ПОИСК ЗАКОНОМЕРНОСТЕЙ

Л. В. НАЗАРОВ, А. В. БАТУРА
Учреждение образования «Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники» филиал «Минский радиотехнический колледж»

Аннотация: В докладе приводятся задачи из лабораторного практикума по основам алгоритмизации и программирования, задачи различных олимпиад по программированию, для нахождения эффективного решения которых необходим поиск закономерностей. Приводятся различные способы поиска этих закономерностей. Для поиска отдельных закономерностей требуется разработка вспомогательных программ, реализующих различные комбинаторные алгоритмы.

Для эффективного вычисления некоторых сумм целесообразно найти закономерности или вывести соответствующие формулы. Рассмотрим суммы:

$S_2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2$.

$S_{12} = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \ldots + n\,(n + 1)$.

$S_3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3$.

Для вывода этих формул можно воспользоваться искусственным приемом.

Как известно [2]

$(n+1)^3 = n^3 + 3n^2 + 3n + 1$,

или

$(n+1)^3 - n^3 = 3n^2 + 3n + 1$.

Выпишем последнюю формулу для n=1,2,…n:

$2^3 - 1^3 = 3 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 + 1$,

$3^3 - 2^3 = 3 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2 + 1$,

$4^3 - 3^3 = 3 \cdot 3^2 + 3 \cdot 3 + 1$,

…

$(n+1)^3 - n^3 = 3n^2 + 3n + 1$.

Сложив левые и правые части и приведя подобные, получим:

$(n+1)^3 - 1^3 = 3S_2 + 3S_1 + n$. $S_1 = n(n+1)/2$.

Откуда

$S_2 = (2n^3 + 6n^2 + 6n) - 3n(n+1) - 2n)/6 = n(2n^2 + 3n + 1)/6 = n(n+1)(2n+1)/6$.

Аналогично можно вывести формулы для нахождения сумм S_3, S_4,…,S_k,- сумм степеней чисел от 1 до n. Например $S_3 = ((n(n+1))^2/4$.

Выведем формулу для нахождения $S_{12} = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \ldots + n\,(n + 1)$.

Разложим последовательно разности кубов соседних чисел на множители:

$2^3 - 1^3 = (2-1)(2^2 + 2\cdot 1 + 1^2)$,

$3^3 - 2^3 = (3-2)(3^2 + 3\cdot 2 + 2^2)$,

$4^3 - 3^3 = (4-3)(4^2 + 4\cdot 3 + 3^2)$,

…

$(n+1)^3 - n^3 = (n+1-n)((n+1)^2 + n(n+1) + n^2)$.

Сложив левые и правые части равенств, будем иметь:

$(n+1)^3 – 1 = 2S_2 – 1 + S_{12} + (n+1)^2$

Откуда

$S_{12} = n^3 + 3n^2 + 3n – n^2 - 2n – (2n^3 + 3n^2 + n)/3 = (n^3 + 3n^2 + n)/3 = n(n+1)(n+2)/3$.

Полученную формулу можно было вывести и по-другому.

$S_{12} = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \ldots + n\,(n + 1) = 2^2 – 2 + 3^2 – 3 + 4^2 – 4 + \ldots + (n+1)^2 – (n + 1) =$

$= S_2 - 1 + (n + 1)^2 – S_1 + 1 – (n + 1) = S_2 – S_1 + n^2 + n = n(n+1)(2n+1)/6 - n(n+1)/2 + n^2 + n = n(n+1)(n+2)/3$.

Если предположить, что эти формулы являются многочленами от n, то составив систему линейных уравнений и, решив ее, можно найти коэффициенты этих многочленов.

Сумму $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \ldots + n^2$ будем искать в виде многочлена третьей степени от n.

$S_2(n) = an^3 + bn^2 + cn + d$, где a,b,c,d- необходимо найти.

Многочлен третьей степени однозначно определяется четырьмя точками, поэтому вместо n подставим четыре значения n, например: 1,2,3,4. Получим линейную систему четырех уравнений с четырьмя неизвестными:

$$\begin{cases} a + b + c + d = 1, \\ 8a + 4b + 2c + d = 5, \\ 27a + 9b + 3c + d = 14, \\ 64a + 16b + 4c + d = 30. \end{cases}$$

Аналогичную систему получим для вывода формулы S_{12}:

$$\begin{cases} a + b + c + d = 2, \\ 8a + 4b + 2c + d = 8, \\ 27a + 9b + 3c + d = 20, \\ 64a + 16b + 4c + d = 40. \end{cases}$$

Решив эти системы, получим искомые формулы.

Можно воспользоваться какой-нибудь интерполяционной формулой, например, первой формулой Ньютона для равноотстоящих узлов интерполяции:

$$P_n(x) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{1!\,h}(x - x_0) + \frac{\Delta y_0^2}{2!\,h^2}(x - x_0)(x - x_1) + \ldots \qquad (1)$$

В нашем случае роль x играет переменная n, роль y играют S_2 или S_{12} и h=1.

Для нахождения S_2 составим таблицу конечных разностей (табл.1)

Таблица 1

n	1	2	3	4
S_2	1	5	14	30
Δ	4	9	16	
Δ^2	5	7		
Δ^3	2			

$S_2(n)=1+4(n-1)+5(n-1)(n-2)/2+2(n-1)(n-2)(n-3)/6 = n(n+1)(2n+1)/6$.

Аналогично легко вывести формулы для других сумм, например:

$S_3 = (n(n+1)/2)^2$;

$S_{13} = 1 \cdot 3 + 3 \cdot 5 + 5 \cdot 7 + \ldots + (2n – 1) (2n + 1) = (n(4n^2 + 6n – 1)/3$.

На эту тему можно предложить много различных задач олимпиадного характера. В качестве примера приведем следующую задачу.

Количество квадратов

Дана квадратная (прямоугольная) сетка порядка n (размерностью m x n). Подсчитайте количество квадратов, вершины которых лежат в узлах данной сетки. Для n=1,2,3,4 найти ответ не очень сложно (табл. 2).

Таблица 2

n	1	2	3	4	5
R(n)	0	1	6	20	?

Задача усложняется: во-первых, мы не знаем, существует ли полиномиальная зависимость; во-вторых, если таковая существует, то какой степени этот полином; в-третьих, как найти количество квадратов для n=5,6,…?

Можно рекомендовать следующий подход к решению данной задачи. Составить программу, которая находит искомое количество квадратов для небольших значений n. Например, используя генератор подмножеств из четырех элементов из множества, состоящего из n^2 элементов. Для каждого подмножества из четырех элементов проверять будет ли это подмножество квадратом. Далее, воспользовавшись интерполяционной формулой Ньютона, легко получить искомую формулу.

На олимпиадах по информатике нередко встречаются задачи, при решении которых с помощью циклов не все тесты укладываются в ограничение по времени. Решение подобных задач можно свести к разветвляющимся, а иногда и к линейным алгоритмам. Например, в первом туре республиканской олимпиады школьников в 2018/2019 уч. г. предлагалась следующая задача.

Треугольные числа

Необходимо по заданному количеству камешков N найти сторону наибольшего правильного треугольника, который из них можно сложить. Например, если имеется 30 камешков, то длина стороны наибольшего правильного треугольника, который из них можно сложить, будет 7 (рис.1).

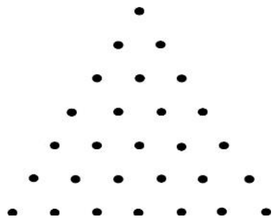

Рис. 1

Лобовое решение с помощью цикла типа

```
var
 n, sum,k:int64;
begin
  read(n);
  k:=0;
  sum:=0;
  while sum <= n do
  begin
    k:=k+1;
    sum:=sum+k;
  end;
writeln(k-1)
end.
```

для больших n не годится. Автор задания приводит следующее решение, основанное на решении уравнения, полученного из формулы количества камешков $N=k(k+1)/2 \rightarrow k^2+k-2N=0$, где k-длина стороны правильного треугольника

```
var
n,k:double;
begin
read(n);
  k:= sqrt(2*n+(1/4));
  k:=-1/2+k;
  if frac(k)<0.5
  then
  writeln(k:0:0)
  else
    writeln((k-1):0:0)
end.
```

Можно привести и другие (разветвляющиеся и линейные) варианты решения:

```
var
k,n:Int64;
begin
Readln(n);
 k:=(-1+trunc(Sqrt(1.+8*n))) div 2;
 Writeln(k);
```

```
end.
или
var
 n,k:int64;
begin readln(n);
  k:=trunc(sqrt(2.*n));
  if  k*(k+1)>2*n then  k:=k-1;
 Writeln(k);
end.
```

Приведем несколько задач, для решения которых также нужно найти закономерности. Но для этого достаточно получить таблицу значений при небольших значениях *n* и проанализировать таблицу.

Задача 1

Сборка вешалок

Имеется N вешалок с одним крючком. Оказалось, что из этих вешалок легко собираются вешалки, состоящие из нескольких крючков.

Подсчитайте, сколько существует различных вариантов сборки вешалок, состоящих из двух, трех и пяти крючков.

Для решения данной задачи можно сначала решить задачу с двумя и тремя крючками. Найдя вручную искомое количество для нескольких значений *N*, можно понять закономерность: если остаток от деления *N* на 6 равен 1, то искомое количество равно *n div 6*, иначе *n div 6*+1, а затем и с пятью крючками.

Задача 2

Разрезание вешалки

Имеется одна вешалка, состоящая из N крючков.

Подсчитайте, сколько существует различных вариантов разрезания этой вешалки на вешалки, состоящие из двух и/или трех крючков.

Для решения данной задачи нужно найти ответ хотя бы для первых десяти значений N. Искомая формула *K[n]=K[n-2] + K[n-3]*, при n>3.

Задача 3

Количество треугольников [1]

Рассмотрим фигуру (рис.2).

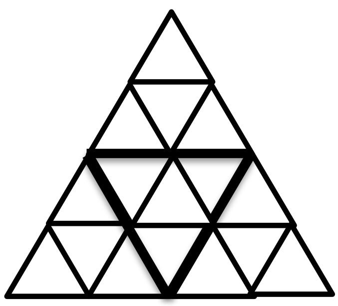

Рис.2

Определите количество треугольников в заданной фигуре (необходимо учитывать не только маленькие треугольники, а вообще все треугольники – в частности треугольник, выделенный жирным, а также вся фигура в целом).

Найдем ответ для n=1,2,…,10 (табл.3).

Таблица 3

№п/п	1 слагаемое	2-е слагаемое	3-е слагаемое	Сумма вершины вверх	4-е слагаемое вершины вниз	Сумма
1	1			1		1
2	1	3	1	5		5
3	5	5	3	13		13
4	13	7	6	26	1	27
5	27	9	10	46	2	48
6	48	11	15	74	4	78
7	78	13	21	106	6	112
8	112	15	28	146	9	155
9	155	17	36	208	12	220
10	220	19	45	284	16	300

Проанализировав числа в столбцах, замечаем закономерности для каждого слагаемого.

Задача 4

Экспрессные маршруты 1 (район 2007)

Имеется n остановок на обычном маршруте автобуса. Необходимо найти количество экспрессных маршрутов. В экспрессном маршруте пропускается хотя бы одна остановка, но не более двух подряд.

Для решения данной задачи достаточно, воспользовавшись генератором множества всех подмножеств множества и заметить нужную закономерность:

$K[n]=2K[n-1] - K[n-4]$.

Задача 5

Экспрессные маршруты-2 (район 2018_19)

Между городом А и городом В проложена единственная дорога, на которой построено N остановочных пунктов. Обычный автобусный маршрут из А в В предусматривает остановки на каждом из оборудованных пунктов. Экспрессный маршрут пропускает некоторые (не менее одного) остановочных пунктов, но ни один экспрессный маршрут, во-первых, не пропускает более одного пункта подряд, и во-вторых, не останавливается более чем в трѐх пунктах подряд.

Сколько различных экспрессных маршрутов можно организовать между городом А и городом В? Два маршрута считаются различными, если множества остановочных пунктов, которые они пропускают, различны.

Для решения данной задачи, как и предыдущей достаточно найти ответы для первых значений N. Искомая формула: $K[n]=K[n-1] + K[n-3]$.

Литература

1. Андреева, Е.В. Московские олимпиады по программированию. М. : МЦНМО. 2006 г.

2. Пойа, Дж. Математическое открытие. Решение задач: основные понятия, изучение и преподавание. М., 1976 г.