НЕПРЕРЫВНОЕ ВЕЙВЛЕТ-ПРЕОБРАЗОВАНИЕ

Абдухалилов Б.И.
Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники
г. Минск, Республика Беларусь
Ролич О.Ч.– канд.техн.наук, доцент

Базис вейвлета представляет семейство функций, основанное на локализованной осциллирующей функции Ψ(t) вещественной переменной t. На базе Ψ(t) как "материнского вейвлета" генерируются вейвлет-функции семейства из переводов и дилатаций Ψ(t). Материнский вейвлет Ψ(t) является функцией со значениями в диапазоне от 0 до 1. Уравнение (1.1) показывает семейство функций, сгенерированных из Ψ путём смещения и масштабирования. В (1.1) b отвечает за смещение, a является переменной масштаба.

$$\Psi_{a,b}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}}\Psi\left(\frac{t-b}{a}\right), \quad a > 0, \ b \in R \tag{1.1}$$

Наиболее распространённым примером материнского вейвлета является функция «Mexican hat»[1] (мексиканская шляпа):

$$\Psi(\mathrm{x}) = (1-x^2)e^{-\frac{1}{2}x^2} \tag{1.2}$$

Материнским вейвлетом (1.2) является сплошная функция в центре рисунка (1.1) вместе с двумя переведенными дилатациями.

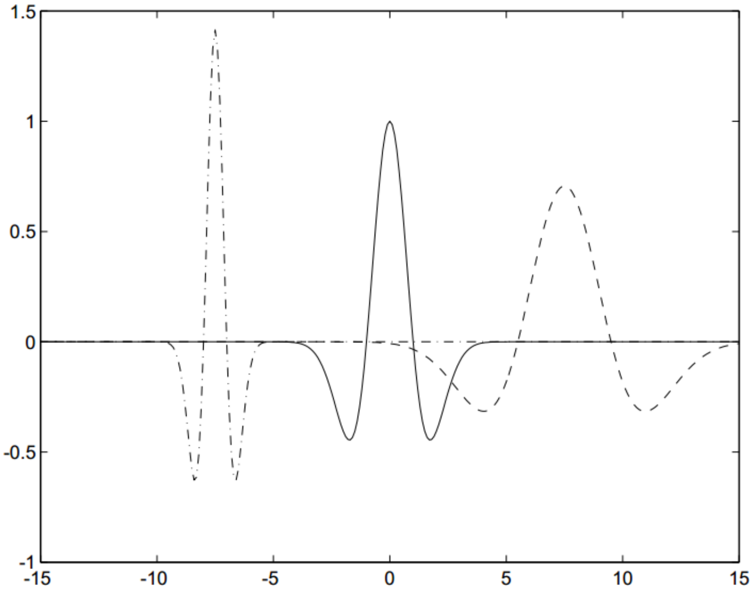

Рисунок 1.1. Переводы и дилатации Ψ(x)

Ограничение на Ψ(t) состоит в том, что оно имеет ноль-интеграл. Дополнительное ограничение на Ψ(t) требует пропадание первых (m + 1) моментов, что даёт условие (1.3), где ряд интегральных моментов равно нулю:

$$0 = \int_{-\infty}^{\infty}\Psi(t)dt = \cdots = \int_{-\infty}^{\infty}t^m\Psi(t)dt \tag{1.3}$$

На рисунке (1.2) показаны графики подынтегральных выражений (1.3) для Ψ(x) в (1.2). Также в качестве примера на рисунке 1.2 отражены «исчезающие» моменты Ψ(x) в (1.2). В этом случае, если рассмотреть интеграл от функции на рисунке (1.2), моменты 0 и 1 равны нулю, а момент 2 нет.

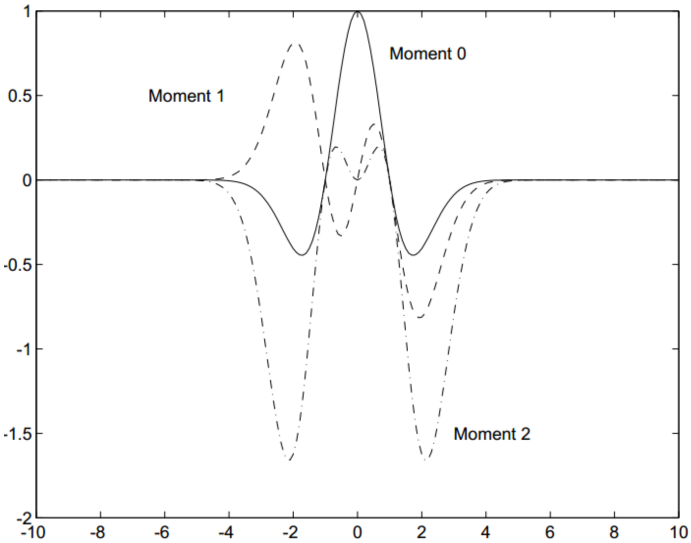

Рисунок 1.2. Моменты материнского вейвлета (1.2)

С материнским вейвлетом Ψ встречается ограничение (1.3), соответствующее набору функций $\{\Psi_{a,b}\}$ из множества (1.1). Параметры масштаба *a* и смещения *b* будут варьироваться в непрерывном наборе *S* так, что, например, множество функций $\{\Psi_{a,b}\}$ будет иметь достаточную мощность, позволяющую любой функции *f* из $L^2(R)$ быть восстановленной по коэффициентам вейвлет-преобразования, определяемым внутренним произведением *f* и $\Psi_{a,b}$: $<f, \Psi_{a,b}>$. Внутреннее произведение измеряемой функции *f* в векторном квадратично интегрируемом пространстве $L^2(R)$ определяется

$$\langle f(x), g(x)\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\overline{g(x)}dx$$

Внутреннее произведение может быть использовано для непрерывного вейвлет-преобразования $F(a, b)$ из $f \in L^2(R)$ как

$$F(a,b) = \langle f(x), \Psi_{a,b}(x)\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\overline{\Psi_{a,b}(x)}dx$$

Внутреннее произведение – это основа для вейвлет-анализа функции или сигнала и построения семейства вейвлетов [2]. Синтез $f(x)$ из *F* включает в себя линейное сочетание оригинальных вейвлетов с использованием коэффициентов $F(a, b)$. Синтез или инверсная формула для $f(x)$ записывается в виде

$$f(x) = \int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} F(a,b)\Psi_{a,b}(x)\frac{db\ \ da}{a^2}$$

Приведённые формулы прямого и обратного непрерывного вейвлет-преобразований являются основой вейвлет-анализа потоковых данных, в том числе, цифровых сигналов и массивов.

Список использованных источников:

1. Десять лекций по вейвлетам. / Добеши И. // НИЦ Регулярная и хаотическая динамика. 2001. С – 462.
2. Wavelet Analysis. Springer / Resnikoff H. L., Wells R.O. 1991.