} + \dots, \quad |z| < +\infty. \quad (7.18)$$

4. Аналогично для функций  $\operatorname{sh} z$  и  $\operatorname{ch} z$  получаем

$$\operatorname{sh} z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}; \quad \operatorname{ch} z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}, \quad |z| < +\infty. \quad (7.19)$$

5. Для  $f(z) = \ln(1+z)$  имеем

$$\ln(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{z^n}{n} + \dots, \quad |z| < 1. \quad (7.20)$$

6. Как и в действительном анализе для главной ветви функции  $f(z) = (1+z)^\alpha$  получаем разложение

$$\begin{aligned} (1+z)^\alpha &= \\ &= 1 + \alpha z + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} z^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-n+1)}{n!} z^n + \dots, \end{aligned} \quad (7.21)$$

справедливое в круге  $|z| < 1$ .

В частности,

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + z^3 + \dots + z^n + \dots, \quad |z| < 1; \quad (7.22)$$

$$\frac{1}{1+z} = 1 - z + z^2 - z^3 + \dots + (-1)^n \cdot z^n + \dots, \quad |z| < 1. \quad (7.23)$$

Далее

$$7. \operatorname{tg} z = z + \frac{2}{3!} z^3 + \frac{16}{5!} z^5 + \dots \quad (7.24)$$

Ближайшей особой точкой к точке  $z = 0$  является точка  $z^0 = \frac{\pi}{2}$ . Поэтому

радиус сходимости ряда (7.24)  $R = \frac{\pi}{2}$ .

$$8. \operatorname{arctg} z = z - \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} - \dots + (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{2n+1} + \dots, \quad |z| < 1. \quad (7.25)$$

$$9. \arcsin z = z + \frac{2!}{2^2 \cdot (1!)^2} \cdot \frac{z^3}{3} + \dots + \frac{(2n)!}{2^{2n} (n!)^2} \cdot \frac{z^{2n+1}}{2n+1} + \dots, \quad |z| < 1. \quad (7.26)$$

Ряды (7.16)–(7.26) называются *основными тейлоровскими разложениями*.

С их помощью можно получить разложения в ряд многих других аналитических функций.

Приведем неравенство Коши, дающее оценку коэффициентов  $c_n$  разложения аналитической функции в ряд Тейлора.

**Теорема 7.4.** Пусть функция  $f(z)$  аналитична в круге  $|z| < R$ , а  $M_R$  – максимальное значение  $|f(z)|$  на окружности  $|z| = R$ . Если  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$  – ряд Тейлора функции  $f(z)$ , то имеет место неравенство Коши:

$$|c_n| \leq \frac{M_R}{R^n}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (7.27)$$

Δ Пусть  $\Gamma$  – окружность  $|z| = R$ . Оценивая интеграл (7.15) по модулю, получаем

$$|c_n| = \left| \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{f(s) ds}{s^{n+1}} \right| \leq \frac{1}{2\pi} \oint_{\Gamma} \left| \frac{f(s)}{s^{n+1}} \right| ds \leq \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{M_R}{R^{n+1}} \cdot 2\pi R = \frac{M_R}{R^n}.$$

На вопрос, как ведет себя ограниченная на всей комплексной плоскости аналитическая функция, отвечает следующая теорема Лиувилля.

**Теорема 7.5 (Лиувилля).** Пусть  $f(z)$  – аналитическая функция, ограниченная на всей комплексной плоскости. Тогда  $f(z)$  – постоянная функция.

Δ Так как  $f(z)$  аналитична при любом  $z$ , то ряд Тейлора ее

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$$

сходится к  $f(z)$  при всех  $z$ . Если при этом  $|f(z)| < M$ , то согласно

неравенству Коши (7.27)  $|c_n| < \frac{M}{R^n}$  для всех  $n$  и  $R > 0$ .

Отсюда при  $R \rightarrow \infty$  получим  $c_n = 0, n = 1, 2, \dots$ . Тогда из ряда Тейлора получаем  $f(z) = c_0 = \text{const}$ . ▲

**Следствие (основная теорема алгебры).** *Всякий многочлен  $P_n(z) = c_0 z^n + c_1 z^{n-1} + \dots + c_{n-1} z + c_n, c_0 \neq 0, n \geq 1$  имеет по крайней мере один корень.*

Δ Предположим, что многочлен  $P_n(z)$  не имеет корней. Тогда функция  $\frac{1}{P_n(z)}$  ограничена на всей плоскости как аналитическая и стремящаяся к нулю при  $z \rightarrow \infty$ . По теореме Лиувилля  $\frac{1}{P_n(z)}$  постоянна, что невозможно. Полученное противоречие доказывает, что многочлен  $P_n(z)$  имеет по крайней мере один корень. ▲

Обобщением ряда Тейлора является ряд Лорана, в который разлагается аналитическая в некотором кольце функция.

**Теорема 7.6.** *Функция  $f(z)$ , аналитическая в кольце  $\rho < |z - a| < R$ , разлагается внутри его в сходящийся ряд:*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - a)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z - a)^n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - a)^n. \quad (7.28)$$

*Коэффициенты этого ряда вычисляются по формулам*

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(s) ds}{(s - a)^{n+1}}; \quad c_{-n} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} f(s)(s - a)^{n-1} ds, \quad (7.29)$$

где  $\gamma$  – окружность  $|z - a| = r, \rho < r < R$ .

Δ Пусть  $z$  – произвольная внутренняя точка кольца  $\rho < |z - a| < R$ . Рассмотрим концентрическое с ним кольцо  $\rho_1 < |z - a| < R_1$  с радиусами  $\rho_1$  и  $R_1, \rho < \rho_1 < R_1 < R$  (рис. 7.2), такое, что точка  $z$  расположена внутри него. Обозначим меньшую окружность внутреннего кольца  $l$ , а большую окружность –  $L$ . Так как функция  $f(z)$  аналитична в замкнутом кольце

$\rho_1 \leq |z - a| \leq R_1$ , то по теореме Коши для многосвязной области

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_L \frac{f(s) ds}{s - z} - \frac{1}{2\pi i} \oint_l \frac{f(s) ds}{s - z}. \quad (7.30)$$

Так как  $|s - a| = R_1$  для  $s \in L$  и  $|s - a| = \rho_1$  для  $s \in l$ , то для любой точки  $z$  кольца  $\rho_1 < |z - a| < R_1$  справедливы неравенства

$$|z - a| < |s - a| = R_1 \Rightarrow \left| \frac{z - a}{s - a} \right| = q_1 < 1, s \in L;$$

$$\rho_1 = |s - a| < |z - a| \Rightarrow \left| \frac{s - a}{z - a} \right| = q_2 < 1, s \in l. \quad (7.31)$$

Учитывая это, имеем

$$\begin{aligned} s \in L \Rightarrow \frac{1}{s - z} &= \frac{1}{(s - a) - (z - a)} = \frac{1}{(s - a) \left(1 - \frac{z - a}{s - a}\right)} = \\ &= \frac{1}{s - a} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{z - a}{s - a} \right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - a)^n}{(s - a)^{n+1}}; \end{aligned} \quad (7.32)$$

$$\begin{aligned} s \in l \Rightarrow \frac{1}{s - z} &= \frac{1}{(s - a) - (z - a)} = - \frac{1}{(z - a) \left(1 - \frac{s - a}{z - a}\right)} = \\ &= - \frac{1}{z - a} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{s - a}{z - a} \right)^n = - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(s - a)^n}{(z - a)^{n+1}} = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(s - a)^{n-1}}{(z - a)^n}. \end{aligned} \quad (7.33)$$

Из первого соотношения (7.31) следует, что ряд (7.32) сходится равномерно в круге  $|z - a| < R_1$ . Аналогично из второго соотношения (7.31) следует равномерная сходимость ряда (7.33) вне круга  $|z - a| \leq \rho_1$ . Таким образом, оба ряда (7.32) и (7.33) сходятся равномерно в кольце  $\rho_1 < |z - a| < R_1$ . Подставив эти ряды в равенство (7.30) и используя их равномерную сходимость, имеем

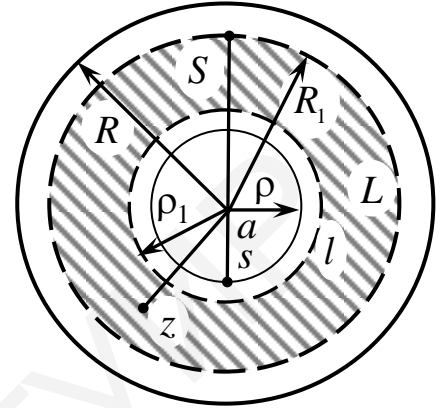


Рис. 7.2

$$\begin{aligned}
f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \cdot \oint_L \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-a)^n f(s)}{(s-a)^{n+1}} ds + \frac{1}{2\pi i} \cdot \oint_l \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(s-a)^{n-1}}{(z-a)^n} f(s) ds = \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{1}{2\pi i} \oint_L \frac{f(s) ds}{(s-a)^{n+1}} \right) (z-a)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{2\pi i} \oint_l f(s)(s-a)^{n-1} \right) (z-a)^{-n} = \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n + \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} (z-a)^{-n},
\end{aligned}$$

где  $c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_L \frac{f(s) ds}{(s-a)^{n+1}}$ ,  $c_{-n} = \frac{1}{2\pi i} \oint_l f(s)(s-a)^{n-1} ds$ .

В этих формулах согласно теореме Коши для многосвязной области в качестве контура интегрирования можно взять окружность  $|z-a|=r$ ,  $\rho_1 < r < R_1$ , т. е. справедливы формулы (7.29). Поскольку  $\rho_1$  можно взять сколь угодно близким к  $\rho$ , а  $R_1$  — к  $R$ , то ряд (7.28) сходится во всем кольце  $\rho < |z-a| < R$ .

Ряд (7.28) называется *рядом Лорана* функции  $f(z)$  в окрестности точки  $z=a$ , при этом ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$  называется *правильной* или *регулярной* частью ряда Лорана, а ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} (z-a)^{-n}$  его *главной частью*. Правильная часть ряда Лорана есть степенной ряд, сходящийся в круге  $|z-a| < R$ , а главная часть представляет собой ряд, сходящийся при  $|z-a| > \rho$ , т. е. вне круга радиусом  $\rho$  с центром в точке  $a$ .

Приведем примеры разложения функций в ряд Лорана.

**Пример 7.3.** Разложите в ряд Лорана по степеням  $z$  функцию

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)} \text{ в кольце } 1 < |z| < 2.$$

$\Delta$  В рассматриваемом кольце  $\left| \frac{z}{2} \right| < 1$  и  $\left| \frac{1}{z} \right| < 1$ .

Тогда

$$\begin{aligned} \frac{1}{(z-1)(z-2)} &= \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1} = -\frac{1}{2(1-\frac{z}{2})} - \frac{1}{2(1-\frac{1}{z})} = \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^n - \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{z}\right)^n = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^n}. \quad \blacktriangle \end{aligned}$$

**Пример 7.4.** Найдите все лорановские разложения функции

$$f(z) = \frac{5z+100}{50z^2+5z^3-z^4} \text{ по степеням } z.$$

Δ Особыми точками функции служат корни знаменателя

$$50z^2+5z^3-z^4 = -z^2(z^2-5z-50) = -z^2(z-10)(z+5),$$

т. е.  $z_1=0$ ,  $z_2=-5$  и  $z_3=10$ . Пусть  $D_1$  – кольцо  $0 < |z| < 5$ ,  $D_2$  – кольцо  $5 < |z| < 10$ ,  $D_3$  – внешность круга  $|z| < 10$  (рис. 7.3). Разложим функцию  $f(z)$  в сумму простейших дробей

$$\frac{5z+100}{50z^2+5z^3-z^4} = -\frac{1}{10} \cdot \frac{1}{z} + \frac{2}{z^2} - \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{z-10} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{z+5}. \quad (7.34)$$

В кольце  $D_1: 0 < |z| < 5 \Rightarrow \left|\frac{z}{5}\right| < 1$

и  $\left|\frac{z}{10}\right| < 1$ , поэтому из равенства (7.34)

получим

$$\begin{aligned} \frac{5z+100}{50z^2+5z^3-z^4} &= \\ &= -\frac{1}{10z} + \frac{2}{z^2} + \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10\left(1-\frac{z}{10}\right)} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5\left(1+\frac{z}{5}\right)} = \end{aligned}$$

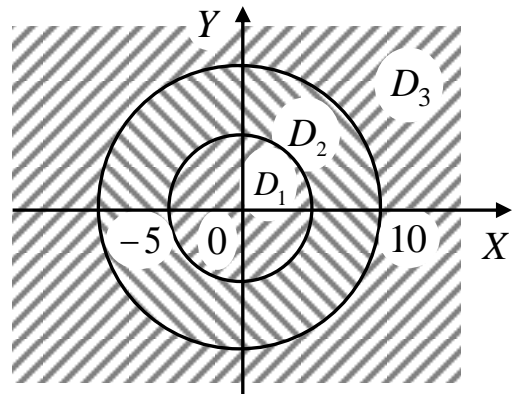


Рис. 7.3

$$\begin{aligned}
&= \frac{2}{z^2} - \frac{1}{10z} + \frac{1}{100} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{10}\right)^n + \frac{1}{25} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{z}{5}\right)^n = \\
&= \frac{2}{z^2} - \frac{1}{10z} + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{10^{n+2}} + \frac{(-1)^n}{5^{n+2}}\right) z^n.
\end{aligned}$$

Итак, в кольце  $0 < |z| < 5$  главная часть ряда Лорана состоит из двух слагаемых:  $\frac{2}{z^2}$  и  $-\frac{1}{10z}$ .

В кольце  $D_2 : 5 < |z| < 10 \Rightarrow \left|\frac{5}{z}\right| < 1$  и  $\left|\frac{z}{10}\right| < 1$ . Тогда из равенства (7.34)

получим

$$\begin{aligned}
f(z) &= -\frac{1}{10z} + \frac{2}{z^2} + \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10\left(1-\frac{z}{10}\right)} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{z\left(1+\frac{5}{z}\right)} = \\
&= \frac{2}{z^2} - \frac{1}{10z} + \frac{1}{100} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{10}\right)^n + \frac{1}{5z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{5}{z}\right)^n = \\
&= \frac{2}{z^2} - \frac{1}{10z} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{10^{n+2}} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{5^{n-1}}{z^{n+1}}. \tag{7.35}
\end{aligned}$$

Заметим, что в кольце  $5 < |z| < 10$  главная часть ряда Лорана (7.35) содержит бесконечное множество слагаемых.

Если  $z \in D_3$ , то  $|z| > 10$ , т. е.  $\left|\frac{10}{z}\right| < 1$ , а тогда и  $\left|\frac{5}{z}\right| < 1$ . Поэтому

$$\begin{aligned}
f(z) &= \frac{2}{z^2} - \frac{1}{10z} - \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{z\left(1-\frac{10}{z}\right)} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{z\left(1+\frac{5}{z}\right)} = \\
&= \frac{2}{z^2} - \frac{1}{10z} - \frac{1}{10z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{10}{z}\right)^n + \frac{1}{5z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{5}{z}\right)^n = \\
&= \frac{2}{z^2} - \frac{1}{10z} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 5^{n-1} - 10^{n-1}}{z^{n+1}}.
\end{aligned}$$

Итак, в  $D_3$  лорановское разложение содержит только главную часть. ▲

Ряд Тейлора для аналитической в окрестности точки  $a$  функции  $f(z)$  является частным случаем ряда Лорана, так как в этом случае коэффициенты

$$c_{-n} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} f(s)(s-a)^{n-1} ds = 0$$

согласно теореме Коши. Следовательно, ряд Лорана аналитической в окрестности точки  $a$  функции  $f(z)$  состоит лишь из правильной его части, т. е. представляет собой ряд Тейлора. Как следует из приведенной ниже теоремы, разложение функции в ряд Лорана возможно единственным образом.

**Теорема 7.7.** *Разложение в ряд Лорана функции  $f(z)$ , аналитической в кольце  $D: \rho < |z-a| < R$ , единственно.*

Δ Предположим, что функция  $f(z)$  имеет два разложения:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n \text{ и } f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c'_n (z-a)^n. \text{ Тогда}$$

$$0 \equiv \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z-a)^n - \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c'_n (z-a)^n = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (c_n - c'_n)(z-a)^n, \quad \forall z \in D.$$

Умножив это тождество на  $(z-a)^{k-1}$ , где  $k$  – любое целое число, и проинтегрировав по окружности  $\gamma: |z-a|=r, \rho < r < R$ , получим

$$\oint_{\gamma} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (c_n - c'_n)(z-a)^{n+k-1} dz = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (c_n - c'_n) \oint_{\gamma} (z-a)^{n+k-1} dz \equiv 0.$$

Отсюда с учетом равенства (6.8) имеем

$$(c_{-k} - c'_{-k}) 2\pi i \equiv 0 \Leftrightarrow c_{-k} = c'_{-k}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad \blacktriangle$$

### Задачи и упражнения

1. Исследуйте на сходимость ряды:

$$\text{а) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-i}{n^3+1}; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{in}}{n}; \quad \text{в) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!(e-i)^n}.$$

Ответ: а) сходится; б) расходится; в) сходится абсолютно.



2. Исследуйте на сходимость ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ , если

$$\text{а) } z_n = \frac{n}{(2i)^n}; \quad \text{б) } z_n = \frac{n!}{(in)^n}; \quad \text{в) } z_n = e^{in}; \quad \text{г) } z_n = \frac{e^{in\varphi}}{n};$$

$$\text{д) } z_n = \frac{\cos(in)}{2^n}; \quad \text{е) } z_n = \frac{n \sin(in)}{3^n}; \quad \text{ж) } z_n = \left(\frac{2-i}{3}\right)^{n^2};$$

$$\text{з) } z_n = \left(\frac{1+i}{2}\right)^n; \quad \text{и) } z_n = \frac{\operatorname{ch}\left(\frac{i\pi}{n}\right)}{n^{\ln n}}; \quad \text{к) } z_n = \frac{n}{\operatorname{tg}(i\pi n)}.$$

Ответ: а) сходится абсолютно; б) сходится абсолютно; в) расходится; г) сходится неабсолютно; д) расходится; е) сходится абсолютно; ж) сходится абсолютно; з) сходится; и) сходится; к) расходится.

3. Исследуйте на равномерную сходимость ФР  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{i(z^2-2z+3)}}{n^2}$ .

Ответ: Сходится равномерно на всей комплексной плоскости.

4. Найдите области сходимости рядов:

$$\text{а) } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-2i)^n}{2^n(n+1)} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+5}{(z-2i)^n}; \quad \text{б) } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(z-2)^n}; \quad \text{в) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(2i)^n}{(z+i)^{n+1}};$$

$$\text{г) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+i}{4n(z+1)}\right)^n; \quad \text{д)* } \sum_{n=0}^{\infty} (1-z^2)^n.$$

Ответ: а)  $1 < |z-2i| < 2$ ; б)  $|z-2| > 1$ ; в)  $|z+i| > 2$ ; г)  $|z+1| > \frac{1}{4}$ ;

д)\*  $|z-1||z+1| < 1$ .

5. Найдите круг сходимости рядов:

$$\text{а) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} z^n; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} z^n; \quad \text{в) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1+i)^n(z-2)^n}{(n+1)(n+2)}; \quad \text{г) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z-1)^n}{n^2};$$

$$д) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n (z-1)^n}{\sqrt{(3n-2)2^n}}; \quad е) \sum_{n=0}^{\infty} \cos(in) \cdot z^n.$$

$$\text{Ответ: а) } |z| < e; \quad б) |z| < 2; \quad в) |z-2| < \frac{1}{\sqrt{2}}; \quad г) |z-1| < 1; \quad д) |z-1| < \frac{\sqrt{2}}{3};$$

$$е) |z| < \frac{1}{e}.$$

**6.** Используя основные разложения, а также возможность почленного дифференцирования и интегрирования степенных рядов, разложите функции в ряд по степеням  $z$  и укажите области сходимости полученных рядов:

$$а) \sqrt[3]{27-z}; \quad б) \frac{3z+1}{(z-2)^2}; \quad в) \sin 2z \cdot \cos 2z;$$

$$г) \ln(z^2 + 3z + 2); \quad д) \int_0^z e^{-\frac{s^2}{2}} ds.$$

$$\text{Ответ: а) } 3 - \frac{z}{27} - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \dots \cdot (3n-4)}{n! 3^{4n-1}} z^n, \quad |z| < 27;$$

$$б) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{7n+1}{2^{n+2}} z^n, \quad |z| < 2, \quad \frac{3z+1}{(z-2)^2} = -(3z+1) \left( \frac{1}{z-2} \right)';$$

$$в) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{4n+1}}{(2n+1)!} z^{2n+1}, \quad |z| < \infty;$$

$$г) \ln 2 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} (1+2^{-n}) \frac{z^n}{n}, \quad |z| < 1;$$

$$д) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{2^n \cdot n!(2n+1)}, \quad |z| < \infty.$$

**7.** Разложите функции в ряд по степеням  $z - z_0$  и определите области сходимости полученных рядов:

$$а) \frac{1}{1-z}, \quad z_0 = 3i; \quad б) \frac{1}{z^2 - 6z + 5}, \quad z_0 = 3; \quad в)* \frac{1}{z^2}, \quad z_0 = 2;$$

г)  $e^{z^2-4z+1}$ ,  $z_0 = 2$ ; д)  $\sin(z^2 + 4z)$ ,  $z_0 = -2$ ; е)  $\ln(z^2 + 6z + 12)$ ,  $z_0 = -3$ .

Ответ: а)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-3i)^n}{(1-3i)^{n+1}}$ ,  $|z-3i| < |1-3i| = \sqrt{10}$ ;

б)  $-\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-3)^{2n}}{4^{n+1}}$ ,  $|z-3| < 2$ ;

в)\*  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{2^{n+1}} (z-2)^{n-1}$ ,  $|z-2| < 2$ ;

г)  $e^{-3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-2)^{2n}}{n!}$ ,  $|z| < \infty$ ;

д)  $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left( -\frac{\sin 4}{(2n)!} (z+4)^{4n} + \frac{\cos 4}{(2n+1)!} (z+4)^{4n+2} \right)$ ,  $|z| < \infty$ ;

е)  $\ln 4 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(z+3)^{2n}}{n \cdot 4^n}$ ,  $|z+3| < 2$ .

8. Разложите в ряд Лорана функцию  $f(z)$  в окрестности точки  $z_0$ :

а)  $f(z) = \frac{z}{(1-z)^2}$ ,  $z_0 = 1$ ; б)  $f(z) = \frac{z}{1+z^2}$ ,  $z_0 = i$ ;

в)  $f(z) = \frac{z}{(z+1)^2(z-2)}$ ,  $z_0 = -1$ ; г)  $f(z) = \frac{z}{(z+1)(z-2)^2}$ ,  $z_0 = 2$ ;

Ответ: а)  $\frac{1}{(z-1)^2} + \frac{1}{z-1}$ ; б)  $-\frac{i}{2(z-i)} + \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (z-i)}{(2i)^n}$ ;

в)  $\frac{1/3}{(z+1)^2} - \frac{2/9}{z+1} - \frac{2}{9} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+1)^n}{3^{n+1}}$ ; г)  $\frac{3/2}{(z-2)^2} + \frac{1/9}{z-2} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(z-2)^n}{3^{n+3}}$ .

9. Функцию  $f(z)$  разложите в ряд Лорана в указанном кольце  $D$ :

а)  $f(z) = \frac{z+2}{z^2-4z+3}$ ,  $D: |z-1| > 2$ ; б)  $f(z) = \frac{z^2-z+3}{z^3-3z+2}$ ,  $D: 1 < |z| < 2$ ;

в)  $f(z) = \frac{1}{(z^2+1)(z^2-4)}$ ,  $D: 1 < |z| < 2$ .

Ответ: а)  $\frac{1}{z-1} + 5 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^{n-2}}{(z-1)^n}$ ; б)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{z^{n+1}} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^n}{2^{n+1}}$ ;

в)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{5z^{2n}} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{5 \cdot 4^{n+1}} z^{2n}$ .

**10.** Данную функцию  $f(z)$  разложите в ряд Лорана в окрестности точки  $z_0$ :

а)  $f(z) = z \cdot e^{\frac{1}{z+i}}$ ,  $z_0 = -i$ ; б)  $f(z) = z^2 \sin \frac{1}{z-1}$ ,  $z_0 = 1$ ;

в)  $f(z) = (1 - z + 2z^2) \sin \frac{1}{z^2}$ ,  $z_0 = 0$ .

Ответ: а)  $\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{(n+1)!} - \frac{i}{n!} \right) (z+i)^{-n}$ ;

б)  $(z-1) + 2 + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{(-1)^{n-1} \left( \frac{1}{(2n-1)!} - \frac{1}{(2n+1)!} \right)}{(z-1)^{2n-1}} + \frac{2(-1)^n}{(2n+1)!(z-1)^{2n}} \right)$ ;

в)  $2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!z^{4n}} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!z^{4n+1}} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!z^{4n+2}}$ .

## Лекция 8

### НУЛИ И ИЗОЛИРОВАННЫЕ ОСОБЫЕ ТОЧКИ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

**Нули аналитических функций. Необходимые и достаточные условия нулей аналитических функций. Изолированность нулей аналитических функций.**

**Устранимые особые точки, полюсы, существенно особые точки аналитических функций. Теорема Сохоцкого. Поведение аналитической функции в бесконечно удаленной точке. Разложение аналитической функции в ряд Лорана в окрестности бесконечно удаленной точки.**

#### Задачи и упражнения

*Нулем* аналитической в области  $D$  функции  $f(z)$  называется комплексное число  $a \in D$ , для которого  $f(a) = 0$ .

Представим  $f(z)$  в окрестности точки  $z = a$  рядом

$$f(z) = c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n. \quad (8.1)$$

Так как  $z = a$  – нуль функции  $f(z)$ , то из равенства (8.1) следует, что  $c_0 = 0$ . Будем говорить, что точка  $z = a$  является *нулем порядка  $k$*  функции  $f(z)$ , если коэффициенты  $c_0, c_1, \dots, c_{k-1}$  ее ряда Тейлора (8.1) равны нулю, а  $c_k \neq 0$ . При  $k = 1$  нуль  $z = a$  называется *простым*.

В случае нуля порядка  $k$  равенство (8.1) принимает вид

$$\begin{aligned} f(z) &= c_k(z-a)^k + c_{k+1}(z-a)^{k+1} + \dots = \sum_{n=k}^{\infty} c_n(z-a)^n = \\ &= (z-a)^k (c_k + c_{k+1}(z-a) + \dots + c_{k+p}(z-a)^p + \dots) = \\ &= (z-a)^k \sum_{p=0}^{\infty} c_{k+p}(z-a)^p. \end{aligned} \quad (8.2)$$

Обозначим  $\sum_{p=0}^{\infty} c_{k+p} (z-a)^p = \varphi(z)$ . Функция  $\varphi(z)$  – аналитическая в

окрестности точки  $z = a$ . Соотношение (8.2) запишется в виде

$$f(z) = (z-a)^k \varphi(z), \quad \varphi(a) \neq 0. \quad (8.3)$$

В частности, если  $z = 0$  – нуль порядка  $k$  функции  $f(z)$ , то

$$f(z) = z^k \varphi(z), \quad \varphi(0) \neq 0.$$

Следующая теорема является критерием нуля порядка  $k$  данной функции.

**Теорема 8.1.** Для того чтобы точка  $z = a$  была нулем порядка  $k$  функции  $f(z)$ , необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие соотношения:

$$f(a) = f'(a) = f''(a) = \dots = f^{(k-1)}(a) = 0; \quad f^{(k)}(a) \neq 0. \quad (8.4)$$

Доказательство теоремы дословно повторяет доказательство теоремы о признаке кратности корня многочлена.

**Пример 8.1.** Определите порядок нуля  $z = 0$  функции  $f(z) = 2 \sin z - z^2$ .

$$\Delta \text{ Имеем } f(0) = 0, \quad f'(0) = (2 \cos z - 2z)|_{z=0} = 2 \neq 0.$$

Таким образом,  $z = 0$  является нулем первого порядка функции  $2 \sin z - z^2$ . ▲

Нули функции называются *изолированными*, если каждый из них можно окружить окрестностью, содержащей единственный нуль функции.

**Теорема 8.2.** Нули аналитической функции  $f(z) \neq 0$  изолированы.

$\Delta$  Пусть  $z = a$  – нуль функции  $f(z)$  порядка  $k$ . Тогда  $f(z) = (z-a)^k \varphi(z)$ ,  $\varphi(a) \neq 0$ . Так как функция  $\varphi(z)$  непрерывна в точке  $a$ , то  $\lim_{z \rightarrow a} \varphi(z) = \varphi(a) \neq 0$ . В таком случае существует окрестность точки  $a$  такая, что  $\varphi(z) \neq 0$  для всех точек этой окрестности. Следовательно, в этой окрестности функция  $f(z)$  других нулей, кроме  $z = a$ , не имеет. ▲

Пусть функция  $f(z)$  аналитична в окрестности точки  $z = a$ , кроме самой этой точки. В этом случае точка  $z = a$  называется *изолированной особой точкой* функции  $f(z)$ . В окрестности этой точки функция  $f(z)$  разлагается в ряд Лорана:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n + \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} (z-a)^{-n}. \quad (8.5)$$

Пусть все  $c_{-n} = 0, n > 0$ , т. е. в ряде Лорана отсутствует главная часть. Тогда  $\lim_{z \rightarrow a} f(z) = c_0$ . Но функция  $f(z)$  в точке  $a$  не определена. В этом случае точка  $z = a$  называется *устранимой особой точкой* функции  $f(z)$ . Чтобы устранить особенность функции  $f(z)$  в точке  $z = a$ , достаточно положить  $f(a) = \lim_{z \rightarrow a} f(z) = c_0$ .

Итак, если  $z = a$  – *устраняемая особая точка* функции  $f(z)$ , то существует  $\lim_{z \rightarrow a} f(z) = c_0$ . Это означает, что *в окрестности устраняемой особой точки функция  $f(z)$  ограничена*.

**Пример 8.2.** Определите характер особой точки  $z = 0$  функции  $f(z) = \frac{1 - \cos z}{z^2}$ .

Δ Представим функцию  $f(z)$  рядом Лорана по степеням  $z$ :

$$f(z) = \frac{1}{z^2} \left( 1 - \left( 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \dots \right) \right) = \frac{1}{2!} - \frac{z^2}{4!} + \dots$$

Так как в этом разложении отсутствует главная часть ряда Лорана, то  $z = 0$  – *устраняемая особая точка* и  $\lim_{z \rightarrow 0} f(z) = \frac{1}{2}$ . Доопределив  $f(z)$  в точке  $z = 0$  равенством  $f(0) = \frac{1}{2}$ , получим непрерывную на всей комплексной плоскости функцию. ▲

Пусть в главной части ряда Лорана функция  $f(z)$  имеет конечное число слагаемых:

$$f(z) = \frac{c_{-k}}{(z-a)^k} + \frac{c_{-k+1}}{(z-a)^{k-1}} + \dots + \frac{c_{-1}}{z-a} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n, \quad c_{-k} \neq 0. \quad (8.6)$$

В этом случае точка  $z = a$  называется *полюсом порядка  $k$*  функции  $f(z)$ .

При  $k = 1$  полюс  $z = a$  называется *простым*.

Умножив равенство (8.6) на  $(z-a)^k$ , получим

$$f(z)(z-a)^k = c_{-k} + c_{-k+1}(z-a) + \dots + c_{-1}(z-a)^{k-1} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^{n+k}. \quad (8.7)$$

Обозначим правую часть этого равенства через  $\psi(z)$ . Функция

$\psi(z) = \sum_{n=-k}^{\infty} c_n (z-a)^{n+k}$  аналитическая в некоторой окрестности точки  $z = a$ ,

причем  $\psi(a) = c_{-k} \neq 0$ . Из равенства (8.7) тогда получаем

$$f(z) = \frac{1}{(z-a)^k} \psi(z), \quad \psi(a) \neq 0. \quad (8.8)$$

Итак, функцию  $f(z)$ , имеющую в точке  $z = a$  полюс порядка  $k$ , можно представить в виде (8.8). Отсюда следует, что *если  $z = a$  – полюс (любого порядка), то  $\lim_{z \rightarrow a} f(z) = \infty$* .

Из равенства (8.8) следует, что

$$\frac{1}{f(z)} = \varphi(z)(z-a)^k; \quad \varphi(a) \neq 0; \quad \varphi(z) = \frac{1}{\psi(z)}; \quad \psi(a) \neq 0.$$

Таким образом, если функция  $f(z)$  в точке  $z = a$  имеет полюс порядка  $k$ , то в этой точке функция  $\frac{1}{f(z)}$  имеет нуль порядка  $k$ . Обратно, если функция

$g(z)$  имеет в точке  $z = a$  нуль порядка  $k$ , то функция  $\frac{1}{g(z)}$  в этой точке имеет



полюс порядка  $k$ . Действительно, пусть  $g(z) = \varphi(z)(z-a)^k$ ,  $\varphi(a) \neq 0$ .

Отсюда в силу аналитичности  $\frac{1}{\varphi(z)}$  имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{g(z)} &= \frac{1}{\varphi(z)(z-a)^k} = \frac{1}{(z-a)^k} (c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \dots) = \\ &= \frac{c_0}{(z-a)^k} + \frac{c_1}{(z-a)^{k-1}} + \dots + \frac{c_{k-1}}{z-a} + c_k + c_{k+1}(z-a) + \dots, \end{aligned}$$

где  $\frac{1}{\varphi(z)} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$ .

Из связи между полюсами и нулями аналитической функции и теоремы 8.2 следует, что *полюсы аналитической функции являются изолированными особыми точками*.

Точка  $z = a$  называется *существенно особой точкой* функции  $f(z)$ , если главная часть ряда Лорана этой функции в окрестности  $z = a$  содержит бесконечное число слагаемых. Как ведет себя функция в окрестности существенно особой точки? На этот вопрос отвечает теорема Сохоцкого, которую приводим без доказательства.

**Теорема 8.3 (Сохоцкого).** *Если  $z = a$  – существенно особая точка функции  $f(z)$ , то для любого числа  $A$  (конечного или бесконечного) можно найти такую последовательность  $(z_n)$ , что  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) = A$ .*

Это означает, что в достаточно малой окрестности существенно особой точки функция принимает значения, как угодно близкие к любому наперед заданному числу (конечному или бесконечному).

Иногда это выражают еще и так: в сколь угодно малой окрестности существенно особой точки функция становится неопределенной.

**Пример 8.3.** Определите тип особой точки  $z = 0$  для функций:

$$\text{а) } f_1(z) = \frac{\cos z^3 - 1}{\sin z - z + \frac{z^3}{6}}; \text{ б) } f_2(z) = z \cos \frac{2}{z^3}; \text{ в) } f_3(z) = \frac{e^{3z} - 1}{\cos z - 1 + \frac{z^2}{2}}.$$

Δ а) Используя разложения в ряд Тейлора функций  $\cos z^3$  и  $\sin z$ , имеем

$$f_1(z) = \frac{\left(1 - \frac{z^6}{2!} + \frac{z^{12}}{4!} - \dots\right) - 1}{\left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \dots\right) - z + \frac{z^3}{6}} = \frac{-\frac{z^6}{2!} + \frac{z^{12}}{4!} - \dots}{\frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \dots} = z \frac{\left(-\frac{1}{2} + \frac{z^6}{4!} - \dots\right)}{\left(\frac{1}{5!} - \frac{z^2}{7!} + \dots\right)}.$$

Так как функции в скобках при  $z = 0$  в нуль не обращаются, то согласно равенству (8.3) точка  $z = 0$  является простым нулем функции  $f_1(z)$ .

б) Поступая аналогично, получаем

$$f_2(z) = z \left(1 - \frac{2^2}{2!z^6} + \frac{2^4}{4!z^{12}} - \frac{2^6}{6!z^{18}} + \dots\right) = z - \frac{2^2}{2!z^5} + \frac{2^4}{4!z^{11}} - \frac{2^6}{6!z^{17}} + \dots$$

Поскольку главная часть полученного ряда Лорана содержит бесконечное число слагаемых, то  $z = 0$  является существенно особой точкой функции  $f_2(z)$ .

в) Для функции  $f_3(z)$  имеем

$$f_3(z) = \frac{\left(1 + 3z + 9\frac{z^2}{2} + 27\frac{z^3}{6} + \dots\right) - 1}{\left(1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \dots\right) - 1 + \frac{z^2}{2}} = \frac{1}{z^3} \left( \frac{3 + 9\frac{z}{2} + 27\frac{z^2}{6} + \dots}{\frac{1}{4!} - \frac{z^2}{6!} + \dots} \right).$$

Отсюда в силу равенства (8.9) получаем, что точка  $z = 0$  – полюс третьего порядка для функции  $f_3(z)$ . ▲

На комплексной плоскости существует лишь одна так называемая бесконечно удаленная точка  $z = \infty$ . По определению ее окрестностью называется внешность круга с центром в начале координат произвольного, достаточно большого, радиуса  $R$ . Если ввести подстановку  $z = \frac{1}{w}$  (или  $w = \frac{1}{z}$ ), то окрестность точки  $z = \infty$  плоскости  $C_z$  перейдет в окрестность точки  $w = 0$  плоскости  $C_w$ . Таким образом, изучение поведения функции  $f(z)$  в окрестности точки  $z = \infty$  сводится к изучению поведения функции  $f\left(\frac{1}{z}\right)$  в окрестности  $z = 0$ .

Говорят, что функция  $f(z)$  аналитична, имеет полюс порядка  $k$  или существенную особенность в бесконечно удаленной точке, если функция  $f\left(\frac{1}{z}\right)$  обладает аналогичным свойством в точке  $z = 0$ . Например, функция  $\sin\left(\frac{1}{z^3}\right)$  имеет в бесконечно удаленной точке нуль третьего порядка, поскольку функция

$$\sin z^3 = z^3 - \frac{z^9}{3!} + \frac{z^{15}}{5!} - \dots = z^3 \left( 1 - \frac{z^6}{3!} + \frac{z^{12}}{5!} - \dots \right)$$

имеет в точке  $z = 0$  нуль третьего порядка.

Пусть функция  $f(z)$  аналитична в окрестности точки  $z = \infty$ . Разложим функцию  $f\left(\frac{1}{z}\right)$  в этой окрестности в ряд Лорана:

$$f\left(\frac{1}{z}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{z_n}. \quad (8.9)$$

Здесь  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$  – правильная часть, а  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{z_n}$  – главная часть этого

разложения. Заменяя в разложении (8.10)  $z$  на  $\frac{1}{z}$ ,  $c_n$  – на  $a_{-n}$ , получим ряд

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{-n}}{z^n} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n, \quad (8.10)$$

который называется *разложением функции  $f(z)$  в ряд Лорана в окрестности бесконечно удаленной точки*.

При этом ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$  называется *главной частью ряда Лорана* (8.10),

а ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{-n}}{z^n}$  – его *правильной частью*. Таким образом, главная часть ряда

Лорана (8.10) содержит положительные степени  $z$ , а правильная – нулевую и отрицательные степени  $z$ .

Если главная часть в ряде (8.10) отсутствует, т. е.  $a_n = 0, n = 1, 2, \dots$ , то точка  $z = \infty$  называется *устранимой особой точкой* функции  $f(z)$ . В этом случае

$\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = a_0$ . Точка  $z = \infty$  называется *нулем кратности  $k$*  функции  $f(z)$ , если

главная ее ряда Лорана отсутствует, а для правильной части выполнены условия

$$a_0 = a_{-1} = \dots = a_{-(k+1)} = 0, \quad a_{-k} \neq 0. \quad (8.11)$$

При выполнении условий (8.12) функция  $f(z)$  в окрестности точки  $z = \infty$  представима в виде

$$f(z) = \frac{1}{z^k} \left( a_{-k} + \frac{a_{-(k+1)}}{z} + \frac{a_{-(k+2)}}{z^2} + \dots \right) = \frac{1}{z^k} \Phi(z), \quad (8.12)$$

где через  $\Phi(z)$  обозначена сумма ряда в скобках, причем очевидно, что

$\lim_{z \rightarrow \infty} \Phi(z) = a_{-k} \neq 0$ . Далее, точка  $z = \infty$  называется *полюсом порядка  $k$*

функции  $f(z)$ , если ее разложение в ряд Лорана имеет вид

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{-n}}{z_n} + \sum_{n=1}^k a_n z^n, \quad a_k \neq 0, \quad (8.13)$$

т. е. главная часть ряда Лорана функции  $f(z)$  равна  $a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_k z^k$ ,  $a_k \neq 0$ . Если же главная часть ряда Лорана содержит бесконечное число слагаемых, то  $z = \infty$  называется *существенно особой точкой* функции  $f(z)$ .

**Пример 8.4.** Выяснить характер точки  $z = \infty$  для функции  $\sin z$ .

Δ Из разложения  $\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots$  следует, что главная часть ряда

Лорана функции  $\sin z$  в окрестности точки  $z = \infty$  содержит бесконечное число слагаемых. Значит,  $z = \infty$  является существенно особой точкой функции  $\sin z$ .

### Задачи и упражнения

1. Докажите, что точка  $z_0$  является устранимой особой точкой для функций:

а)  $\frac{1}{\cos^2 z} - \frac{1}{(z - \frac{\pi}{2})^2}$ ,  $z_0 = \frac{\pi}{2}$ ; б)  $\frac{z}{\operatorname{tg} z}$ ,  $z_0 = 0$ ; в)  $\frac{1}{e^z - 1} - \frac{1}{\sin z}$ ,  $z_0 = 0$ ;

г)  $\operatorname{ctg} \frac{1}{z} - \frac{1}{z}$ ,  $z_0 = 0$ .

2. Докажите, что точка  $z_0$  является полюсом для функций:

а)  $\frac{z}{1 \cos z}$ ,  $z_0 = 0$ ; б)  $\frac{1}{(z^2 + 1)^2}$ ,  $z_0 = i$ ; в)  $\frac{z}{(e^z - 1)^2}$ ,  $z_0 = 0$ ;

г)  $\frac{z}{e^z + 1}$ ,  $z_0 = \pi i$ .

3. Докажите, что точка  $z_0$  является существенно особой точкой для функций:

а)  $\sin \frac{\pi}{z^2 + 1}$ ,  $z_0 = -i$ ; б)  $z^2 \sin \frac{\pi}{z}$ ,  $z_0 = 0$ ; в)  $e^{t g z}$ ,  $z_0 = \frac{\pi}{2}$ ;

г)  $(z-1)e^{\frac{1}{z-1}}$ ,  $z_0 = 1$ .

4. Для данных функций найдите особые точки и установите их характер:

а)  $\frac{1}{e^{-z}+1} + \frac{1}{z^2}$ ; б)  $e^{-z} \cos \frac{1}{z}$ ; в)  $\frac{1}{z^3(2-\cos z)}$ ; г)  $\frac{1}{z^2-1} \cos \frac{\pi z}{z+1}$ ;

д)  $\frac{1}{z(1-e^{2z})}$ ; е)  $e^{\operatorname{tg}(\frac{1}{z})}$ .

Ответ: а)  $z=0$  – полюс второго порядка;  $z_n = \pi i n$ ,  $n = \pm 1, \pm 2, \dots$  – простые полюсы; б)  $z=0$  – существенно особая точка; в)  $z=0$  – полюс третьего порядка;  $z_n = 2\pi n + i \ln(2 + \sqrt{3})$ ,  $n \in \mathbf{Z}$  – простые полюсы; г)  $z=1$  – устранимая особая точка;  $z=-1$  – существенно особая точка; д)  $z=0$  – полюс второго порядка;  $z_n = \pi i n$ ,  $n = \pm 1, \pm 2, \dots$  – простые полюсы;

е)  $z_n = \frac{2}{(2n+1)\pi}$ ,  $n \in \mathbf{Z}$  – существенно особые точки.

5. Определите характер бесконечно удаленной особой точки для функций:

а)  $\frac{z^3 + z^2 - 5z - 7}{z^2}$ ; б)  $\frac{3z-4}{z^4}$ ; в)  $e^z / z^2$ ; г)  $\sin \frac{1}{z}$ ; д)  $e^{\frac{1}{z^2}}$ ;

е)  $e^{\frac{2}{z}} - 3z + 4$ .

Ответ: а) простой полюс; б) устранимая особая точка; в) существенно особая точка; г) устранимая особая точка; д) устранимая особая точка; е) полюс второго порядка.

## Лекция 9

### ВЫЧЕТЫ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

**Определение вычета аналитической функции в изолированной особой точке. Вычисление вычетов в полюсах и существенно особых точках.**

**Вычет в бесконечно удаленной точке. Основная теорема о вычетах и ее следствие. Приложения вычетов к вычислению определенных интегралов.**

**Лемма Жордана и ее частные случаи. Интегралы вида  $\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} f(z) e^{tz} dz$ .**

**Логарифмический вычет. Принцип аргумента. Теорема Руше.**

#### Задачи и упражнения

Пусть  $z = a$  – изолированная особая точка аналитической функции  $f(z)$ . В окрестности этой точки функция  $f(z)$  представляется сходящимся рядом Лорана

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z-a)^n}$$

с коэффициентами

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(s) ds}{(s-a)^{n+1}}, \quad n \in \mathbf{Z}, \quad (9.1)$$

где  $\gamma$  – окружность  $|z-a| = r$ ;  $\rho < r < R$ .

Среди коэффициентов этого ряда особо выделяется коэффициент  $c_{-1}$ . Он называется *вычетом* функции  $f(z)$  в точке  $z = a$  и обозначается  $\operatorname{Res}_{z=a} f(z)$  (от франц. *residu* – вычет).

Итак, по определению,  $\operatorname{Res}_{z=a} f(z) = c_{-1}$ , т. е.

$$\operatorname{Res}_{z=a} f(z) = c_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} f(z) dz, \quad (9.2)$$

где  $\gamma$  – замкнутый контур, ориентированный положительно и окружающий точку  $z = a$ .

В качестве контура  $\gamma$  можно взять окружность с центром в точке  $a$  достаточно малого радиуса, не содержащую внутри других особых точек функции  $f(z)$ , кроме точки  $z = a$ .

Из формулы (9.2) получаем

$$\oint_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \operatorname{Res}_{z=a} f(z). \quad (9.3)$$

Пусть  $z = a$  – устранимая особая точка функции  $f(z)$ . Тогда ряд Лорана этой функции в окрестности точки  $z = a$  имеет вид

$$f(z) = c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \dots$$

Отсюда следует, что в устранимой особой точке вычет функции равен нулю.

**Пример 9.1.** Найдите вычет функции  $f(z)$  в точке  $z = a$ :

а)  $f(z) = \frac{\cos z}{z^4}$ ; б)  $f(z) = z^3 e^{\frac{1}{z}}$ .

Δ а) Используя разложение в ряд Тейлора функции  $\cos z$ , получаем

$$\frac{\cos z}{z^4} = \frac{1}{z^4} \left( 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \dots \right) = \frac{1}{z^4} - \frac{1}{2!z^2} + \frac{1}{4!} - \frac{z^2}{6!} + \dots$$

Отсюда следует, что  $z = a$  – полюс четвертого порядка для  $\frac{\cos z}{z^4}$ . Так как

коэффициент при  $z^{-1}$  равен нулю, то  $\operatorname{Res}_{z=0} \frac{\cos z}{z^4} = 0$ .

б) Аналогично предыдущему пункту

$$\begin{aligned} z^3 e^{\frac{1}{z}} &= z^3 \left( 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!z^2} + \frac{1}{3!z^3} + \frac{1}{4!z^4} + \frac{1}{5!z^5} + \dots \right) = \\ &= z^3 + z^2 + \frac{z}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!z} + \frac{1}{5!z^2} + \dots \end{aligned}$$



Отсюда коэффициент  $c_{-1}$  при  $z^{-1}$  равен  $\frac{1}{4!} = \frac{1}{24}$ , т. е.  $\operatorname{Res}_{z=0} z^3 e^{\frac{1}{z}} = \frac{1}{24}$ . ▲

Выясним, как вычисляются вычеты в полюсах. Предположим, что функция  $f(z)$  имеет простой полюс (полюс первого порядка) в точке  $z = a$ . В этом случае функция  $f(z)$  в окрестности точки  $a$  представляется равенством

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n + \frac{c_{-1}}{z-a}.$$

Умножив обе части этого равенства на  $z-a$ , получим

$$(z-a)f(z) = (z-a) \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n + c_{-1}.$$

Отсюда получаем формулу для вычисления вычета в простом полюсе:

$$c_{-1} = \operatorname{Res}_{z=a} f(z) = \lim_{z \rightarrow a} ((z-a)f(z)). \quad (9.4)$$

Пусть, в частности,  $f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$ , где  $\varphi(z)$  и  $\psi(z)$  – аналитические в точке  $z = a$  функции, причем  $\varphi(a) \neq 0$ ,  $\psi(a) = 0$ ,  $\psi'(a) \neq 0$ , т. е.  $a$  – простой полюс функции  $f(z)$ . По формуле (9.4)

$$\operatorname{Res}_{z=a} f(z) = \lim_{z \rightarrow a} \frac{(z-a)\varphi(z)}{\psi(z)} = \lim_{z \rightarrow a} \frac{\varphi(z)}{\frac{\psi(z) - \psi(a)}{z-a}} = \frac{\varphi(a)}{\psi'(a)}.$$

Итак, если  $z = a$  – простой полюс функции  $f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$ , то

$$\operatorname{Res}_{z \rightarrow a} \frac{\varphi(z)}{\psi(z)} = \frac{\varphi(a)}{\psi'(a)}. \quad (9.5)$$

Предположим теперь, что функция  $f(z)$  имеет в точке  $z = a$  полюс порядка  $k$ . Тогда ряд Лорана для  $f(z)$  в окрестности точки  $a$  имеет вид

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n + \frac{c_{-1}}{z-a} + \frac{c_{-2}}{(z-a)^2} + \dots + \frac{c_{-k}}{(z-a)^k}.$$

Умножив обе части этого равенства на  $(z-a)^k$ , получим

$$(z-a)^k f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^{n+k} + c_{-1}(z-a)^{k-1} + c_{-2}(z-a)^{k-2} + \dots + c_{-k}.$$

Дифференцируя обе части полученного равенства  $k-1$  раз и переходя к пределу при  $z \rightarrow a$ , находим

$$\lim_{z \rightarrow a} \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} ((z-a)^k f(z)) = (k-1)! c_{-1}.$$

Отсюда получаем формулу для вычисления вычета функции  $f(z)$  в полюсе порядка  $k$ :

$$\operatorname{Res}_{z=a} f(z) = \frac{1}{(k-1)!} \lim_{z \rightarrow a} \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} ((z-a)^k f(z)). \quad (9.6)$$

**Пример 9.2.** Найдите вычеты функций во всех изолированных особых точках:

$$\text{а) } f(z) = \frac{1-z}{(z+i)(z-3)^3}; \quad \text{б) } f(z) = \frac{z^3}{4+z^2}.$$

Δ Точка  $z = -i$  является полюсом первого порядка функции  $f(z)$ .

По формуле (9.4)

$$\operatorname{Res}_{z=-i} f(z) = \lim_{z \rightarrow -i} \frac{(z+i)(1-z)}{(z+i)(z-3)^3} = \lim_{z \rightarrow -i} \frac{1-z}{(z-3)^3} = \frac{-11+2i}{250}.$$

В точке  $z = 3$  функция  $f(z)$  имеет полюс третьего порядка. По формуле (9.6) получаем

$$\operatorname{Res}_{z=3} f(z) = \frac{1}{2!} \lim_{z \rightarrow 3} \left( \frac{(z-3)^3(1-z)}{(z+i)(z-3)^3} \right)'' = \frac{1}{2} \lim_{z \rightarrow 3} \left( \frac{1-z}{z+i} \right)'' = \frac{11-2i}{125}.$$

б) Особыми точками функции  $\frac{z^3}{4+z^2}$  являются  $2i$  и  $-2i$  – полюсы первого порядка. По формуле (9.5) находим

$$\operatorname{Res}_{z=2i} f(z) = \frac{z^3}{(4+z^2)'} \Big|_{z=2i} = \frac{z^3}{2z} \Big|_{z=2i} = -2;$$

$$\operatorname{Res}_{z=-2i} f(z) = \frac{z^3}{2z} \Big|_{z=-2i} = -2.$$

*Замечание.* Если  $z = a$  – существенно особая точка функции  $f(z)$ , то для отыскания вычета в точке  $a$  надо найти коэффициент  $c_{-1}$  из разложения функции в ряд Лорана в окрестности точки  $z = a$ .

**Пример 9.3.** Найдите вычет функции в ее особой точке:

$$f(z) = z^2 \sin \frac{1}{2z^2}.$$

Δ Особой точкой функции  $f(z)$  является  $z = 0$ . Лорановское разложение  $f(z)$  в окрестности этой точки имеет вид

$$f(z) = z^2 \left( \frac{1}{2z^2} - \frac{1}{3! 2^3 z^6} + \frac{1}{5! 2^5 z^{10}} - \dots \right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{3! 2^3 z^4} + \frac{1}{5! 2^5 z^8} - \dots,$$

т. е. содержит бесконечное число членов в главной части. Отсюда следует, что  $z = 0$  – существенно особая точка функции  $f(z)$ . Так как в полученном разложении коэффициент  $c_{-1}$  при  $z^{-1}$  равен нулю, то  $\operatorname{Res}_{z=0} f(z) = 0$ . ▲

Рассмотрим теперь вопрос о вычислении вычета в бесконечно удаленной точке. Пусть функция  $f(z)$  аналитична в окрестности бесконечно удаленной точки  $z = \infty$ . Тогда ее ряд Лорана в окрестности этой точки имеет вид

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_{-n}}{z^n} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n. \quad (9.7)$$

Вычетом функции  $f(z)$  в бесконечно удаленной точке  $z = \infty$  называется

коэффициент при  $\frac{1}{z}$  разложения в ряд Лорана по степеням  $z$  этой функции, взятый с обратным знаком. Таким образом, по определению  $\operatorname{Res}_{z=\infty} f(z) = -c_{-1}$ .

Заметим, что член  $\frac{c_{-1}}{z}$  принадлежит правильной части ряда Лорана (9.7).

По формуле (9.1)

$$\operatorname{Res}_{z=\infty} f(z) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(z) dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma^-} f(z) dz, \quad (9.8)$$

где  $\gamma$  – окружность  $|z| = R$  достаточно большого радиуса  $R$ , ориентированная положительно (против часовой стрелки), а  $\gamma^-$  – эта же окружность, ориентированная отрицательно (по часовой стрелке).

Предположим, что  $z = \infty$  является нулем порядка  $k$  функции  $f(z)$ . Тогда ее ряд Лорана имеет вид

$$f(z) = \frac{c_{-k}}{z^k} + \frac{c_{-k-1}}{z^{k+1}} + \frac{c_{-k-2}}{z^{k+2}} + \dots, \quad c_{-k} \neq 0.$$

Отсюда следует, что при  $z \rightarrow \infty$  справедлива асимптотическая формула

$$f(z) \sim \frac{A}{z^k} \quad (A = c_{-k} \neq 0).$$

Если  $k = 1$ , то  $\operatorname{Res}_{z=\infty} f(z) = -c_{-1} = -A$ , а при  $k \geq 2$  имеем  $\operatorname{Res}_{z=\infty} f(z) = 0$ .

Итак,

$$f(z) \sim \frac{A}{z}, \quad z \rightarrow \infty, \Rightarrow \operatorname{Res}_{z=\infty} f(z) = -A;$$

$$f(z) \sim \frac{A}{z^k}, \quad z \rightarrow \infty, \Rightarrow \operatorname{Res}_{z=\infty} f(z) = 0, \quad k \geq 2. \quad (9.9)$$

**Пример 9.4.** Найдите вычет в бесконечно удаленной точке для функции:

а)  $e^{\frac{1-z}{z}}$ ;    б)  $\frac{1}{z-3} \cos \frac{1}{z}$ ;    в)  $\frac{1}{z^4+4} \sin \frac{1}{z}$ .

Δ а) Имеем  $e^{\frac{1-z}{z}} = e^{-1} e^{\frac{1}{z}} = e^{-1} \left( 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!z^2} + \dots \right) = e^{-1} + \frac{e^{-1}}{z} + \frac{e^{-1}}{2!z^2} + \dots$

Из этого разложения следует, что функция  $e^{\frac{1-z}{z}}$  аналитична в точке  $z = \infty$ . Тем не менее  $\operatorname{Res}_{z=\infty} f(z) = -e^{-1} \neq 0$ .

б) Разлагая в ряд Лорана функцию  $\cos \frac{1}{z}$ , имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{z-3} \cos \frac{1}{z} &= \frac{1}{z \left( 1 - \frac{3}{z} \right)} \left( 1 - \frac{1}{2!z^2} + \frac{1}{4!z^4} - \dots \right) = \\ &= \frac{1}{z} \left( 1 + \frac{3}{z} + \frac{9}{z^2} + \dots \right) \left( 1 - \frac{1}{2!z^2} + \frac{1}{4!z^4} - \dots \right) = \frac{1}{z} + \frac{3}{z^2} - \frac{1}{2!z^3} + \dots, \end{aligned}$$

т. е. для данной функции  $z = \infty$  — простой нуль. По формуле (9.9)

$$\operatorname{Res}_{z=\infty} f(z) = -1.$$

в) Так как

$$\begin{aligned} \frac{1}{z^4+4} \sin \frac{1}{z} &= \frac{1}{z^4 \left( 1 + \frac{4}{z^4} \right)} \sin \frac{1}{z} = \frac{1}{z^4} \left( 1 - \frac{4}{z^4} + \dots \right) \left( \frac{1}{z} - \frac{1}{3!z^3} + \dots \right) = \\ &= \frac{1}{z^5} - \frac{1}{3!z^7} - \frac{4}{z^9} - \dots, \end{aligned}$$

то  $z = \infty$  является нулем порядка  $k = 5 > 0$ . Тогда по формуле (9.9)

$$\operatorname{Res}_{z=\infty} f(z) = 0. \quad \blacktriangle$$

Особые точки аналитических функций и вычеты в них играют важную роль в комплексном анализе. С помощью вычетов можно вычислять различные интегралы, не прибегая к предельному переходу или не находя первообразных. Определяющей в теории вычетов является теорема о вычетах.

**Теорема 9.1 (основная теорема о вычетах).** Пусть функция  $f(z)$  аналитична в односвязной области  $D$ , за исключением конечного числа особых точек  $z_1, z_2, \dots, z_n$ , и  $\Gamma$  – замкнутая положительно ориентированная кривая, расположенная в  $D$  и содержащая внутри себя точки  $z_1, z_2, \dots, z_n$ . Тогда

$$\oint_{\Gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{Res} f(z). \quad (9.10)$$

$\Delta$  Окружим каждую особую точку  $z_k$  функции  $f(z)$  замкнутым контуром  $\gamma_k$  так, чтобы их внутренности не пересекались (рис. 9.1). По теореме Коши для многосвязной области

$$\oint_{\Gamma} f(z) dz = \sum_{k=1}^n \oint_{\gamma_k} f(z) dz.$$

Отсюда и из формулы (9.3) получаем

$$\oint_{\Gamma} f(z) dz = \sum_{k=1}^n \oint_{\gamma_k} f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{Res} f(z).$$

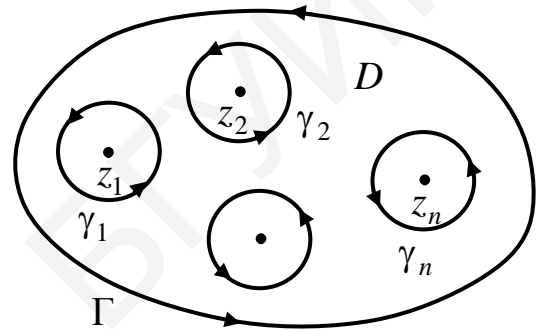


Рис. 9.1

**Следствие.** Если функция  $f(z)$  аналитична на всей расширенной комплексной плоскости  $\bar{C}$ , за исключением конечного числа точек  $z_1, z_2, \dots, z_n$ , то сумма всех вычетов функции  $f(z)$ , включая вычет в точке  $z = \infty$ , равна нулю:

$$\sum_{k=1}^n \operatorname{Res} f(z) + \operatorname{Res} f(z)_{z=\infty} = 0. \quad (9.11)$$

$\Delta$  Пусть  $\Gamma$  – положительно ориентированная окружность  $|z| = R$  радиусом  $R$ , выбранная таким образом, чтобы внутри круга  $|z| < R$  лежали все точки  $z_1, z_2, \dots, z_n$ . Тогда согласно формуле (9.10)

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} f(z) dz = \sum_{k=1}^n \operatorname{Res} f(z).$$

С другой стороны, из формулы (9.8)

$$-\frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} f(z) dz = \operatorname{Res}_{z=\infty} f(z).$$

Сложив это равенство с предыдущим, получим соотношение (9.11). ▲

**Пример 9.5.** Вычислите  $\operatorname{Res}_{z=\infty} f(z)$  для функции  $f(z) = \frac{z^2}{(z-1)(z+2)}$ .

Δ Особыми точками функции  $f(z)$  являются  $z_1 = 1$  и  $z_2 = -2$  – полюсы

первого порядка. По формуле (9.4) находим  $\operatorname{Res}_{z=1} f(z) = \frac{1}{3}$ ,  $\operatorname{Res}_{z=-2} f(z) = -\frac{4}{3}$ .

Согласно формуле (9.11)  $\operatorname{Res}_{z=\infty} f(z) = -\left(\frac{1}{3} - \frac{4}{3}\right) = 1$ . ▲

Теорема 9.1 и следствие из нее позволяют вычислять интегралы по замкнутым кривым в том случае, когда подынтегральная функция в области, ограниченной этой кривой, имеет конечное число особых точек.

**Пример 9.6.** Вычислите интеграл  $\oint_{|z|=2} \frac{z^2 dz}{(z^2+1)(z+3)}$ .

Δ Особыми точками подынтегральной функции являются полюсы первого порядка:  $z_1 = i$ ,  $z_2 = -i$  и  $z_3 = -3$ . Внутри окружности  $|z|=2$  находятся точки  $z_1 = i$  и  $z_2 = -i$  (рис. 9.2).

Находим вычеты в этих точках:  $\operatorname{Res}_{z=i} f(z) = \frac{1+3i}{20}$ ,  $\operatorname{Res}_{z=-i} f(z) = \frac{1-3i}{20}$ .

По формуле (9.10)  $\oint_{|z|=2} \frac{z^2 dz}{(z^2+1)(z+3)} = 2\pi i \left( \frac{1+3i}{20} + \frac{1-3i}{20} \right) = \frac{\pi i}{5}$ . ▲

**Пример 9.7.** Вычислите интеграл  $I = \oint_{|z|=2} \frac{\sin^2 z}{z \cos z} dz$ .

△ Особыми точками подынтегральной функции являются

$z = 0, z = \pm \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$ . В круге  $|z| < 2$  находятся точки  $z = 0$  и  $z = \pm \frac{\pi}{2}$

(рис. 9.3).

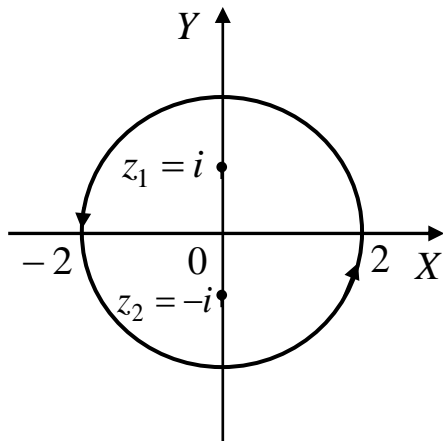


Рис. 9.2

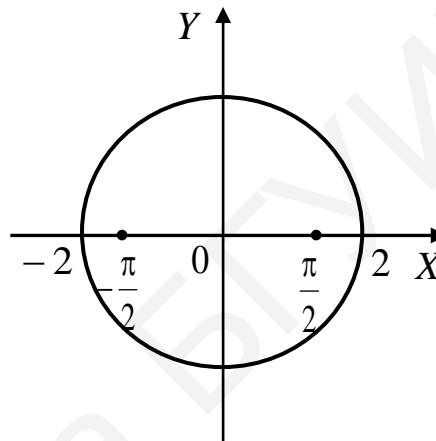


Рис. 9.3

Так как  $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin^2 z}{z \cos z} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z}{\cos z} = 0$ , то  $z = 0$  является устранимой

особой точкой. Поэтому  $\operatorname{Res} f(z)_{z=0} = 0$ . Для точек  $z = \pm \frac{\pi}{2}$ , являющихся

простыми полюсами, по формуле (9.5) находим

$$\operatorname{Res} f(z)_{z=\pm \frac{\pi}{2}} = \left. \frac{\sin^2 z}{(z \cos z)'} \right|_{z=\pm \frac{\pi}{2}} = \left. \frac{\sin^2 z}{\cos z - z \sin z} \right|_{z=\pm \frac{\pi}{2}} = -\frac{2}{\pi}.$$

Согласно равенству (9.10)  $I = 2\pi i \left( -\frac{2}{\pi} - \frac{2}{\pi} \right) = -8i$ . ▲



**Пример 9.8.** Вычислите интеграл  $I = \oint_{|z|=0,3} \frac{e^{4z} - 1 - \sin 4z}{z^2 \operatorname{sh} 8iz} dz$ .

Δ Особой точкой подынтегральной функции в круге  $|z| < 0,3$  является  $z = 0$ . Воспользовавшись разложениями для функций  $e^{4z}$ ,  $\sin 4z$  и  $\operatorname{sh} 8iz$ , получим

$$\begin{aligned} \frac{e^{4z} - 1 - \sin 4z}{z^2 \operatorname{sh} 8iz} &= \frac{\left(1 + 4z + 8z^2 + \frac{64z^3}{3!} + \dots\right) - 1 - 4z + \frac{64z^3}{3!} - \dots}{z^2 \left(8iz + \frac{(8iz)^3}{3!} + \frac{(8iz)^5}{5!} + \dots\right)} = \\ &= \frac{8z^2 + \frac{128z^3}{3!} + \dots}{8iz^3 \left(1 - \frac{64z^2}{3!} + \dots\right)} = \frac{8 + \frac{128z}{3!} + \dots}{8iz \left(1 - \frac{64z^2}{3!} + \dots\right)}. \end{aligned}$$

Замечаем, что  $z = 0$  является полюсом первого порядка для подынтегральной функции. По формуле (9.4)

$$\operatorname{Res} f(z) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z \left(8 + \frac{128z}{3!} + \dots\right)}{8iz \left(1 - \frac{64z^2}{3!} + \dots\right)} = \frac{1}{i} = -i.$$

Тогда  $I = 2\pi i(-i) = 2\pi$ . ▲

С помощью вычетов можно вычислить некоторые определенные интегралы. Общая схема их вычисления состоит в том, что отрезок действительной оси, по которому вычисляется определенный интеграл, отображается на некоторую замкнутую кривую в комплексной плоскости или включается в какой-то замкнутый контур, рассматривается интеграл по этой кривой от ФКП, являющейся продолжением подынтегральной функции исходного интеграла на область комплексной плоскости, ограниченную

упомянутой кривой. Если с помощью основной теоремы о вычетах удастся вычислить указанный, то исходный определенный интеграл находится путем выделения соответствующего слагаемого из полученного результата (например, действительной или мнимой части).

Рассмотрим некоторые примеры применения вычетов к вычислению определенных интегралов.

Начнем с интегралов вида  $\int_0^{2\pi} R(\sin t, \cos t) dt$ . Пусть  $R(\sin t, \cos t)$  – дробно-рациональная функция от  $\sin t$  и  $\cos t$ . Введем замену  $e^{it} = z$ . Так как  $z = e^{it}$ ,  $t \in [0, 2\pi]$  – параметрическое уравнение окружности  $|z| = 1$ , то функция  $z = e^{it}$  отображает отрезок  $[0, 2\pi]$  на окружность  $|z| = 1$ , ориентированную положительно.

Далее

$$\sin t = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i} = \frac{z - z^{-1}}{2i}; \quad \cos t = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2} = \frac{z + z^{-1}}{2};$$

$$dz = ie^{it} dt \Rightarrow dt = \frac{dz}{iz}. \quad (9.11)$$

Тогда

$$\int_0^{2\pi} R(\sin t, \cos t) dt = \oint_{|z|=1} R\left(\frac{z - z^{-1}}{2i}, \frac{z + z^{-1}}{2}\right) \frac{dz}{iz}. \quad (9.12)$$

Интеграл в правой части равенства (9.12) можно вычислить с помощью основной теоремы о вычетах.

**Пример 9.9.** Вычислите интеграл  $I = \int_0^{2\pi} \frac{dt}{\sqrt{5} \sin t + 3}$ .

Δ Введем замену  $z = e^{it}$ . Согласно (9.11) и (9.12)

$$I = \oint_{|z|=1} \frac{1}{\sqrt{5} \frac{z - z^{-1}}{2i}} \frac{dz}{iz} = 2 \oint_{|z|=1} \frac{dz}{\sqrt{5} z^2 + 6iz - \sqrt{5}}.$$

Особыми точками подынтегральной функции  $f(z) = \frac{1}{\sqrt{5} z^2 + 6iz - \sqrt{5}}$

являются  $z_1 = -\frac{i}{\sqrt{5}}$  и  $z_2 = -\frac{5i}{\sqrt{5}}$ . Так как  $|z_1| = \frac{1}{\sqrt{5}} < 1$ ,  $|z_2| = \sqrt{5} > 1$ , то в круге

$|z| < 1$  имеется лишь одна особая точка  $z_1 = -\frac{i}{\sqrt{5}}$  подынтегральной функции.

В этой точке

$$\operatorname{Res}_{z=-\frac{i}{\sqrt{5}}} f(z) = \lim_{z \rightarrow -\frac{i}{\sqrt{5}}} \frac{z + \frac{i}{\sqrt{5}}}{\sqrt{5} \left( z + \frac{i}{\sqrt{5}} \right) \left( z + \frac{5i}{\sqrt{5}} \right)} = \frac{-i}{4}.$$

По основной теореме о вычетах получаем

$$I = 2 \oint_{|z|=1} \frac{dz}{\sqrt{5} z^2 + 6iz - \sqrt{5}} = 2 \left( 2\pi i \operatorname{Res}_{z=-\frac{i}{\sqrt{5}}} f(z) \right) = 2 \cdot 2\pi i \left( -\frac{i}{4} \right) = \pi. \blacktriangle$$

Рассмотрим интегралы вида  $\int_{-\infty}^{\infty} R(x) dx$ . Здесь  $R(x)$  – рациональная

функция. Этот интеграл нельзя вычислить, непосредственно применив теорему о вычетах, так как контур интегрирования – бесконечная незамкнутая кривая. Чтобы воспользоваться теоремой о вычетах, введем вспомогательный замкнутый контур  $\Gamma$  (рис. 9.4), состоящий из отрезка  $[-R, R]$  действительной оси и полуокружности  $\Gamma_R$  ( $|z| = R$ ,  $0 \leq \arg z \leq \pi$ ).

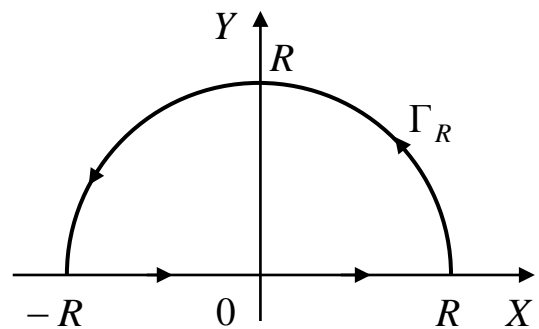


Рис. 9.4

Предварительно докажем следующую вспомогательную теорему.

**Теорема 9.2.** Пусть функция  $f(z)$  аналитична в области  $\text{Im } z > 0$ , за исключением конечного числа особых точек  $z_1, z_2, \dots, z_n$ , и непрерывна вплоть до оси  $X$ . Предположим, что несобственный интеграл  $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$  сходится и

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_R} f(z) dz = 0, \quad (9.13)$$

где  $\Gamma_R$  – верхняя полуокружность  $|z| = R, \text{Im } z > 0$ .

Тогда

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{Res } f(z), \quad (9.14)$$

где  $z_k$  – особые точки функции  $f(z)$ , расположенные в верхней полуплоскости.

Δ Рассмотрим контур  $\Gamma$  (см. рис. 9.4), состоящий из отрезка  $[-R, R]$  действительной оси  $X$  и полуокружности  $\Gamma_R: |z| = R, \text{Im } z > 0$ , расположенной в верхней полуплоскости. Радиус  $R$  возьмем настолько большим, чтобы все особые точки функции  $f(z)$ , лежащие в верхней полуплоскости, находились внутри области, ограниченной этим контуром. Тогда согласно основной теореме о вычетах

$$\oint_{\Gamma} f(z) dz = \int_{-R}^R f(x) dx + \int_{\Gamma_R} f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{Res } f(z). \quad (9.15)$$

Перейдем в этом равенстве к пределу при  $R \rightarrow \infty$ . Так как интеграл  $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$  сходится, то существует  $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$ .

Согласно условию (9.13) интеграл  $\int_{\Gamma_R} f(z) dz$  стремится к нулю при

$R \rightarrow \infty$ . Отсюда и из равенства (9.15) получаем формулу (9.14).

Вернемся к интегралу  $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$ . Пусть  $R(z) = \frac{P_n(z)}{Q_m(z)}$ , где  $n$  и  $m$  –

степени многочленов  $P_n(z)$  и  $Q_m(z)$  соответственно.

Сходимость интеграла  $\int_{-\infty}^{\infty} R(x) dx$  означает, что  $k = m - n \geq 2$  и функция

$R(z)$  аналитична на действительной оси. Следовательно, условие

$$R(z) \sim \frac{c}{z^k}, \quad z \rightarrow \infty, \quad k \geq 2 \quad (c = \text{const}) \quad (9.16)$$

является достаточным условием сходимости интеграла  $\int_{-\infty}^{\infty} R(x) dx$ .

Условие (9.16) означает, что  $|R(z)| \leq \frac{K}{|z|^k}$  для достаточно больших  $|z|$ ,

$K = \text{const}$ . Тогда

$$\left| \int_{\Gamma_R} R(z) dz \right| \leq \frac{K}{R^k} \pi R = \frac{\pi K}{R^{k-1}}, \quad k \geq 2.$$

Отсюда при  $R \rightarrow \infty$  следует справедливость равенства (9.13).

Итак, если выполнено условие (9.16), то имеет место равенство (9.13).

Тогда по формуле (9.14)

$$\int_{-\infty}^{\infty} R(x) dx = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{Res } R(z), \quad \text{Im } z_k > 0. \quad (9.17)$$

Аналогично при условии (9.16) можно получить формулу

$$\int_{-\infty}^{\infty} R(x) dx = -2\pi i \sum_{k=1}^n \text{Res } R(z), \quad \text{Im } z_k < 0. \quad (9.18)$$

Для вычисления интегралов вида  $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{itx} dx$  используется теорема

Жордана.

**Теорема 9.3 (лемма Жордана).** Пусть функция  $f(z)$  аналитична в области  $\text{Im } z > 0$ , за исключением конечного числа особых точек. Если

$M_R = \max_{z \in \Gamma_R} |f(x)| \rightarrow 0$  при  $z \rightarrow \infty$ , где  $\Gamma_R$  — верхняя полуокружность

радиусом  $R$  с центром в начале координат, то при  $t > 0$

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_R} f(z) e^{itz} dz = 0. \quad (9.19)$$

Δ Заметим, что  $\frac{2}{\pi} \theta \leq \sin \theta$  при  $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$  (рис. 9.5). Рассмотрим интеграл

$\int_{\Gamma_R} f(z) e^{itz} dz$ , где  $\Gamma_R$  – полуокружность  $|z| = R$ ,  $\text{Im } z \geq 0$  (см. рис. 9.4). Введем

замену  $z = R e^{i\theta}$ ,  $dz = i R e^{i\theta} d\theta$ ,  $0 \leq \theta \leq \pi$ . Пусть  $M_R = \max_{z \in \Gamma_R} |f(z)|$ . Поскольку

$|e^{i\theta}| = 1$ ,  $|e^{\alpha+i\beta}| = e^\alpha$ , то

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Gamma_R} f(z) e^{itz} dz \right| &= \left| \int_0^\pi f(R e^{i\theta}) e^{itR(\cos \theta + i \sin \theta)} i R e^{i\theta} d\theta \right| \leq \\ &\leq M_R R \int_0^\pi e^{-tR \sin \theta} d\theta = M_R R \left( \int_0^{\pi/2} e^{-tR \sin \theta} d\theta + \int_{\pi/2}^\pi e^{-tR \sin \theta} d\theta \right). \end{aligned} \quad (9.20)$$

Рассмотрим второй интеграл в правой части полученного неравенства.

Положим  $\pi - \theta = \tau$ . Тогда  $d\theta = -d\tau$ ,  $\sin \theta = \sin \tau$ . Следовательно,

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^\pi e^{-tR \sin \theta} d\theta = - \int_{\frac{\pi}{2}}^0 e^{-tR \sin \tau} d\tau = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-tR \sin \tau} d\tau = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-tR \sin \theta} d\theta$$

и, значит, оценка (9.20) принимает вид (рис. 9.6)

$$\left| \int_{\Gamma_R} f(z) e^{itz} dz \right| \leq 2M_R R \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-tR \sin \theta} d\theta.$$

Так как  $\sin \theta \geq \frac{2\theta}{\pi}$ ,  $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ , то

$$\left| \int_{\Gamma_R} f(z) e^{itz} dz \right| \leq 2M_R R \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-tR \sin \theta} d\theta \leq 2M_R R \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{2}{\pi} R t \theta} d\theta =$$

$$= -\frac{\pi M_R}{t} e^{-\frac{2}{\pi} R t \theta} \Big|_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}} = -\frac{\pi M_R}{t} (1 - e^{-Rt}). \quad (9.21)$$

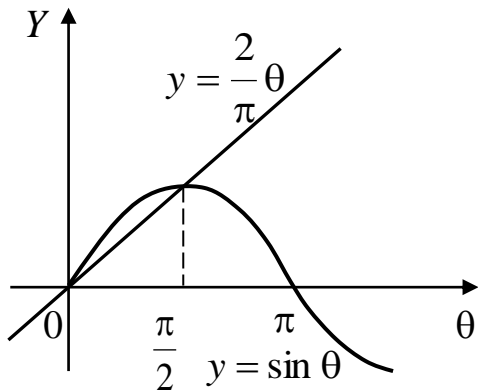


Рис. 9.5

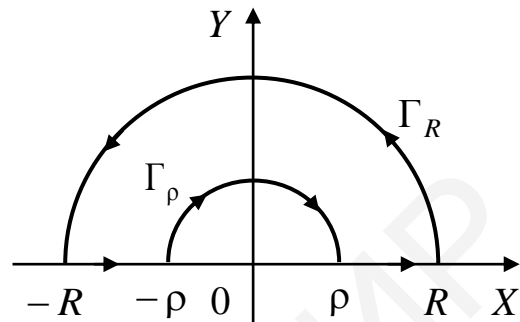


Рис. 9.6

Поскольку  $M_R \rightarrow 0$  при  $R \rightarrow \infty$ , то из оценки (9.21) и следует равенство (9.19). ▲

Аналогично доказываются следующие утверждения, являющиеся частными случаями леммы Жордана.

1. Если выполнены условия теоремы 9.3, то при  $t < 0$

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_R} f(z) e^{itz} dz = 0,$$

где  $\Gamma_R$  – нижняя полуокружность  $|z| = R, \text{Im } z < 0$ .

2. Если выполнены условия теоремы 9.3, то при  $t > 0$

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_R} f(z) e^{itz} dz = 0, \quad (9.22)$$

где  $\Gamma_R$  – левая (правая) полуокружность  $|z| = R, \text{Re } z \leq 0$  (при  $t < 0$  и  $\text{Re } z \geq 0$ ).

Рассмотрим теперь интеграл

$$\oint_{\gamma} f(z) e^{itz} dz, \quad t > 0,$$

где  $\gamma$  – замкнутый контур, состоящий из верхней полуокружности  $\Gamma_R$  и отрезка  $[-R; R]$  действительной оси (см. рис. 9.4).

Радиус  $R$  возьмем настолько большим, чтобы все особые точки  $z_1, z_2, \dots, z_n$  функции  $f(z)$  находились внутри контура  $\gamma$ . Тогда согласно основной теореме о вычетах

$$\oint_{\gamma} f(z) e^{itz} dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{Res}(f(z) e^{itz}), \operatorname{Im} z_k > 0$$

или

$$\int_{\Gamma_R} f(z) e^{itz} dz + \int_{-R}^R f(x) e^{itx} dx = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{Res}(f(z) e^{itz}), \operatorname{Im} z_k > 0 \quad (9.23)$$

(на действительной оси  $z = x$ ).

Если  $f(z)$  удовлетворяет условиям леммы Жордана, то согласно равенствам (9.19) и (9.23) при  $R \rightarrow \infty$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{itx} dx = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{Res}(f(z) e^{itz}), \operatorname{Im} z_k > 0. \quad (9.24)$$

Аналогично при  $t < 0$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{itx} dx = -2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{Res}(f(z) e^{itz}), \operatorname{Im} z_k < 0. \quad (9.25)$$

Для вычисления интегралов

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos tx dx, \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin tx dx$$

нужно в интеграле (9.24) выделить соответственно действительную и мнимую части.

**Пример 9.10.** Вычислите интеграл  $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x dx}{(x^2 + 16)(x^2 + 9)}$ .

Δ Рассмотрим следующий интеграл:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix} dx}{(x^2 + 16)(x^2 + 9)} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x dx}{(x^2 + 16)(x^2 + 9)} + i \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x dx}{(x^2 + 16)(x^2 + 9)}.$$



Тогда

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x dx}{(x^2 + 16)(x^2 + 9)} = \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix} dx}{(x^2 + 16)(x^2 + 9)}. \quad (9.26)$$

В нашем случае  $t = 1 > 0$ , а особыми точками функции  $\frac{1}{(x^2 + 16)(x^2 + 9)}$

в верхней полуплоскости являются  $z_1 = 4i$  и  $z_2 = 3i$ . Так как

$$\operatorname{Res}_{z=4i} \frac{e^{iz}}{(x^2 + 16)(x^2 + 9)} = -\frac{e^{-4}}{56i}, \quad \operatorname{Res}_{z=3i} \frac{e^{iz}}{(x^2 + 16)(x^2 + 9)} = \frac{e^{-3}}{42i},$$

то по формуле (9.24), учитывая равенство (9.26), получаем

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x dx}{(x^2 + 16)(x^2 + 9)} &= \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix} dx}{(x^2 + 16)(x^2 + 9)} = \\ &= \operatorname{Re} \left( 2\pi i \left( \frac{e^{-4}}{-56i} + \frac{e^{-3}}{42i} \right) \right) = \frac{\pi}{7} \left( \frac{e^{-3}}{3} - \frac{e^{-4}}{4} \right). \quad \blacktriangle \end{aligned}$$

Представим интеграл (9.24) в виде

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{itx} dx = \int_{-\infty}^0 f(x) e^{itx} dx + \int_0^{+\infty} f(x) e^{itx} dx.$$

В первом интеграле справа заменим  $x$  на  $-x$ . Тогда

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^0 f(x) e^{itx} dx &= - \int_{+\infty}^0 f(-x) e^{-itx} dx + \int_0^{+\infty} f(x) e^{itx} dx = \\ &= \int_0^{+\infty} (f(-x) e^{-itx} + f(x) e^{itx}) dx \end{aligned}$$

и формула (9.24) примет вид

$$\int_0^{+\infty} (f(-x) e^{-itx} + f(x) e^{itx}) dx = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{Res}(f(z) e^{itz}), \quad \operatorname{Im} z_k > 0. \quad (9.27)$$

Пусть  $f(x)$  — четная функция, т. е.  $f(-x) = f(x)$ . В этом случае равенство (9.27) можно привести к виду

$$\int_0^{+\infty} f(x) \cos tx dx = \pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{Res}(f(z) e^{itz}), \quad \operatorname{Im} z_k > 0, \quad (9.28)$$

так как  $e^{itx} + e^{-itx} = 2 \cos tx$ .

Аналогично пусть  $f(x)$  – нечетная функция, т. е.  $f(-x) = -f(x)$ . Тогда из равенства (9.27) получим

$$\int_0^{+\infty} f(x) \sin tx \, dx = \pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{Res}(f(z) e^{itz}), \quad \operatorname{Im} z_k > 0, \quad (9.29)$$

так как  $e^{itx} - e^{-itx} = 2i \sin tx$ .

Итак, получены формулы для вычисления интегралов вида

$$\int_0^{+\infty} f(x) \cos tx \, dx, \quad \int_0^{+\infty} f(x) \sin tx \, dx.$$

**Пример 9.11.** Вычислите интеграл Эйлера  $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} \, dx$ .

Δ Так как функция  $f(x) = \frac{1}{z}$  на действительной оси имеет полюс  $z = 0$ ,

то формулу (9.29) применить нельзя. Функция  $\frac{1}{z}$  удовлетворяет условиям

леммы Жордана, поэтому  $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_R} \frac{e^{iz}}{z} \, dz = 0$ , где  $\Gamma_R$  – верхняя полуокружность

$|z| = R$ ,  $\operatorname{Im} z > 0$ . Изолируем точку  $z = 0$  дугой верхней полуокружности  $\Gamma_\rho$ ,

имеющей малый радиус  $\rho$ , и рассмотрим интеграл  $\int_\gamma \frac{e^{iz}}{z} \, dz$ , где

$\gamma = \Gamma_R \cup \Gamma_\rho \cup [-R, -\rho] \cup [\rho, R]$  – контур, изображенный на рис. 9.6. Внутри

контура  $\gamma$  функция  $\frac{e^{iz}}{z}$  аналитична. Поэтому по теореме Коши

$$0 = \oint_\gamma \frac{e^{iz}}{z} \, dz = \int_{\Gamma_R} \frac{e^{iz}}{z} \, dz + \int_{-R}^{-\rho} \frac{e^{ix}}{x} \, dx + \int_{\Gamma_\rho} \frac{e^{iz}}{z} \, dz + \int_{\rho}^R \frac{e^{ix}}{x} \, dx. \quad (9.30)$$

Заменив во втором интеграле справа  $x$  на  $-x$ , получаем

$$\int_{-R}^{-\rho} \frac{e^{ix}}{x} dx = -\int_{\rho}^R \frac{e^{-ix}}{x} dx.$$

Тогда

$$\int_{\rho}^R \frac{e^{ix}}{x} dx - \int_{\rho}^R \frac{e^{-ix}}{x} dx = \int_{\rho}^R \frac{2i \sin x}{x} dx.$$

Отсюда и из равенства (9.30)

$$\int_{\Gamma_R} \frac{e^{iz}}{z} dz + \int_{\Gamma_{\rho}} \frac{e^{iz}}{z} dz + \int_{\rho}^R \frac{2i \sin x}{x} dx = 0$$

или

$$\int_{\rho}^R \frac{\sin x}{x} dx = \frac{i}{2} \int_{\Gamma_R} \frac{e^{iz}}{z} dz + \frac{i}{2} \int_{\Gamma_{\rho}} \frac{e^{iz}}{z} dz. \quad (9.31)$$

При  $R \rightarrow \infty$  первый интеграл справа согласно лемме Жордана стремится к нулю. Во втором интеграле функцию  $\frac{e^{iz}}{z}$  разложим в ряд:

$$\frac{e^{iz}}{z} = \frac{1}{z} \left( 1 + iz + \frac{(iz)^2}{2!} + \frac{(iz)^3}{3!} + \dots \right) = \frac{1}{z} + i - \frac{z}{2!} - \frac{iz^2}{3!} + \dots = \frac{1}{z} + h(z),$$

где  $h(z)$  – функция, аналитическая в окрестности  $U(0)$  точки  $z = 0$ , а значит, и ограниченная в ней.

Следовательно,  $|h(z)| \leq K, \forall z \in U(0)$ , где  $K$  – постоянная. Тогда

$$\left| \int_{\rho} h(z) dz \right| \leq \int_{\rho} |h(z)| dz \leq K \int_{\Gamma_{\rho}} dz = K \pi \rho.$$

Отсюда получаем, что  $\lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{\Gamma_{\rho}} h(z) dz = 0$ . В интеграле же  $\int_{\Gamma_{\rho}} \frac{dz}{z}$  сделаем

замену

$$z = \rho e^{i\varphi} \quad (\varphi \text{ изменяется от } \pi \text{ до } 0).$$

Тогда

$$\int_{\Gamma_\rho} \frac{dz}{z} = \int_\pi^0 \frac{\rho i e^{i\varphi} d\varphi}{\rho e^{i\varphi}} = -\pi i.$$

Таким образом,

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\rho} \frac{e^{iz}}{z} dz = \lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\rho} \left( \frac{1}{z} + h(z) \right) dz = -\pi i.$$

Окончательно из равенства (9.31) имеем

$$\begin{aligned} I &= \int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \lim_{\substack{R \rightarrow \infty \\ \rho \rightarrow 0}} \int_\rho^R \frac{\sin x}{x} dx = \frac{i}{2} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_R} \frac{e^{iz}}{z} dz + \frac{i}{2} \lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\rho} \frac{e^{iz}}{z} dz = \\ &= 0 + \frac{i}{2} (-\pi i) = \frac{\pi}{2}. \quad \blacktriangle \end{aligned}$$

Рассмотрим теперь интеграл

$$\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} f(z) e^{tz} dz, \quad (9.32)$$

в котором интегрирование ведется по прямой  $\operatorname{Re} z = \sigma$ , параллельной мнимой оси  $Y$  (рис. 9.7).

Аналогично изложенному выше можно получить следующие формулы:

при  $t > 0$

$$\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} f(z) e^{tz} dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{Res}(f(z) e^{tz}), \operatorname{Re} z_k < \sigma; \quad (9.33)$$

при  $t < 0$

$$\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} f(z) e^{tz} dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{Res}(f(z) e^{tz}), \operatorname{Re} z_k > \sigma. \quad (9.34)$$

Здесь  $z_k$  – особые точки функции  $f(z)$ , лежащие в левой полуплоскости  $\operatorname{Re} z < \sigma$  при  $t > 0$  (в правой полуплоскости  $\operatorname{Re} z > \sigma$  при  $t < 0$ ) (см. рис. 9.7).

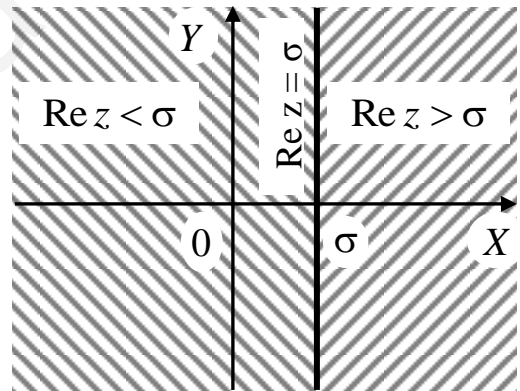


Рис. 9.7

**Пример 9.12.** Вычислите интеграл

$$I = \int_L \frac{e^{tz} dz}{(1+z)}, \quad t > 0,$$

где  $L$  – прямая  $\operatorname{Re} z = \sigma > -1$ .

$\Delta$  Единственной особой точкой подынтегральной функции, лежащей левее прямой  $L$ , является полюс второго порядка  $z = -1$ . Для нее

$$\operatorname{Res}_{z=-1} \frac{e^{tz}}{(1+z)^2} = te^{-t}. \text{ По формуле (9.33) находим } I = 2\pi i te^{-t}. \blacktriangle$$

Пусть  $z = a$  – полюс порядка  $k$  функции  $f(z)$ . Тогда

$$f(z) = \frac{\psi(z)}{(z-a)^k}, \quad \psi(a) \neq 0, \quad \text{где } \psi(z) \text{ – аналитическая функция. Отсюда}$$

логарифмическая производная

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = (\operatorname{Ln} f(z))' = (\operatorname{Ln} \psi(z) - k \operatorname{Ln} (z-a))' = \frac{\psi'(z)}{\psi(z)} - \frac{k}{z-a}. \quad (9.34)$$

Функция  $\frac{\psi'(z)}{\psi(z)}$  – аналитическая в точке  $a$ . Следовательно, главная часть

разложения функции (9.34) в ряд Лорана в окрестности точки  $a$  состоит из

одного члена  $\frac{-k}{z-a}$ . Поэтому

$$\operatorname{Res}_{z=a} \frac{f'(z)}{f(z)} = -k. \quad (9.35)$$

Если  $z = a$  – нуль порядка  $k$  функции  $f(z)$ , то эта же точка является полюсом порядка  $k$  функции  $F(z) = \frac{1}{f(z)}$ . Так как  $\operatorname{Ln} f(z) = -\operatorname{Ln} F(z)$ , то

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = (\operatorname{Ln} f(z))' = -(\operatorname{Ln} F(z))' = -\frac{F'(z)}{F(z)}. \quad (9.36)$$

Для функции  $F(z)$  точка  $a$  является полюсом порядка  $k$ . Согласно равенству (9.35)  $\operatorname{Res}_{z=a} \frac{F'(z)}{F(z)} = -k$ . Отсюда на основании равенства (9.36)

получим

$$\operatorname{Res}_{z=a} \frac{f'(z)}{f(z)} = k. \quad (9.37)$$

Таким образом, вычет логарифмической производной функции  $f(z)$  в ее нуле равен порядку этого нуля, а в полюсе – порядку этого полюса со знаком минус.

Имеет место следующая теорема.

**Теорема 9.4.** Пусть функция  $f(z)$  регулярна в области  $G$ , за исключением, быть может, полюсов, и пусть  $D$  – ограниченная односвязная область, лежащая в области  $G$  вместе со своей границей  $\Gamma$ . Тогда, если функция  $f(z)$  не имеет на  $\Gamma$  ни нулей, ни полюсов, то

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = N - P, \quad (9.38)$$

где  $N$  – число нулей, а  $P$  – число полюсов функции  $f(z)$  в области  $D$ . При этом каждый нуль считается столько раз, какова его кратность, а каждый полюс – столько раз, каков его порядок.

Δ Пусть  $a_1, a_2, \dots, a_m$  – полюсы функции  $f(z)$ , а  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  – ее нули, расположенные внутри контура  $\Gamma$ . Особыми точками функции  $\frac{f'(z)}{f(z)}$ , расположенными внутри контура  $\Gamma$ , будут только точки  $a_1, a_2, \dots, a_m, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ . В соответствии с основной теоремой о вычетах

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_{i=1}^m \operatorname{Res}_{z=a_i} \frac{f'(z)}{f(z)} + \sum_{q=1}^n \operatorname{Res}_{z=\alpha_q} \frac{f'(z)}{f(z)}. \quad (9.39)$$

Согласно (9.37) величина  $\operatorname{Res}_{z=\alpha_q} \frac{f'(z)}{f(z)}$  равна порядку нуля  $z = \alpha_q$  функции

$f(z)$ . Если каждый нуль считать столько раз, каков его порядок, то сумма

$$N = \sum_{q=1}^n \operatorname{Res}_{z=\alpha_q} \frac{f'(z)}{f(z)} \quad (9.40)$$

будет равна числу нулей функции  $f(z)$ , расположенных внутри контура  $\Gamma$ .

Аналогично, если ввести обозначение

$$P = -\sum_{i=1}^m \operatorname{Res}_{z=a_i} \frac{f'(z)}{f(z)} \quad (9.41)$$

и поставить условие полюс функции  $f(z)$  считать столько раз, каков его порядок, то из формулы (9.35) следует, что  $P$  равно числу полюсов функции  $f(z)$  внутри контура  $\Gamma$ . Из (9.39)–(9.41) вытекает равенство (9.38). ▲

Выражение  $\frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz$  называется *логарифмическим вычетом* функции  $f(z)$  относительно контура  $\Gamma$ .

Таким образом, при указанных в теореме 9.4 условиях *логарифмический вычет функции относительно замкнутого контура равен разности между количеством нулей и количеством полюсов функции, расположенных внутри данного контура.*

В частности, если внутри контура  $\Gamma$  функция  $f(z)$  не имеет особых точек, то  $P = 0$ , и логарифмический вычет равен числу нулей функции  $f(z)$ , расположенных внутри контура  $\Gamma$ .

Из формулы (9.38) имеем

$$\oint_{\Gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 2\pi i (N - P). \quad (9.42)$$

Выясним геометрический смысл левой части этого равенства. Имеем

$$\oint_{\Gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \oint_{\Gamma} d \ln f(z) = \oint_{\Gamma} d \ln |f(z)| + i \oint_{\Gamma} d \arg f(z).$$

Здесь  $\ln$  и  $\arg$  означают некоторые однозначные и непрерывные ветви этих функций. Так как функция  $\ln |f(z)|$  однозначна, то при обходе замкнутого контура  $\Gamma$ , начиная с некоторой точки  $z_0$ , значение  $\ln |f(z)|$  функции возвращается к первоначальному и, следовательно,

$$\oint_{\Gamma} d \ln |f(z)| = \ln |f(z_0)| - \ln |f(z_0)| = 0.$$

С другой стороны, при полном обходе  $\Gamma$  значение  $\arg f(z)$  может измениться, если при этом точка  $w = f(z)$  обходит начало координат  $w = 0$  (рис. 9.8) (конечное значение  $\arg f(z_0)$  отличается от начального на  $2\pi$ ).

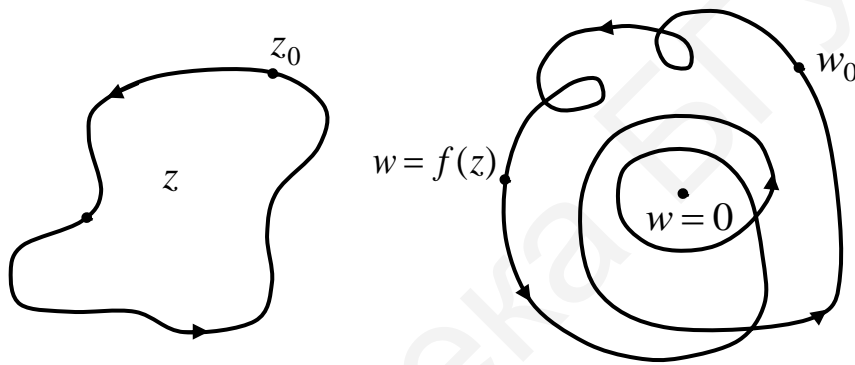


Рис. 9.8

Поэтому  $\oint_{\Gamma} d \arg f(z) = \Delta_{\Gamma} \arg f(z)$  может быть отличным от нуля. Здесь символом  $\Delta_{\Gamma} \arg f(z)$  обозначено полное изменение  $\arg f(z)$  при обходе  $\Gamma$ , т. е. разность между конечным и начальным его значениями. Таким образом,

$$\oint_{\Gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = i \Delta_{\Gamma} \arg f(z),$$

и формула (9.42) принимает вид

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \frac{1}{2\pi i} \Delta_{\Gamma} \arg f(z) = N - P. \quad (9.43)$$

Формула (9.43) выражает так называемый *принцип аргумента*: если функция  $f(z)$  регулярна всюду в замкнутой области  $D$ , кроме конечного числа полюсов, и не имеет на границе  $\Gamma$  этой области ни нулей, ни полюсов, то



деленное на  $2\pi$  полное изменение  $\arg f(z)$  при обходе  $\Gamma$  равно разности между числом нулей и полюсов  $f(z)$  внутри  $\Gamma$  с учетом их порядков.

В частности, если функция  $f(z)$  не имеет полюсов в области  $D$  ( $P = 0$ ), то формула (9.38) принимает вид

$$\frac{1}{2\pi} \Delta_{\Gamma} \arg f(z) = N.$$

**Пример 9.13.** Найдите логарифмический вычет функции  $f(z) = \frac{1+z^2}{1-\cos \pi z}$  относительно окружности  $|z| = \pi$ .

Полагая  $1+z^2=0$ , находим два простых нуля функции  $f(z)$ :  $\alpha_1 = -i$  и  $\alpha_2 = i$ . Полагая  $1-\cos 2\pi z=0$ , найдем полюсы функции  $f(z)$ :  $a_n = n, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ . Кратность каждого полюса равна 2. В круге  $|z| < \pi$  данная функция имеет два простых нуля  $\alpha_1 = -i, \alpha_2 = i$  и семь двукратных полюсов  $a_1 = -3, a_2 = -2, a_3 = -1, a_4 = 0, a_5 = 1, a_6 = 2, a_7 = 3$ . Итак,  $N = 2$  и  $P = 14$ . В силу теоремы 9.4 получаем, что логарифмический вычет данной функции  $f(z)$  относительно окружности  $|z| = \pi$  будет равен

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=\pi} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 2 - 14 = -12. \quad \blacktriangle$$

В качестве примера применения принципа аргумента докажем *теорему Руше*, которая часто используется для подсчета нулей регулярной функции в заданной области.

**Теорема 9.5 (Руше).** Если функции  $f(z)$  и  $g(z)$  регулярны в замкнутой области  $D$ , причем на границе  $\Gamma$  этой области  $|f(z)| > |g(z)|$ , то функции  $f(z)$  и  $f(z) + g(z)$  имеют в  $D$  одинаковое число нулей с учетом их порядков.

Δ Так как

$$\arg(f(z) + g(z)) = \arg\left(f(z)\left(1 + \frac{g(z)}{f(z)}\right)\right) = \arg f(z) + \arg\left(1 + \frac{g(z)}{f(z)}\right),$$

то  $\Delta_{\Gamma} \arg(f(z) + g(z)) = \Delta_{\Gamma} \arg\left(1 + \frac{g(z)}{f(z)}\right)$ . В условиях теоремы для всех

$z \in D: \left|\frac{g(z)}{f(z)}\right| < 1$ . Следовательно, точка  $w = 1 + \frac{g(z)}{f(z)}$  все время находится

внутри круга  $|w - 1| < 1$ , не содержащего точки  $w = 0$ . Значит, аргумент  $w$  при полном обходе  $\Gamma$  возвращается к первоначальному значению. Таким образом,

$\Delta_{\Gamma} \arg\left(1 + \frac{g(z)}{f(z)}\right) = 0$  и  $\Delta_{\Gamma} \arg(f(z) + g(z)) = \Delta_{\Gamma} \arg f(z)$ . Так как функции

$f(z)$  и  $g(z)$  не имеют в  $D$  полюсов, то последнее соотношение на основании принципа аргумента означает, что функции  $f(z)$  и  $f(z) + g(z)$  имеют в  $D$  одинаковое число нулей (так как на  $\Gamma: |f(z)| > |g(z)|$  и  $|f(z) + g(z)| \geq |f(z)| - |g(z)| > 0$ , то принцип аргумента применим). ▲

**Пример 9.14.** Найдите число корней уравнения:

а)  $z^8 - 4z^5 + z^2 - 1 = 0$ ; б)  $e^{z-1} = z, \lambda > 1$ , в круге  $|z| < 1$ .

Δ а) Положим  $f(z) = z^8 - 4z^5, g(z) = z^2 - 1$ . На окружности  $|z| = 1$  имеем  $|f(z)| = |z^3 - 4| \geq 4 - |z^3| = 3, |g(z)| = |z^2 - 1| \leq |z^2| + 1 = 2$ . По теореме Руше искомое число корней равно числу корней уравнения  $z^8 - 4z^5 = z^5(z^3 - 4) = 0$  в круге  $|z| < 1$ , т. е. 5, так как  $z^3 - 4 \neq 0$  при  $|z| < 1$ .

б) Примем  $f(z) = z$  и  $g(z) = -e^{z-\lambda}$ . На окружности  $|z| = 1$  имеем  $|f(z)| = 1, |g(z)| = e^{x-\lambda} < e^{1-\lambda} < 1$ , так как  $\lambda > 1$ . Следовательно, искомое число нулей функции  $z - e^{z-\lambda}$  равно числу нулей функции  $f(z) = z$ , т. е. 1.

Заметим, что непрерывная действительная функция  $\varphi(x) = e^{x-\lambda} - x$  положительна при  $x = 0$  и отрицательна при  $x = 1$ . Следовательно, по теореме Больцано – Коши она обращается в нуль на интервале  $(0, 1)$ .

### Задачи и упражнения

1. Найдите вычеты функции  $f(z)$  в ее особых точках:

$$\text{а) } f(z) = \frac{z}{z^2 - 4z + 3}; \quad \text{б) } f(z) = \frac{1}{z - z^3}; \quad \text{в) } f(z) = \frac{z^2}{z^3 + 3z^2 + z + 3};$$

$$\text{г) } f(z) = \frac{1+z}{z(z-1)^2}; \quad \text{д) } f(z) = \frac{1}{z^3(z^2+4)^2}; \quad \text{е) } f(z) = \frac{1}{z^5 - z^3};$$

$$\text{ж) } f(z) = \frac{z^2 + 1}{z^2(z^2 + z - 2)}.$$

$$\text{Ответ: а) } \operatorname{Res}_{z=1} f(z) = -\frac{1}{2}, \operatorname{Res}_{z=3} f(z) = \frac{3}{2};$$

$$\text{б) } \operatorname{Res}_{z=0} f(z) = 1, \operatorname{Res}_{z=-1} f(z) = -\frac{1}{2}, \operatorname{Res}_{z=1} f(z) = \frac{1}{2};$$

$$\text{в) } \operatorname{Res}_{z=\pm 2i} f(z) = -2, \operatorname{Res}_{z=-3} f(z) = \frac{9}{10};$$

$$\text{г) } \operatorname{Res}_{z=0} f(z) = 1, \operatorname{Res}_{z=1} f(z) = -1;$$

$$\text{д) } \operatorname{Res}_{z=0} f(z) = -\frac{1}{32}, \operatorname{Res}_{z=\pm 2i} f(z) = \frac{1}{64};$$

$$\text{е) } \operatorname{Res}_{z=0} f(z) = -1, \operatorname{Res}_{z=\pm 1} f(z) = \frac{1}{2};$$

$$\text{ж) } \operatorname{Res}_{z=0} f(z) = -\frac{1}{4}, \operatorname{Res}_{z=1} f(z) = \frac{2}{3}, \operatorname{Res}_{z=-2} f(z) = -\frac{5}{12}.$$

2. Вычислите интегралы:

$$\text{а) } \oint_{|z-2|=3} \frac{e^{z^2}}{z^2 - 6z} dz; \quad \text{б) } \oint_{|z-1|=2} \frac{\sin \frac{\pi z}{2}}{z^2 + 2z - 3} dz; \quad \text{в) } \oint_{|z|=1} \frac{\operatorname{tg} z dz}{z e^{\frac{i}{z+2}}};$$

$$\text{г) } \oint_{|z|=2} \frac{\sin iz}{z^2 - 4z + 3} dz; \text{ д) } \oint_{|z-2i|=3} \frac{dz}{z^2 + 16}; \text{ е) } \oint_{|z|=r>0} \sin \frac{1}{z} dz.$$

$$\text{Ответ: а) } -\frac{\pi i}{3}; \text{ б) } \frac{\pi i}{2}; \text{ в) } 0; \text{ г) } \pi \operatorname{sh} 1; \text{ д) } \frac{\pi}{4}; \text{ е) } 1.$$

3. Найдите вычет в бесконечно удаленной точке функции:

$$\text{а) } \sin \frac{1}{z}; \text{ б) } \frac{1}{(z-1)^2(z^2+1)}; \text{ в) } \frac{\sin z}{z^2+9}; \text{ г) } \frac{z^4+z}{z^6-1}; \text{ д) } z \cos^2 \frac{\pi}{z};$$

$$\text{е) } \frac{z^2}{z-1} \sin \frac{1}{z}.$$

$$\text{Ответ: а) } -1; \text{ б) } 0; \text{ в) } -\frac{1}{3} \operatorname{sh} 3; \text{ г) } 0; \text{ д) } \pi^2; \text{ е) } -1.$$

4. Вычислите интегралы:

$$\text{а) } \oint_{|z-i|=1} \frac{dz}{z^2+1}; \text{ б) } \oint_{|z|=2} \frac{z dz}{(z-1)^2(z+2)}; \text{ в) } \oint_{|z|=1} \sin \frac{1}{z} dz; \text{ г) } \oint_{|z|=1} e^{\frac{1}{z}} dz;$$

$$\text{д) } \oint_{|z|=1} \frac{\sin \frac{2}{z} dz}{\frac{1}{z}}; \text{ е) } \oint_{|z|=1} \cos \frac{1}{z} e^{\frac{2}{z}} dz; \text{ ж) } \oint_{|z|=\frac{2}{3}} \left( \sin \frac{1}{z^2} + e^{z^2} \cos z \right) dz;$$

$$\text{з) } \oint_{\Gamma} \frac{z \sin z}{(z-1)^5} dz, \Gamma: \frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{9} = 1; \text{ и)* } \oint_{|z|=0,5} e^z \sin \frac{1}{z} dz; \text{ к) } \oint_{|z-i|=1} \frac{e^z dz}{z^4 + 2z^2 + 1};$$

$$\text{л)* } \oint_{|z|=n} \operatorname{tg} n z dz, n \in \mathbb{N}; \text{ м)* } \oint_{|z|=R} z^n e^z dz, n \in \mathbb{N}.$$

$$\text{Ответ: а) } \pi; \text{ б) } 0; \text{ в) } 2\pi i; \text{ г) } 2\pi i; \text{ д) } 4\pi i; \text{ е) } 0; \text{ ж) } 0;$$

$$\text{з) } \frac{\sin 1 - 4 \cos 1}{12} \pi i; \text{ и)* } 2\pi i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!(2n+1)!};$$

$$\text{к) } (\cos 1 + \sin 1) + i(\sin 1 - \cos 1) \frac{\pi}{2}; \text{ л)* } -4\pi i;$$

$$\text{м)* } 2\pi i \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} \text{ при } n \geq 1, 0 \text{ при } n < -1.$$

5. Вычислите интегралы:

$$\text{а) } \int_0^{2\pi} \frac{dx}{a + \cos x}, a > 1; \text{ б) } \int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 2x}{5 - 4 \cos x}; \text{ в)* } \int_0^{2\pi} \cos^{2n} x dx;$$

$$\text{г) } \int_0^{\pi} \operatorname{ctg}(x-a) dx, \operatorname{Im} a > 0.$$

$$\text{Ответ: а) } \frac{2\pi}{\sqrt{a^2 - 1}}; \text{ б) } \frac{17\pi}{48}; \text{ в)* } \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \pi; \text{ г) } \pi i.$$

6. Вычислите интегралы:

$$\text{а) } \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin x dx}{x^2 + 4x + 20}; \text{ б) } \int_0^{\infty} \frac{\cos 2x dx}{1 + x^4}; \text{ в) } \int_0^{\infty} \frac{x \sin x dx}{x^4 + x^2 + 1};$$

$$\text{г) } \int_0^{\infty} \frac{x^3 \sin 3x}{(x^2 + 1)^2} dx; \text{ д) } \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x+1) \sin 2x dx}{x^2 + 2x + 2}.$$

$$\text{Ответ: а) } \frac{\pi e^{-4}}{2} (2 \cos 2 + \sin 2); \text{ б) } \frac{\pi e^{-\sqrt{2}}}{2\sqrt{2}} (\cos \sqrt{2} - \sin \sqrt{2});$$

$$\text{в) } \frac{\pi e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}}}{\sqrt{3}} \sin \frac{1}{2}; \text{ г) } -\frac{\pi e^{-3}}{4}; \text{ д) } \pi e^{-2} \cos 2.$$

7. Вычислите интегралы:

$$\text{а) } \int_0^{\infty} \frac{\sin ax dx}{x(x^2 + b^2)}, a > 0; b > 0; \text{ б) } \int_0^{\infty} \frac{\sin mx dx}{x(x^2 + a^2)^2}.$$

$$\text{Ответ: а) } \frac{\pi}{2b^2} (1 - e^{-ab}); \text{ б) } \frac{\pi}{2a^4} - \frac{\pi e^{-ma}}{4a^3} \left( m + \frac{2}{a} \right).$$

## Лекция 10

### ПРИЛОЖЕНИЯ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

**Плоское векторное поле. Функция тока и комплексный потенциал.**

**Комплексный потенциал в гидродинамике. Поступательный поток жидкости. Поле точечного источника. Поле точечного вихря.**

**Комплексный потенциал в электростатике. Плоское поле точечного заряда. Поле двух разноименных точечных зарядов. Электростатическое поле диполя.**

#### Задачи и упражнения

Векторное поле

$$\mathbf{a} = (P, Q, R) = P(x, y, z, t)\mathbf{i} + Q(x, y, z, t)\mathbf{j} + R(x, y, z, t)\mathbf{k},$$

где  $t$  – время, называется *плоскопараллельным*, если все векторы поля параллельны некоторой плоскости  $\alpha$ , причем в точках каждой прямой, перпендикулярной этой плоскости, в любой фиксированный момент  $t$  векторы поля  $\mathbf{a}$  равны меж собой (рис. 10.1). В дальнейшем будем считать плоскость  $\alpha$  параллельной плоскости  $XY$ , т. е.  $R = 0$ , и тогда  $\mathbf{a} = P(x, y, t)\mathbf{i} + Q(x, y, t)\mathbf{j}$ .

Векторное поле называется *стационарным*, если оно не изменяется с течением времени, т. е.  $P = P(x, y)$ ,  $Q = Q(x, y)$ . Мы будем рассматривать лишь плоские стационарные векторные поля

$$\mathbf{a} = P(x, y)\mathbf{i} + Q(x, y)\mathbf{j}. \quad (10.1)$$

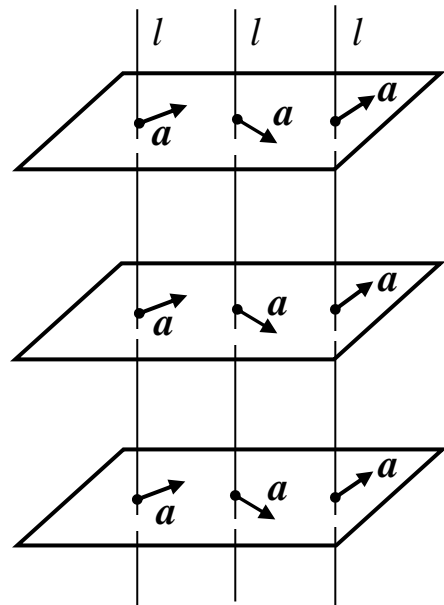


Рис. 10.1

Так как точка  $(x, y)$  расположена в плоскости  $XU$  и ее радиус-вектор  $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$  является изображением комплексного числа  $z = x + iy$ , то вектор  $\mathbf{a} = P(x, y)\mathbf{i} + Q(x, y)\mathbf{j}$  аналогично является изображением комплексного числа  $P(x, y) + iQ(x, y)$ . Поэтому вектор  $\mathbf{a}$  наряду с (10.1) можно представить в виде  $\mathbf{a} = P(x, y) + iQ(x, y)$ . Следовательно, векторное поле (10.1) можно задать, указав две действительные функции  $P(x, y)$  и  $Q(x, y)$  двух действительных  $x$  и  $y$  или одну функцию комплексной переменной  $z$ :  $f(z) = P(x, y) + iQ(x, y)$ .

Рассмотрим некоторые простейшие задачи, связанные с применением ТФКП для исследования плоских векторных полей двух типов: гидродинамического поля скоростей текущей жидкости и электростатического поля.

**Комплексный потенциал в гидродинамике.** Пусть в односвязной области  $D$  плоскости  $C_z$  определен стационарный поток идеальной жидкости и  $\mathbf{a}(z) = \mathbf{a}(x + iy)$  – скорость этого потока в точке  $z$ . Предположим, что во всех точках области  $D$  поле  $\mathbf{a}$  потенциально и соленоидально, т. е.  $\mathbf{rota} = \mathbf{0}$  и  $\mathit{div} \mathbf{a} = 0$ . Отсюда следует, что

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} = 0. \quad (10.2)$$

Условия (10.2) показывают, что рассматриваемый поток жидкости обладает потенциалом скоростей  $\varphi(x, y)$ , т. е.

$$\mathbf{a} = \mathit{grad} \varphi \Leftrightarrow P = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad Q = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad (10.3)$$

причем потенциал  $\varphi$  является гармонической функцией. Вычислить потенциал скоростей  $\varphi$  можно с помощью формулы

$$\varphi(x, y) = \int_{z_0}^z P dx + Q dy = \int_{x_0}^x P(t, y_0) dt + \int_{y_0}^y Q(x_1, t) dt + C, \quad (10.4)$$

где  $z_0 = x_0 + iy_0$  – фиксированная,  $z = x + iy$  – произвольная переменная точка рассматриваемой области.

Как известно, для всякой гармонической функции  $\varphi$  можно найти сопряженную с ней гармоническую функцию  $\psi(x, y)$ , удовлетворяющую вместе с  $\varphi$  соотношениям Коши – Римана

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad (10.5)$$

которые в силу (10.3) можно записать в виде

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = -Q, \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = P. \quad (10.6)$$

Дифференциальное уравнение векторных линий (линий тока) поля  $\mathbf{a}$  в рассматриваемом случае есть

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q}$$

Отсюда с учетом (10.6) имеем

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy = d\psi(x, y) = 0 \Rightarrow \psi(x, y) = \text{const}.$$

Таким образом, линии тока  $\psi(x, y) = \text{const}$  являются линиями уровня функции  $\psi$ . По этой причине функцию  $\psi(x, y)$  называют *функцией тока*.

Функцию тока легко можно найти по формуле

$$\psi(x, y) = \int_{z_0}^z -Q dx + P dy + C = \int_{x_0}^x -Q(t, y_0) dt + \int_{y_0}^y P(x, t) dt, \quad (10.7)$$

где  $z_0$  – фиксированная, а  $z$  – произвольная точки области  $D$ .

С помощью (10.5) легко убедиться в том, что линии  $\varphi(x, y) = \text{const}$  равного потенциала скоростей (*эквипотенциальные линии*) и линии тока  $\psi(x, y) = \text{const}$  образуют ортогональную сетку на плоскости  $XU$ .



Построим теперь ФКП

$$W = \Phi(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y), \quad (10.8)$$

называемую *комплексным потенциалом* рассматриваемого потока. Для этой функции выполнены условия Коши – Римана (10.5). Отсюда следует, что комплексный потенциал  $\Phi(z)$  – аналитическая функция в односвязной области  $D$ , где задано векторное поле  $\mathbf{a}$ . Справедливо и обратное утверждение: всякую функцию  $u = \Phi(z)$ , аналитическую в односвязной области  $D$ , можно рассматривать как комплексный потенциал некоторого плоского гидродинамического поля, расположенного в области  $D$ , с источниками и вихрями, лежащими вне  $D$ .

*Замечание.* Если рассматриваемое поле скоростей  $\mathbf{a}(z)$  имеет источники или вихри, то их можно исключить из рассмотрения с помощью надлежащего числа «дыр» в местах, где они имеются. Но такое исключение из первоначальной области мест расположения источников или вихрей делает область многосвязной, в силу чего комплексный потенциал (10.8) может оказаться многозначной функцией.

Через комплексный потенциал выражаются все основные величины, характеризующие рассматриваемый поток жидкости. Согласно правилу дифференцирования аналитической функции, используя соотношения (10.3) и (10.6), находим

$$W' = \Phi'(z) = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + i \frac{\partial \psi}{\partial x} = P - iQ,$$

откуда получаем, что

$$\mathbf{a} = P + iQ = \overline{W'}, \quad (10.9)$$

а для величины скорости имеем  $|\mathbf{a}| = |W'|$ .

На плоскости комплексного потенциала  $W$  линиям тока отвечают прямые  $\text{Im}W = \psi = \text{const}$ , параллельные действительной оси, а эквипотенциальным линиям – прямые  $\text{Re}W = \varphi = \text{const}$ , параллельные мнимой оси.

Найдем комплексный потенциал поля скоростей в некоторых частных случаях потока жидкости.

**Поступательный поток жидкости.** Вектор  $\mathbf{a}$  скорости такого потока постоянен по величине и направлению (рис. 10.2), т. е.  $\mathbf{a} = P + iQ$ , где  $P$  и  $Q$  – постоянные. По формулам (10.4) и (10.7) получаем потенциал скоростей и функцию тока:

$$\varphi(x, y) = Px + Qy + C_1; \quad \psi(x, y) = -Qx + Py + C_2.$$

Отсюда видно, что линии тока  $\psi = \text{const}$  (сплошные линии на рис. (10.3)) и эквипотенциальные линии  $\varphi = \text{const}$  (пунктирные линии), для рассматриваемого течения жидкости образуют два ортогональных семейства кривых.

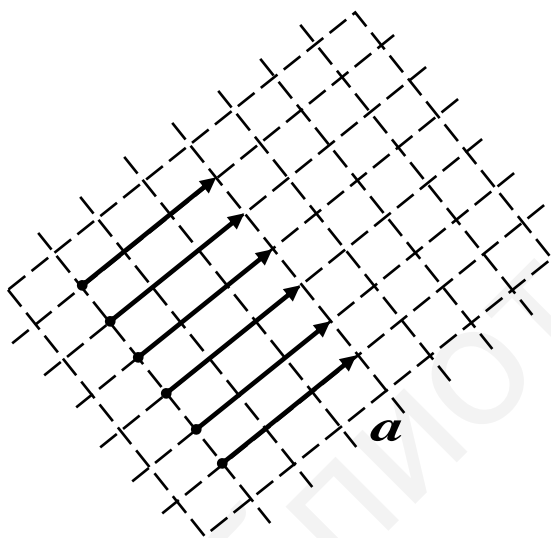


Рис. 10.2

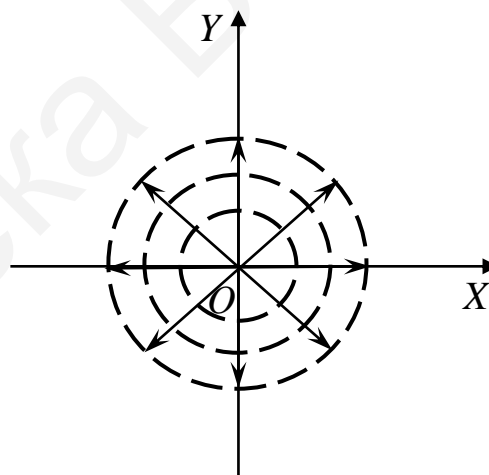


Рис. 10.3

Комплексный потенциал поступательного потока жидкости в силу (10.8)

$$w = \varphi + i\psi = (Px + Qy + C_1) + i(-Qx + Py + C_2),$$

или

$$w = \bar{\mathbf{a}} + C,$$

где  $C = C_1 + iC_2$  – комплексная постоянная.

Заметим, что при определении функций  $\varphi, \psi$  и комплексного потенциала  $w$  можно не вводить произвольных постоянных, ибо на характер поля они не влияют.

**Поле точечного источника.** Пусть плоское течение жидкости определено наличием единственного источника, расположенного в начале координат, а вихри отсутствуют. Такое поле следует представлять себе возникающим из точечных источников, непрерывно распределенных вдоль оси, перпендикулярной плоскости  $XU$  в точке  $z = 0$ . Из соображения симметрии поля ясно, что векторы скорости рассматриваемого течения жидкости можно представить в форме

$$\mathbf{a}(z) = g(r) \mathbf{r}^\circ, \quad (10.10)$$

где  $\mathbf{r}^\circ$  – орт радиуса-вектора  $\mathbf{r}$ ,  $r = |\mathbf{r}|$ .

Назовем *поток вектора поля  $\mathbf{a}$  через замкнутую или незамкнутую кривую  $\Gamma$*  криволинейный интеграл

$$\Pi = \int_{\Gamma} (\mathbf{a}, \mathbf{n}^\circ) dl, \quad (10.11)$$

где  $dl$  – элемент длины дуги кривой, а  $\mathbf{n}^\circ$  – единичный вектор нормали к кривой. Поток жидкости через любую окружность  $\Gamma$  радиусом  $r$  с центром в начале координат для вектора (10.10) в силу (10.11) равен

$$\Pi = \oint_{\Gamma} (\mathbf{a}, \mathbf{r}^\circ) dl = \oint_{\Gamma} g(r) dl.$$

На окружности  $\Gamma$  имеем  $r = |z| = \text{const}$ , а потому и  $g(r) = \text{const}$ .

Следовательно,

$$\Pi = g(r) \oint_{\Gamma} dl = g(r) 2\pi r. \quad (10.12)$$

Величина  $\Pi$ , очевидно, не зависит от радиуса  $r$  окружности  $\Gamma$  и равна количеству жидкости, истекающему в единицу времени из начала координат как из источника. Эта величина называется *интенсивностью источника*. Из (10.10) с учетом (10.12) получаем, что рассматриваемое течение жидкости характеризуется вектором скорости

$$a(z) = \frac{\Pi}{2\pi} \frac{r^\circ}{r} = \frac{\Pi}{2\pi} \frac{z}{|z|^2} = \frac{\Pi}{2\pi} \frac{1}{z}. \quad (10.13)$$

Если интенсивность  $\Pi < 0$ , то источник называется *стоком*. Из (10.13) получаем

$$P = \operatorname{Re} a = \frac{\Pi}{2\pi} \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad Q = \operatorname{Im} a = \frac{\Pi}{2\pi} \frac{y}{x^2 + y^2},$$

а формулы (10.4) и (10.7) приводят к следующим выражениям для потенциальной функции и функции тока (произвольные постоянные опущены):

$$\varphi = \frac{\Pi}{2\pi} \ln |z|; \quad \psi = \frac{\Pi}{2\pi} \operatorname{Arg} z.$$

Отсюда следует, что линиями тока  $\psi = \operatorname{const}$  рассматриваемого потока жидкости будут лучи  $\operatorname{Arg} z = \operatorname{const}$  (сплошные линии на рис. 10.4), а эквипотенциальными линиями  $\varphi = \operatorname{const}$  будут концентрические окружности  $|z| = \operatorname{const}$  с центрами в начале координат.

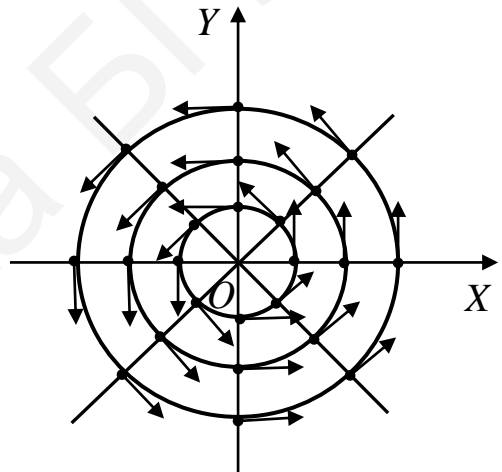


Рис. 10.4

По формуле (10.8) комплексный потенциал поля скоростей точечного источника, находящегося в начале координат, есть

$$w = \varphi + i\psi = \frac{\pi}{2\pi} (\ln |z| + i \operatorname{Arg} z) = \frac{\Pi}{2\pi} \operatorname{Ln} z. \quad (10.14)$$

*Замечание.* Комплексный потенциал поля скоростей от точечного источника, находящегося не в начале координат, а в некоторой точке  $z_0$ , можно получить в форме

$$w = \frac{\Pi}{2\pi} \operatorname{Ln} (z - z_0).$$

Если же течение жидкости определяется наличием в области, занятой ею,

нескольких источников интенсивности  $\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_n$  в точках  $z_1, z_2, \dots, z_n$  соответственно, то комплексный потенциал такого течения будет равен сумме комплексных потенциалов потоков, вызванных каждым источником в отдельности

$$w = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^n \Pi_k \operatorname{Ln}(z - z_k).$$

**Пример 10.1.** Движение жидкости задается комплексным потенциалом  $w = z^2$ . Найти потенциал скоростей, функцию тока, линии уровня, линии тока, проекции скорости вектора  $\mathbf{a}$  на оси  $X$  и  $Y$ , величину и направление вектора скорости.

$\Delta$  Полагая  $z = x + iy$ , будем иметь  $w = x^2 - y^2 + i2xy$ . Отсюда потенциал скоростей  $\varphi(x, y) = x^2 - y^2$ , а функция тока  $\psi(x, y) = 2xy$ . Линии уровня  $\varphi(x, y) = x^2 - y^2 = \text{const}$  — гиперболы. Линии тока  $\varphi(x, y) = 2xy = \text{const}$  — гиперболы.

Величины вектора скорости

$$|\mathbf{a}| = |w'(z)| = 2|\bar{z}| = 2\sqrt{x^2 + y^2}.$$

Проекции вектора скорости на координатные оси

$$P = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 2x; \quad Q = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -2y.$$

Направление вектора скорости определяется углом

$$\alpha = -\operatorname{arctg} f'(z) = -\operatorname{arctg} \frac{y}{x}.$$

Начало координат  $(0, 0)$  является точкой покоя жидкости.

**Поле точечного вихря.** Рассмотрим поле скоростей течения жидкости, вызванного одиночным вихрем, помещенным в начале координат. Основываясь на соображениях симметрии, запишем вектор скорости этого течения в виде

$$\mathbf{a}(z) = g(r) \boldsymbol{\tau}^\circ, \quad (10.15)$$

где  $\boldsymbol{\tau}^\circ$  – орт касательной к окружности  $\Gamma$  радиуса  $r$  с центром в начале координат.

Находим циркуляцию  $C$  поля  $\mathbf{a}$  вдоль окружности  $\Gamma$ :

$$C = \oint_{\Gamma} (\mathbf{a}, \boldsymbol{\tau}^\circ) dl = \oint_{|z|=r} g(r) dl = g(r) \oint_{|z|=r} dl = g(r) 2\pi r. \quad (10.16)$$

Величина циркуляции  $C$ , называемая *интенсивностью точечного вихря*, не зависит от радиуса окружности  $r$ , т. е. постоянна. Так как  $\boldsymbol{\tau}^\circ = i\mathbf{r}^\circ$  (умножение на  $i$  поворачивает вектор  $\mathbf{r}^\circ$  на  $90^\circ$  против часовой стрелки, то из (10.15) с учетом (10.16) получаем вектор скорости рассматриваемого течения:

$$\mathbf{a}(z) = \frac{C}{2\pi} \frac{\boldsymbol{\tau}^\circ}{r} = \frac{C i \mathbf{r}^\circ}{2\pi r} = \frac{C i}{2\pi} \frac{z}{|z|^2} = \frac{C i}{2\pi} \frac{1}{z}. \quad (10.17)$$

Отсюда

$$P = \operatorname{Re} \mathbf{a} = -\frac{C}{2\pi} \frac{y}{x^2 + y^2}, \quad Q = \operatorname{Im} \mathbf{a} = \frac{C}{2\pi} \frac{x}{x^2 + y^2}$$

и по формулам (10.4) и (10.7) получаем потенциал и функцию тока

$$\varphi = \frac{C}{2\pi} \operatorname{Arg} z \quad \text{и} \quad \psi = -\frac{C}{2\pi} \ln |z| \quad (\text{произвольные постоянные опущены}).$$

Итак, линиями тока в плоском поле вихря будут концентрические окружности  $|z| = \text{const}$  (рис. 10.4). В каждой точке  $z$  поля вектор скорости  $\mathbf{a}$  повернут относительно вектора  $z$  на угол  $90^\circ$  против часовой стрелки при  $C > 0$  и по часовой стрелке при  $C < 0$ . Эквипотенциальными линиями в поле  $\mathbf{a}$  будут лучи, исходящие из начала координат. Для комплексного потенциала плоского поля вихря, находящегося в начале координат, получаем выражение

$$w = \varphi + i\psi = \frac{C}{2\pi} (\operatorname{Arg} z - i \ln |z|) = \frac{C}{2\pi i} \operatorname{Ln} z.$$

Если несколько плоских вихрей с интенсивностями  $C_1, C_2, \dots, C_n$  сосредоточены в точках  $z_1, z_2, \dots, z_n$  соответственно, то комплексный потенциал определяемого или течения жидкости находится по формуле

$$w = \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=1}^n C_k \operatorname{Ln}(z - z_k).$$

**Пример 10.2.** Найти комплексный потенциал  $w$  течения жидкости, если известны уравнения эквипотенциальных линий:

$$\operatorname{ch} x \sin y + 2xy = C, \quad C = \operatorname{const}, \quad w(0) = 0.$$

Δ Из условия следует, что потенциальная функция  $\varphi(x, y) = 2xy + \operatorname{ch} x \sin y$ . Вопрос сводится, таким образом, к восстановлению аналитической функции по известной ее действительной части  $\varphi(x, y)$ .

Найдем  $w(z)$ . Имеем  $\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 2y + \operatorname{sh} x \sin y$ . По первому условию Коши –

Римана  $\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}$ , так что  $\frac{\partial \psi}{\partial y} = 2y + \operatorname{sh} x \sin y$ . Отсюда находим

$$\psi(x, y) = y^2 - \operatorname{sh} x \cos y + g(x),$$

где  $g(x)$  – произвольная дифференцируемая функция. Дифференцируя  $\psi(x, y)$  по  $x$  и используя второе условие Коши – Римана, найдем

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = -\operatorname{ch} x \cos y + g'(x) = -\frac{\partial \varphi}{\partial y} - 2x - \operatorname{ch} x \cos y \Rightarrow g'(x) = -2x.$$

Значит,  $g(x) = -x^2 + C$ , где  $C = \operatorname{const}$ .

Итак,  $\psi(x, y) = y^2 - x^2 - \operatorname{sh} x \cos y + C$ .

Значит,

$$w(z) = 2xy + \operatorname{ch} x \sin y + i(y^2 - x^2 - \operatorname{sh} x \cos y) + iC.$$

Из условия  $w(0) = 0$  находим  $0 + i0 = C \Rightarrow C = 0$ .

Таким образом, искомый комплексный потенциал

$$w(z) = 2xy + \operatorname{ch} x \sin y + i(y^2 - x^2 - \operatorname{sh} x \cos y) = -i(z^2 + \operatorname{sh} z). \blacktriangle$$

**Комплексный потенциал в электростатике.** В электростатическом поле на внесенный в его любую точку единичный заряд действует сила  $\mathbf{a} = P + iQ$ , называемая *вектором напряженности поля*. Известно, что электростатическое поле  $\mathbf{a}$  потенциально, т. е. в любой его точке

$$\operatorname{rot} \mathbf{a} = \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \mathbf{k} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0. \quad (10.18)$$

Для такого поля всегда существует однозначная функция  $\varphi(x, y)$  – потенциал поля, такая, что

$$\mathbf{a} = \operatorname{grad} \varphi = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} - i \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad (10.19)$$

причем потенциал находится по формуле

$$\varphi = -\int_{z_0}^z P dx + Q dy + C, \quad (10.20)$$

где интегрирование ведется по любой кривой, соединяющей фиксированную точку  $z_0$  с произвольной точкой  $z$  поля. Если односвязная область  $D$ , в которой задано поле, свободна от зарядов, то во всех ее точках

$$\operatorname{div} \mathbf{a} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} = 0, \quad (10.21)$$

откуда следует, что выражение  $-Q dx + P dy$  является полным дифференциалом некоторой однозначной функции  $\psi(x, y)$ . Но тогда легко показать, что линии уровня функции  $\psi$  совпадают с векторными линиями поля напряженности  $\mathbf{a}$ , называемыми *силовыми линиями* этого поля. Функция  $\psi$  называется *силовой функцией* поля  $\mathbf{a}$ , она может быть найдена по формуле

$$\psi = \int_{z_0}^z -Q dx + P dy + C. \quad (10.22)$$



Из (10.15), (10.22) следует, что функции  $\varphi$  и  $\psi$  в рассматриваемой области  $D$  удовлетворяют условиям Коши – Римана

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} \quad (10.23)$$

для функции

$$w = \Phi(z) = \psi(x, y) + i\varphi(x, y). \quad (10.24)$$

Функция  $w$  называется *комплексным потенциалом* поля  $\mathbf{a}$ .

Зная комплексный потенциал, можно найти вектор напряженности поля  $\mathbf{a}$  электростатического поля. Действительно, используя (10.21), (10.23) и (10.24), получаем

$$\mathbf{a} = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} - i \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} - i \frac{\partial \psi}{\partial x} = -i \left( \frac{\partial \psi}{\partial x} - i \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)$$

или

$$\mathbf{a} = -i \Phi'(z) = -i \bar{w}'. \quad (10.25)$$

Формула (10.25) показывает, что для получения вектора напряженности  $\mathbf{a}$  из вектора  $w'$  следует зеркально отразить последний относительно действительной оси и полученный после этого вектор повернуть на прямой угол по часовой стрелке (рис. 10.5).

Величина вектора напряженности равна

$$|\mathbf{a}| = |w'| = \sqrt{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2}.$$

Итак, для всякого плоского электростатического поля в односвязной области, свободной от зарядов, существует аналитическая функция – комплексный потенциал поля. Эта функция позволяет определить все основные характеристики рассматриваемого поля и построить его полную картину.

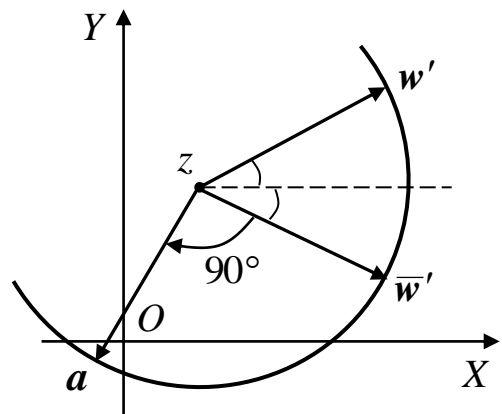


Рис. 10.5

*Замечание.* Как известно, потенциал определяется с точностью до постоянной. Эту постоянную обычно опускают, так как она не влияет ни на картину поля, ни на вектор напряженности.

**Пример 10.3.** Дан комплексный потенциал  $w = \frac{1}{z^2}$  плоского электростатического поля. Найти вектор напряженности поля, его силовые и эквипотенциальные линии.

Δ По формуле (10.25) находим вектор напряженности поля:

$$\mathbf{a} = -i \bar{w}' = \frac{2i}{z^3} = \frac{2iz^3}{|z^6|},$$

откуда его проекции на оси координат

$$P = \operatorname{Re} \mathbf{a} = 2 \frac{y^3 - 3x^2y}{(x^2 + y^2)^3}, \quad Q = \operatorname{Im} \mathbf{a} = 2 \frac{x^3 - 3xy^2}{(x^2 + y^2)^3}.$$

Потенциал и силовую функцию поля найдем в виде

$$\varphi = \operatorname{Im} w = \operatorname{Im} \left( \frac{1}{z^2} \right) = \operatorname{Im} \left| \frac{\bar{z}^2}{|z|^2} \right| = -\frac{2xy}{x^2 + y^2};$$

$$\psi = \operatorname{Re} w = \operatorname{Re} \left( \frac{\bar{z}^2}{|z|^2} \right) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}.$$

Таким образом, силовыми линиями являются кривые  $\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = C_1$ , а

эквипотенциальными линиями  $\varphi = C_2 = \operatorname{const}$  – кривые  $\frac{2xy}{x^2 + y^2} = C_2$ .

Найдем комплексный потенциал для некоторых частных случаев электростатических полей.

**1. Плоское поле точечного заряда.** Рассмотрим плоское поле точечного заряда величины  $e$ , расположенного в начале координат. В пространстве ему соответствует поле бесконечной прямой  $l$ , перпендикулярной плоскости  $C_z$  в точке  $z = 0$ , вдоль которой непрерывно распределены с постоянной линейной плотностью  $e$  (рис. 10.6). Вычислим силу  $\mathbf{a} = P + iQ$ , с которой поле действует на единичный заряд, внесенный в точку  $z = x + iy$  поля (напряженность поля в точке  $z$ ). Для величины этой силы, определяемой зарядом  $q = e \cdot dh$ , содержащемся в элементе  $dh$  прямой  $l$ , расположенном на высоте  $h$  над плоскостью  $C_z$ , получим значение

$$|d\mathbf{a}| = e \frac{dh}{r^2 + h^2},$$

где  $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ .

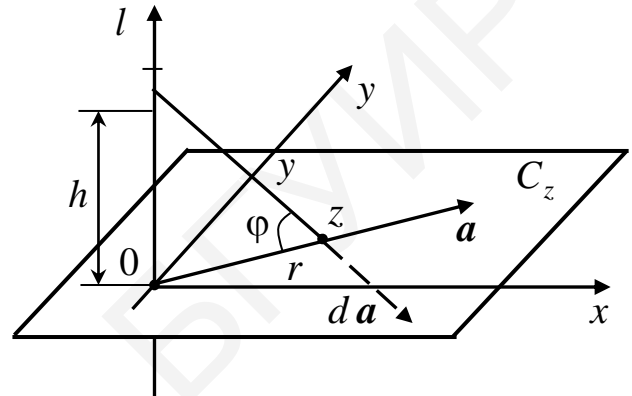


Рис. 10.6

Величина вектора  $\mathbf{a}$ , лежащего в плоскости  $C_z$ , равна сумме проекций на эту плоскость всех элементарных векторов  $d\mathbf{a}$ , в силу чего

$$|\mathbf{a}| = e \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos \varphi}{r^2 + h^2} dh = e \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos \varphi}{r} d\varphi = \frac{2e}{r},$$

где  $\varphi$  – угол между  $d\mathbf{a}$  и плоскостью  $C_z$ , так как вектор  $\mathbf{a}$  направлен по

вектору  $z$ , то  $h = r \operatorname{tg} \varphi$ ,  $dh = \frac{r d\varphi}{\cos^2 \varphi} = \frac{r^2 + h^2}{r} d\varphi$ . Имеем

$$\mathbf{a}(z) = \frac{2e}{r} \frac{z}{|z|} = 2e \frac{|z|}{|z|^2}, \quad (10.26)$$

откуда

$$P = \operatorname{Re} \mathbf{a} = 2e \frac{x}{x^2 + y^2}; \quad Q = \operatorname{Im} \mathbf{a} = 2e \frac{y}{x^2 + y^2}.$$

Формулы (10.20) и (10.22), в которых  $z_0 z$  – любой контур, не проходящий через точку  $z = 0$ , дают для потенциала и силовой функции выражения

$$\varphi = -e \ln(x^2 + y^2) = 2e \ln \frac{1}{|z|}, \quad \psi = 2e \operatorname{Arg} z = 2ei \operatorname{Ln} \frac{1}{z}.$$

Комплексный потенциал плоского поля точечного заряда находим по формуле (10.24):

$$w = \psi + i\varphi = 2e \left( \operatorname{Arg} z + i \operatorname{Ln} \frac{1}{z} \right) = 2ei \left( \ln \frac{1}{|z|} + i \operatorname{Arg} \frac{1}{z} \right) = 2ei \operatorname{Ln} \frac{1}{z}.$$

Поле (10.26) с точностью до постоянного множителя равно полю (10.13), а поэтому картины плоского поля точечного заряда и плоского гидродинамического поля источника одинаковы. Таким образом, рис. 10.3 дает и картину плоского поля точечного заряда.

Комплексный потенциал плоского поля точечного заряда, помещенный в точку  $z_0$  плоскости  $C_z$ , определяется по формуле

$$w = 2ei \operatorname{Ln} \frac{1}{z - z_0},$$

а для системы точечных зарядов  $e_1, e_2, \dots, e_n$ , расположенных в точках  $z_1, z_2, \dots, z_n$  соответственно, комплексный потенциал

$$w = 2i \sum_{k=1}^n e_k \operatorname{Ln} \frac{1}{z - z_k}. \quad (10.27)$$

**2. Поле двух разноименных точечных зарядов.** Для системы двух разноименных точечных зарядов  $+e$  и  $-e$ , расположенных в точках  $z_1$  и  $z_2$ , комплексный потенциал в силу формулы (10.27) имеет вид

$$w = 2ei \operatorname{Ln} \frac{1}{z - z_1} - 2ei \operatorname{Ln} \frac{1}{z - z_2} = 2ei \operatorname{Ln} \frac{z - z_2}{z - z_1}. \quad (10.28)$$

Отсюда найдем потенциал и силовую функцию этого поля:

$$\varphi = \operatorname{Im} w = 2e \ln \left| \frac{z - z_2}{z - z_1} \right|, \quad \psi = \operatorname{Re} w = -2e \operatorname{Arg} \frac{z - z_2}{z - z_1}.$$

Силовыми линиями  $\psi = \operatorname{const}$  или  $\operatorname{Arg} \frac{z - z_2}{z - z_1} = \operatorname{const}$  являются в этом

поле окружности, проходящие через точки  $z_1$  и  $z_2$  (сплошные линии на рис. 10.7), а эквипотенциальными

линиями  $\varphi = \operatorname{const}$  или  $\left| \frac{z - z_2}{z - z_1} \right| = \operatorname{const}$

будут окружности, для которых точки  $z_1$  и  $z_2$  будут симметричными точками (пунктирные линии на рис. 10.7).

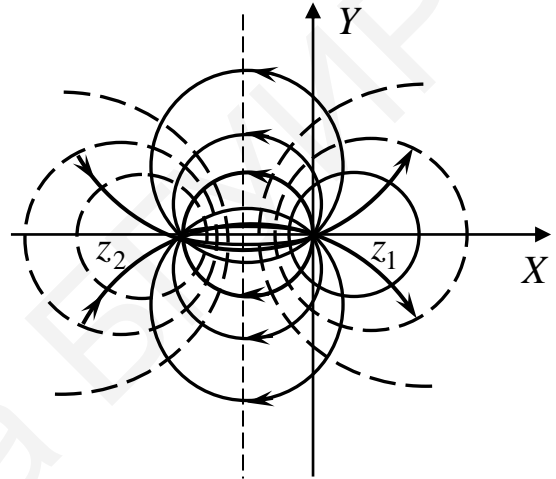


Рис. 10.7

**3. Электростатическое поле диполя.** Если  $z_1 = 0$ ,  $z_2 = -h$ , то комплексный потенциал (10.28) двух разноименных точечных зарядов примет вид

$$w = 2ei \operatorname{Ln} \frac{z+h}{h} = 2pi \operatorname{Ln} \left( 1 + \frac{h}{z} \right)^{\frac{1}{h}},$$

где  $p = eh$ . Неограниченно сближая заряды, одновременно увеличивая их так, чтобы произведение  $eh = p$  оставалось постоянным, получим в пределе так называемый *точечный электростатический диполь* с моментом  $p$ , сосредоточенный в начале координат. Комплексный потенциал диполя находим по формуле

$$w = 2pi \lim_{h \rightarrow 0} \operatorname{Ln} \left( 1 + \frac{h}{z} \right)^{\frac{1}{h}} = \frac{2pi}{z}. \quad (10.29)$$

Вектор напряженности диполя в силу (10.25) и (10.29) получаем в виде

$$a = -i\overline{w'} = i \left( \frac{2pi}{z^2} \right) = \frac{2p}{\bar{z}^2} = \frac{2p}{r^2} e^{2i\theta},$$

где  $z = re^{i\theta}$ . Величина напряженности поля убывает пропорционально расстоянию квадрату расстояния от точки до диполя, а компоненты этого вектора

$$P = \frac{2p \cos 2\theta}{r^2}, \quad Q = \frac{2p \sin 2\theta}{r^2}.$$

### Задачи и упражнения

1. Течение жидкости определяется комплексным потенциалом  $w(z)$ .

Найти потенциал скоростей, функцию тока, линии уровня, линии тока, величину и направление вектора скорости, проекции скорости на оси  $X$  и  $Y$ :

а)  $w(z) = z^2 + 2z + 2$ ; б)  $w(z) = \ln(z - 1)$ .

Ответ: а) Потенциал скоростей  $u = x^2 - y^2 + 2x + 2$ ; функция тока  $v = 2(x + 1)y$ ; линии уровня  $x^2 - y^2 + 2x = C_1$  – гиперболы; линии тока  $xu + y = C_2$  – гиперболы; величина скорости  $V = 2\sqrt{(x + 1)^2 + y^2}$ ; направление скорости  $\varphi = -\arctg \frac{y}{y + 1} + m\pi$ ,  $m = -1, 0, 1$ ; проекции скорости на оси  $X$  и  $Y$ :  $V_x = 2(x + 1)$ ,  $V_y = -2y$ ;

б) Потенциал скоростей  $u = \sqrt{\ln[(x - 1)^2 + y^2]}$ ; функция тока  $v = \arctg \frac{y}{x - 1}$ ; линии уровня  $(x - 1)^2 + y^2 = C_1$  – окружности; линии тока  $y = C_2(x - 1)$  – прямые; величина скорости  $V = \frac{1}{\sqrt{(x - 1)^2 + y^2}}$ ; направление

скорости  $\varphi = \arctg \frac{y}{x - 1} + m\pi$ ,  $m = -1, 0, 1$ ; проекции скорости на оси  $X$  и  $Y$ :

$$V_x = \frac{x-1}{(x-1)^2 + y^2}, \quad V_y = \frac{y}{(x-1)^2 + y^2}.$$

2. Построить комплексный потенциал течения жидкости, если известно уравнение линий уровня  $x^2 - y^2 - 2xy + x = \text{const}$  и  $w(0) = 0$ .

Ответ:  $w(z) = (1-i)z^2 + z$ .

3. Построить комплексный потенциал течения жидкости, если известно уравнение линий тока  $\cos x \operatorname{sh} y = \text{const}$  и  $w(0) = 0$ .

Ответ:  $w(z) = \sin z + C$ .

4.\* Найти циркуляцию по окружности  $|z \pm a| = Q$ , если известен комплексный потенциал течения жидкости  $w(z) = 5i \ln(z^2 - a^2)$ .

Ответ: циркуляция  $C_L$  равна  $-10\pi$  по обеим окружностям.

# ОПЕРАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

## Лекция 11

### ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛАПЛАСА

**Оригиналы и их изображения. Регулярность оригинала.**

**Предельное соотношение. Изображение единичной функции Хевисайда.**

**Свойства преобразования Лапласа (линейность, смещение в области изображения и смещение в области оригинала, теоремы запаздывания и подобия, изображение периодического оригинала). Свертка оригиналов и ее свойства. Изображение свертки (теорема Бореля).**

**Дифференцирование и интегрирование оригиналов и изображений.**

**Оригиналы, зависящие от параметра. Предельные соотношения.**

**Интеграл Дюамеля. Графические оригиналы.**

**Таблица оригиналов и их изображений.**

**Задачи и упражнения**

Пусть  $f(t)$  – функция действительной переменной  $t$ , определена на полубесконечной прямой  $0 < t < +\infty$ . Предположим, что существует несобственный интеграл

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt, \quad (11.1)$$

зависящий от параметра  $p = \sigma + iw$ . Он называется *интегральным преобразованием Лапласа* или  *$L$  – преобразованием*. При этом функция  $F(p)$  называется *изображением* функции  $f(t)$  по Лапласу, а  $f(t)$  – *функцией оригиналом* или просто *оригиналом*. *Операционное исчисление*, основоположником которого является Хевисайд, рассматривает функции и их свойства, связанные с интегральным преобразованием Лапласа. Говорят, что



функция  $f(t)$  определена во временной области, а ее изображение  $F(p)$  – в частотной области, причем  $p = \sigma + i\omega$  называется *комплексной частотой*.

Если  $F(p)$  – изображение по Лапласу оригинала  $f(t)$ , то будем писать  $F(p) \doteq f(t)$  или  $F(p) = L(f(t))$ .

Схематически это равенство иллюстрирует рис. 11.1.

Если  $f(t)$  – оригинал для  $F(p)$ , то этот факт обозначается так:



Рис. 11.1

$f(t) \doteq F(p)$  или  $f(t) = L^{-1}(F(p))$ .

В операционном исчислении рассматриваются функции-оригиналы  $f(t)$ , удовлетворяющие следующим условиям:

а)  $f(t)$  – кусочно-непрерывная, интегрируемая на любом конечном интервале оси  $t$  функция;

б)  $f(t) \equiv 0, \forall t < 0$ ;

в) существуют постоянные  $M$  и  $\sigma$ , такие, что

$$|f(t)| \leq M e^{\sigma t}, \quad \forall t > 0. \quad (11.2)$$

Точная нижняя грань  $\sigma_0$  всех чисел  $\sigma$ , для которых справедливо равенство (11.2), называется *показателем роста* функции  $f(t)$ .

**Пример 11.1.** Предполагая, что  $f(t) \equiv 0, \forall t < 0$ , указать, какие из функций являются оригиналами:

а)  $f(t) = \sin t$ ; б)  $f(t) = \frac{t}{t^2 - 4}$ ; в)  $f(t) = \frac{1}{t}$ ; г)  $f(t) = t^n, n = 0, 1, 2, \dots$ .

Δ а) Так как  $|\sin t| \leq 1 = e^{0t}$ , то функция  $\sin t$  есть оригинал с показателем роста  $\sigma_0 = 0$ .

б) Функция  $f(t) = \frac{t}{t^2 - 4}$  не является оригиналом, так как при  $t = 2$  она имеет разрыв второго рода.

в) Функция  $\frac{1}{t}$  также не является оригиналом, так как  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} = +\infty$ .

г) Так как  $t^n = o(e^{\sigma t})$ ,  $t \rightarrow +\infty$ ,  $\sigma > 0$ , то  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t^n}{e^{\sigma t}} = 0$ , и, значит,

существует константа  $M$ , такая, что  $t^n \leq M e^{\sigma t}$ ,  $\forall t \geq 0$ . Итак,  $t^n$ ,  $n = 0, 1, \dots$  является оригиналом с показателем роста  $\sigma_0 = 0$ . ▲

Справедлива следующая теорема о существовании оригинала.

**Теорема 11.1.** *Всякий оригинал  $f(t)$  имеет изображение  $F(p)$ , являющееся регулярной (однозначной аналитической) функцией в полуплоскости  $\operatorname{Re} p \geq \sigma > \sigma_0$ , где  $\sigma_0$  – показатель роста функции  $f(t)$ .*

Δ Покажем, что интеграл Лапласа (11.1) сходится равномерно и абсолютно в области  $\operatorname{Re} p \geq \sigma > \sigma_0$  (рис. 11.2). Действительно, учитывая неравенство (11.2), имеем

$$\begin{aligned} |F(p)| &= \left| \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt \right| \leq \int_0^{\infty} |f(t)| \cdot |e^{-(\sigma+iw)t}| dt \leq \int_0^{\infty} |f(t)| e^{-\sigma t} dt \leq \\ &\leq M \int_0^{\infty} e^{-(\sigma-\sigma_0)t} dt \leq -\frac{M}{\sigma-\sigma_0} e^{-(\sigma-\sigma_0)t} \Big|_0^{\infty} = \frac{M}{\sigma-\sigma_0}, \end{aligned}$$

если  $\sigma > \sigma_0$ .

Отсюда согласно признаку Вейерштрасса и вытекает равномерная и абсолютная сходимость интеграла (11.1) по параметру  $p$  в области  $\operatorname{Re} p \geq \sigma > \sigma_0$ .

Покажем, что в этой области функция  $F(p)$  аналитическая. Продифференцировав формально интеграл Лапласа (11.1) по  $p$ , получим

$$F'(p) = \int_0^{\infty} -t f(t) e^{-pt} dt.$$

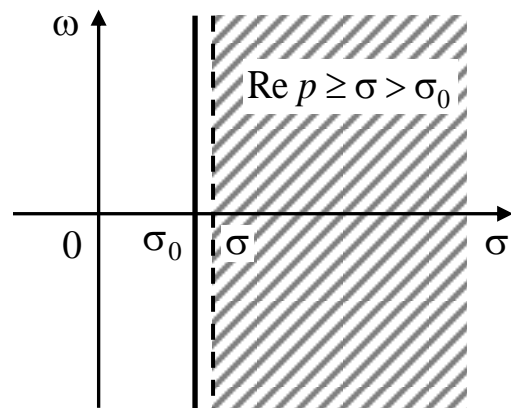


Рис. 11.2

Докажем, что в этом равенстве справа интеграл сходится равномерно в области  $\sigma > \sigma_0$ . Действительно, согласно неравенству (11.2), при  $\sigma > \sigma_0$  имеем оценку

$$\left| \int_0^{\infty} -t f(t) e^{-pt} dt \right| \leq \left| M \int_0^{\infty} t e^{-(\sigma-\sigma_0)t} dt \right| = -\frac{M}{\sigma-\sigma_0} \int_0^{\infty} t d e^{-(\sigma-\sigma_0)t} =$$

$$= -\frac{M}{\sigma-\sigma_0} t e^{-(\sigma-\sigma_0)t} \Big|_0^{\infty} + \frac{M}{\sigma-\sigma_0} \int_0^{\infty} e^{-(\sigma-\sigma_0)t} dt = -\frac{M}{\sigma-\sigma_0} e^{-(\sigma-\sigma_0)t} \Big|_0^{\infty} = \frac{M}{(\sigma-\sigma_0)^2}.$$

Отсюда по признаку Вейерштрасса интеграл  $\int_0^{\infty} -t f(t) e^{-pt} dt$  сходится равномерно в области  $\sigma > \sigma_0$ . Тогда функция  $F(p)$  дифференцируема, т. е. является аналитической в области  $\operatorname{Re} p \geq \sigma > \sigma_0$ . ▲

**Следствие.** *Справедливо предельное соотношение*

$$\lim_{\operatorname{Re} p \rightarrow \infty} F(p) = 0, \quad (11.4)$$

где  $p$  находится в области  $\operatorname{Re} p \geq \sigma > \sigma_0$ .

Равенство (11.4) следует из оценки (11.3) функции  $F(p)$ .

*Замечание.* Из теоремы 11.1, следует, что не всякая функция  $F(p)$  может служить изображением некоторого оригинала. Например, функция  $\operatorname{ctg} p$  имеет бесконечное множество полюсов  $p_k = k\pi$ ,  $k \in \mathbf{Z}$ . Поэтому нет такой области  $\operatorname{Re} p \geq \sigma > \sigma_0$ , в которой  $\operatorname{ctg} p$  является аналитической функцией. Функция  $\frac{p}{p-1}$  также не является изображением для функций, определенных в математическом анализе, ибо не выполняется условие (11.4) ( $\lim_{\operatorname{Re} p \rightarrow \infty} \frac{p}{p-1} = 1!$ ).

**Пример 11.2.** Найдите изображение единичной функции Хевисайда

$$1(t) = \begin{cases} 1, & t > 0; \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

График этой функции приведен на рис. 11.3.

Δ Из равенства  $|1(t)| = 1 = e^{0t}$  следует, что  $1(t)$  – оригинал с показателем роста  $\sigma_0 = 0$ . По формуле (11.1)

$$L(1(t)) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} dt = \frac{e^{-pt}}{-p} \Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{p}.$$

Итак,

$$1(t) \doteq \frac{1}{p}. \quad (11.5)$$

С помощью единичной функции Хевисайда всякий оригинал  $f(t)$  можно представить в виде

$$f(t) \cdot 1(t) = \begin{cases} f(t), & t > 0; \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

Например, функция  $\sin t$  определена на всей действительной оси и не удовлетворяет условию 2 оригинала. Функция же  $\sin t \cdot 1(t)$  рис. (11.4) уже есть оригинал, что доказано в примере 1, а.

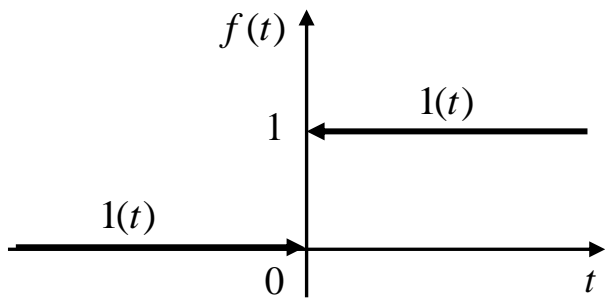


Рис. 11.3

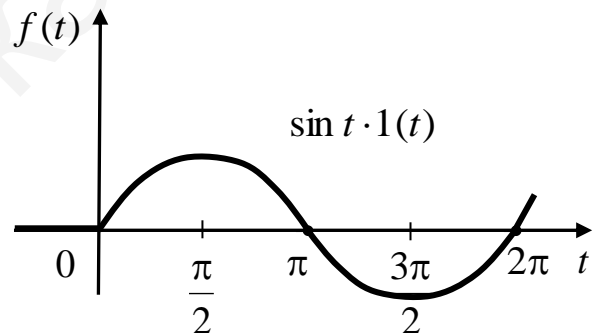


Рис. 11.4

**Пример 11.3.** Найдите изображения оригиналов:

а)  $f(t) = e^{\alpha t}$ ; б)  $f(t) = t$ ; в)  $f(t) = t^n$ .

$$\Delta \text{ а) } L(e^{\alpha t}) = \int_0^{\infty} e^{\alpha t} e^{-pt} dt = \int_0^{\infty} e^{-(p-\alpha)t} dt = \frac{e^{-(p-\alpha)t}}{-(p-\alpha)} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{p-\alpha},$$

если  $\operatorname{Re} p > \alpha$ .

Итак,

$$e^{\alpha t} \doteq \frac{1}{p-\alpha}. \quad (11.6)$$

$$\text{б) } \mathbf{L}(t) = \int_0^{+\infty} t e^{-pt} dt = -\frac{t e^{-pt}}{p} \Big|_{t=0}^{t=+\infty} + \frac{1}{p} \int_0^{+\infty} e^{-pt} dt = \frac{1}{p^2},$$

$\text{Re } p > 0$ , так как  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t e^{-pt}}{p} = 0$ .

Итак,

$$t \doteq \frac{1}{p^2}. \quad (11.7)$$

в) По индукции можно доказать, что

$$t^n \doteq \frac{n!}{p^{n+1}}. \quad \blacktriangle \quad (11.8)$$

Перейдем к изложению *основных свойств оригиналов и изображений*.

**1. Линейность преобразования Лапласа.** Пусть  $f_1(t)$  и  $f_2(t)$  – оригиналы с показателями роста  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  соответственно. Тогда очевидно, что их линейная комбинация  $\alpha_1 f_1(t) + \alpha_2 f_2(t)$ ,  $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbf{C}$  является оригиналом с показателем роста  $\sigma = \max\{\sigma_1, \sigma_2\}$ . В силу линейности интеграла (11.1) имеем

$$\mathbf{L}\{\alpha_1 f_1(t) + \alpha_2 f_2(t)\} = \alpha_1 \mathbf{L}\{f_1(t)\} + \alpha_2 \mathbf{L}\{f_2(t)\}. \quad (11.9)$$

**Пример 11.4.** Найдите изображение оригиналов:

а)  $\sin \beta t$ ; б)  $\cos \beta t$ ; в)  $\text{sh } \beta t$ ; г)  $\text{ch } \beta t$ .

$\Delta$  а) Так как  $\sin \beta t = \frac{1}{2i}(e^{i\beta t} - e^{-i\beta t})$  и  $e^{\alpha t} \doteq \frac{1}{p - \alpha}$ , то согласно формуле (11.9)

$$\sin \beta t \doteq \frac{1}{2i} \left( \frac{1}{p - i\beta} - \frac{1}{p + i\beta} \right) = \frac{\beta}{p^2 + \beta^2}.$$

Итак,

$$\sin \beta t \doteq \frac{\beta}{p^2 + \beta^2}. \quad (11.10)$$

Аналогично согласно формуле  $\cos \beta t = \frac{1}{2}(e^{i\beta t} - e^{-i\beta t})$  получаем

$$\cos \beta t \doteq \frac{p}{p^2 + \beta^2}. \quad (11.11)$$

в)–г). Так как  $\operatorname{sh} \beta t = \frac{1}{2}(e^{\beta t} - e^{-\beta t})$ ,  $\operatorname{ch} \beta t = \frac{1}{2}(e^{\beta t} + e^{-\beta t})$ , то

$$\operatorname{sh} \beta t \doteq \frac{\beta}{p^2 + \beta^2}, \quad \operatorname{ch} \beta t \doteq \frac{p}{p^2 - \beta^2}. \quad (11.12)$$

Следующие свойства операционного исчисления, сформулированные в виде теорем, позволяют без непосредственного вычисления интеграла (11.1) находить изображение по Лапласу для многих функций.

**Теорема 11.2 (смещение в области изображения).** Если  $f(t) \doteq F(p)$ , то для любого  $\alpha \in \mathbb{C}$

$$e^{\alpha t} f(t) \doteq F(p - \alpha). \quad (11.13)$$

Δ Имеем

$$\mathbf{L}(f(t)e^{\alpha t}) = \int_0^{\infty} f(t)e^{\alpha t} e^{-pt} dt = \int_0^{\infty} f(t) e^{-(p-\alpha)t} dt = F(p - \alpha). \quad \blacktriangle$$

Теорема 11.2 схематически представлена на рис. 11.5.

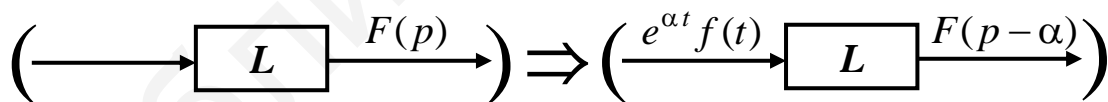


Рис. 11.5

**Пример 11.5.** Найти изображение оригиналов:

а)  $e^{\alpha t} \sin \beta t$ ; б)  $e^{\alpha t} \cos \beta t$ ; в)  $e^{\alpha t} t^n$ ,  $n = 0, 1, \dots$

$$\Delta \text{ а)–б) } e^{\alpha t} \sin \beta t \doteq \frac{\beta}{(p - \alpha)^2 + \beta^2}; \quad e^{\alpha t} \cos \beta t \doteq \frac{p - \alpha}{(p - \alpha)^2 + \beta^2}; \quad (11.14)$$

$$\text{в) } e^{\alpha t} t^n \doteq \frac{n!}{(p - \alpha)^{n+1}}, \quad n = 0, 1, \dots \quad \blacktriangle \quad (11.15)$$

Пусть  $f(t)$  – оригинал. Тогда  $f(t-a)$ ,  $a > 0$  – также оригинал с аргументом, запаздывающим на величину  $a$ . График  $f(t-a)$  получается путем сдвига графика  $f(t)$  вправо на величину  $a$  (рис. 11.6). Это значит, что оригинал  $f(t-a)$  имеет вид

$$f(t-a) = f(t-a) \cdot 1(t-a), \quad (11.16)$$

где  $1(t-a)$  – смещенная на  $a$  вправо вдоль оси  $t$  единичная функция Хевисайда  $1(t)$  (рис. 11.7).

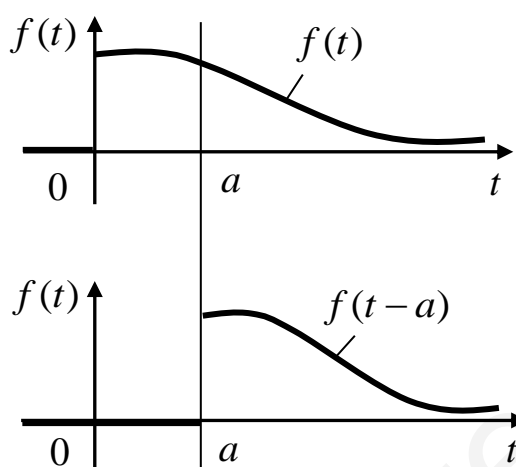


Рис. 11.6

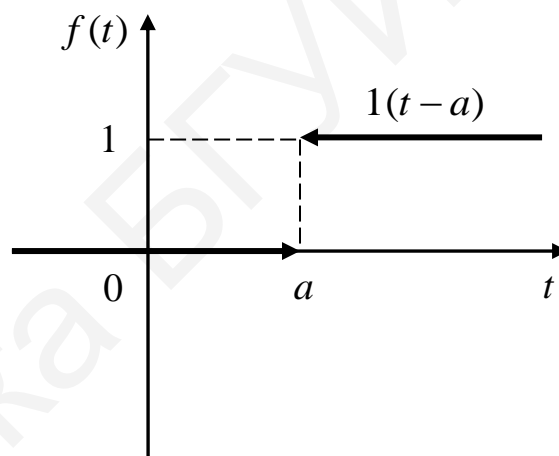


Рис. 11.7

Справедлива теорема запаздывания.

**Теорема 11.3 (запаздывания).** Если  $f(t) \doteq F(p)$  и  $a > 0$ , то

$$f(t-a) \doteq e^{-ap} F(p). \quad (11.17)$$

Δ Имеем

$$L(f(t-a)) = \int_0^{\infty} f(t-a) e^{-pt} dt = \int_a^{\infty} f(t-a) e^{-pt} dt,$$

так как  $f(t-a) \equiv 0$  при  $t < a$ . В последнем интеграле сделаем замену  $t-a = \tau$ ,  $dt = d\tau$ .

Тогда

$$L(f(t-a)) = \int_0^{\infty} f(\tau) e^{-ap} e^{-p\tau} d\tau = e^{-ap} \int_0^{\infty} f(\tau) e^{-p\tau} d\tau = e^{-ap} F(p).$$

▲

Формула (11.17) проиллюстрирована рис. 11.8.

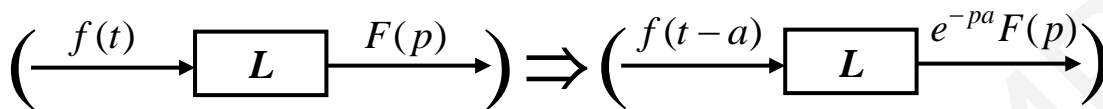


Рис. 11.8

Аналогично доказывается формула (при  $a > 0$ ):

$$f(t+a) \doteq e^{ap} \left( F(p) - \int_0^a f(t) e^{-pt} dt \right). \quad (11.18)$$

Это – формула опережения.

**Пример 11.6.** Найдите изображение оригинала  $\sin(t - \frac{\pi}{2})$ ,  $t > \frac{\pi}{2}$ .

Δ По формуле (11.17)

$$L\left(\sin\left(t - \frac{\pi}{2}\right)\right) = e^{-\frac{\pi p}{2}} L(\sin t) = e^{-\frac{\pi p}{2}} \frac{1}{p^2 + 1}.$$

Заметим, что в рассматриваемом примере оригинал

$$\sin\left(t - \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(t - \frac{\pi}{2}\right) \cdot 1\left(t - \frac{\pi}{2}\right).$$

Если это не учитывать, то используя формулу  $\sin\left(t - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos t$ ,

получим

$$L\left(\sin\left(t - \frac{\pi}{2}\right)\right) = -L(\cos t) = -p/(p^2 + 1),$$

что неверно, так как теперь уже оригиналом является  $(-\cos t)$ . Поэтому «сдвинутый» оригинал следует представить в виде (11.16).



**Пример 11.7.** Найдите изображение оригинала  $f(t) = f_1(t) + f_2(t)$ ,

$$\text{где } f_1(t) = \begin{cases} \sin wt, & wt \geq 0; \\ 0, & wt < 0; \end{cases} \quad f_2(t) = \begin{cases} \sin (wt - \pi), & wt \geq \pi; \\ 0, & wt < \pi. \end{cases}$$

Графики функций

$f_1(t)$ ,  $f_2(t)$  и  $f(t)$  изображены на

рис. 11.9.

Δ Имеем

$$f(t) = \begin{cases} \sin wt, & 0 < t < \frac{\pi}{w}; \\ 0, & t > \frac{\pi}{w}. \end{cases}$$

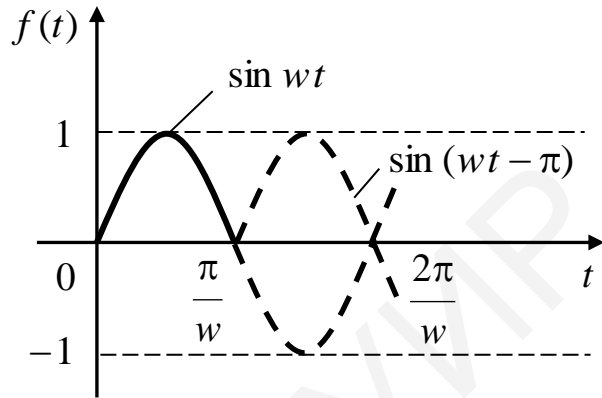


Рис. 11.9

Согласно (11.16)

$$f(t) = f_1(t) + f_2(t) = \sin wt + \sin w \left( t - \frac{\pi}{w} \right) \cdot 1 \left( t - \frac{\pi}{w} \right).$$

По теореме запаздывания с учетом формулы (11.10) получаем

$$L(f(t)) = \frac{w}{p^2 + w^2} + e^{-\frac{\pi p}{w}} \cdot \frac{w}{p^2 + w^2} = \frac{w}{p^2 + w^2} \left( 1 - e^{-\frac{\pi p}{w}} \right). \blacktriangle$$

Справедлива следующая теорема.

**Теорема 11.4 (подобия).** Если  $f(t) \doteq F(p)$  и  $\lambda > 0$ , то

$$f(\lambda t) \doteq \frac{1}{\lambda} F\left(\frac{p}{\lambda}\right). \quad (11.19)$$

Δ Имеем

$$L(f(\lambda t)) = \int_0^{\infty} f(\lambda t) e^{-pt} dt = \left| \begin{array}{l} \lambda t = \tau \\ dt = \frac{1}{\lambda} d\tau \end{array} \right| = \frac{1}{\lambda} \int_0^{\infty} f(\tau) e^{-\frac{p}{\lambda} \tau} d\tau = \frac{1}{\lambda} F\left(\frac{p}{\lambda}\right). \blacktriangle$$

Содержание теоремы проиллюстрировано на рис. 11.10.

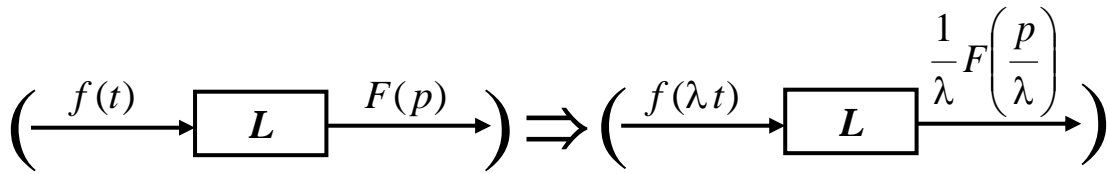


Рис. 11.10

**Пример 11.8.** Зная, что  $\cos t \doteq \frac{p}{p^2 + 1}$  и пользуясь теоремами линейности

и подобия, найдите изображение оригинала  $f(t) = \sin^4 t$ .

Δ Имеем

$$\sin^4 t = \left( \frac{1 - \cos 2t}{2} \right)^2 = \frac{1 - 2\cos 2t + \frac{1 + \cos 4t}{2}}{4} = \frac{3}{8} - \frac{1}{2} \cos 2t + \frac{1}{8} \cos 4t.$$

Тогда по формуле (11.19)

$$\begin{aligned} L(\sin^4 t) &= \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{p} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\frac{p}{2}}{\left(\frac{p}{2}\right)^2 + 1} + \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{\frac{p}{4}}{\left(\frac{p}{4}\right)^2 + 1} = \\ &= \frac{1}{8} \left( \frac{3}{p} - \frac{4p}{p^2 + 4} + \frac{p}{p^2 + 16} \right). \quad \blacktriangle \end{aligned}$$

Пусть  $f(t)$  – периодический оригинал с периодом  $T > 0$ . Тогда имеет место следующая теорема.

**Теорема 11.5.** Если  $f(t)$  – оригинал с периодом  $T > 0$ , то

$$f(t) \doteq \frac{\int_0^T f(t) e^{-pt} dt}{1 - e^{-pT}}. \quad (11.20)$$

Δ Так как  $f(t) = f(t + T)$ , то по формуле (11.18)

$$L(f(t + T)) = L(f(t)) = e^{pT} \left( L(f(t)) - \int_0^T f(t) e^{-pt} dt \right).$$

Решив это уравнение относительно  $L(f(t))$ , получим формулу (11.20).  $\blacktriangle$

**Пример 11.9.** Найдите изображение оригинала  $|\sin \beta t|$ .

Δ Данный оригинал является периодической функцией с периодом  $T = \frac{\pi}{\beta}$ . По формуле (11.20) ее изображение

$$F(p) = \frac{\int_0^{\frac{\pi}{\beta}} |\sin \beta t| e^{-pt} dt}{1 - e^{-\frac{\pi p}{\beta}}} = \frac{1 + e^{-\frac{\pi p}{\beta}}}{1 - e^{-\frac{\pi p}{\beta}}}. \blacktriangle$$

**Пример 11.10.** Найдите изображение периодического единичного импульса с периодом  $T > 0$ , действующего в течение времени  $t = Q$  (рис. 11.11).

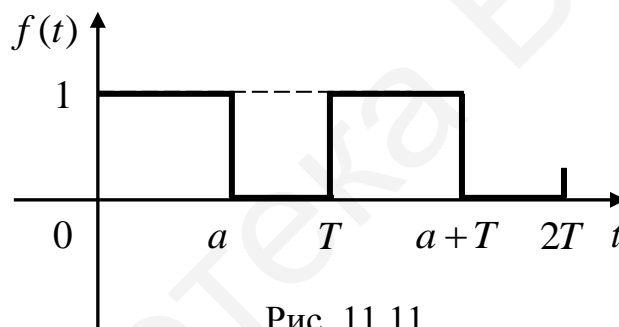


Рис. 11.11

Δ Заметим, что на промежутке  $(0, T)$ , равном периоду, импульс описывается функцией

$$f(t) = 1(t) - 1(t - a) = \begin{cases} 1, & 0 < t < a; \\ 0 & a < t < T. \end{cases}$$

Вычислим интеграл

$$\int_0^T f(t) e^{-pt} dt = \int_0^a 1 \cdot e^{-pt} dt = -\frac{1}{p} (e^{-pa} - 1).$$

Тогда по формуле (11.20) искомое изображение

$$L(f(t)) = \frac{1 - e^{-ap}}{p(1 - e^{-pT})}. \blacktriangle$$

Выясним теперь, как изображается по Лапласу *свертка* (\*) двух оригиналов  $f_1(t)$  и  $f_2(t)$  – функция, обозначаемая  $f_1(t) * f_2(t)$  и равная

$$f_1(t) * f_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau. \quad (11.21)$$

Так как для оригиналов  $f_1(\tau) \equiv 0$  при  $\tau < 0$  и  $f_2(t - \tau) \equiv 0$  при  $\tau > t$ , то для свертки (11.21) получаем следующее выражение:

$$f_1(t) * f_2(t) = \int_0^t f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau. \quad (11.22)$$

Свойства свертки изучены нами в Фурье-анализе, там же приведено их доказательство.

Напомним эти свойства.

1.  $f_1(t) * f_2(t) = f_2(t) * f_1(t)$  (коммутативность).

2.  $(f_1 * f_2) * f_3 = f_1 * (f_2 * f_3)$  (ассоциативность).

3.  $(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2) * f_3 = \alpha_1 (f_1 * f_3) + \alpha_2 (f_2 * f_3)$  (линейность). Здесь

$$\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}.$$

Покажем, что *свертка двух оригиналов также есть оригинал*. В самом деле, если  $t < 0$ , то  $t - \tau < 0$  и, значит,  $f_2(t - \tau) \equiv 0$ . Отсюда и из равенства (11.22) следует, что  $f_1(t) * f_2(t) \equiv 0$ ,  $t < 0$ . Свертка как интеграл (11.22) с переменным верхним пределом есть непрерывная функция при всех  $t > 0$ .

Пусть  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  – показатели роста оригиналов  $f_1(t)$  и  $f_2(t)$ , т. е.  $|f_1(t)| \leq M_1 e^{\sigma_1 t}$ ,  $|f_2(t)| \leq M_2 e^{\sigma_2 t}$ , где  $M_1, M_2$  – константы. Отсюда и из равенства (11.22) следует

$$\begin{aligned} |f_1 * f_2| &= \left| \int_0^t f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau \right| \leq \int_0^t |f_1(\tau)| \cdot |f_2(t - \tau)| d\tau \leq \\ &\leq M_1 M_2 \int_0^t e^{\sigma_1 \tau} e^{\sigma_2 (t - \tau)} d\tau = M_1 M_2 e^{\sigma_2 t} \int_0^t e^{(\sigma_1 - \sigma_2) \tau} d\tau = \end{aligned}$$

$$= \begin{cases} M_1 M_2 e^{\sigma_2 t}, & \sigma_1 = \sigma_2; \\ M_1 M_2 \frac{e^{\sigma_1 t} - e^{\sigma_2 t}}{\sigma_1 - \sigma_2}, & \sigma_1 \neq \sigma_2 \end{cases} \leq \begin{cases} M_1 M_2 e^{(\sigma_2+1)t}, & \sigma_1 = \sigma_2; \\ M e^{\sigma t}, & \sigma_1 \neq \sigma_2, \end{cases}$$

где  $M = \text{const}$ ,  $\sigma = \max\{\sigma_1, \sigma_2\}$ . Здесь учтено, что  $t < e^t$  при  $t > 0$ .

Итак, доказано, что свертка двух оригиналов есть оригинал.

Переходим теперь к вопросу: как найти изображение по Лапласу свертки двух оригиналов  $f_1(t)$  и  $f_2(t)$ ? Ответ дает теорема Бореля.

**Теорема 11.6 (Бореля).** Если  $f_1(t) \doteq F_1(p)$ ,  $f_2(t) \doteq F_2(p)$ , то

$$f_1(t) * f_2(t) \doteq F_1(p) \cdot F_2(p). \quad (11.23)$$

Равенство (11.23) называется *формулой умножения изображений* и схематически иллюстрируется на рис. 11.12.

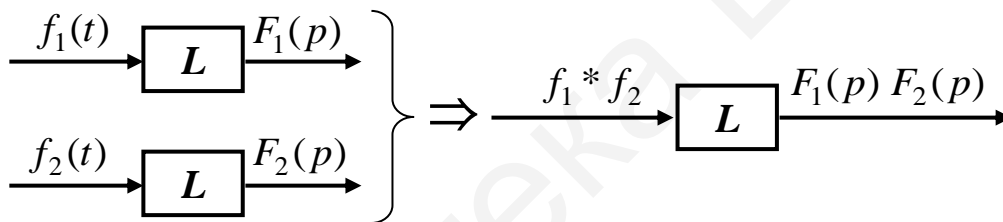


Рис. 11.12

Δ По определению имеем

$$\mathbf{L}\{f_1 * f_2\} = \int_0^{\infty} e^{-pt} \left( \int_0^t f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau \right) dt.$$

Так как этот двойной интеграл по теореме 11.1 сходится равномерно в области  $\text{Re } p \geq \sigma > \sigma_0$ , то, меняя в нем порядок интегрирования, получаем

$$\mathbf{L}(f_1 * f_2) = \int_0^{\infty} f_1(\tau) \left( \int_0^{\infty} f_2(t - \tau) e^{-pt} dt \right) d\tau.$$

Здесь внутренний интеграл в скобках по теореме запаздывания 11.3 есть

$$\int_0^{\infty} f_2(t - \tau) e^{-pt} dt = \mathbf{L}(f_2(t - \tau)) = e^{-p\tau} F_2(p).$$

В таком случае

$$L(f_1 * f_2) = \left( \int_0^{\infty} f_1(\tau) e^{-p\tau} d\tau \right) F_2(p) = F_1(p) F_2(p). \blacktriangle$$

Теорема Бореля часто применяется для восстановления оригинала по его изображению.

**Пример 11.11.** Найдите оригинал  $f(t)$  по его известному изображению

$$F(p) = \frac{p}{(p^2 + 1)^2}.$$

$\Delta$  Представим изображение в виде  $F(p) = \frac{p}{p^2 + 1} \cdot \frac{1}{p^2 + 1}$ . Так как

$$\frac{p}{p^2 + 1} \doteq \cos t, \quad \frac{1}{p^2 + 1} \doteq \sin t, \quad \text{то по формуле (11.23)}$$

$$\begin{aligned} \frac{p}{p^2 + 1} \cdot \frac{1}{p^2 + 1} &\doteq \cos t * \sin t = \int_0^t \cos \tau \sin(t - \tau) d\tau = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^t (\sin t + \sin(t - 2\tau)) d\tau = \frac{1}{2} \left( \tau \sin t + \frac{1}{2} \cos(t - 2\tau) \right) \Big|_{\tau=0}^{\tau=t} = \frac{t \sin t}{2}. \blacktriangle \end{aligned}$$

Решим теперь вопросы о дифференцировании и интегрировании оригиналов и их изображений.

**Теорема 11.7 (изображение производной оригинала).** Если  $f(t)$  и  $f'(t)$  – оригиналы и  $f(t) \doteq F(p)$ , то

$$f'(t) \doteq pF(p) - f(+0), \quad (11.24)$$

где  $f(+0) = \lim_{t \rightarrow +0} f(t)$ .

Формула (11.24) иллюстрируется на рис. 11.13.

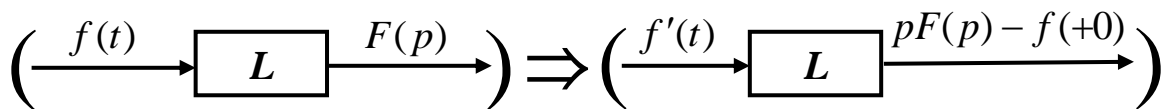


Рис. 11.13

Δ По определению изображения имеем

$$f'(t) \doteq \int_0^{\infty} f'(t) e^{-pt} dt = \int_0^{\infty} e^{-pt} d f(t) = f(t) e^{-pt} \Big|_0^{\infty} + p \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt =$$

$$= \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) e^{-pt} - \lim_{t \rightarrow +0} f(t) e^{-pt} + pF(p). \quad (11.25)$$

Если  $\sigma_0$  – показатель роста оригинала  $f(t)$ , то при  $\operatorname{Re} p \geq \sigma > \sigma_0$

$$|f(t)| \leq M e^{\sigma_0 t} e^{-\sigma t} = M e^{-(\sigma - \sigma_0)t}.$$

Тогда при  $\sigma > \sigma_0$  имеем  $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) e^{-pt} = 0$ . Так как

$\lim_{t \rightarrow +0} f(t) e^{-pt} = f(+0)$ , то отсюда и из равенства (11.25) и следует формула

(11.24). ▲

В частности, если  $f(+0) = 0$ , то  $f'(t) \doteq pF(p)$ .

В дальнейшем под  $f(0)$  будем понимать  $f(+0)$ .

**Следствие.** Если  $f(t), f'(t), f''(t), \dots, f^{(n)}(t)$  – оригиналы и  $f(t) \doteq F(p)$ , то

$$f^{(n)}(t) \doteq$$

$$\doteq p^n F(p) - p^{n-1} f(0) - p^{n-2} f'(0) - \dots - p f^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0). \quad (11.26)$$

Равенство (11.26) доказывается по индукции. В частности, если  $f(0) = f'(0) = \dots = f^{(n-1)}(0)$ , то

$$f^{(n)}(t) \doteq p^n F(p).$$

**Пример 11.12.** Найдите изображение дифференциального выражения

$$f''(t) + 2f'(t) + f(t),$$

если  $f(0) = 1, f'(0) = 2$  и  $f(t) \doteq F(p)$ .

Δ По формулам (11.24) и (11.26) имеем

$$f'(t) \doteq pF(p) - f(0) = pF(p) - 1,$$

$$f''(t) \doteq p^2 F(p) - p f(0) - f'(0) = p^2 F(p) - p - 2.$$

Тогда

$$f''(t) + 2f'(t) + f(t) \doteq (p^2 + 2p + 1)F(p) - p - 4. \blacktriangle$$

**Пример 11.13.** Так как  $\sin t \doteq \frac{1}{p^2 + 1}$ ,  $\cos t = (\sin t)'$ , то

$$\cos t \doteq p \cdot \frac{1}{p^2 + 1} - \sin 0 = \frac{p}{p^2 + 1}.$$

Пусть  $f(t)$  – оригинал. Тогда функция  $\int_0^t f(\tau) d\tau$  как свертка  $f(t) * 1(t)$

также является оригиналом. Тогда имеет место теорема изображения интеграла.

**Теорема 11.8 (изображение интеграла).** Если  $f(t) \doteq F(p)$ , то

$$\int_0^t f(\tau) d\tau \doteq \frac{F(p)}{p}. \quad (11.27)$$

$\Delta$  Преобразовав по Лапласу равенство  $\left( \int_0^t f(\tau) d\tau \right)'_t = f(t)$  с учетом

формулы (11.24) для изображения производной, получим

$$\mathbf{L} \left\{ \left( \int_0^t f(\tau) d\tau \right)' \right\} = p \mathbf{L} \left\{ \int_0^t f(\tau) d\tau \right\} - \int_0^0 f(\tau) d\tau = F(p). \quad (11.28)$$

Из соотношения (11.28) и следует равенство (11.27).  $\blacktriangle$

Итак,  $\mathbf{L} \left\{ \int_0^t f(\tau) d\tau \right\} = \frac{F(p)}{p}$  (рис. 11.14).

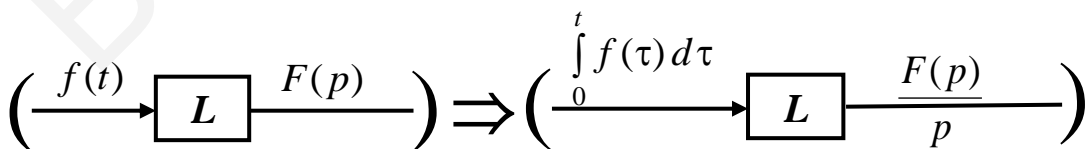


Рис. 11.14



**Пример 11.14.** Найдите оригинал  $f(t)$  по его изображению

$$F(p) = \frac{1}{p^2(p-1)}.$$

$\Delta$  Так как  $\frac{1}{p-1} \doteq e^t$ , то  $\frac{1}{p(p-1)} \doteq \int_0^t e^\tau d\tau = e^t - 1$ . Тогда  $\frac{1}{p^2(p-1)} =$   
 $= \frac{1}{p(p(p-1))} \doteq \int_0^t (e^\tau - 1) d\tau = e^t - t - 1 = f(t)$ .  $\blacktriangle$

**Теорема 11.9 (дифференцирование изображения).** Если  $f(t) \doteq F(p)$ , то

$$t f(t) \doteq -F'(p). \quad (11.29)$$

$\Delta$  Интеграл Лапласа  $F(p) = \int_0^\infty f(t) e^{-pt} dt$  есть аналитическая функция.

Тогда  $F'(p) = \int_0^\infty -t f(t) e^{-pt} dt$ . Отсюда и следует равенство  $F'(p) \doteq -t f(t)$ ,

равносильное равенству (11.29).  $\blacktriangle$

**Следствие.** Если  $f(t) \doteq F(p)$ , то по индукции можно получить, что

$$t^n f(t) \doteq (-1)^n F^{(n)}(p), \quad (11.30)$$

что представлено на рис. 11.15.

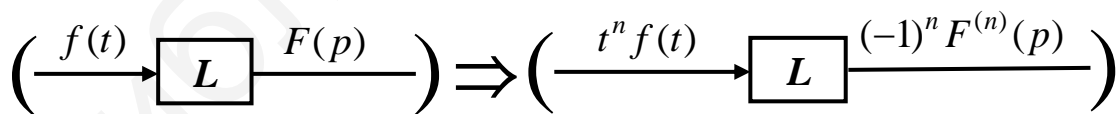


Рис. 11.15

**Пример 11.15.** Так как  $\sin t \doteq \frac{1}{p^2+1}$ , то

$$t^2 \sin t \doteq (-1)^2 \left( \frac{1}{p^2+1} \right)'' = \frac{6p^2-2}{(p^2+1)^3}.$$

Справедливо следующее утверждение.

**Теорема 11.10 (интегрирование изображения).** Если  $f(t) \doteq F(p)$  и

интеграл  $\int_0^{\infty} F(s) ds$  сходится, то

$$\frac{f(t)}{t} \doteq \int_p^{\infty} F(s) ds. \quad (11.31)$$

Δ Так как  $\frac{e^{-pt}}{t} = \int_p^{\infty} e^{-st} ds$ , где путь интегрирования лежит в области

$\operatorname{Re} p \geq \sigma > \sigma_0$  ( $\sigma_0$  – показатель роста  $f(t)$ ), то

$$\begin{aligned} \mathbf{L}\left(\frac{f(t)}{t}\right) &= \int_0^{\infty} f(t) \frac{e^{-pt}}{t} dt = \int_0^{\infty} f(t) \left( \int_p^{\infty} e^{-st} ds \right) dt = \\ &= \int_p^{\infty} \left( \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt \right) ds = \int_p^{\infty} F(s) ds. \end{aligned}$$

Равенство (11.31) доказано, оно представлено на рис. 11.16. ▲

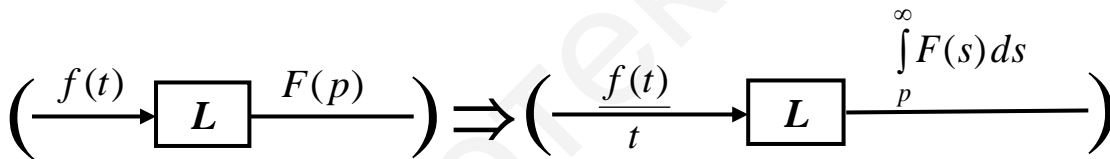


Рис. 11.16

**Пример 11.16.** Найдите изображение оригиналов:

а)  $\frac{\sin \beta t}{t}$ ; б)  $\int_0^t \frac{\cos \tau - \cos 2\tau}{\tau} d\tau$ .

Δ а) Согласно теореме 11.10 имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{L}\left(\frac{\sin \beta t}{t}\right) &= \int_p^{\infty} \mathbf{L}(\sin \beta t) \Big|_{p=s} ds = \int_p^{\infty} \frac{\beta}{s^2 + \beta^2} ds = \\ &= \operatorname{arctg} \frac{s}{\beta} \Big|_{s=p}^{s=\infty} = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{p}{\beta} = \operatorname{arcctg} \frac{p}{\beta}. \end{aligned}$$

б) Согласно теоремам 11.8 и 11.10 имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{L} \left\{ \int_0^t \frac{\cos \tau - \cos 2\tau}{\tau} d\tau \right\} &= \frac{1}{p} \mathbf{L} (\cos t - \cos 2t) \Big|_{p=s} ds = \\ &= \frac{1}{p} \int_p^\infty \left( \frac{s}{s^2+1} - \frac{s}{s^2+4} \right) ds = \frac{1}{2p} \left( \ln(s^2+1) - \ln(s^2+4) \right) \Big|_{s=p}^{s=\infty} = \\ &= \frac{1}{2p} \ln \frac{s^2+1}{s^2+4} \Big|_p^\infty = \frac{1}{2p} \ln \frac{p^2+4}{p^2+1}. \quad \blacktriangle \end{aligned}$$

В операционном исчислении часто оригинал по переменной  $t$  зависит от некоторого параметра  $x$ , а  $F(p, x)$  – его изображение, т. е.

$$F(p, x) = \int_0^\infty f(t, x) e^{-pt} dt.$$

Если  $f'_x(t, x)$  – оригинал, то интеграл  $\int_0^\infty f'_x(t, x) e^{-pt} dt$  сходится равномерно в области  $\operatorname{Re} p \geq \sigma > \sigma_0$  ( $\sigma_0$  – показатель роста  $f(t)$ ). В таком

случае справедливо равенство  $\frac{\partial F(p, x)}{\partial x} = \int_0^\infty \frac{\partial f(t, x)}{\partial x} e^{-pt} dt$ , т. е.

$$\frac{\partial}{\partial x} \mathbf{L}(f(t, x)) = \mathbf{L} \left( \frac{\partial f(t, x)}{\partial x} \right)$$

или

$$\frac{\partial f(t, x)}{\partial x} \doteq \frac{\partial F(p, x)}{\partial x}. \quad (11.32)$$

Аналогично, если  $f''_{xx}(t, x)$  – оригинал, то

$$\frac{\partial^2 f(t, x)}{\partial x^2} \doteq \frac{\partial^2 F(p, x)}{\partial x^2}. \quad (11.33)$$

**Пример 11.17.** Так как  $\operatorname{sh} t \doteq \frac{1}{p^2 - 1}$ , то согласно формуле (11.17)

$\operatorname{sh}(t - ax) \doteq \frac{e^{-axp}}{p^2 - 1}$ . Отсюда дифференцированием по параметру  $x$  получаем

$$-a \operatorname{ch}(t - ax) \doteq \frac{-p a e^{-axp}}{p^2 - 1} \Rightarrow \operatorname{ch}(t - ax) \doteq \frac{p e^{-axp}}{p^2 - 1}.$$

В операционном исчислении при проверке правильности вычислений полезны *предельные соотношения*, определенные следующей теоремой.

**Теорема 11.11.** Если  $f(t)$  и  $f'(t)$  – оригиналы и  $f(t) \doteq F(p)$ ,  $f'(t) \doteq \Phi(p)$ , то

$$\text{а) } \lim_{\operatorname{Re} p \rightarrow \infty} pF(p) = \lim_{t \rightarrow +0} f(t) = f(0); \quad (11.34)$$

$$\text{б) } \lim_{p \rightarrow 0} pF(p) = \lim_{t \rightarrow +\infty} f(t). \quad (11.35)$$

$\Delta$  Согласно соотношению (11.4)  $\lim_{\operatorname{Re} p \rightarrow \infty} \Phi(p) = 0$ . Тогда из равенства

$$0 = \lim_{\operatorname{Re} p \rightarrow \infty} \Phi(p) = \lim_{\operatorname{Re} p \rightarrow \infty} (pF(p) - f(0))$$

и следует формула (11.34). Далее имеем

$$L\{f'(t)\} = \int_0^{\infty} f'(t) e^{-pt} dt = pF(p) - f(0).$$

Так как интеграл Лапласа сходится равномерно по  $p$ , то из этой формулы в пределе при  $p \rightarrow 0$  получаем

$$\lim_{p \rightarrow 0} \int_0^{\infty} f'(t) e^{-pt} dt = \int_0^{\infty} f'(t) dt = \lim_{p \rightarrow 0} (pF(p) - f(0))$$

или

$$f(t) \Big|_0^{\infty} = \lim_{p \rightarrow 0} pF(p) - f(0) = \lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \lim_{p \rightarrow 0} pF(p). \quad \blacktriangle$$

**Пример 11.18.** Найдите начальное значение  $f(+0)$  оригинала  $f(t)$ ,

если  $F(p) = \frac{1}{(p + \alpha)^2} \doteq f(t)$ .

Δ По формуле (11.34)

$$f(0) = \lim_{\operatorname{Re} p \rightarrow \infty} pF(p) = \lim_{\operatorname{Re} p \rightarrow \infty} \frac{p}{(p + \alpha)^2} = 0 = \left( t e^{-\alpha t} \right) \Big|_{t=0}. \quad \blacktriangle$$

**Пример 11.19.** Проверить справедливость предельного соотношения (11.35) для оригинала  $\sin t$ .

Δ Так как  $\lim_{t \rightarrow \infty} \sin t$  не существует, то равенство (11.35) не имеет места,

хотя

$$\lim_{p \rightarrow 0} pF(p) = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{p}{p^2 + 1} = 0. \quad \blacktriangle$$

Пусть  $f_1(t)$  и  $f_2(t)$  – непрерывно дифференцируемые оригиналы  $F_1(p)$  и  $F_2(p)$  их изображения. По теореме Бореля  $f_1(t) * f_2(t) \doteq F_1(p) F_2(p)$ . Отсюда по теореме о дифференцировании оригинала

$$pF_1(p) F_2(p) \doteq \frac{d}{dt} (f_1 * f_2) = \frac{d}{dt} \int_0^t f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau. \quad (11.36)$$

Формула (11.36) называется *интегралом Дюамеля*.

Выполняя в этом интеграле дифференцирование, получаем

$$pF_1(p) F_2(p) \doteq f_1(t) f_2(0) + \int_0^t f_1(\tau) f_2'(t - \tau) d\tau. \quad (11.37)$$

В силу свойства коммутативности свертки имеем также

$$pF_1(p) F_2(p) \doteq f_2(t) f_1(0) + \int_0^t f_2(\tau) f_1'(t - \tau) d\tau. \quad (11.38)$$

**Пример 11.20.** Найдите оригинал  $f(t)$  по его изображению

$$F(p) = \frac{p}{(p^2 + 1)^2}.$$

Δ Представим  $F(p)$  в виде  $p \cdot \frac{p}{p^2 + 1} \cdot \frac{1}{p^2 + 1}$ . Так как  $\sin t \doteq \frac{1}{p^2 + 1}$ ,

$\cos t \doteq \frac{p}{p^2 + 1}$ , то по формулам (11.36) и (11.37)

$$\begin{aligned} p \cdot \frac{p}{p^2 + 1} \cdot \frac{1}{p^2 + 1} &\doteq \frac{d}{dt} (\cos t * \sin t) = \frac{d}{dt} \int_0^t \cos \tau \cdot \sin(t - \tau) d\tau = \\ &= \cos t \sin 0 + \int_0^t \cos \tau \cos(t - \tau) d\tau = \frac{1}{2} (t \cos t + \sin t) = f(t). \quad \blacktriangle \end{aligned}$$

Часто требуется найти изображение кусочно-гладкого оригинала, заданного своим графиком. Для этого сначала необходимо записать оригинал аналитически. Пусть, например, требуется описать аналитически оригинал, изображенный на рис. 11.17, где

$$f(t) = \begin{cases} \varphi(t), & t \in (a, a+T); \\ 0 & \text{вне } (a, a+T). \end{cases}$$

Введем в рассмотрение следующую функцию  $1(t-a) - 1(t-(a+T))$ . Ее график есть разность графиков смещенных единичных функций  $1(t-a)$  и  $1(t-(a+T))$  (рис. 11.18, а, б).

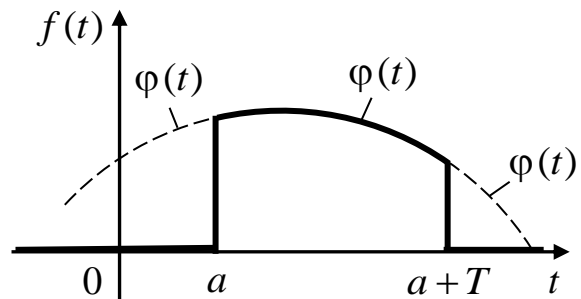


Рис. 11.17

Таким образом,

$$1(t-a) - 1(t-(a+T)) = \begin{cases} 1, & t \in (a, a+T); \\ 0 & \text{вне } (a, a+T). \end{cases} \quad (11.39)$$

Если теперь функцию  $\varphi(t)$  умножить на функцию (11.39), то и получим оригинал, изображенный на рис. 11.17, т. е.

$$f(t) = \begin{cases} \varphi(t)(1(t-a) - 1(t-(a+T))), & t \in (a, a+T); \\ 0 & \text{вне интервала } (a, a+T). \end{cases} \quad (11.40)$$

Если график графического оригинала состоит из нескольких примыкающих друг к другу гладких кусков, то каждый из них необходимо записать в виде (11.40) и полученные результаты сложить.

**Пример 1.21.** Записать аналитически оригинал (рис. 11.19) и найти его изображение по Лапласу.

Δ На  $(0, a)$  функция  $\varphi(t)$  имеет вид  $\varphi(t) = \frac{t-a}{a}$ . Следовательно, на этом интервале согласно (11.40) оригинал

$$f_1(t) = \frac{t-a}{a} (1(t) - 1(t-a)).$$

На интервале  $(a, 2a)$  оригинал  $\varphi(t) = 1$ . Значит, в силу (11.40) оригинал

$$f_2(t) = 1(t-a) - 1(t-2a).$$

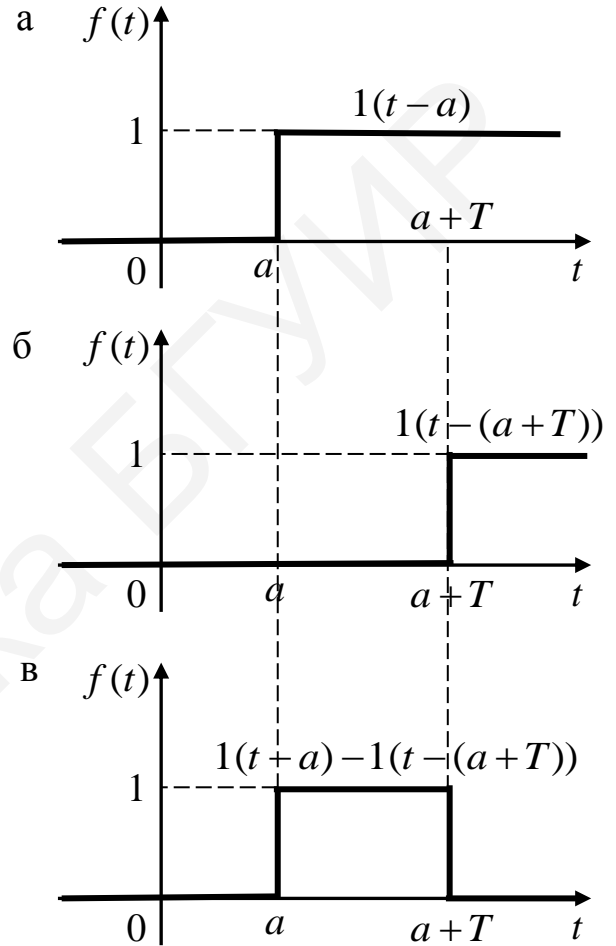


Рис. 11.18

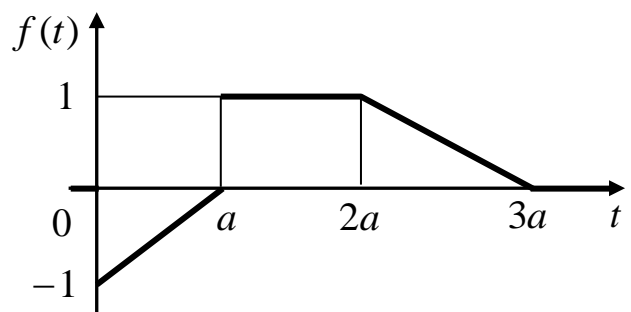


Рис. 11.19

Наконец, на интервале  $(2a, 3a)$

$$\varphi(t) = \frac{3a-t}{a} \Rightarrow f_3(t) = \frac{3a-t}{a} (1(t-2a) - 1(t-3a)).$$

Тогда для оригинала (см. рис. 11.19) имеем следующую аналитическую запись:

$$\begin{aligned} f(t) &= f_1(t) + f_2(t) + f_3(t) = \\ &= \frac{t-a}{a} [1(t) - 1(t-a)] + [1(t-a) - 1(t-2a)] + \frac{3a-t}{a} [1(t-2a) - 1(t-3a)]. \end{aligned}$$

Приведем здесь подобные члены, чтобы каждое слагаемое в окончательном результате содержало произведения вида  $h(t-\alpha)1(t-\alpha)$ , где  $h(t)$  – некоторая функция, а  $\alpha - \text{const}$ , и получим

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{a} t \cdot 1(t) - 1(t) - \frac{1}{a} (t-a) 1(t-a) + 1(t-a) - \frac{1}{a} (t-2a) + \\ &+ \frac{1}{a} (t-3a) \cdot 1(t-3a). \end{aligned}$$

Отсюда по теореме запаздывания получаем

$$\begin{aligned} f(t) \doteq F(p) &= \frac{1}{ap^2} - \frac{1}{p} - \frac{e^{-ap}}{ap^2} + \frac{e^{-ap}}{p} - \frac{e^{-2ap}}{ap^2} + \frac{e^{-3ap}}{p^2} = \\ &= \frac{e^{-ap} - 1}{p} + \frac{1 - e^{-ap} - e^{-2ap} + e^{-3ap}}{ap^2}. \quad \blacktriangle \end{aligned}$$

Приведем таблицу основных оригиналов и их изображений, часто встречающихся при решении задач (табл. 1.1).



## Основные оригиналы и их изображения

№ п/п	Оригинал $f(t)$	Изображение $F(p)$
1	1	$\frac{1}{p}$
2	$t^n, n = 0, 1, \dots$	$\frac{n!}{p^{n+1}}$
3	$t^\alpha, \alpha > -1$	$\frac{\Gamma(\alpha + 1)}{p^{\alpha+1}}$
4	$e^{\alpha t}$	$\frac{1}{p - \alpha}$
5	$t^n e^{\alpha t}$	$\frac{n!}{(p - \alpha)^{n+1}}$
6	$t^\lambda e^{\alpha t}, \lambda > -1$	$\frac{\Gamma(\lambda + 1)}{(p - \alpha)^{\lambda+1}}$
7	$\sin wt, w > 0$	$\frac{w}{p^2 + w^2}$
8	$\cos wt$	$\frac{p}{p^2 + w^2}$
9	$\text{sh } wt$	$\frac{w}{p^2 - w^2}$
10	$\text{ch } wt$	$\frac{p}{p^2 - w^2}$
11	$e^{\alpha t} \sin wt$	$\frac{w}{(p - \alpha)^2 + w^2}$
12	$e^{\alpha t} \cos wt$	$\frac{p - \alpha}{(p - \alpha)^2 + w^2}$
13	$e^{\alpha t} \text{sh } wt$	$\frac{w}{(p - \alpha)^2 - w^2}$

№ п/п	Оригинал $f(t)$	Изображение $F(p)$
14	$e^{\alpha t} \operatorname{ch} wt$	$\frac{p - \alpha}{(p - \alpha)^2 - w^2}$
15	$t \sin wt$	$\frac{2pw}{(p^2 + w^2)^2}$
16	$t \cos wt$	$\frac{p^2 - w^2}{(p^2 + w^2)^2}$
17	$t \operatorname{sh} wt$	$\frac{2pw}{(p^2 - w^2)^2}$
18	$t \operatorname{ch} wt$	$\frac{p^2 + w^2}{(p^2 - w^2)^2}$
19	$\sin(t - \tau), \tau > 0$	$\frac{e^{-p\tau}}{p^2 + 1}$
20	$\cos(t - \tau)$	$\frac{p e^{-p\tau}}{p^2 + 1}$
21	$t^n \sin wt$	$\frac{\operatorname{Im}(p + iw)^{n+1}}{(p^2 + w^2)^{n+1}} n!$
22	$t^n \cos wt$	$\frac{\operatorname{Re}(p + iw)^{n+1}}{(p^2 + w^2)^{n+1}} n!$
23	$J_n(t), n = 1, 2, \dots$	$\frac{(\sqrt{p^2 + 1} - p)^n}{\sqrt{p^2 + 1}}$
24	$\operatorname{Erf} f \frac{\alpha}{2\sqrt{t}} = \frac{2}{\sqrt{t}} \int_{\alpha/2\sqrt{t}}^{\infty} e^{-x^2} dx$	$\frac{1}{p} e^{-\alpha\sqrt{p}}$
25	$\operatorname{Sit} = \int_0^t \frac{\sin x}{x} dx$	$\frac{\operatorname{arctg} p}{p}$
26	$\operatorname{Cit} = \int_t^{\infty} \frac{\cos x}{x} dx$	$\frac{1}{p} \ln \frac{1}{\sqrt{p^2 + 1}}$
27	$\frac{e^{bt} - e^{at}}{t}$	$\ln \frac{p - a}{p - b}$

№ п/п	Оригинал $f(t)$	Изображение $F(p)$
28	$\frac{\ln \alpha t}{t}, \alpha > 0$	$\frac{1}{n \alpha^n} \left( \sqrt{p^2 - \alpha^2} - p \right)^n$
29	$\ln t$	$\frac{1}{p} \left( \ln \frac{1}{p} - \gamma \right), \gamma = 0,57722$

Библиотека БГУИР

## Задачи и упражнения

1. Найти изображение  $F(p)$  оригинала  $f(t)$ , заданного графически (рис. 1.20).

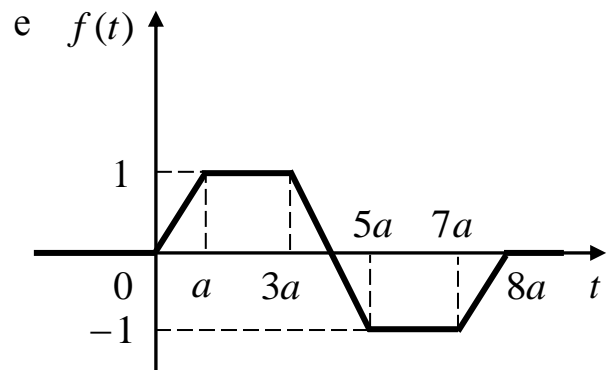
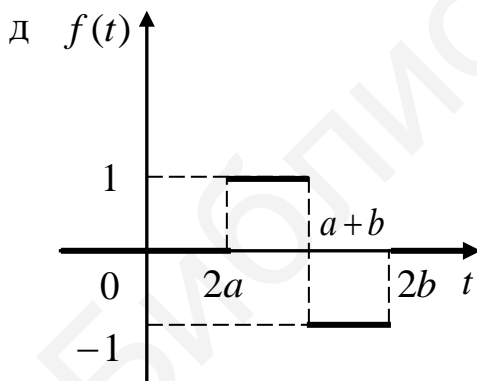
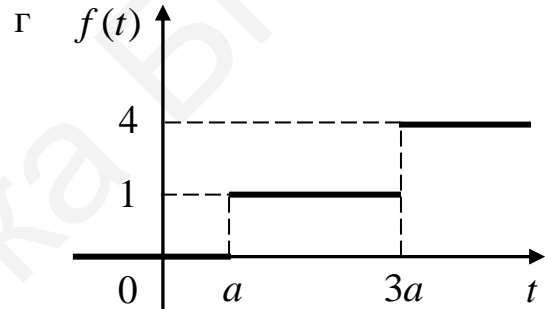
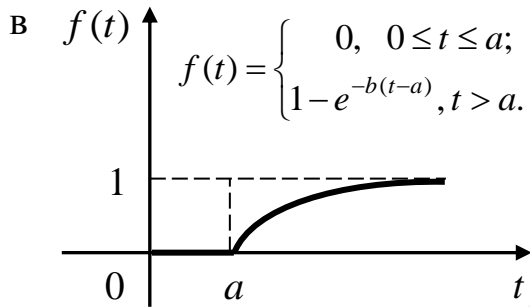
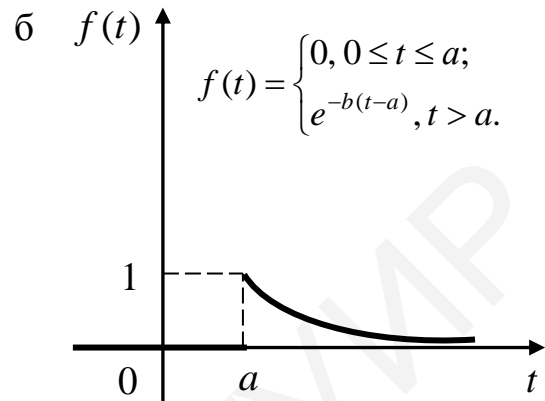
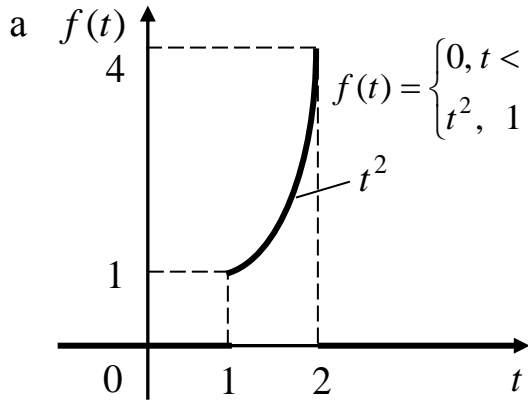


Рис. 11.20

Ответ: а)  $\left(\frac{2}{p^3} + \frac{2}{p^2} + \frac{1}{p}\right)e^{-p} - \left(\frac{2}{p^3} + \frac{4}{p^2} + \frac{4}{p}\right)e^{-2p}$ ; б)  $\frac{e^{-ap}}{p+b}$ ;

$$в) \frac{b e^{-ap}}{p(p+b)}; \text{ г) } \frac{2}{p} e^{-ap} (1 + e^{-2ap}); \text{ д) } \frac{1}{p} (e^{-ap} - e^{-bp})^2;$$

$$е) \frac{1}{ap^2} (1 - e^{-ap})(1 - e^{-3ap}) \cdot (1 - e^{-4ap}).$$

2. Используя свойство линейности преобразования Лапласа, теоремы подобия и смещения, найдите изображения следующих оригиналов:

- а)  $\sin^2 t$ ; б)  $\cos^2 2t$ ; в)  $e^t \cos^2 t$ ; г)  $\sin^3 t$ ; д)  $\cos^3 t$ ; е)  $\sin 2t \cdot \cos 3t$ ;  
 ж)  $\cos 2t \cdot \cos 3t$ ; з)  $e^{-3t} \sin t \cdot \cos 3t$ ; и)  $e^{-4t} \sin t \cdot \cos 3t$ ; к)  $\text{sh } 3t \cdot \cos 2t$ ;  
 л)  $t \text{ch } 2t$ ; м)  $\sin t - t \cos t$ ; н)  $t e^{-t} \sin t$ .

$$\text{Ответ: а) } \frac{2}{p(p^2 + 4)}; \text{ б) } \frac{p^2 + 2}{p(p^2 + 16)}; \text{ в) } \frac{p^2 - 2p + 3}{(p-1)(p^2 - 2p + 5)};$$

$$\text{г) } \frac{6}{(p^2 + 1)(p^2 + 9)}; \text{ д) } \frac{p(p^2 + 7)}{(p^2 + 1)(p^2 + 9)}; \text{ е) } \frac{2(p^2 - 5)}{(p^2 + 13) - 144};$$

$$\text{ж) } \frac{p(p^2 + 14)}{(p^2 + 13)^2 - 144}; \text{ з) } \frac{2}{(p+3)^2 + 16} - \frac{1}{(p+3)^2 + 4};$$

$$\text{и) } \frac{2}{(p+4)^2 - 16} - \frac{1}{(p+4)^2 + 4}; \text{ к) } \frac{3(p^2 - 13)}{(p^2 + 13)^2 - 36p^2}; \text{ л) } \frac{p^2 + 4}{(p^2 - 4)^2};$$

$$\text{м) } \frac{2}{(p^2 + 1)^2}; \text{ н) } \frac{2(p+1)}{(p^2 + 2p + 2)^2}.$$

3. Найдите изображения графически представленных периодических оригиналов (рис. 11.21).

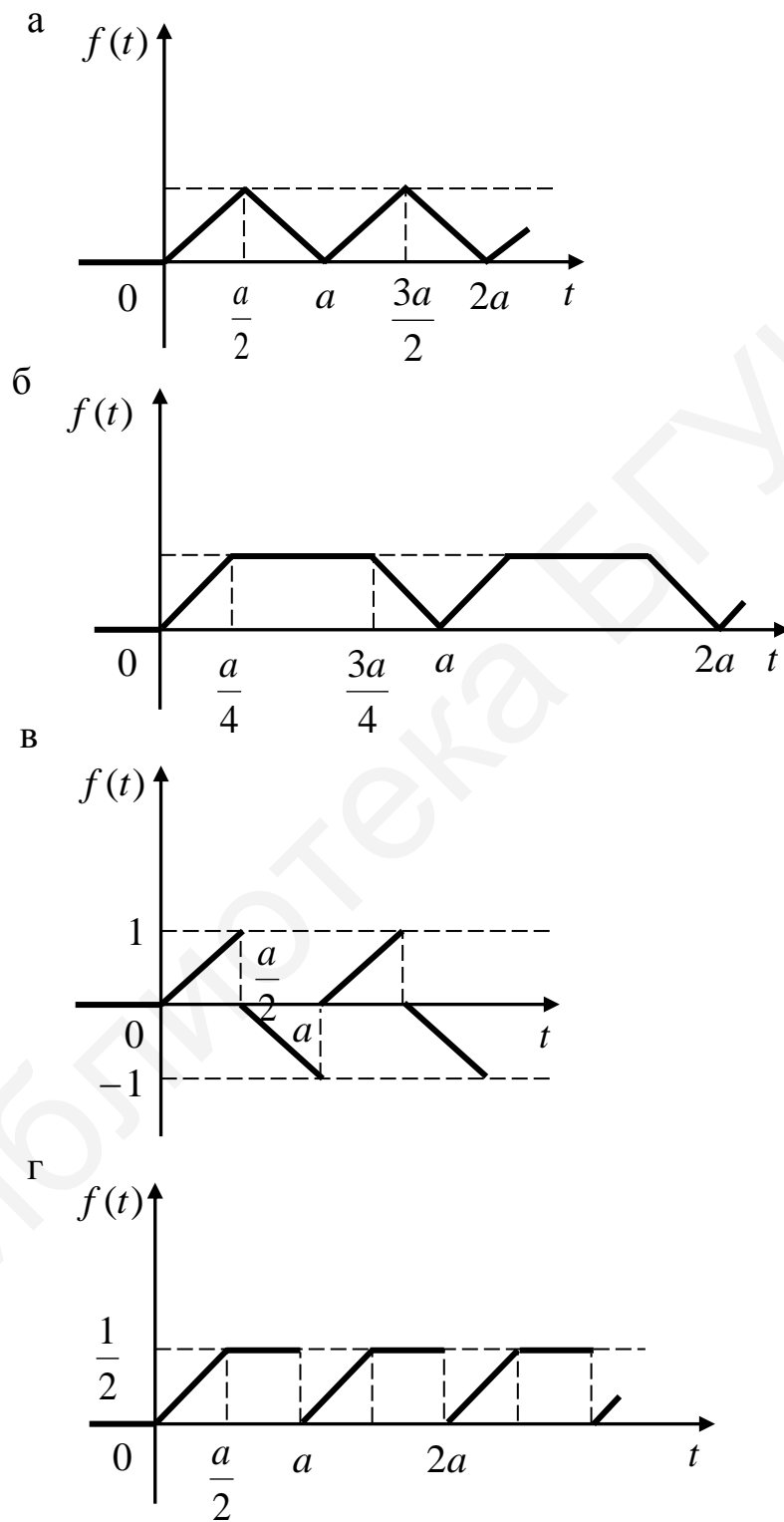


Рис. 11.21

$$\text{Ответ: а) } \frac{2}{ap^2} \text{th} \frac{ap}{4}; \text{ б) } \frac{e^{ap}(a^2 p^2 + 32) - 8a \cdot e^{\frac{ap}{4}} p}{16ap^2(e^{ap} - 1)} - \frac{\frac{32ap}{4}}{16ap^2 e^{ap} - 1};$$

$$\text{в) } \frac{2e^{\frac{ap}{2}} - 2 - ap}{ap^2(1 + e^{\frac{ap}{2}})}; \text{ г) } \frac{1 - e^{-\frac{ap}{2}} - \frac{ape^{-\frac{ap}{2}}}{2}}{ap^2(1 - e^{-ap})}.$$

4. Найдите изображение оригинала  $f(t)$  с периодом  $T$ , заданного на интервале-периоде следующим образом:

$$\text{а) } f(t) = \begin{cases} \frac{2t}{T}, & 0 < t < \frac{T}{4}; \\ \frac{1}{2}, & \frac{T}{4} \leq t < \frac{T}{2}; \\ 0, & \frac{T}{2} \leq t < T. \end{cases} \quad \text{б) } f(t) = \begin{cases} \frac{4t}{T} - 1, & 0 < t < \frac{T}{2}; \\ -\frac{4t}{T} + 3, & \frac{T}{2} \leq t < T. \end{cases}$$

$$\text{Ответ: а) } \frac{4e^{\frac{3pT}{4}} - 4e^{pT} + e^{\frac{pT}{2}}}{2p^2T(1 - e^{pT})} pT; \text{ б) } \frac{4e^{\frac{pT}{2}} - 4 - pT - e^{\frac{pT}{2}}}{p^2T(1 + e^{\frac{pT}{2}})} pT.$$

## Лекция 12

### НАХОЖДЕНИЕ ОРИГИНАЛА ПО ЕГО ИЗОБРАЖЕНИЮ

**Связь преобразований Фурье и Лапласа. Формула Меллина.**

**Оригиналы для рациональных изображений. Формулы разложения.**

**Теорема разложения.**

**Задачи и упражнения**

Пусть  $f(t)$  – функция-оригинал, удовлетворяющая условию абсолютной интегрируемости на промежутке  $(0, +\infty)$ . Тогда существует одностороннее преобразование Фурье

$$F(i\omega) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt. \quad (12.1)$$

Применим эту формулу к функции  $f(t)e^{-\sigma t}$ , где  $\sigma$  выбрано таким образом, чтобы сходился интеграл  $\int_0^{\infty} |f(t)| e^{-\sigma t} dt$ . При этих условиях существует интеграл

$$F(i\omega, \sigma) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-(\sigma+i\omega)t} dt. \quad (12.2)$$

Введя новую комплексную переменную  $p = \sigma + i\omega$ , из равенства (12.2) получим

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt = \mathbf{L}(f(t)),$$

где  $\mathbf{L}(f(t))$  – преобразование Лапласа функции  $f(t)$ .

Таким образом, из формулы (12.2) видно, что преобразование Лапласа можно рассматривать как результат определенным образом построенного обобщения одностороннего преобразования Фурье. Если  $f(t)$  – оригинал с



показателем роста  $\sigma_o$ , то при  $\sigma > \sigma_o$  интеграл (12.2) существует.

Для преобразования (12.1) обратным преобразованием Фурье является

$$F(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(i\omega) e^{i\omega t} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega t} \left( \int_0^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \right) d\omega.$$

Заменим в этом равенстве  $f(t)$  по  $f(t) e^{-\sigma t}$ :

$$f(t) e^{-\sigma t} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega t} \left( \int_0^{\infty} f(t) e^{-(\sigma+i\omega)t} dt \right) d\omega.$$

Так как  $p = \sigma + i\omega$ ,  $d\omega = \frac{dp}{i}$ , то при изменении  $\omega$  от  $-\infty$  до  $+\infty$  значение  $p$  изменяется от  $\sigma - i\infty$  до  $\sigma + i\infty$ . Поэтому

$$f(t) e^{-\sigma t} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} F(p) e^{(p-\sigma)t} dp.$$

Сокращая в этом равенстве на  $e^{-\sigma t}$ , получаем

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} F(p) e^{pt} dp. \quad (12.3)$$

Формула (12.3) называется *формулой* или *интегралом Меллина* или *формулой обратного преобразования Лапласа*. Еще раз отметим, что  $\sigma > \sigma_o$ .

Для вычисления интеграла Меллина (12.3) можно воспользоваться формулой (9.33), если функция  $F(p)$  удовлетворяет условиям леммы Жордана:

$$f(t) = \sum_{k=1}^n \operatorname{Res}(F(p) e^{pt}), \operatorname{Re} p_k < \sigma_o. \quad (12.4)$$

*Замечание.* Все особые точки  $p_k$  функции  $F(p)$  должны лежать левее прямой  $\operatorname{Re} p = \sigma_o$ .

**Пример 12.1.** Найдите оригинал для изображения  $F(p) = \frac{1}{p^2(p^2 + 1)}$ .

Δ Эта функция удовлетворяет условиям леммы Жордана, так как  $F(p) \rightarrow 0$  при  $\operatorname{Re} p \rightarrow \infty$ . Особыми точками ее являются полюс второго

порядка  $p = 0$  и простые полюсы  $p = -i$  и  $p = i$ . Поэтому функция  $F(p)$  аналитична в полуплоскости  $\operatorname{Re} p > 0$ . Находим вычеты функции  $F(p)e^{pt}$  в указанных особых точках:

$$\operatorname{Res}_{p=0}(F(p)e^{pt}) = t, \operatorname{Res}_{p=-i}(F(p)e^{pt}) = \frac{e^{-it}}{2i}, \operatorname{Res}_{p=i}(F(p)e^{pt}) = -\frac{e^{it}}{2i}.$$

По формуле (12.4)  $f(t) = t - \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i} = t - \sin t$ . ▲

Рассмотрим теперь случай, когда изображение  $F(p)$  представляет собой правильную рациональную функцию:

$$F(p) = \frac{A(p)}{B(p)} = \frac{a_0 p^m + a_1 p^{m-1} + \dots + a_{m-1} p + a_m}{b_0 p^n + b_1 p^{n-1} + \dots + b_{n-1} p + b_n}, \quad m < n.$$

Пусть  $p_1, p_2, \dots, p_e$  – корни знаменателя  $B(p)$  кратности  $k_1, k_2, \dots, k_e$  соответственно ( $k_1 + k_2 + \dots + k_e = n$ ). Тогда справедливо представление

$$F(p) = \frac{A(p)}{B(p)} = \frac{a_0 p^m + a_1 p^{m-1} + \dots + a_{m-1} p + a_m}{b_0 (p - p_1)^{k_1} (p - p_2)^{k_2} \dots (p - p_e)^{k_e}}. \quad (12.5)$$

Считаем, что ни один из корней  $p_k$  многочлена  $B(p)$  не является корнем многочлена  $A(p)$ , т. е.  $A(p_i) \neq 0, i = 1, \dots, e$ . Тогда корни  $p = p_i, i = 1, \dots, e$  знаменателя являются полюсами порядка  $k_i$  функции  $F(p)$ . Так как в этом случае

$$\operatorname{Res}_{p=p_i}(F(p)e^{pt}) = \frac{1}{(k_i - 1)!} \lim_{p \rightarrow p_i} \frac{d^{k_i-1}}{dp^{k_i-1}} \left( (p - p_i)^{k_i} F(p) e^{pt} \right),$$

то по формуле (12.4) получаем основную формулу разложения:

$$f(t) = \sum_{i=1}^{\ell} \frac{1}{(k_i - 1)!} \lim_{p \rightarrow p_i} \frac{d^{k_i-1}}{dp^{k_i-1}} \left( (p - p_i)^{k_i} F(p) e^{pt} \right). \quad (12.6)$$

Если все полюсы  $p = p_k, k = 1, \dots, n$ , функции  $F(p)$  простые, то согласно формуле (9.4)

$$\operatorname{Res}_{p=p_k} F(p) e^{pt} = \lim_{p \rightarrow p_k} (p - p_k) F(p) e^{pt} = \lim_{p \rightarrow p_k} ((p - p_k) F(p)) e^{p_k t}$$

и равенство (12.4) принимает вид

$$f(t) = \sum_{k=1}^n \lim_{p \rightarrow p_k} ((p - p_k) F(p)) e^{p_k t}. \quad (12.7)$$

Аналогично, если все полюсы  $p_k$  функции  $F(p)$  простые, то, учитывая равенство  $\operatorname{Res}_{p=p_k} \frac{A(p)}{B(p)} e^{pt} = \frac{A(p_k)}{B'(p_k)} e^{p_k t}$ , из (12.4) получаем еще одну формулу

для оригинала  $f(t)$ :

$$f(t) = \sum_{k=1}^n \frac{A(p_k)}{B'(p_k)} e^{p_k t}. \quad (12.8)$$

Формулы (12.7) и (12.8) также называются *формулами разложения*.

**Пример 12.2.** Найдите оригинал по данному изображению:

$$\text{а) } F_1(p) = \frac{2p}{(p^2 + 4p + 8)^2}; \quad \text{б) } F_2(p) = \frac{1}{p(p^3 + 1)};$$

$$\text{в) } F_3(p) = \frac{6p^2}{(p+2)(p-1)(p^2+1)^2}.$$

Δ а) Знаменатель  $B(p) = (p^2 + 4p + 8)^2$  имеет двукратные корни  $-2 + 2i$  и  $-2 - 2i$ . Находим вычеты функции  $F_1(p) e^{pt}$  в этих точках:

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}_{p=-2+2i} (F_1(p) e^{pt}) &= \lim_{p \rightarrow -2+2i} \left( \frac{2p e^{pt} (p+2-2i)^2}{(p^2 + 4p + 8)^2} \right)'_p = \\ &= \frac{e^{(-2+2i)t} (1 - 2t(1+i))}{-8i}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}_{p=-2-2i} (F_1(p)e^{pt}) &= \lim_{p \rightarrow -2-2i} \left( \frac{2pe^{pt}(p+2+2i)^2}{(p^2+4p+8)^2} \right)' = \\ &= \frac{e^{(-2-2i)t}(1-2t(1-i))}{8i}. \end{aligned}$$

По формуле (12.6) получаем оригинал

$$\begin{aligned} f_1(t) &= \frac{e^{(-2+2i)t}(1-2t(1+i))}{-8i} + \frac{e^{(-2-2i)t}(1-2t(1+i))}{8i} = \\ &= \frac{e^{-2t}}{4} ((2t-1)\sin 2t + 2t \cos 2t). \end{aligned}$$

б) Знаменатель  $B(p) = p(p^3 + 1)$  имеет простые корни  $p_1 = 0$ ,  $p_2 = -1$ ,

$$p_3 = \frac{1+i\sqrt{3}}{2} \text{ и } p_4 = \frac{1-i\sqrt{3}}{2}. \text{ Так как } \operatorname{Res}_{p=p_k} \frac{A(p)}{B(p)} = \frac{A(p_k)}{B'(p_k)} = \frac{1}{4p_k^3+1}, \text{ то}$$

$$\operatorname{Res}_{p=0} \frac{A(p)}{B(p)} = \frac{1}{4p^3+1} \Big|_{p=0} = 1; \quad \operatorname{Res}_{p=-1} \frac{A(p)}{B(p)} = \frac{1}{4p^3+1} \Big|_{p=-1} = -\frac{1}{3};$$

$$\operatorname{Res}_{p=\frac{1\pm i\sqrt{3}}{2}} \frac{A(p)}{B(p)} = \frac{1}{4p^3+1} \Big|_{p=\frac{1\pm i\sqrt{3}}{2}} = -\frac{1}{3}.$$

По формуле (12.4) получаем оригинал

$$f_2(t) = 1 \cdot e^{0t} - \frac{1}{3}e^{-t} - \frac{1}{3} \left( e^{\frac{(1+i\sqrt{3})t}{2}} + e^{\frac{(1-i\sqrt{3})t}{2}} \right) = 1 - \frac{e^{-t}}{3} - \frac{2e^{\frac{t}{2}}}{3} \cos \frac{\sqrt{3}}{2}t.$$

в) Функция  $F_3(p)$  имеет простые полюсы  $p_1 = -2$ ,  $p_2 = 1$ ,  $p_{3,4} = \pm i$ .

В этом случае удобнее воспользоваться формулой разложения (12.7). Имеем

$$\begin{aligned} f_3(t) &= \frac{6p^2e^{pt}}{(p-1)(p^2+1)} \Big|_{p=-2} + \frac{6p^2e^{pt}}{(p+2)(p^2+1)} \Big|_{p=1} + \\ &+ \frac{6p^2e^{pt}}{(p+2)(p-1)(p+i)} \Big|_{p=i} + \frac{6p^2e^{pt}}{(p+2)(p-1)(p-i)} \Big|_{p=-i} = \end{aligned}$$

$$= -\frac{8}{5}e^{-2t} + e^t + \frac{3}{1+3i}e^{it} + \frac{3}{1-i}e^{-it} = -\frac{8}{5}e^{-2t} + e^t + \frac{3}{5}(\cos t + 3\sin t). \blacktriangle$$

В некоторых случаях можно восстановить оригинал  $f(t)$ , если его изображение  $F(p)$  разложено в ряд по степеням  $\frac{1}{p}$ . Справедлива теорема разложения.

**Теорема 12.12 (разложения).** Если  $F(p)$  – аналитическая функция в окрестности точки  $p = \infty$  и  $\lim_{\operatorname{Re} p \rightarrow \infty} F(p) = 0$  и ее ряд Лорана имеет вид

$$F(p) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{p^n}, \quad (12.9)$$

то оригиналом  $f(t)$  является функция

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{(n-1)!} t^{n-1}, \quad (12.10)$$

причем этот ряд сходится при всех  $t$ .

Δ Заметим, что ряд (12.10) формально получается из ряда (12.9) с учетом того, что

$$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \doteq \frac{1}{p^n}.$$

Введем новую переменную  $\frac{1}{p} = z$ . Тогда функция  $F\left(\frac{1}{z}\right) = \Phi(z)$

представится рядом  $\Phi(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n$ , сходящимся в некотором круге  $|z| < R$ .

В этом круге функция  $\Phi(z)$  является аналитической. Согласно неравенству

Коши (7.30) для коэффициентов ряда  $c_n$  имеем оценку  $|c_n| \leq \frac{M_R}{R^n}$ ,  $n = 1, 2, \dots$ ,

где  $M_R = \max_{|z|=R} |\Phi(z)|$ .

Тогда

$$|f(t)| = \left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{(n-1)!} t^{n-1} \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|c_n|}{(n-1)!} |t|^{n-1} \leq \frac{M_R}{R} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|t|^n}{n! R^n} = \frac{M_R}{R} e^{\frac{|t|}{R}}.$$

Отсюда по признаку Вейерштрасса получаем, что ряд (12.10) сходится равномерно при всех  $t$ , т. е.  $f(t)$  – оригинал для  $F(p)$ . ▲

**Пример 12.3.** Найдите оригинал для функции  $F(p) = \frac{1}{\sqrt{p^2 + 1}}$ .

Δ Разложим  $F(p)$  в биномиальный ряд

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{p^2 + 1}} &= \frac{1}{p} \left( 1 + \frac{1}{p^2} \right)^{-\frac{1}{2}} = \\ &= \frac{1}{p} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left( -\frac{1}{2} \right) \left( -\frac{1}{2} - 1 \right) \left( -\frac{1}{2} - 2 \right) \dots \left( -\frac{1}{2} - n + 1 \right)}{n!} \cdot \frac{1}{p^{2n}} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2^n n!} \frac{1}{p^{2n+1}} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \dots (2n-1) 2n}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n \cdot 2^n n!} \frac{1}{p^{2n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n)!}{(n!)^2 2^n} \frac{1}{p^{2n+1}}. \end{aligned} \quad (12.11)$$

Так как  $\frac{(2n)!}{p^{2n+1}} \doteq t^{2n}$ , то по теореме 12.12 (разложения) из ряда (12.11)

получаем

$$\frac{1}{\sqrt{p^2 + 1}} \doteq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)^2 2^n} t^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)^2} \left( \frac{t}{2} \right)^{2n} = J_0(t),$$

где  $J_0(t)$  – функция Бесселя.

Итак,  $J_0(t) \doteq \frac{1}{\sqrt{p^2+1}}$ . Так как  $J_1(t) = -J_0'(t)$  и  $J_0(t) = 1$ , то

$$J_1(t) = -J_0'(t) \doteq -(pF(p) - J_0(0)) = \frac{-p}{\sqrt{p^2+1}} + 1 = \frac{\sqrt{p^2+1} - p}{\sqrt{p^2+1}}.$$

По индукции можно получить формулу

$$J_n(t) \doteq \frac{(\sqrt{p^2+1} - p)^n}{\sqrt{p^2+1}}, n = 0, 1, 2, \dots \blacktriangle$$

На практике удобен следующий способ нахождения оригиналов для изображений, являющихся рациональными дробями: изображение разлагают в сумму простейших дробей и, используя таблицу основных оригиналов и их изображений, находят искомый оригинал.

**Пример 12.4.** Найдите оригинал по его изображению:

$$\text{а) } F_1(p) = \frac{3p^2 + p - 1}{(p-1)(p+2)p}; \quad \text{б) } F_2(p) = \frac{p+5}{(p+1)(p^2 - 2p + 5)}.$$

Δ а) Так как

$$\frac{3p^2 + p - 1}{(p-1)(p+2)p} = \frac{1}{p-1} - \frac{3}{2(p+2)} + \frac{1}{2p}$$

$$\text{и } \frac{1}{p-1} \doteq e^t, \quad \frac{1}{p+2} \doteq e^{-2t}, \quad \frac{1}{p} \doteq 1, \quad \text{то } F_1(p) \doteq e^t - \frac{3}{2}e^{-2t} + \frac{1}{2} = f_1(t).$$

б) Аналогично из разложения

$$\begin{aligned} \frac{p+5}{(p+1)(p^2 - 2p + 5)} &= \frac{1}{2(p+1)} + \frac{-p+5}{2(p^2 - 2p + 5)} = \frac{1}{2(p+1)} - \\ &- \frac{p-1}{2((p-1)^2 + 2^2)} + \frac{4}{2((p-1)^2 + 2^2)} \end{aligned}$$

и изображений

$$\frac{1}{p-1} \doteq e^{-t}, \quad \frac{p-1}{(p-1)^2 + 4} \doteq e^t \cos 2t, \quad \frac{1}{(p-1)^2 + 4} \doteq e^t \sin 2t$$

получим

$$F_2(p) \doteq \frac{e^{-t}}{2} - \frac{1}{2} e^t (\cos 2t - 4 \sin 2t) = f_2(t). \quad \blacktriangle$$

### Задачи и упражнения

1. Найдите оригинал  $f(t)$  по заданному изображению  $F(p)$ :

$$\text{а) } F(p) = \frac{1}{p^2 + 4p + 5}; \quad \text{б) } F(p) = \frac{2p^3 + p^2 + 2p + 2}{p^5 + 2p^4 + 2p^3};$$

$$\text{в) } F(p) = \frac{p + 2}{(p + 1)(p - 2)(p^2 + 4)}.$$

$$\text{ОТВЕТ: а) } f(t) = e^{-2t} \sin 2t; \quad \text{б) } f(t) = \frac{t^2}{2} + 2e^{-t} \sin t;$$

$$\text{в) } f(t) = \frac{1}{6} e^{2t} - \frac{1}{15} e^{-t} - \frac{1}{10} \cos 2t - \frac{2}{5} \sin 2t.$$

2. Восстановите оригинал  $f(t)$  по его известному изображению  $F(p)$ :

$$\text{а) } F(p) = \frac{p}{(p + 1)(p + 2)(p + 3)(p + 4)}; \quad \text{б) } F(p) = \frac{1}{(p - 1)^3(p^3 + 1)};$$

$$\text{в) } F(p) = \frac{1}{p^2(p^2 - 1)}; \quad \text{г) } F(p) = \frac{p}{(p^2 - 1)^2}.$$

$$\text{ОТВЕТ: а) } f(t) = -\frac{1}{6} e^{-t} + e^{-2t} - \frac{3}{2} e^{-3t} + \frac{2}{3} e^{-4t};$$

$$\text{б) } f(t) = \frac{e^t 2t^2 - 6t + 3}{8} - \frac{e^{-t}}{24} + \frac{2 \sin\left(\frac{\sqrt{3}t}{2} + \frac{\pi}{6}\right)}{3};$$

$$\text{в) } f(t) = -t + \text{sh } t; \quad \text{г) } f(t) = \frac{t}{2} \text{sh } t.$$



3. Используя формулы разложения, найдите оригинал  $f(t)$  по данному изображению  $F(p)$ :

$$\text{а) } F(p) = \frac{2p}{(p^2 + 4p + 8)^2}; \quad \text{б) } F(p) = \frac{1}{p(p^3 + 1)};$$

$$\text{в) } F(p) = \frac{6p^2}{(p+2)(p-1)(p^2+1)}.$$

$$\text{Ответ: а) } F(t) = \frac{e^{-2t}}{4} ((2t-1) \sin 2t + 2t \cos 2t);$$

$$\text{б) } f(t) = 1 - \frac{1}{3}e^{-t} - \frac{2}{3}e^{\frac{t}{2}} \cos \frac{\sqrt{3}}{2}t; \quad \text{в) } f(t) = -\frac{8}{5}e^{-2t} + e^t + \frac{3}{5}(\cos t + 3 \sin t).$$

4. Пользуясь теоремой разложения, найдите оригиналы  $f(t)$  для следующих изображений  $F(p)$ :

$$\text{а) } F(p) = \frac{1}{p} e^{-\frac{1}{p}}; \quad \text{б) } F(p) = \sin \frac{1}{p}; \quad \text{в) } F(p) = \frac{1}{p} e^{\frac{1}{p^2}}.$$

$$\text{Ответ: а) } F(t) = J_0(2\sqrt{t}) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^n}{(n!)^2}; \quad \text{б) } \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{2n}}{(2n+1)!(2n)!};$$

$$\text{в) } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n}}{n!(2n)!}.$$

**ПРИЛОЖЕНИЯ ОПЕРАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ**

**Несобственные интегралы от оригиналов и изображений. Решение линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Применение формулы Дюамеля к решению ДУ.**

**Решение систем ДУ с постоянными коэффициентами.**

**Решение ДУ с переменными коэффициентами.**

**Решение интегральных уравнений типа свертки. Решение интегродифференциальных уравнений. Решение уравнений математической физики (уравнение теплопроводности; волновое уравнение).**

**Приложения к расчету электрических цепей.**

**Задачи и упражнения**

При вычислении несобственных интегралов широко применяется утверждение, основанное на следующей теореме.

**Теорема 13.1.** Пусть  $f(t)$  – оригинал и  $F(p)$  – его изображение по Лапласу. Тогда

$$\int_0^{\infty} \frac{f(t)}{t} dt = \int_0^{\infty} F(p) dp, \quad (13.1)$$

если оба интеграла сходятся.

$$\Delta \int_0^{\infty} F(p) dp = \int_0^{\infty} \left( \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt \right) dp = \int_0^{\infty} f(t) \left( \int_0^{\infty} e^{-pt} dp \right) dt =$$

$$= \int_0^{\infty} f(t) \left( \frac{e^{-pt}}{-t} \right) \Big|_{p=0}^{p=\infty} dt = \int_0^{\infty} \frac{f(t)}{t} dt. \quad \blacktriangle$$

**Следствие.** Если  $f(t) \doteq F(p)$ , то

$$\int_0^{\infty} t^n f(t) dt = (-1)^{n+1} \int_0^{\infty} F^{(n+1)}(p) dp. \quad (13.2)$$

Δ Выше мы получили (см. 11.30), что  $F^{(n+1)}(p) \doteq (-1)^{n+1} t^{n+1} f(t)$ .

Отсюда на основании (13.1) и следует справедливость равенства (13.2).

**Пример 13.1.** Вычислить интегралы:

$$\text{а) } \int_0^{\infty} \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t} dt, a > 0, b > 0; \quad \text{б) } \int_0^{\infty} \frac{e^{-\alpha t} \sin \beta t}{t} dt, \alpha \geq 0, \beta > 0;$$

$$\text{в) } \int_0^{\infty} t^2 e^{-\alpha t} dt, \alpha > 0.$$

Δ а) Имеем  $e^{-at} - e^{-bt} \doteq \frac{1}{p+a} - \frac{1}{p+b}$ . Тогда по формуле (13.1)

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t} dt = \int_0^{\infty} \left( \frac{1}{p+a} + \frac{1}{p+b} \right) = \ln \left| \frac{p+a}{p+b} \right|_0^{\infty} = \ln \frac{b}{a}.$$

б) Имеем

$$\begin{aligned} e^{-\alpha t} \sin \beta t &\doteq \frac{\beta}{(p+\alpha)^2 + \beta^2} \Rightarrow \int_0^{\infty} \frac{e^{-\alpha t} \sin \beta t}{t} dt = \\ &= \int_0^{\infty} \frac{\beta dp}{(p+\alpha)^2 + \beta^2} = \operatorname{arctg} \frac{p+\alpha}{\beta} \Big|_0^{\infty} = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{\alpha}{\beta} = \operatorname{arcctg} \frac{\alpha}{\beta}. \end{aligned}$$

в) Так как  $e^{-\alpha t} \doteq \frac{1}{p+\alpha}$ , то по формуле (13.2)

$$\int_0^{\infty} t^2 e^{-\alpha t} dt = (-1)^{2+1} \int_0^{\infty} \left( \frac{1}{p+\alpha} \right)''' dp = 6 \int_0^{\infty} \frac{dp}{(p+\alpha)^4} = \frac{2}{\alpha^3}. \quad \blacktriangle$$

**Решение линейных дифференциальных уравнений (ЛДУ) с постоянными коэффициентами.** Пусть дано ЛДУ с постоянными коэффициентами

$$L[y] = y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = f(t), \quad (13.3)$$

где  $y = y(t), t \geq 0$ ,

и

$$y(0) = y_0; \quad y'(0) = y'_0; \quad \dots; \quad y^{(n-1)}(0) = y_0^{(n-1)}, \quad (13.4)$$

которые являются начальными условиями для него.

Требуется решить задачу Коши (13.3)–(13.4).

Если правая часть уравнения (13.3) – оригинал, то и решение этого уравнения тоже будет оригиналом. Пусть  $y(t) \doteq Y(p)$ . Преобразуем уравнение (13.3) по Лапласу. Согласно теореме о преобразовании производных по Лапласу и начальным условиям (13.4) будем иметь

$$y^{(n)}(t) \doteq p^n Y(p) - p^{n-1} y_0 - p^{n-2} y_0' - \dots - y_0^{(n-1)}.$$

$$a_1 y^{(n-1)}(t) \doteq a_1 (p^{n-1} Y(p) - p^{n-2} y_0 - p^{n-3} y_0' - \dots - y_0^{(n-2)});$$

---


$$a_{n-1} y'(t) \doteq a_{n-1} (p Y(p) - y_0);$$

$$a_n y(t) \doteq a_n Y(p).$$

Сложив все эти равенства, получим преобразование Лапласа левой части дифференциального уравнения (ДУ) (13.3):

$$L[y] \doteq (p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_{n-1} p + a_n) Y(p) - \sum_{k=0}^{n-1} (p^k + a_1 p^{k-1} + \dots + a_{k-1} p + a_k) y_0^{(n-1-k)} \quad (13.5)$$

или

$$L[y] \doteq L(p) Y(p) - \sum_{k=0}^{n-1} (p^k + a_1 p^{k-1} + \dots + a_{k-1} p + a_k) y_0^{(n-1-k)},$$

где

$$L(p) = p^n + a_1 p^{n-1} + a_2 p^{n-2} + \dots + a_{n-1} p + a_n. \quad (13.6)$$

Заметим, что  $L(p)$  получается формальной заменой  $y^{(k)}$  на  $p^k$ ,  $k = \overline{0, n}$ , в дифференциальном операторе левой части уравнения (13.6), т. е.  $L(p)$  – характеристический многочлен этого уравнения, в котором  $\lambda$  заменено на  $p$ .

Так как  $f(t) \doteq F(p)$ , то с учетом соотношения (13.5) ДУ имеет вид

$$L(p) Y(p) - \sum_{k=0}^{n-1} (p^k + a_1 p^{k-1} + \dots + a_{k-1} p + a_k) y_0^{(n-1-k)} = F(p). \quad (13.7)$$

Уравнение (13.7) называется *операторным*. Решая уравнение (13.7), находим  $Y(p)$ :

$$Y(p) = \frac{F(p)}{L(p)} + \frac{1}{L(p)} \sum_{k=0}^{n-1} (p^k + a_1 p^{k-1} + \dots + a_k) y_0^{(n-1-k)}. \quad (13.8)$$

По изображению  $Y(p)$  восстанавливаем оригинал  $y(t)$  – искомое решение задачи Коши (13.3)–(13.4).

**Пример 13.2.** Решите задачу Коши:

$$y'' + 2y' = e^{-t}(\cos t + t); \quad y(0) = y'(0) = 2. \quad (13.9)$$

Δ Пусть  $y(t) \doteq Y(p)$ . Переходим в уравнение (13.9) с учетом начальных условий:

$$y'(t) \doteq pY(p) - y(0) = pY(p) - 2;$$

$$y''(t) \doteq p^2Y(p) - p y(0) - y'(0) = p^2Y(p) - 2p - 2.$$

Тогда для уравнения (13.9) операторное уравнение имеет вид

$$p^2Y(p) - 2p - 2 + 2pY(p) - 4 + Y(p) = \frac{p+1}{(p+1)^2 + 1} + \frac{1}{(p+1)^2}$$

или

$$(p^2 + 2p + 1)Y(p) = \frac{p+1}{(p+1)^2 + 1} + \frac{1}{(p+1)^2} + 2p + 6.$$

Отсюда изображение решения есть

$$Y(p) = \frac{1}{(p^2 + 2p + 2)(p+1)} + \frac{1}{(p+1)^4} + \frac{2}{p+1} + \frac{4}{(p+1)^2}.$$

Находим теперь оригинал – решение  $y(t)$ .

Имеем

$$\frac{1}{(p^2 + 2p + 2)(p+1)} = \frac{1}{p+1} - \frac{p+1}{(p+1)^2 + 1} \doteq e^{-t} - e^{-t} \cos t;$$

$$\frac{1}{(p+1)^4} \doteq e^{-t} \frac{t^3}{3!}; \quad \frac{2}{p+1} \doteq 2e^{-t}; \quad \frac{4}{(p+1)^2} \doteq 4te^{-t}.$$

Итак,  $y(t) = e^{-t} - e^{-t} \cos t + \frac{t^3}{6} e^{-t} + 2e^{-t} + 4te^{-t} = e^{-t} (\frac{t^3}{6} + 4t - \cos t + 3)$ . ▲

**Пример 13.3.** Решите задачу Коши:

$$y'' + y = -\sin 2t; \quad y(\pi) = y'(\pi) = 1. \quad (13.10)$$

Δ Введем замену  $\tau = t - \pi \Rightarrow t = \tau + \pi$ . Тогда  $y'_t = y'_\tau$ ,  $y''_{tt} = y''_{\tau\tau}$  и исходная задача Коши (13.10) сводится к задаче

$$y'' + y = -\sin 2(\tau + \pi) = -\sin 2\tau; \quad y(0) = y'(0) = 1, \quad (13.11)$$

где уже  $y = y(\tau)$ .

Пусть  $y(\tau) \doteq Y(p) = Y$ . После перехода в уравнении к изображениям получаем

$$\begin{aligned} (p^2 + 1)Y - p - 1 &= -\frac{2}{p^2 + 4} \Rightarrow \\ \Rightarrow Y &= \frac{p}{p^2 + 1} + \frac{1}{p^2 + 1} - \frac{2}{(p^2 + 4)(p^2 + 1)} = \frac{p}{p^2 + 1} + \frac{1}{3} \frac{1}{p^2 + 1} + \\ &+ \frac{2}{3} \frac{1}{p^2 + 4} \doteq \cos \tau + \frac{1}{3} \sin \tau + \frac{1}{3} \sin 2\tau = \\ &= \cos(t - \pi) + \frac{1}{3} \sin(t - \pi) + \frac{1}{3} \sin(2t - 2\pi) = -\cos t - \frac{1}{3} \sin t + \frac{1}{3} \sin 2t = y(t). \quad \blacktriangle \end{aligned}$$

**Применение формулы Дюамеля к решению ДУ.** Рассмотрим задачу Коши:

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = f(t); \quad (13.12)$$

$$y(0) = y'(0) = \dots = y^{(n-1)}(0) = 0, \quad (13.13)$$

где  $a_i$  – постоянные коэффициенты  $i = \overline{1, n}$ .

Перейдем в уравнении (13.13) к изображениям. Пусть  $f(t) \doteq F(p)$ ,  $y(t) \doteq Y(p)$ . С учетом нулевых начальных условий (13.13) получаем

$$L(p)Y(p) = F(p), \quad (13.14)$$

где  $L(p)$  имеет вид (13.6).

Наряду с задачей Коши (13.12), (13.13) рассмотрим вспомогательную задачу Коши:

$$\left. \begin{aligned} z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z' + a_n &= 1; \\ z(0) = z'(0) = \dots = z^{(n-1)}(0) &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (13.15)$$

где  $z = z(t)$ .

Пусть  $z(t) \doteq Z(p)$ . Тогда операторное уравнение для задачи (13.15) имеет вид

$$L(p)Z(p) = \frac{1}{p}. \quad (13.16)$$

Из уравнений (13.14), (13.16) имеем  $Y(p) = pF(p)Z(p)$ . Отсюда по формуле Дюамеля (11.36) для решения  $y(t)$  исходной задачи Коши получаем

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{d}{dt}(f(t) * z(t)) = \frac{d}{dt} \int_0^t f(\tau) z(t - \tau) d\tau = f(t) z(0) + \\ &+ \int_0^t f(\tau) \frac{d}{dt} z(t - \tau) d\tau = \int_0^t f(\tau) z'_t(t - \tau) d\tau, \end{aligned}$$

так как  $z(0) = 0$ .

Итак, получена формула для искомого решения задачи Коши (13.12), (13.13):

$$y(t) = \int_0^t f(\tau) z'_t(t - \tau) d\tau. \quad (13.17)$$

**Пример 13.4.** Решите задачу Коши:

$$y'' + 4y' + 4y = \frac{e^{-2t}}{(1+2t)^2}; \quad y(0) = y'(0) = 0.$$

Δ Здесь  $f(t) = \frac{e^{-2t}}{(1+2t)^2}$ . Решим сначала вспомогательную задачу

$$z'' + 4z' + 4z = 1; \quad z(0) = z'(0) = 0.$$

Пусть  $z(t) \doteq Z(p)$ . Перейдем к изображениям в дифференциальном уравнении вспомогательной задачи.

Имеем

$$(p^2 + 4p + 4) Z(p) = \frac{1}{p} \Rightarrow Z(p) = \frac{1}{p(p+2)^2}.$$

$$\text{Разложим } Z(p) \text{ на простейшие дроби: } Z(p) = \frac{1}{4p} - \frac{1}{2(p+1)^2} - \frac{1}{4(p+2)}.$$

$$\text{Отсюда } z(t) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} t e^{-2t} - \frac{1}{4} e^{-2t}. \text{ По формуле (13.17) записываем}$$

искомое решение исходной задачи Коши:

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_0^t \frac{e^{-2\tau}}{(1+2\tau)^2} \frac{d}{d\tau} \left( \frac{1}{4} - \frac{(t-\tau)e^{-2(t-\tau)}}{t^2} \right) d\tau = \int_0^t \frac{e^{-2\tau}}{(1+2\tau)^2} (t-\tau) e^{-2(t-\tau)} d\tau = \\ &= e^{-2t} \int_0^t \frac{(t-\tau)^2}{(1+2\tau)^2} d\tau = \frac{1}{4} e^{-2t} (2t - \ln(1+2t)). \quad \blacktriangle \end{aligned}$$

### **Решение систем линейных уравнений с постоянными коэффициентами (СДУ с ПК).**

Схема решения таких систем та же, что и для линейных ДУ порядка  $n$ . Каждое из уравнений системы преобразуется по Лапласу, а затем получившаяся система линейных алгебраических уравнений решается относительно изображения искомого решения.

Пусть требуется решить СДУ первого порядка с постоянными коэффициентами  $x_k = x_k(t)$ ,  $k = \overline{1, n}$ :

$$\dot{x}_1 = a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n + f_1(t);$$

$$\dot{x}_2 = a_{21}x_1 + \dots + a_{2n}x_n + f_2(t);$$

$$\dot{x}_n = a_{n1}x_1 + \dots + a_{nn}x_n + f_n(t)$$

при начальных условиях  $x_1(0) = x_{10}$ ;  $x_2(0) = x_{20}$ ; ...;  $x_n(0) = x_{n0}$ .

Обозначим  $X_k = X_k(p)$  и  $F_k(p)$  – изображения функций  $x_k(t)$  и  $f_k(t)$  соответственно и перейдем от системы ДУ к системе для изображений:



$$\left. \begin{aligned} (p - a_{11}) X_1 - a_{12} X_2 - \dots - a_{1n} X_n &= F_1(p) + x_{10}; \\ - a_{21} X_1 + (p - a_{22}) X_2 - \dots - a_{2n} X_n &= F_2(p) + x_{20}; \\ \dots &\dots \\ - a_{n1} X_1 - a_{n2} X_2 - \dots + (p - a_{nn}) X_n &= F_n(p) + x_{n0}, \end{aligned} \right\}$$

являющейся линейной алгебраической системой уравнений относительно  $X_1, X_2, \dots, X_n$ . Решая ее, находим  $X_k = X_k(p)$ , а затем по известному изображению  $X_k(p)$  найдем оригинал  $x_k(t)$ ,  $k = \overline{1, n}$ .

**Пример 13.5.** Решите задачу Коши: 
$$\left. \begin{aligned} x' - 2x - 3y &= 5t; \\ y' - 3x - 2y &= 8e^t \end{aligned} \right\} x(0) = 0, y(0) = 1.$$

Δ Пусть  $x(t) \doteq X(p)$ ,  $y(t) \doteq Y(p)$ . Тогда операторная система имеет вид

$$\left. \begin{aligned} pX(p) - 2X(p) - 3Y(p) &= \frac{5}{p^2}; \\ pY(p) - 1 - 3X(p) - 2Y(p) &= \frac{8}{p-1} \end{aligned} \right\}$$

или

$$\left. \begin{aligned} (p - 2) X(p) - 3Y(p) &= \frac{5}{p^2}; \\ -3X(p) + (p - 2) Y(p) &= \frac{8}{p-1} + 1. \end{aligned} \right\} \quad (13.18)$$

Систему (13.18) решим по формулам Крамера.

Находим определители  $\Delta, \Delta_X, \Delta_Y$  системы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} p-2 & -3 \\ -3 & p-2 \end{vmatrix} = (p-5)(p+1);$$

$$\Delta_X = \begin{vmatrix} \frac{5}{p^2} & -3 \\ \frac{8}{p-1} + 1 & p-2 \end{vmatrix} = \frac{3p^3 + 26p^2 + 15p + 10}{p^2(p-1)};$$

$$\Delta_Y = \begin{vmatrix} p-2 & \frac{5}{p^2} \\ -3 & \frac{8}{p-1} + 1 \end{vmatrix} = \frac{p^4 + 5p^3 - 14p^2 + 15p - 15}{p^2(p-1)}.$$

Отсюда по формулам Крамера получаем

$$X(p) = \frac{\Delta_X}{\Delta} = \frac{3p^3 + 26p^2 - 15p + 10}{(p^2 - 1)(p - 5)p^2};$$

$$Y(p) = \frac{\Delta_Y}{\Delta} = \frac{p^4 + 5p^3 - 14p^2 + 15p - 15}{(p^2 - 1)(p - 5)p^2}.$$

Применив формулу разложения (12.4), получим

$$\begin{aligned} x(t) = & \operatorname{Res}_{p=0}(X(p)e^{pt}) + \operatorname{Res}_{p=-1}(X(p)e^{pt}) + \operatorname{Res}_{p=1}(X(p)e^{pt}) + \\ & + \operatorname{Res}_{p=5}(X(p)e^{pt}) = -\frac{13}{5} + 4e^{-t} - 3e^t + \frac{8}{5}e^{5t} + 2t. \end{aligned}$$

$$\text{Аналогично найдем, что } y(t) = \frac{12}{5} - 3te^t - 4e^{-t} + \frac{8e^{5t}}{5}. \blacktriangle$$

**Решение ДУ с переменными коэффициентами.** С помощью преобразования Лапласа можно решать некоторые обыкновенные ДУ с переменными коэффициентами специального вида.

Пусть дано ДУ

$$a_0(t)x^{(n)} + a_1(t)x^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(t)x + a_n(t)x = f(t), \quad (13.19)$$

где  $x = x(t)$ ,  $f(t)$  – оригиналы, а коэффициенты этого уравнения –  $a_i(t)$ ,  $i = \overline{0, n}$ , многочлены от  $t$ .

Уравнение (13.19) может быть преобразовано по Лапласу, если воспользоваться теоремой о дифференцировании изображений и ее следствием, на основании которых

$$t x(t) \doteq -X'(p), \quad t^2 x(t) \doteq X''(t); \dots; \quad t^n x(t) \doteq (-1)^n X^{(n)}(p), \quad (13.20)$$

где  $x(t) \doteq X(p)$ .

Чтобы найти изображения функций

$$t x'(t), t x''(t), \dots, t x^{(n)}, t^2 x'(t), t^2 x''(t), \dots, t^2 x^{(n)}(t) \text{ и т. д.,}$$

нужно воспользоваться тем, что дифференцирование изображения приводит к умножению оригинала на  $(-t)$ . Например,

$$t x'(t) \doteq -\frac{d}{dp} \mathbf{L}(x') = -(pX(p) - x(0))'_p = -(pX'(p) + X(p));$$

$$t x''(t) \doteq -\frac{d}{dp} \mathbf{L}(x'') = -(p^2 X(p) - p x(0) - x'(0))'_p = -(2pX(p) + p^2 X'(p) - x(0));$$

.....

$$t^2 x'(t) \doteq (-1)^2 \frac{d^2}{dp^2} \mathbf{L}(x') = \tag{13.21}$$

$$= (-1)^2 (pX(p) - x(0))''_{pp} = (-1)^2 (pX''(p) + 2X'(p)) \text{ и т. д.}$$

Преобразовав уравнение (13.19) с учетом соотношений (13.20) и (13.21) приходим к ЛДУ относительно  $X(p)$ , порядок которого равен наивысшей степени  $t$ , имеющейся в коэффициенте  $a_i$  исходного уравнения (13.19). Преобразованное ДУ обычно оказывается более простым, чем исходное ДУ.

**Пример 13.6.** Решите задачу Коши:

$$t x'' + x' + t x = 0; x(0) = 1, x'(0) = 0. \tag{13.22}$$

Δ Пусть  $x(t) \doteq X(p)$ . Согласно формулам (13.20) и (13.21) из (13.22) получаем операторное уравнение

$$-(p^2 X(p) - p x(0) - x'(0))'_p + pX(p) - x(0) - X'(p) = 0$$

или

$$(p^2 + 1) X'(p) + p X(p) = 0.$$

Это ДУ с разделяющимися переменными. Разделив их в уравнении, получим

$$\frac{dX(p)}{X(p)} + \frac{p dp}{p^2 + 1} = 0 \Rightarrow \ln |X(p)| + \frac{1}{2} \ln (p^2 + 1) = \ln C.$$

Отсюда  $X(p) = \frac{C}{\sqrt{p^2 + 1}}$ . Для определения постоянной  $C$  воспользуемся

теоремой 11.4 о предельных соотношениях, согласно которой

$$1 = x(0) = \lim_{\operatorname{Re} p \rightarrow \infty} p X(p) = \lim_{\operatorname{Re} p \rightarrow \infty} \frac{pC}{\sqrt{p^2 + 1}} = C.$$

Итак,  $C = 1$ , т. е.  $X(p) = \frac{1}{\sqrt{p^2 + 1}} \doteq J_0(t)$ , где  $J_0(t)$  – функция

Бесселя. ▲

**Решение интегральных уравнений типа свертки.** Напомним, что уравнение вида

$$y(t) + \int_0^t y(\tau) K(t - \tau) d\tau = f(t) \quad (13.23)$$

называется *интегральным уравнением типа свертки*.

Здесь  $y(t)$  – искомая неизвестная функция,  $f(t)$  – свободный член (правая часть),  $K(t - \tau)$  – ядро уравнения.

Предположим, что  $y(t)$ ,  $f(t)$  и  $K(t)$  – оригиналы. В уравнении (13.23) перейдем к изображениям. Пусть  $y(t) \doteq Y(p)$ ,  $f(t) \doteq F(p)$ ,  $K(t) \doteq Q(p)$ . Так как интеграл в уравнении (13.24) есть свертка оригиналов, то в силу теоремы Бореля получаем операторное уравнение

$$Y(p) + Y(p)Q(p) = F(p).$$

Отсюда  $Y(p) = \frac{F(p)}{1 + Q(p)}$  – изображение искомого решения  $y(t)$

интегрального уравнения (13.23). По нему восстанавливаем оригинал – решение интегрального уравнения.

**Пример 13.7.** Решите интегральное уравнение

$$y(t) + 2 \int_0^t y(\tau) \cos(t - \tau) d\tau = e^{-t}. \quad (13.24)$$

Δ Пусть  $y(t) \doteq Y(p)$ . Так как  $e^t \doteq \frac{1}{p-1}$ ,  $\cos t \doteq \frac{p}{p^2+1}$ , то, перейдя в

уравнении (13.24) к изображениям, получаем операторное уравнение

$$Y(p) + \frac{2pY(p)}{p^2+1} = \frac{1}{p-1}.$$

Отсюда

$$Y(p) = \frac{p^2+1}{(p-1)(p+1)^2} = \frac{1}{2(p-1)} - \frac{1}{(p+1)^2} - \frac{1}{2(p+1)} \doteq$$

$$\doteq \frac{1}{2}e^{-t} - te^{-t} - \frac{1}{2}e^{-t} = \operatorname{sh} t - te^{-t} = y(t) \text{ — искомое решение уравнения (13.24). } \blacktriangle$$

**Решение интегродифференциальных уравнений.** *Линейным интегродифференциальным уравнением* называется уравнение вида

$$a_0(t)\varphi^{(n)}(t) + a_1(t)\varphi^{(n-1)}(t) + \dots + a_n\varphi(t) + \sum_{m=0}^s \int_0^t K_m(t,\tau)\varphi^{(m)}(\tau)d\tau = f(t).$$

Здесь  $a_i(t), i = \overline{0, n}$  — коэффициенты уравнения,  $f(t)$  — правая часть  $K_m(t, \tau), m = \overline{0, s}$ , — известные функции (ядра),  $\varphi(t)$  — искомая функция. При решении интегродифференциальных уравнений для искомой функции задаются начальные условия:

$$\varphi(0) = \varphi_0, \varphi'(0) = \varphi'_0, \dots, \varphi^{(n-1)}(0) = \varphi_0^{(n-1)}.$$

Ограничимся случаем, когда коэффициенты уравнения постоянные, а его ядра  $K_m(t, \tau)$  зависят лишь от разности аргументов  $t - \tau$ , т. е.  $K_m(t, \tau) = K_m(t - \tau), m = \overline{0, s}$ .

Схему применения преобразования Лапласа к решению интегродифференциальных уравнений проиллюстрируем следующим примером.

**Пример 13.8.** Решите уравнение

$$\varphi''(t) + \int_0^t e^{2(t-\tau)} \varphi'(\tau) d\tau = e^{2t}, \quad \varphi(0) = \varphi'(0) = 0.$$

Δ Пусть  $\varphi(t) \doteq \Phi(p)$ . В силу начальных условий  $\varphi'(t) \doteq p\Phi(p)$ ,  $\varphi''(t) \doteq p^2\Phi(p)$ . Применяв преобразование Лапласа к исходному уравнению, получим операторное уравнение

$$p^2\Phi(p) + \frac{p}{p-2}\Phi(p) = \frac{1}{p-2}.$$

$$\Phi(p) = \frac{1}{p(p-1)^2} \doteq t e^t - e^t + 1 \text{ — искомое решение исходного интегро-}$$

дифференциального уравнения. ▲

**Решение некоторых уравнений математической физики (УМФ).**

Применение операционного исчисления к решению УМФ проиллюстрируем на примерах решения уравнений теплопроводности и волнового уравнения.

**1. Решение уравнения теплопроводности.** Рассмотрим следующую задачу: найти решение  $u = u(x, t)$  уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t), \quad (13.25)$$

удовлетворяющее начальному условию

$$u(x, 0) = \varphi(x) \quad (13.26)$$

и граничным условиям

$$u(0, t) = \psi_1(t); \quad u(l, t) = \psi_2(t). \quad (13.27)$$

Пусть  $u(x, t)$ ,  $u_{xx}(x, t)$ ,  $f(x, t)$ ,  $\psi_1(t)$  и  $\psi_2(t)$  — оригиналы и

$$u(x, t) \doteq U(x, p) = \int_0^\infty u(x, t) e^{-pt} dt;$$

$$f(x, t) \doteq F(x, p); \quad \psi_1(t) \doteq \Psi_1(p); \quad \psi_2(t) \doteq \Psi_2(p).$$

Тогда на основании соотношений (11.32) и (11.33)

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \doteq \int_0^{\infty} \frac{\partial u}{\partial x} e^{-pt} dt = \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{\infty} u(x, t) e^{-pt} dt = \frac{\partial U(x, p)}{\partial x},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \doteq \int_0^{\infty} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} e^{-pt} dt = \frac{\partial^2 U(x, p)}{\partial x^2}. \quad (13.28)$$

Далее, учитывая начальное условие (13.26), имеем

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \doteq pU(x, p) - u(x, 0) = pU(x, p) - \varphi(x). \quad (13.29)$$

Для изображения  $U(x, p)$  из граничных условий (13.27) имеем

$$U(0, p) = \Psi_1(p), \quad U(l, p) = \Psi_2(p). \quad (13.30)$$

Перейдем в уравнении (13.25) к изображениям. С учетом равенств (13.28) и (13.29) получаем обыкновенное ДУ:

$$a^2 \frac{d^2 U}{dx^2} - pU + \varphi(x) + F(x, p) = 0. \quad (13.31)$$

относительно изображения  $U = U(x, p)$ .

Таким образом, операционный метод приводит решение краевой задачи (13.25)–(13.27) к решению уравнения (13.31) при граничных условиях (13.30). Решив его, найдем изображение  $U(x, p)$ . Тогда обратным преобразованием Лапласа восстановим искомое решение  $u(x, t)$  краевой задачи (13.25)–(13.27).

**2. Решение волнового уравнения.** Проиллюстрируем этот метод на конкретной задаче.

**Пример 13.9.** Решите волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad 0 \leq x \leq l; \quad t > 0, \quad (13.32)$$

при начальных условиях

$$u(x, 0) = A \sin \frac{\pi x}{l}; \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = 0 \quad (13.33)$$

и краевых условиях

$$u(0, t) = u(l, t) = 0. \quad (13.34)$$

Δ Пусть  $U(x, p)$  – изображение по Лапласу искомого решения  $u(x, t)$ .

Тогда

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \doteq \int_0^{\infty} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} e^{-pt} dt = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \int_0^{\infty} u(x, t) e^{-pt} dt = \frac{\partial^2 U(x, p)}{\partial x^2}.$$

Согласно правилу дифференцирования оригиналов и начальным условиям (13.33) находим

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \doteq p^2 U(x, p) - p A \sin \frac{\pi x}{l}.$$

Переходя в уравнении (13.32) к изображениям, получаем ДУ

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \frac{p^2}{a^2} U = \frac{p A}{a^2} \sin \frac{\pi x}{l}, \quad (13.35)$$

а из краевых условий (13.34) – соотношения

$$U|_{x=0} = U|_{x=l} = 0. \quad (13.36)$$

Решая уравнение (13.35), получаем

$$U(x, p) = C_1 e^{\frac{px}{a}} + C_2 e^{-\frac{px}{a}} + \frac{Ap}{p^2 + \frac{\pi^2 a^2}{l^2}} \sin \frac{\pi x}{l}.$$

Отсюда с учетом краевых условий (13.37) получаем

$$U(x, p) = \frac{Ap}{p^2 + \frac{\pi^2 a^2}{l^2}} \sin \frac{\pi x}{l}.$$

Оригиналом для этого изображения является функция

$$u(x, t) = A \cos \frac{\pi at}{l} \cdot \sin \frac{\pi x}{l}, \quad \text{являющаяся искомым решением задачи}$$

(13.32)–(13.34). ▲



Операционное исчисление успешно применяется для расчета электрических цепей. Рассмотрим электрическую цепь, состоящую из последовательно соединенных индуктивности  $L$ , сопротивления  $R$  и емкости  $C$  (рис. 13.1), к которой в начальный момент  $t = 0$  приложена ЭДС  $u(t)$ .

Как известно из электротехники, в этом случае сила тока  $i(t)$  определяется из уравнения

$$L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{q}{C} = u, \quad (13.37)$$

где заряд конденсатора  $q(t)$  и сила тока  $i(t)$  связаны соотношением

$$i = \frac{dq}{dt}.$$

Для решения уравнения (13.37) можно применить операционный метод. Рассмотрим случай, когда  $q(0) = 0$  и  $i(0) = 0$ .

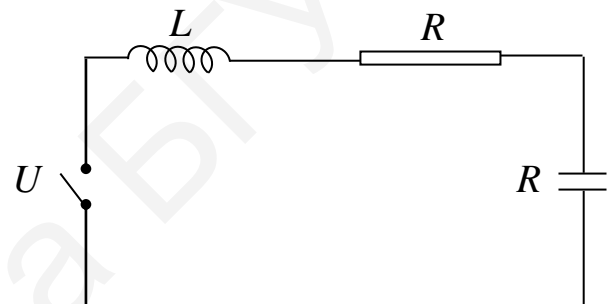


Рис. 13.1

Для него можно указать общие правила, позволяющие получать уравнения в изображениях, не выписывая каждый раз дифференциальные уравнения.

Если  $q(0) = 0$ , то  $q = \int_0^t i(\tau) d\tau$  и уравнение (13.37) примет вид

$$L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C} \int_0^t i(\tau) d\tau = u.$$

Пусть  $i(t) \doteq I(p)$ ,  $u(t) \doteq U(p)$ . Тогда, учитывая начальное условие  $i(0) = 0$ , получим следующее уравнение в изображениях:

$$L p I(p) + RI(p) + \frac{1}{Cp} I(p) = U(p).$$

Отсюда

$$I(p) = \frac{U(p)}{Lp + R + \frac{1}{Cp}} = \frac{U(p)}{Z(p)},$$

где  $Z(p) = Lp + R + \frac{1}{Cp}$ .

Величины  $I(p), U(p), Z(p)$  и  $\frac{1}{Z(p)}$  называют соответственно операторными током, напряжением, сопротивлением и проводимостью. Величину  $Z(p)$ , кроме того, называют обобщенным сопротивлением или импедансом цепи, а величину  $\frac{1}{Z(p)}$  – обобщенной проводимостью цепи.

Равенство

$$I(p) = \frac{U(p)}{Z(p)} \quad (13.38)$$

показывает, что для изображений тока и напряжения имеет место закон Ома. Для них справедливы также первый и второй законы Кирхгофа. Действительно, переходя от равенств

$$\sum_{k=1}^n i_k(t) = 0; \quad \sum_{k=1}^n u_k(t) = \sum_{k=1}^n L_k \frac{d i_k}{d t} + \sum_{k=1}^n R_k i_k + \sum_{k=1}^n \frac{1}{C_k} \int_0^t i_k(\tau) d\tau,$$

являющихся математической записью этих законов, к равенствам в изображениях, получим

$$\sum_{k=1}^n I_k(p) = 0; \quad \sum_{k=1}^n U_k(p) = \sum_{k=1}^n Z_k(p) I_k(p),$$

что и доказывает высказанное утверждение.

При параллельном соединении двух цепей токи  $i_1$  и  $i_2$  в этих цепях связаны с током  $i$  в неразветвленной части равенством  $i = i_1 + i_2$ . Переходя к равенству в изображениях и учитывая, что при параллельном соединении все элементы цепи находятся под одним и тем же напряжением  $u$ , получим

$$I(p) = I_1(p) + I_2(p) \text{ или } \frac{U(p)}{Z(p)} = \frac{U(p)}{Z_1(p)} + \frac{U(p)}{Z_2(p)}.$$

Отсюда следует, что  $\frac{1}{Z(p)} = \frac{1}{Z_1(p)} + \frac{1}{Z_2(p)}$ , т. е. обобщенная проводимость цепи равна сумме обобщенных проводимостей всех ее параллельных ветвей.

Также просто показать, что при последовательном соединении цепей обобщенное сопротивление цепи равно сумме обобщенных сопротивлений всех соединенных участков. Для случая двух участков это запишется так:

$$Z(p) = Z_1(p) + Z_2(p).$$

**Пример 13.10.** В начальный момент времени  $t = 0$  в электрическую цепь, состоящую из последовательно соединенных индуктивности  $L$ , сопротивления  $R$  и емкости  $C$ , включается постоянная ЭДС  $u_0$ . Ток в цепи и заряд конденсатора в начальный момент равны нулю. Найдите силу тока в цепи.

Δ Так как  $i(0) = 0$  и  $q(0) = 0$ , то операторное сопротивление  $Z(p) = Lp + R + 1/Cp$ , а операторное напряжение  $U(p) = \frac{u_0}{p}$ . Пользуясь законом Ома, найдем операторный ток:

$$\begin{aligned} I(p) &= \frac{u_0}{p \left( Lp + R + \frac{1}{Cp} \right)} = \frac{u_0}{L \left( p^2 + \frac{R}{L}p + \frac{1}{LC} \right)} = \\ &= \frac{u_0}{L \left( \left( p + \frac{R}{2L} \right)^2 + \frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2} \right)} = \frac{u_0}{L \left( (p + \alpha)^2 + \omega^2 \right)}, \end{aligned}$$

где  $\alpha = \frac{R}{2L}$ ,  $\omega^2 = \frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}$ .

Пользуясь формулами

$$\frac{1}{p^2 + \beta^2} \doteq \frac{1}{\beta} \sin \beta t; \quad \frac{1}{p^2 - \beta^2} \doteq \frac{1}{\beta} \operatorname{sh} \beta t; \quad \frac{1}{p^2} \doteq t$$

и теоремой смещения, получим

$$i(t) = \frac{u_0}{L\omega} e^{-\alpha t} \sin \omega t, \text{ если } \omega^2 > 0;$$

$$i(t) = \frac{u_0}{L\gamma} e^{-\alpha t} \operatorname{sh} \gamma t, \text{ если } \omega^2 = -\gamma^2 < 0; \quad i(t) = \frac{u_0}{L} t e^{-\alpha t}, \text{ если } \omega = 0.$$

Учитывая, что  $\omega^2 = \frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}$ , можно сказать, что первый результат

будет при  $R < 2\sqrt{\frac{L}{C}}$ , второй – при  $R > 2\sqrt{\frac{L}{C}}$  и третий – при  $R = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$ .

В первом случае в цепи происходит затухающий колебательный процесс. Число  $\alpha$  называется *коэффициентом затухания*. При наличии  $R$  он не равен нулю, и чем он больше, тем быстрее уменьшается ток. Число  $\omega$  называется *круговой частотой*. Она равна числу колебаний, происходящих в цепи за время  $2\pi$  секунд. ▲

**Пример 13.11.** В цепь, изображенную на рис. 13.1, в момент  $t = 0$  включается ЭДС  $u(t) = u_0 \sin \beta t$ . Найдите силу тока  $i(t)$  в случае колебательного процесса ( $R < 2\sqrt{\frac{L}{C}}$ ), если  $i(0) = 0$  и  $q(0) = 0$ .

Δ Так как начальные условия нулевые, то можно сначала определить ток  $i_1(t)$  в данной цепи при  $u(t) = 1$ , а затем найти  $i(t)$  с помощью интеграла Дюамеля. Для  $u(t) = 1$  результат получаем на основании примера 13.10:

$$i_1(t) = \frac{1}{L\omega} e^{-\alpha t} \sin \omega t,$$

где  $\alpha = \frac{R}{2L}$ ,  $\omega^2 = \frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}$ .

Воспользуемся теперь формулой Дюамеля

$$y = z(t)f(0) + \int_0^t z(\tau) f'(t - \tau) d\tau.$$

Положив в ней  $y = i(t)$ ,  $z(t) = i_1(t)$ ,  $f(t) = u(t)$  и заметив, что  $f(0) = u(0) = 0$ , найдем

$$i(t) = \int_0^t \frac{1}{L\omega} e^{-\alpha\tau} \sin \omega\tau u_0 \beta \cos \beta(t - \tau) d\tau = \\ = \frac{u_0 \beta}{2L\omega} \left( \int_0^t e^{-\alpha\tau} \sin ((\omega - \beta)\tau + \beta t) d\tau + \int_0^t e^{-\alpha\tau} \sin ((\omega + \beta)\tau + \beta t) d\tau \right).$$

Оба интеграла, находящиеся в скобках, берутся интегрированием по частям, примененным дважды. Окончательный результат имеет вид

$$i(t) = \frac{u_0 \beta}{2L\omega} \left( \frac{\alpha \sin \beta t + (\omega - \beta) \cos \beta t}{(\omega - \beta)^2 + \alpha^2} + \frac{-\alpha \sin \beta t + (\omega + \beta) \cos \beta t}{(\omega + \beta)^2 + \alpha^2} \right) - \\ - \frac{u_0 \beta}{2L\omega} e^{-\alpha t} \left( \frac{\alpha \sin \omega t + (\omega - \beta) \cos \omega t}{(\omega - \beta)^2 + \alpha^2} + \frac{\alpha \sin \omega t + (\omega + \beta) \cos \omega t}{(\omega + \beta)^2 + \alpha^2} \right).$$

Если дроби в скобках привести к общему знаменателю и провести алгебраические преобразования, то получим

$$i(t) = \frac{u_0}{\rho^2} (R \sin \beta t - X \cos \beta t) - \frac{u_0}{\omega \rho^2} (\alpha X_1 \sin \omega t - \omega X \cos \omega t),$$

где  $X = L\beta - \frac{1}{C\beta}$ ,  $X_1 = L\beta + \frac{1}{C\beta}$ ,  $\rho^2 = X^2 + R^2$ .

Величины  $X$  и  $X_1$  в электротехнике называют *реактивными сопротивлениями*, а величину  $\rho$  – *полным сопротивлением цепи*.

## Задачи и упражнения

1. Решите задачу Коши ( $x = x(t)$ ):

а)  $x'' - 2x' + 5x = 1 - t$ ;  $x(0) = x'(0) = 0$ ;

б)  $x^{IV} - x'' = 1$ ;  $x(0) = x'(0) = x''(0) = x'''(0) = 0$ ;

в)  $x'' - x' = 4 \sin^2 t$ ;  $x(0) = 0$ ,  $x'(0) = -1$ .

Ответ: а)  $x(t) = \frac{3}{25} - \frac{t}{5} - \frac{1}{25}(3 \cos 2t - 4 \sin 2t)$ ; б)  $x(t) = \operatorname{ch} t - \frac{t^2}{2} - 1$ ;

в)  $x(t) = -1 + \frac{3}{5}e^t - 2t + \frac{2}{5} \cos 2t + \frac{1}{5} \sin 2t$ .

2. Найдите частные решения следующих ДУ:

а)  $x'' + 2x' + x = f(t)$ , где  $f(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t < 2, \\ 3, & t > 2, \end{cases}$   $x_0 = x'(0) = 0$ ;

б)  $x'' + x = f(t)$ , где  $f(t) = \begin{cases} 0, & 0 < t < a, \\ 1, & a < t < b, \\ 0, & t > b, \end{cases}$   $x(0) = 0$ ,  $x'(0) = 2$ ;

в)  $x'' + x = f(t)$ , где  $f(t) = \begin{cases} t, & 0 < t < 1, \\ 2 - t, & 1 < t < 2, \\ 0, & t > 2, \end{cases}$   $x(0) = 0$ ,  $x'(0) = 1$ .

Ответ: а)  $x(t) = 1 - e^{-t}(1+t) + 2[1 - e^{-(t-2)}(1+(t-2))]1(t-2)$ ;

б)  $x(t) = 2 \sin t + 1(t-a)(1 - \cos(t-a)) - 1(t-b)(t-b - \cos(t-b))$ ;

в)  $x(t) = t - 2((t-1) - \sin(t-1))1(t-1) + ((t-2) - \sin(t-2))1(t-2)$ .

3. С помощью интеграла Дюамеля решите задачу Коши ( $x = x(t)$ )

с нулевыми начальными условиями:

а)  $x'' - x' = \frac{1}{1+e^t}$ ; б)  $x'' = \operatorname{arctg} t$ .

Ответ: а)  $x(t) = (e^t + 1) \ln(e^t + 1) - \ln 2(e^t + 1) - 1 - t + e^t - t e^t$ ;

$$\text{б) } x(t) = \frac{t^2 - 1}{2} \operatorname{arctg} t - \frac{t}{2} \ln(1 + t^2) + \frac{t}{2}.$$

4. Операционным методом решите задачи Коши для систем ЛДУ:

$$\text{а) } \begin{cases} x'' - 3y'' - x = 0, \\ x' - 3y' - 2y = 0, \end{cases} \quad x(0) = -\frac{4}{3}, \quad y(0) = 1, \quad x'(0) = 0, \quad y'(0) = -\frac{2}{3};$$

$$\text{б) } \begin{cases} x' = y + z, \\ y' = 3x + z, \\ z' = 3x + y, \end{cases} \quad x(0) = 0, \quad y(0) = 2, \quad z(0) = 3;$$

$$\text{в) } \begin{cases} x' = 2y - z, \\ y' = z - 2x, \\ z' = 2x - y, \end{cases} \quad x(0) = 1, \quad y(0) = 2, \quad z(0) = 0.$$

$$\text{Ответ: а) } x = -\frac{16}{15} e^{-\frac{t}{2}} - \frac{4}{15} e^{2t}, \quad y = \frac{16}{15} e^{-\frac{t}{2}} - \frac{1}{15} e^{2t};$$

$$\text{б) } x = e^{3t} - e^{-2t}, \quad y = e^{-2t} - \frac{1}{2} e^{-t} + \frac{3}{2} e^{3t}, \quad z = e^{-2t} + \frac{1}{2} e^{-t} + \frac{3}{2} e^{3t};$$

$$\text{в) } x = 4e^t - 3e^{-3t}, \quad y = 2e^t, \quad z = 4e^{2t} - 4e^t.$$

## Лекция 14

### ДЕЛЬТА-ФУНКЦИЯ

**Функция Хевисайда и задача о ее производной. Понятие  $\delta$ -функции.**

**Дельта-образные последовательности. Дифференцирование  $\delta$ -функции.**

#### Задачи и упражнения

Рассмотрим электрическую цепь, изображенную на рис. 14.1. Пусть напряжение  $E_0$  источника постоянно во времени и выключатель включен в момент  $t = 0$ . Тогда напряжение  $E(t)$  на зажимах цепи выражается формулой

$E(t) = E_0 \cdot 1(t)$ , где

$$1(t) = \begin{cases} 1, & t > 0, \\ 0, & t \leq 0 \end{cases}$$

единичная функция Хевисайда, график которой изображен на рис. 11.3. Пусть  $i(t)$  –

электрический ток в цепи. Тогда при

последовательном соединении индуктивности, емкости и сопротивления (см. рис. 14.1) этот ток, как известно, удовлетворяет уравнению

$$L \frac{di(t)}{dt} + R \cdot i(t) + \frac{1}{C} \int_0^t i(\tau) d\tau = E(t). \quad (14.1)$$

Дифференцируя обе части уравнения (14.1), получаем дифференциальное уравнение

$$L \frac{d^2 i(t)}{dt^2} + R \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C} i(t) = \frac{dE(t)}{dt}.$$

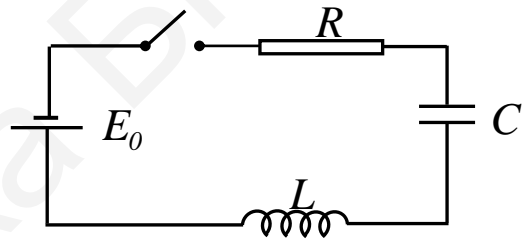


Рис. 14.1



В это уравнение входит  $E'(t) = E_0 \cdot I'(t)$ , но  $I'(t)$  не определена при  $t = 0$ , так как

$$\frac{I(\Delta t) - I(0)}{\Delta t} = \begin{cases} \frac{1}{\Delta t}, & \Delta t > 0; \\ 0, & \Delta t < 0, \end{cases}$$

и поэтому предел этого разностного отношения не существует при  $\Delta t \rightarrow 0$ , т. е.  $I'(0)$  не существует.

Из этого примера следует, что описание простой физической задачи приводит к математической трудности в рамках классического анализа.

В связи с трудностями решения некоторых задач математической физики, квантовой механики, электромагнетизма, где требовалось использовать разрывные функции для описания точечных масс, точечных источников тока, точечных источников поля, сосредоточенных импульсов и т. д. было введено понятие обобщенной функции (или распределения). Так, в 1926 году английский физик П. Дирак ввел в квантовой механике символ  $\delta$ , названный им *дельта-функцией*, которая явилась первой систематически применяемой обобщенной функцией. С физической точки зрения  $\delta$ -функция представляет собой плотность заряда, помещенного в начале координат. Если этот заряд имеет величину  $q$ , то его плотность  $\rho(x) = q \delta(x)$ . Отсюда следует, что функция  $\delta(x)$  обладает свойствами:

$$\delta(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 0; \\ \infty, & x = 0, \end{cases} \quad (14.2)$$

причем

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1. \quad (14.3)$$

С точки зрения классического анализа такая функция не имеет смысла, так как для нее условия (14.2) и (14.3) противоречивы.

Дельта-функцию можно представить себе как идеализацию узкого импульса бесконечной амплитуды. Поэтому рассмотрим последовательность импульсов  $\delta_\tau(x)$  единичной площади, один из которых изображен на рис. 14.2.

Аналитически эти импульсы определяются соотношением

$$\delta_\tau(x) = \frac{1\left(x + \frac{\tau}{2}\right) - 1\left(x - \frac{\tau}{2}\right)}{\tau} = \begin{cases} \frac{1}{\tau}, & |x| \leq \frac{\tau}{2}; \\ 0, & |x| > \frac{\tau}{2}. \end{cases} \quad (14.4)$$

Предел последовательности (14.4) при  $\tau \rightarrow 0$  удовлетворяет, очевидно, соотношениям (14.2), (14.3), т. е.  $\lim_{\tau \rightarrow 0} \delta_\tau(x) = \delta(x)$ . Ясно, что этот предел не является им в классическом, обычном смысле. Все последующие рассуждения в этой лекции носят нестрогий характер, хотя все полученные в нем формулы можно получить строго математически.

Последовательность функций, пределом которой служит  $\delta$ -функция, называется  $\delta$ -образной последовательностью. Графики отдельных членов последовательности (14.4) изображены на рис. 14.3.

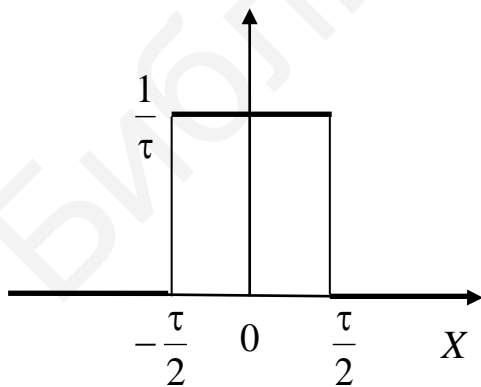


Рис. 14.2

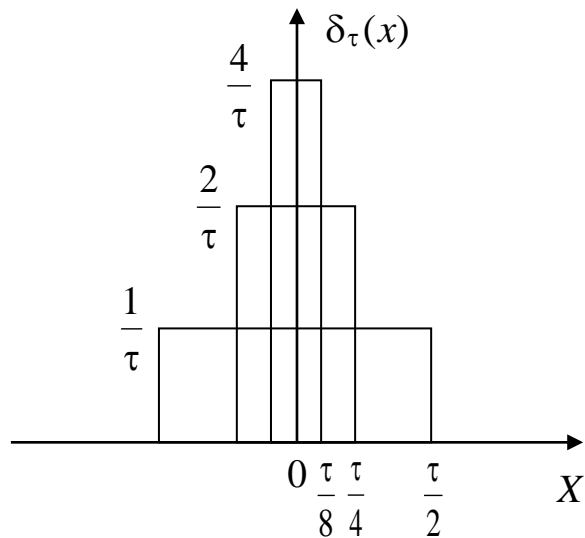


Рис. 14.3

Итак, последовательность единичных импульсов (14.4) является  $\delta$ -образной. Поэтому  $\delta(x)$  называется единичным импульсом, заданным в точке  $x = 0$ .

Импульс амплитуды  $A$  имеет вид  $A\delta(x)$  и символически изображен на рис. 14.4, причем длина этого импульса пропорциональна числу  $A$ . Единичный импульс в точке  $x = x_0$  определяется символом  $\delta(x - x_0)$  и называется смещенной  $\delta$ -функцией. Для

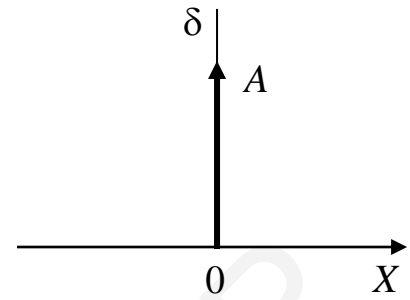


Рис. 14.4

нее имеет место равенство

$$\delta(x - x_0) = \begin{cases} 0, & x \neq x_0; \\ \infty, & x = x_0. \end{cases}$$

Пусть  $f(x)$  – непрерывная в точке  $x = 0$  функция, а  $\delta_\tau(x)$  – импульс (14.4). Тогда по теореме о среднем для интегралов получим

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta_\tau(x) dx = \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} f(x) \frac{1}{\tau} dx = \frac{1}{\tau} \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} f(x) dx = \frac{1}{\tau} f(c), \quad -\frac{\tau}{2} < c < \frac{\tau}{2}.$$

Полагая, что  $\lim_{\tau \rightarrow 0} \delta_\tau(x) = \delta(x)$ , будем иметь

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta_\tau(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(x) dx = f(0),$$

так как  $|c| < \frac{\tau}{2}$  и, значит,  $\lim_{\tau \rightarrow 0} c = 0$ .

Итак,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(x) dx = f(0). \quad (14.5)$$

Для смещенной  $\delta$ -функции  $\delta(x - x_0)$  соотношение (14.5) имеет вид

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(x - x_0) dx = f(x_0). \quad (14.6)$$

Свойство  $\delta$ -функции, определяемое равенствами (14.5), (14.6), называется *фильтрующим* (просеивающим).

*Замечание.* Если рассматривать интеграл  $\int_a^b f(x) \delta(x - x_0) dx$ , причем

точка  $x_0 \notin (a, b)$ , то этот интеграл по определению равен нулю. Например,

$$\int_2^3 \cos x \delta(x) dx = 0, \quad \text{так как } x_0 = 0 \notin (2, 3). \quad \text{Если же } x_0 \in (a, b), \quad \text{то}$$

$$\int_a^b f(x) \delta(x - x_0) dx = f(x_0).$$

Приведем примеры других  $\delta$ -образных последовательностей.

**Пример 14.1.** Рассмотрим равенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin nx}{x} \varphi(x) dx = \pi \varphi(0),$$

которое нетрудно получить из интеграла Фурье. Из этого равенства и соотношения (14.5) получим, что последовательность функций

$$\delta_n(x) = \frac{1}{\pi} \frac{\sin nx}{x} \quad \text{при } n \rightarrow \infty \text{ сходится к } \delta\text{-функции, т. е.}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin nx}{x} \varphi(x) dx = \pi \varphi(0),$$

которое нетрудно получить из интеграла Фурье. Из этого равенства и соотношения (14.5) получим, что последовательность функций

$$\delta_n(x) = \frac{1}{\pi} \frac{\sin nx}{x} \quad \text{при } n \rightarrow \infty \text{ сходится к } \delta\text{-функции, т. е.}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin nx}{\pi x} = \delta(x). \quad (14.7)$$

**Пример 14.2.** Рассмотрим последовательность

$$f_n(x) = \int_{-n}^n e^{i\omega x} dx, \quad n \in \mathbf{N}.$$

Так как

$$\int_{-n}^n e^{i\omega x} dx = \frac{e^{i\omega x}}{ix} \Big|_{\omega=-n}^{\omega=n} = \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{ix} = 2 \frac{\sin nx}{x},$$

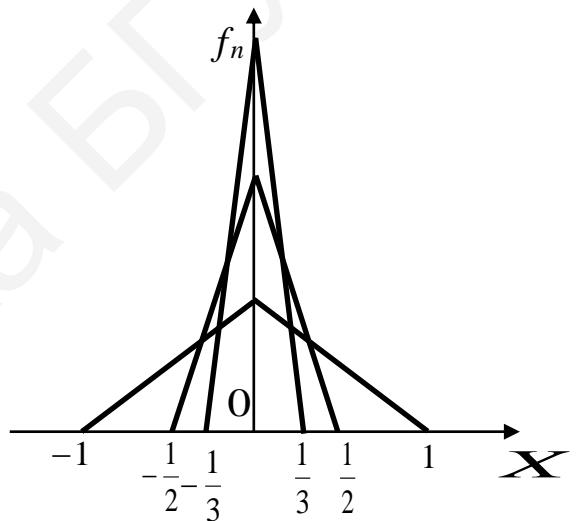
то согласно равенству (14.7)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-n}^n e^{i\omega x} d\omega = \lim_{n \rightarrow \infty} 2 \frac{\sin nx}{x} = 2\pi \delta(x)$ .

Таким образом, получено равенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-n}^n e^{i\omega x} d\omega = \delta(x). \quad (14.8)$$

**Теорема 14.3.** Нетрудно показать, что последовательность функций

$$f_n(x) = \begin{cases} 0, & |x| > \frac{1}{n}; \\ n(1 + nx), & -\frac{1}{n} \leq x \leq 0; \\ n(1 - nx), & 0 < x \leq \frac{1}{n}, \end{cases}$$



графики которых изображены на рис. 14.5, является  $\delta$ -образной последовательностью.

Приведем теперь примеры на фильтрующее свойство  $\delta$ -функции.

**Пример 14.4.**  $\int_{-2}^4 \cos 5x \delta(x) dx = \cos 5x \Big|_{x=0} = 1$ , так как  $0 \in (-2, 4)$ .

**Пример 14.5.**  $\int_{-\pi}^{\frac{\pi}{2}} \cos x \delta\left(x + \frac{\pi}{2}\right) dx = \cos x \Big|_{x=-\frac{\pi}{2}} = 0$ , так как

$$-\frac{\pi}{2} \in \left(-\pi, \frac{\pi}{2}\right).$$

Рассмотрим вопрос о дифференцировании  $\delta$ -функции. Пусть  $f(x)$  –

гладкая функция, определенная для всех  $x \in \mathbf{R}$ , такая, что  $\lim_{n \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$ , а  $\varphi(x)$  – ограниченная на бесконечности функция. Тогда по формуле интегрирования по частям имеем

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \varphi'(x) dx = f(x) \varphi(x) \Big|_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} f'(x) \varphi(x) dx, \quad (14.9)$$

где  $f(x) \varphi(x) \Big|_{-\infty}^{+\infty} = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) \varphi(x)) - \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) \varphi(x))$ .

Применим равенство (14.9) формально к функции Хевисайда:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) 1'(x) dx &= f(x) 1(x) \Big|_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} f'(x) 1(x) dx = \\ &= - \int_0^{\infty} f'(x) dx = -f(x) \Big|_0^{\infty} = f(0), \end{aligned}$$

так как  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ .

Таким образом,  $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) 1'(x) dx = f(0)$ .

Отсюда и из фильтрующего свойства (14.5)  $\delta$ -функции получаем формулу

$$1'(x) = \delta(x). \quad (14.10)$$

Заметим, что формально равенство (14.10) получается из равенства (14.4) по определению производной единичной функции  $1(x)$  при  $x = 0$ .

Аналогично рассуждая, имеем

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta'(x) dx &= f(x) \delta(x) \Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} f'(x) \delta(x) dx = -f'(0); \\ \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta''(x) dx &= f(x) \delta'(x) \Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} f'(x) \delta'(x) dx = \\ &= (-1)^2 \int_{-\infty}^{\infty} f''(x) \delta(x) dx = (-1)^2 f''(0). \end{aligned}$$

По индукции можно получить формулу

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta^{(n)}(x) dx = (-1)^n f^{(n)}(0), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (14.11)$$

справедливую в смысле теории обобщенных функций.

Для смещенной  $\delta$ -функции  $\delta(x - x_0)$  имеет место аналогичная формула

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta^{(n)}(x - x_0) dx = (-1)^n f^{(n)}(x_0), \quad n = 0, 1, 2, \dots. \quad (14.12)$$

**Пример 14.6.** Вычислите интегралы:

$$\text{а) } \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x} \delta'''(x) dx; \quad \text{б) } \int_{-3}^4 x^5 \delta''(x-1) dx.$$

$\Delta$  а) По формуле (14.11) при  $n = 3$  имеем

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x} \delta'''(x) dx = (-1)^3 (e^{-i\omega x})''' \Big|_{x=0} = -i\omega^3.$$

б) По формуле (14.12) при  $n = 2$  получим

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^5 \delta''(x-1) dx = \int_{-3}^4 x^5 \delta''(x-1) dx = (-1)^2 (x^5)'' \Big|_{x=1} = 20,$$

так как  $x_0 = 1 \in (-3, 4)$ .  $\blacktriangle$

Установим еще одно свойство  $\delta$ -функции. Пусть функция  $\alpha(x)$  — непрерывная. Тогда для функции  $\alpha(x)\delta(x)$  будем иметь

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) (\alpha(x)\delta(x)) dx &= f(0)\alpha(0) = \alpha(0) \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x) dx = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) (\alpha(0)\delta(x)) dx, \quad \forall f(x). \end{aligned}$$

Отсюда следует, что в обобщенном смысле

$$\alpha(x)\delta(x) = \alpha(0)\delta(x), \quad (14.13)$$

т. е. в смысле теории обобщенных функций выражение  $\alpha(x)\delta(x)$  пропорционально  $\delta(x)$ . Для смещенной  $\delta$ -функции  $\delta(x - x_0)$  равенство (14.13)

принимает вид

$$\alpha(x) \delta(x - x_0) = \alpha(x_0) \delta(x - x_0). \quad (14.14)$$

### Задачи и упражнения

1. Упростите выражение:

а)  $(x^3 - 1) \delta(x + 3)$ ; б)  $\sin^2 3x \delta(x - \pi)$ ; в)  $e^{-2x^3} \delta(x - 1)$ .

Ответ: а)  $-28\delta(x + 3)$ ; б) 0; в)  $e^{-2} \delta(x - 1)$ .

2. Вычислите интегралы:

а)  $\int_{-\pi}^{-\frac{\pi}{2}} \sin 3x \delta\left(x - \frac{\pi}{4}\right) dx$ ; б)  $\int_5^7 (x + 1)^3 \delta(x) dx$ ; в)  $\int_0^3 x^3 \delta''(x - 1) dx$ ;

г)  $\int_{-\pi}^{\pi} \sin x \delta'''(x) dx$ ; д)  $\int_{-\infty}^{\infty} x^4 \delta^{IV}(x) dx$ ; е)  $\int_0^{2\pi} \sin(x - 1) \delta'''(x - 2) dx$ .

Ответ: а) 0; б) 0; в) 6; г) -1; д) 24; е)  $-\cos 1$ .



## ЛИТЕРАТУРА

1. Араманович, И. Г. Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости / И. Г. Араманович, Г. Л. Лунц, Л. Э. Эльсгольц. – М. : Наука, 1968. – 416 с.
2. Жевняк, Р. М. Высшая математика: В 4 ч. Ч. 4 / Р. М. Жевняк, А. А. Карпук. – Минск : Выш. шк., 1987. – 240 с.
3. Краснов, М. Л. Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости (задачи и упражнения) / М. Л. Краснов, А. И. Киселев, Г. И. Макаренко. – М. : Наука, 1981. – 304 с.
4. Привалов, И. И. Введение в теорию функций комплексного переменного / И. И. Привалов. – М. : Наука, 1967. – 444 с.
5. Сидоров, Ю. В. Лекции по теории функций комплексного переменного / Ю. В. Сидоров, М. В. Федорюк, М. И. Шабунин. – М. : Наука, 1982. – 488 с.
6. Фукс, Б. А. Функции комплексного переменного и некоторые их приложения / Б. А. Фукс, Б. В. Шабат. – М. : Физматгиз, 1959. – 384 с.
7. Чудесенко, В. Ф. Сборник заданий по специальным курсам высшей математики / В. Ф. Чудесенко. – М. : Выш. шк., 1983. – 112 с.
8. Шахно, К. У. Элементы теории функций комплексной переменной и операционного исчисления / К. У. Шахно. – Минск : Выш. шк., 1975. – 400 с.

## СОДЕРЖАНИЕ

Введение.....	3
Лекция 1. Последовательности комплексных чисел.....	4
Лекция 2. Функции комплексной переменной.....	15
Лекция 3. Дифференцирование ФКП.....	34
Лекция 4. Конформные отображения.....	57
Лекция 5. Конформные отображения элементарными ФКП.....	64
Лекция 6. Интегрирование ФКП.....	102
Лекция 7. Ряды в комплексной области.....	117
Лекция 8. Нули и изолированные особые точки аналитических функций.....	137
Лекция 9. Вычеты аналитических функций.....	147
Лекция 10. Приложения функций комплексной переменной.....	178
Лекция 11. Преобразования Лапласа.....	196
Лекция 12. Нахождение оригинала по его изображению.....	228
Лекция 13. Приложения операционного исчисления.....	238
Лекция 14. Дельта-функция.....	260
Литература.....	269

Св. план 2020, резерв

*Учебное издание*

**Борисенко Олег Федорович**

**Карпук Андрей Андреевич**

**СПЕЦИАЛЬНЫЕ ГЛАВЫ МАТЕМАТИКИ:  
ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ,  
ОПЕРАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ**

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ

Редактор *Е. В. Иванюшина*

Корректор *Е. Н. Батурчик*

Компьютерная правка, оригинал-макет *О. И. Толкач*

Подписано в печать 10.09.2020. Формат 60×84 1/16. Бумага офсетная. Гарнитура «Таймс».  
Отпечатано на ризографе. Усл. печ. л. 15,93. Уч.-изд. л. 15,0. Тираж 50 экз. Заказ 42.

Издатель и полиграфическое исполнение: учреждение образования  
«Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники».  
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя,  
распространителя печатных изданий №1/238 от 24.03.2014,  
№2/113 от 07.04.2014, №3/615 от 07.04.2014.  
Ул. П. Бровки, 6, 220013, г. Минск