УДК 511.42

Количество комплексных сопряжённых алгебраических чисел в кругах малых радиусов

М. А. Калугина (Беларусь, г. Минск)
Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники
e-mail: m.kalugina@bsuir.by
М. В. Ламчановская (Беларусь, г. Минск)
Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники
e-mail: lammv@mail.ru
О'Доннелл (Ирландия, г. Дублин)
Дублинский институт технологий
e-mail: hugh.odonnell@dit.ie

The number of complex conjugate algebraic numbers in circles of small radius

M. A. Kalugina (Belarus, Minsk)
Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics
e-mail: m.kalugina@bsuir.by
M. V. Lamchanovckaya (Belarus, Minsk)
Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics
e-mail: lammv@mail.ru
O'Donnell (Ireland, Dublin)
Dublin Institute of Texnology
e-mail: hugh.odonnell@dit.ie

Рассмотрим класс $\mathcal{P}_n(H), H > 1$ многочленов $P(z)$ комплексной переменной z степени $\deg P = n > 3$ и высоты $h(P) \leqslant H$. Ясно, что

$$c_1(n)H^{n+1} < \mathcal{P}_n(H) < c_2(n)H^{n+1}. \tag{1}$$

Нетрудно доказать, что при $\gamma_1 > 1$ существуют круги $C(z_0, r) \subset \mathbb{C}$ радиуса $r = H^{-\gamma_1}$, внутри которых нет алгебраических точек высоты $h \leqslant H$ при любом $n \geqslant 3$.

Теорема 1. *Обозначим через $B_1(H, \gamma_1) \subset C(z, r)$, $z \in \mathbb{C}$, $H > 1$, $0 \leq \gamma < 1$ множество решений системы неравенств*

$$\begin{gathered} |P(z)| < c_3(n)H^{-\frac{n-1}{2}}, \\ H^{-\frac{n-1}{2}} < |P'(z)| < \delta_0 H. \end{gathered} \tag{2}$$

Тогда при достаточно малом δ_0 справедливо неравенство

$$\mu B_1(H, \gamma_1) < \frac{1}{4}\mu C(z, r),$$

где μB_1 - плоская мера измеримого множества $B_1 \in \mathbb{C}$.

Теорема 2. *Пусть* $B_1(H,\gamma_1)$, *как в теореме 1,*

$$B_2(H,\gamma_1) = C(z,r) \setminus B_1(H,\gamma_1),$$

$A(H)$- *множество комплексных алгебраических точек* $\alpha \in C(z,r), \mathrm{deg}\alpha = n, h(\alpha) \le H$. *Тогда справедливо неравенство*

$$A(H) > c_3(n)H^{n+1-2\gamma_1}. \tag{3}$$

Теорема 2 несложно получается из теоремы 1. Теорема 1 доказывается средствами метрической теории диофантовых приближений [1].Теорема 2 для коротких интервалов I и алгебраических действительных точек $\alpha \in I$ без оценки снизу для $|P'(z)|$ доказана в [2].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Спринджук В. Г. Проблема Малера в метрической теории чисел. — Минск: Наука и техника, 1967. 182 с.

2. Берник В. И., Гётце Ф. Распределение действительных алгебраических чисел произвольной степени в коротких интервалах // Изв. РАН. Сер. матем. 2015. Том 79, № 1. С. 21-42.