ПЕРЕСЕЧЕНИЕ ПОВЕРХНОСТЕЙ ВРАЩЕНИЯ В РЕШЕНИИ ДЕЛОССКОЙ ЗАДАЧИ ОБ УДВОЕНИИ КУБА

Горнак Д.В.
Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники
г. Минск, Республика Беларусь
Гиль С.В. – канд. техн. наук, доцент

Делосская задача об удвоении куба – одна из трех знаменитых неразрешимых задач древности. Существует множество методов решения данной задачи при помощи циркуля и линейки, однако наиболее оригинальное принадлежит греческому математику Архиту Тарентскому. Созданная трехмерная модель в САПР AutoCAD позволяет наглядно на примере пересекающихся поверхностей второго и четвёртого порядка проиллюстрировать доказательство данной задачи.

Первые задачи на построение возникли в глубокой древности. Они нашли широкое распространение в древней Греции, где впервые была создана геометрическая теория в её систематическом изложении. Уже тогда греческие математики встретились с тремя задачами на построение, которые не поддавались решению, т.е. не выполнялись при помощи циркуля и линейки. Древние греки сравнительно легко решили задачи об удвоении квадрата. Для этого надо было уметь строить при помощи циркуля и линейки корень квадратный из двух. Действительно, если сторона данного квадрата равняется ***a***, а сторона искомого квадрата ***x***, то, согласно условию задачи, будем иметь:

$$x^2 = 2a^2, \text{ или } x = a\sqrt{2}. \tag{1}$$

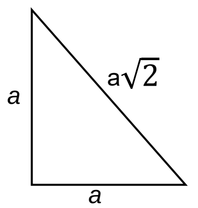

Рисунок 1 - Решение задачи об удвоении квадрата

Чтобы построить $a\sqrt{2}$, нужно построить гипотенузу равнобедренного прямоугольного треугольника, у которого каждый катет равен ***a*** (рисунок 1).

Обобщая задачу об удвоении квадрата, греки перешли к рассмотрению задачи об удвоении куба. Решение задачи сводилось к геометрическому построению корня кубического из двух. Действительно, если ребро данного куба равно ***a***, а ребро искомого куба – **x**, то, согласно условию задачи имеем:

$$x^3 = 2a^3, \quad \text{или } x = a\sqrt[3]{2}. \tag{2}$$

Существует множество решений задачи об удвоении куба. Однако в данной работе я хочу рассказать про один из методов, который предложил Архит Тарентский. Он является одним из самых гениальных решений того времени, основан на стереометрическом построении пересечения поверхностей вращения.

Гиппократ Хиосский свёл Делосскую задачу к планиметрической, заключающейся в нахождении двух средних пропорциональных между двумя данными отрезками, из которых второй в два раза больше первого.

Действительно: поскольку *a, x, y, 2a* – геометрическая прогрессия, то

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{2a}, \text{ откуда } x^2 = ay \text{ и } y^2 = 2ax. \tag{3}$$

Следовательно,

$$x^4 = a^2y^2 = 2a^3x, \text{ или } x^3 = 2a^3. \tag{4}$$

Средствами AutoCAD создана трехмерная модель, которая наглядно отражает решение этой задачи на примере пересекающихся поверхностей вращения. Для двух данных отрезка $G = a$ и $AD = 2a$ (рисунок 2а) были найдены два средних пропорциональных между ними. Для этого на круге с диаметром *AD* была отложена хорда $AB = G$ (рисунок 2б). Далее, на полукруге *ABD* построен прямой полуцилиндр (рисунок 2в), а на отрезке *AD*, как на диаметре, – полукруг, перпендикулярный кругу *ABDZ*, который при вращении относительно точки *A* перпендикулярно горизонтальной плоскости высечет некоторую кривую линию на полуцилиндре (рисунок 2г, 2д). При вращении ΔADP около *AD* прямая *AP* опишет некоторый полуконус, причем точка В опишет полукруг *BZ* (рисунок 2е). Полуцилиндр, полутор и полуконус пересекутся в точке *K* (рисунок 2ж, 2з). Далее рассмотрены треугольники $\Delta\, AMN$, $\Delta\, AKD_1$ и ΔANK (рисунок 2и). Из их подобия следует, что

$$AB : AN = AN : AK = AK : AD. \tag{5}$$

Таким образом, для двух отрезков *a* = *G* и *2a* = *AD* были найдены два средних пропорциональных *x* = *AN* и *y* = *AK* и, следовательно, ***x*** будет ребром удвоенного куба. Знаменитая Делосская задача об удвоении куба доказана и наглядно решена на основании пересечения поверхностей вращения второго и четвёртого порядка.

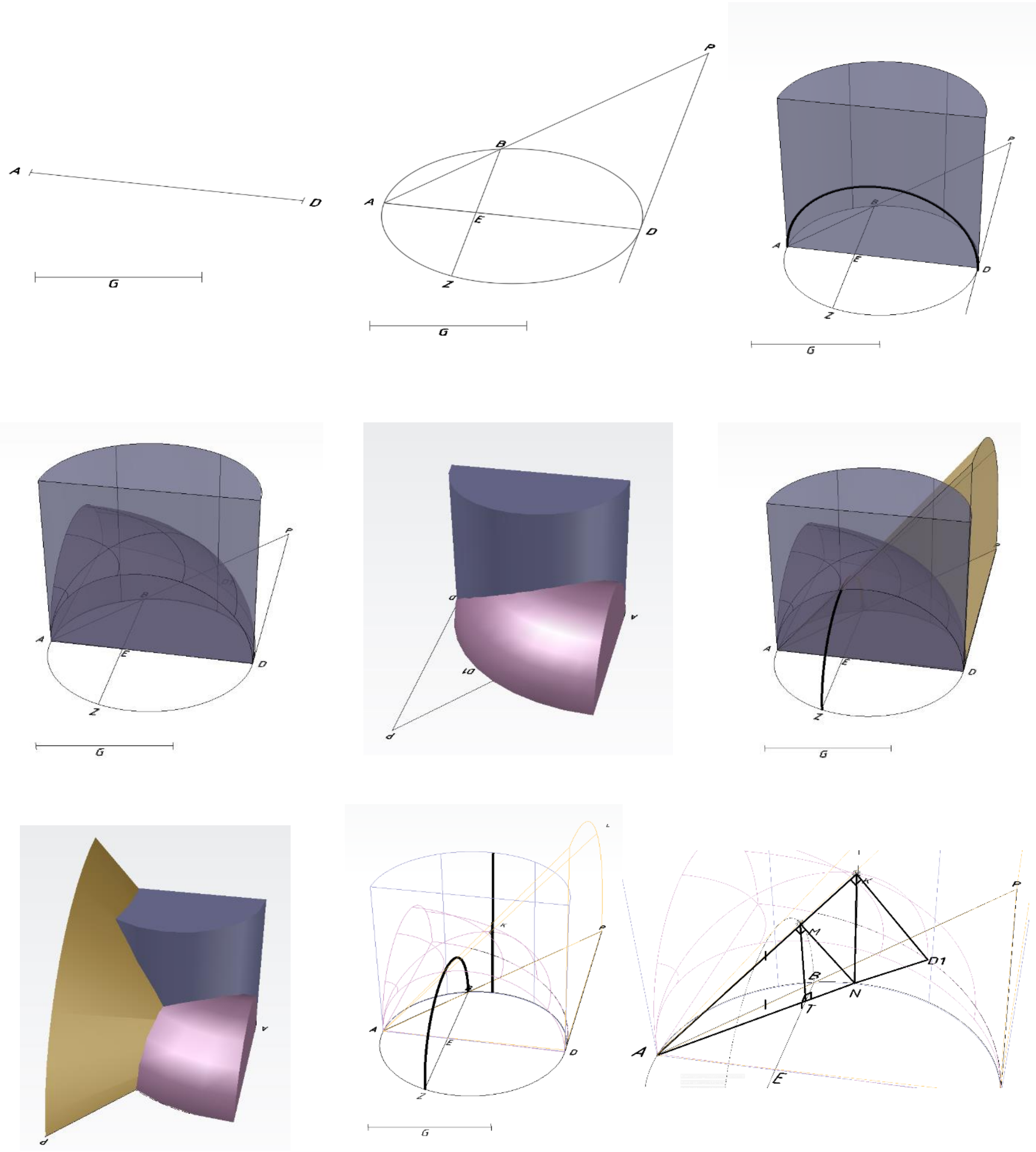

Рисунок 2 - Поэтапное решение задачи об удвоении куба средствами AutoCAD.

Список использованных источников:

1. Чистяков В.Д. Знаменитые задачи древности // Государственное учебно-педагогическое издательство министерства просвещения РСФСР, Москва – 4963. – с.4 – 28.

2. Прасолов В. В. Три классические задачи на построение: удвоение куба, трисекция угла, квадратура круга. – М.: Наука. Гл. ред. Физ.-мат. лит., 1992 – с.4 - 35.