ISSN 1561-2430 (Print)
ISSN 2524-2415 (Online)
УДК 519.853.3
https://doi.org/10.29235/1561-2430-2019-55-3-299-308

Поступила в редакцию 28.06.2019
Received 28.06.2019

О. И. Костюкова[1], Т. В. Чемисова[2]

[1]Институт математики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь
[2]Университет Авейру, Авейру, Португалия

ОБОБЩЕННАЯ ЗАДАЧА ЛИНЕЙНОГО КОПОЛОЖИТЕЛЬНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Аннотация. Статья посвящена изучению оптимизационных задач, в которых целевая функция линейна по конечномерной переменной *x*, в то время как ограничения линейны по *x* и квадратичны по индексу *t*, принадлежащему заданному конусу. Задачи такого вида могут интерпретироваться как обобщение задач полуопределенного и коположительного программирования. Для рассматриваемой задачи формулируется эквивалентная задача полубесконечного программирования и вводится множество неподвижных индексов, которое либо пусто, либо является объединением конечного числа выпуклых ограниченных многогранников. Изучение свойств множества допустимых планов позволило сформулировать и доказать новые эффективные условия оптимальности, которые не требуют дополнительных условий на ограничения и имеют форму критериев.

Ключевые слова: условия оптимальности, коположительное программирование, коническая оптимизация, неподвижные индексы

Для цитирования. Костюкова, О. И. Обобщенная задача линейного коположительного программирования / О. И. Костюкова, Т. В. Чемисова // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фiз.-мат. навук. – 2019. – Т. 55, № 3. – С. 299–308. https://doi.org/10.29235/1561-2430-2019-55-3-299-308

O. I. Kostyukova[1], T. V. Tchemisova[2]

[1]Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus
[2]University of Aveiro, Aveiro, Portugal

GENERALIZED PROBLEM OF LINEAR COPOSITIVE PROGRAMMING

Abstract. We consider a special class of optimization problems where the objective function is linear w.r.t. decision variable *x* and the constraints are linear w.r.t. *x* and quadratic w.r.t. index *t* defined in a given cone. The problems of this class can be considered as a generalization of semi-definite and copositive programming problems. For these problems, we formulate an equivalent semi-infinite problem and define a set of immobile indices that is either empty or a union of a finite number of convex bounded polyhedra. We have studied properties of the feasible sets of the problems under consideration and use them to obtain new efficient optimality conditions for generalized copositive problems. These conditions are CQ-free and have the form of criteria.

Keywords: optimality conditions, copositive programming, conic optimization, immobile indices

For citation. Kostyukova O. I., Tchemisova T. V. Generalized problem of linear copositive programming. *Vestsi Natsyianal'nai akademii navuk Belarusi. Seryia fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2019, vol. 55, no. 3, pp. 299–308 (in Russian). https://doi.org/10.29235/1561-2430-2019-55-3-299-308

Введение. Постановка задачи. В данной статье используются следующие обозначения. Для заданных целых чисел k и p обозначим через $\mathbb{R}^p$ множество всех векторов размерности p и через $\mathbb{R}^p_+$ – подмножество всех p-векторов с неотрицательными координатами. Пусть $\mathbb{R}^{k\times p}$ обозначает множество всех действительных матриц размерности $k \times p$ и $\mathcal{S}(p)$ – пространство всех $p \times p$ квадратных симметричных матриц со скалярным произведением

$$\operatorname{trace}(AB) = A \bullet B = \sum_{j=1}^{p} \sum_{i=1}^{p} a_{ij} b_{ij},$$

где a_{ij}, b_{ij}, $i = 1,..., p$, $j = 1,..., p$, – элементы матриц $A, B \in \mathcal{S}(p)$ соответственно.

Рассмотрим следующую оптимизационную задачу:

$$\min_{x} c^T x, \quad t^T \mathcal{A}(x)t + t^T Dx \geq 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}^p(N), \tag{1}$$

где минимизация ведется по n-мерной переменной $x = (x_1, ..., x_n)^T$, а вектор $t = (t_1, ..., t_p)^T \in \mathbb{R}^p$ рассматривается как векторный индекс ограничений задачи. Исходными данными, определяющими эту задачу, являются вектор $c \in \mathbb{R}^n$, матрица $D \in \mathbb{R}^{p \times n}$, матричная функция $\mathcal{A}(x)$ и множество $\mathbb{R}^p(N)$, заданные в виде

$$(x) := \sum A_m x_m + A \ , \quad \mathbb{R}^p(N) := \{t \in \mathbb{R}^p : \ t_k \geq 0, k \in N\}, \tag{2}$$

при помощи матриц $A_m \in \mathcal{S}(p)$, $m = 0,1,\ldots,n$, и множества $N \subset P := \{1,2,...,p\}$.

Задачу (1) можно рассматривать как обобщенную задачу коположительного программирования, поскольку она является обобщением задач полуопределенного (semi-definite) и коположительного (copositive) программирования, которые возникают в самых различных приложениях [1–3]. Действительно, если в задаче (1) положить $D = \mathbb{O} \in \mathbb{R}^{p \times n}$ и $N = \varnothing$, то она станет линейной задачей полуопределенного программирования

$$\min_{x} c^T x, \quad t^T \mathcal{A}(x)t \geq 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}^p. \tag{3}$$

Задачи такого типа довольно хорошо изучены в литературе [4, 5].

Если же $D = \mathbb{O} \in \mathbb{R}^{p \times n}$ и $N = P$, то задача (1) приобретет форму общей задачи линейного коположительного программирования [1–3]

$$\min_{x} c^T x, \quad t^T \mathcal{A}(x)t \geq 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}^p_+. \tag{4}$$

Задача (4) является более сложной по сравнению с задачей (3) [3] и менее изученной.

Вывод условий оптимальности – важный вопрос в исследовании любой оптимизационной задачи, поскольку они позволяют не только проверить оптимальность заданного допустимого плана, но и разработать эффективные методы для численного решения этой задачи. Условия оптимальности обычно формулируются для определенных классов оптимизационных задач, что дает возможность эффективно использовать специфику задач заданного класса, в том числе свойства целевой функции и ограничений, а также структуру допустимого множества [6]. Как правило, условия оптимальности формулируются при выполнении некоторых дополнительных условий на ограничения задачи, которые принято называть условиями регулярности (см. [7–9]). Эти условия являются существенными, их нарушение приводит к невыполнению упомянутых условий оптимальности. На практике существуют классы задач, для которых невыполнение условий регулярности – типичное явление, поэтому поиск новых условий оптимальности, не требующих выполнения никаких дополнительных условий, выступает одним из ключевых направлений в оптимизации.

Цель данной статьи состоит в доказательстве для задачи (1) условий оптимальности без условий регулярности.

Следует заметить, что задача (1) принадлежит классу задач полубесконечного (semi-infinite) программирования. Условия оптимальности для задач этого класса сформулированы в [7] в предположении, что ограничения задач удовлетворяют условию Слейтера, которое состоит в требовании телесности множества допустимых планов задачи и является существенным. Поэтому для рассматриваемой здесь задачи (1) мы можем использовать условия из [7] только в регулярных случаях (см. [10]). В работах [9, 11], были получены новые условия оптимальности для задач полубесконечного программирования, которые предполагают только, что множество, состоящее из так называемых неподвижных индексов ограничений (т. е. индексов тех ограничений, которые активны для всех допустимых планов), дискретно. Следует отметить, что такое предположение (о дискретности множества неподвижных индексов) менее ограничительно по сравнению с условием Слейтера, которое обычно нарушается для задач (1), (3) и (4).

Эквивалентная задача полубесконечного программирования. Наряду с задачей (1) рассмотрим следующую задачу линейного полубесконечного программирования:

$$\min_x c^T x, \quad t^T \mathcal{A}(x)t \ge 0 \quad \forall t \in T,\ e_k^T Dx = 0,\ k \in M,\ e_k^T Dx \ge 0,\ k \in N, \tag{5}$$

где $T := \{t \in \mathbb{R}^p(N) : \max_{k \in P} |t_k| = 1\} \subset \mathbb{R}^p$ – компактное множество индексов, $M = P \setminus N$, $e_k = (e_{ks}, s \in P)^T$, $e_{ks} = 0, s \in P \setminus \{k\}$, $e_{kk} = 1$, остальные данные такие же, как и в задаче (1).

Введем множество

$$\overline{X} := \{x \in \mathbb{R}^n : e_k^T Dx = 0,\ k \in M, \quad e_k^T Dx \ge 0,\ k \in N\} \tag{6}$$

и обозначим через X и $\tilde{X}$ множества допустимых планов задач (1) и (5) соответственно:

$$X := \{x \in \mathbb{R}^n : t^T \mathcal{A}(x)t + t^T Dx \ge 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}^p(N)\},\ \tilde{X} := \{x \in \overline{X} : t^T \mathcal{A}(x)t \ge 0 \quad \forall t \in T\}.$$

Л е м м а 1. *Множества допустимых планов задач* (1) *и* (5) *совпадают.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Очевидно, что $\tilde{X} \subset X$. Покажем что $X \subset \tilde{X}$. Пусть $\overline{x} \in X$. Если $\overline{x} \not\in \tilde{X}$, тогда имеет место одна из следующих ситуаций: 1) $\exists\, k_0 \in M$, для которого $e_{k_0}^T D\overline{x} =: \alpha \ne 0$; 2) $\exists\, k_0 \in N$, для которого $e_{k_0}^T D\overline{x} =: \alpha < 0$; 3) $\exists\, \overline{t} \in T$, для которого $\overline{t}^T \mathcal{A}(\overline{x})\overline{t} =: \alpha < 0$.

Предположим, что имеет место ситуация 1) или 2). Положим $t(\theta) = -\theta\alpha e_{k_0}$. Очевидно, что $t(\theta) \in \mathbb{R}^p(N)$ для всех $\theta > 0$. Тогда для некоторого достаточно малого $\theta > 0$ имеем

$$t^T(\theta)\mathcal{A}(\overline{x})t(\theta) + t^T(\theta)D\overline{x} = \theta^2\alpha^2 e_{k_0}^T \mathcal{A}(\overline{x})e_{k_0} - \theta\alpha^2 < 0.$$

Заметим, что последнее неравенство противоречит включению $\overline{x} \in X$. Следовательно, ситуации 1) и 2) невозможны.

Допустим теперь, что ситуация 3) выполнена. Положим $t(\theta) = \theta\overline{t}$. Очевидно, что $t(\theta) \in \mathbb{R}^p(N)$ для всех $\theta > 0$. Тогда для достаточно больших $\theta > 0$ получим неравенство

$$t^T(\theta)\mathcal{A}(\overline{x})t(\theta) + t^T(\theta)D\overline{x} = \theta^2\alpha + \theta\overline{t}^T D\overline{x} < 0,$$

которое противоречит включению $\overline{x} \in X$. Следовательно, ситуация 3) также невозможна. Таким образом, $X \subset \tilde{X}$. Лемма доказана.

Из леммы 1 следует, что задачи (1) и (5) эквивалентны. В дальнейшем будем рассматривать задачу (5) с компактным множеством индексов T.

По определению, ограничения задачи (5) удовлетворяют условию (регулярности) Слейтера, если

$$\exists\, \overline{x} \in X \text{, такой что } t^T \mathcal{A}(\overline{x})t > 0 \quad \forall\, t \in T. \tag{7}$$

Следуя [8, 11], введем множество T^* неподвижных индексов в задаче (5):

$$T^* := \{t \in T : t^T \mathcal{A}(x)t = 0 \quad \forall x \in X\}. \tag{8}$$

Л е м м а 2. *Ограничения задачи* (5) *удовлетворяют условию Слейтера* (7) *тогда и только тогда, когда множество* T^* *пусто.*

Как было отмечено выше, целью данной статьи является доказательство критерия оптимальности для задачи (5) и, следовательно, для исходной задачи (1) без каких-либо дополнительных условий на ее ограничения. Поэтому в дальнейшем мы будем рассматривать общий случай, когда множество T^* может быть непустым.

Свойства допустимых множеств задач (1) и (5). Справедлива следующая лемма.

Л е м м а 3. *Множество неподвижных индексов в задаче* (5) *либо пусто, либо является объединением конечного числа выпуклых ограниченных многогранников.*

Пусть $\operatorname{conv} T^*$ обозначает выпуклую оболочку множества T^*. Очевидно, что $\operatorname{conv} T^*$ является выпуклым ограниченным многогранником. Обозначим через

$$t^*(j)=\left(t_k^*(j), k\in P\right)\in T^*,\quad j\in J, \tag{9}$$

множество всех вершин многогранника $\operatorname{conv} T^*$. В случае $T^*=\varnothing$ имеем $\operatorname{conv} T^*=\varnothing$ и множество $\operatorname{conv} T^*$ не имеет вершин. Следовательно, в этом случае нужно положить $J=\varnothing$.

Л е м м а 4. *Для любого допустимого плана* $x\in X$ *задачи* (5) *имеют место следующие соотношения:*

$$e_k^T\mathcal{A}(x)t^*(j)=0,\ k\in M;\quad e_k^T\mathcal{A}(x)t^*(j)\geq 0,\ k\in N,\quad j\in J. \tag{10}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Очевидно, что для каждого $x\in X$ любой неподвижный индекс $t^*\in T^*$ является оптимальным решением так называемой *задачи нижнего уровня* вида

$$LLP(x):\quad \min t^T\mathcal{A}(x)t,\quad t\in\mathbb{R}^p(N).$$

Тогда, выписав необходимые условия оптимальности первого порядка [7, 12] для решений $t^*(j)\in T^*$, $j\in J$, задачи $\left(LLP(x)\right)$, получим следующие соотношения:

$$e_k^T\mathcal{A}(x)t^*(j)\begin{cases}=0, & \text{если } k\in M \text{ или } k\in N \text{ и } t_k^*(j)>0,\\ \geq 0, & \text{если } k\in N \text{ и } t_k^*(j)=0,\end{cases}\qquad k\in P,\ j\in J,\ \forall\, x\in X.$$

Из этих соотношений следует (10). Лемма доказана.

Обозначим

$$X_*=\{x\in\mathbb{R}^n: e_k^T\mathcal{A}(x)t^*(j)=0,\ k\in M;\ e_k^T\mathcal{A}(x)t^*(j)\geq 0,\ k\in N,\ j\in J\}. \tag{11}$$

Тогда, в соответствии с леммой 4, имеем $X\subset X_*$.

Л е м м а 5. *Пусть множество* X_* *определено согласно* (11). *Тогда*

$$t^T\mathcal{A}(x)t\geq 0\ \ \forall t\in\operatorname{conv} T^*,\ \forall\, x\in X_*. \tag{12}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $t\in\operatorname{conv}T^*$. Тогда $t=\sum\limits_{j\in J}\alpha_j t^*(j)$, $\sum\limits_{j\in J}\alpha_j=1, \alpha_j\geq 0, j\in J$. Следовательно,

$$t^T\mathcal{A}(x)t=\left(\sum_{j\in J}\alpha_j t^*(j)\right)^T\mathcal{A}(x)\left(\sum_{j\in J}\alpha_j t^*(j)\right)=\sum_{s\in J}\sum_{j\in J}\alpha_s\alpha_j\left(t^*(s)\right)^T\mathcal{A}(x)t^*(j). \tag{13}$$

Так как $x\in X_*$, соотношения (10) имеют место и, принимая во внимание неравенства $t_k^*(s)\geq 0$, $k\in N$, $s\in J$, получаем $\left(t^*(s)\right)^T\mathcal{A}(x)t^*(j)=\sum\limits_{k\in N}t_k^*(s)e_k^T\mathcal{A}(x)t^*(j)\geq 0$, $s\in J$, $j\in J$.

Из последнего неравенства и неравеств $\alpha_j\geq 0$, $j\in J$, с учетом равенства (13), следуют соотношения (12), что доказывает лемму.

Обозначим

$$T_\varepsilon:=\{t\in T,\ \rho(t,\operatorname{conv} T^*)\geq\varepsilon\},\quad \hat{T}_\varepsilon:=\{t\in T,\ \rho(t,\operatorname{conv} T^*)\leq\varepsilon\}, \tag{14}$$

$$\bar{\bar{X}}:=\bar{X}\cap X_*,\ \bar{X}_\varepsilon:=\{z\in\bar{\bar{X}}: t^T\mathcal{A}(z)t\geq 0\quad\forall\, t\in T_\varepsilon\}, \tag{15}$$

где множества $\overline{X}$ и X_* определены соответственно в (6) и (11) и $\varepsilon > 0$, $\rho(l,B) = \min\limits_{\tau\in B} \| l - \tau \|$ для $l \in \mathbb{R}^p$, $B \subset \mathbb{R}^p$; $\| a \| = \sqrt{a^T a}$ для $a \in \mathbb{R}^p$.

Л е м м а 6. *Пусть X – множество допустимых планов задачи* (5). *Существует* $\varepsilon_0 > 0$, *такое что* $\overline{X}_{\varepsilon_0} = X$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Очевидно, что $X \subset \overline{X}_\varepsilon$ для всех $\varepsilon > 0$. Покажем, что существует число $\varepsilon_0 > 0$, для которого $\overline{X}_{\varepsilon_0} \subset X$. Если допустить противное, то для всех значений $\varepsilon > 0$ существует вектор $z(\varepsilon) \in \overline{X}_\varepsilon$, для которого справедливо неравенство

$$\big(t(\varepsilon)\big)^T \mathcal{A}\big(z(\varepsilon)\big) t(\varepsilon) < 0, \tag{16}$$

где

$$t(\varepsilon) \in \arg\Big\{\Big\{ \min_t t^T \mathcal{A}\big(z(\varepsilon)\big) t,\ t \in T \Big\} \ \Rightarrow\ t(\varepsilon) \in \arg\Big\{ \min_t t^T \mathcal{A}\big(z(\varepsilon)\big) t,\ t \in \tilde{T} \Big\},$$
$$\tilde{T} := \{ t \in \mathbb{R}^p(N) : \max_{k\in P} | t_k | \le 1 \}.$$

Заметим, что $T \subset \tilde{T}$, и множество $\tilde{T}$ выпукло.

По построению (см. лемму 5 и определение (15)), выполняются неравенства $t^T \mathcal{A}\big(z(\varepsilon)\big) t \ge 0\ \ \forall t \in T_\varepsilon \cup \operatorname{conv} T^*$. Тогда очевидно, что $t(\varepsilon) \in \hat{T}_\varepsilon \setminus \operatorname{conv} T^*$. Следовательно, существует $t^* := \lim\limits_{\varepsilon\to 0} t(\varepsilon)$, $t^* \in \operatorname{conv} T^*$.

Без потери общности можно считать, что для всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ выполняется:

$$M^\pm(\varepsilon) := \{ k \in M : t_k(\varepsilon) = \pm 1 \} = M^\pm,$$
$$N^0(\varepsilon) := \{ k \in N : t_k(\varepsilon) = 0 \} = N^0,\ \ N^*(\varepsilon) := \{ k \in N : t_k(\varepsilon) = 1 \} = N^*.$$

Зафиксируем достаточно малое значение $\overline{\varepsilon} > 0$ и рассмотрим вектор $\overline{l} = t(\overline{\varepsilon}) - t^*$. Покажем, что вектор $\overline{l}$ является допустимым направлением в точках t^* и $t(\overline{\varepsilon})$ во множестве $\tilde{T}$. Действительно, принимая во внимание выпуклость множества $\tilde{T}$, имеем $t^* + \lambda\big(t(\overline{\varepsilon}) - t^*\big) \in \tilde{T}$ для $\lambda \in [0,1]$. Следовательно, вектор $\overline{l}$ является допустимым направлением в точке t^* во множестве $\tilde{T}$.

Очевидно, что направление $\overline{l}$ допустимо в точке $t(\overline{\varepsilon})$ во множестве $\tilde{T}$, если выполнены следующие условия: $\overline{l}_k \le 0$ для $k \in M^+ \cup N^*$; $\overline{l}_k \ge 0$ для $k \in M^- \cup N^0$. Все эти неравенства справедливы, так как по построению

$$\overline{l}_k := t_k(\overline{\varepsilon}) - t_k^* = 0,\ \ k \in M^\pm \cup N^0 \cup N^*.$$

Это означает, что направление $\overline{l}$ допустимо в точках t^* и $t(\overline{\varepsilon})$ во множестве $\tilde{T}$. Следовательно,

$$\overline{t}(\gamma) := t^* + \gamma\overline{l} = t^* + \gamma\Big(t(\overline{\varepsilon}) - t^*\Big) \in \tilde{T} \quad \forall \gamma \in [0, \gamma_0],$$

где $\gamma_0 > 1$.

Введем функцию

$$w(\gamma) := \overline{t}^T(\gamma) \mathcal{A}\big(z(\overline{\varepsilon})\big) \overline{t}(\gamma) = a\gamma^2 + 2b\gamma + c,\ \ \gamma \in [0, \gamma_0],$$

где $c := (t^*)^T \mathcal{A}\big(z(\overline{\varepsilon})\big) t^*$, $b := \overline{l}^{\,T} \mathcal{A}\big(z(\overline{\varepsilon})\big) t^*$, $a := \overline{l}^{\,T} \mathcal{A}\big(z(\overline{\varepsilon})\big) \overline{l}$. По построению для $\gamma^* = 1$ имеем

$$w(\gamma^*) = \big(t(\overline{\varepsilon})\big)^T \mathcal{A}\big(z(\overline{\varepsilon})\big) t(\overline{\varepsilon}).$$

Из последнего равенства следует, что $w(\gamma^*)$ совпадает с оптимальным значением целевой функции в задаче $\min t^T \mathcal{A}\left(z(\overline{\varepsilon})\right)t,\ t \in \tilde{T}$. Отсюда заключаем, что

$$w(\gamma^*) = \min_{\gamma\in[0,\gamma_0]} w(\gamma) = \min_{\gamma\in[0,\gamma_0]} (a\gamma^2 + 2b\gamma + c). \tag{17}$$

Поскольку $\gamma^* \in (0, \gamma_0)$, из (17) легко вывести соотношение $2a\gamma^* + 2b = 0$. Следовательно, $-a = b$ и справедливы следующие эквивалентные равенства:

$$-\overline{l}^{\,T} \mathcal{A}\left(z(\overline{\varepsilon})\right)t^* = \overline{l}^{\,T} \mathcal{A}\left(z(\overline{\varepsilon})\right)\overline{l} \ \Leftrightarrow\ \left(t(\overline{\varepsilon})\right)^T \mathcal{A}\left(z(\overline{\varepsilon})\right)t^* = \left(t(\overline{\varepsilon})\right)^T \mathcal{A}\left(z(\overline{\varepsilon})\right)t(\overline{\varepsilon}). \tag{18}$$

Из включения $t^* \in \operatorname{conv} T^*$ получаем

$$t^* = \sum_{j\in J} \beta_j t^*(j),\ \ \sum_{j\in J} \beta_j = 1,\ \beta_j \ge 0,\ j \in J.$$

Отсюда, принимая во внимание включение $z(\overline{\varepsilon}) \in \overline{X}_{\overline{\varepsilon}} \subset \overline{X}$ и неравенства $t_k(\varepsilon) \ge 0$, $k \in N$, получаем

$$\left(t(\overline{\varepsilon})\right)^T \mathcal{A}\left(z(\overline{\varepsilon})\right)t^* = \sum_{j\in J} \beta_j \left(t(\overline{\varepsilon})\right)^T \mathcal{A}\left(z(\overline{\varepsilon})\right)t^*(j) \ge 0.$$

Последнее неравенство вместе с неравенством (16) при $\varepsilon = \overline{\varepsilon}$ противоречит (18), что и доказывает лемму.

Л е м м а 7. *Для любого* $\varepsilon > 0$ *существует вектор* $\overline{x}(\varepsilon) \in \overline{X}_\varepsilon$ *такой, что*

$$t^T \mathcal{A}\left(\overline{x}(\varepsilon)\right)t > 0,\ t \in T_\varepsilon. \tag{19}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для фиксированного $\varepsilon > 0$ рассмотрим задачу полубесконечного программирования

$$\mathrm{Pr}:\ \max_{x,y\in\mathbb{R}} y,\ x \in \overline{\overline{X}},\ t^T \mathcal{A}(x)t \ge y\ \ \forall t \in T_\varepsilon.$$

В этой задаче множество индексов T_ε компактно, множество $\overline{\overline{X}}$, определенное в (15), выпукло и ограничения удовлетворяют условию Слейтера. Тогда, в соответствии с теоремой 1 из [13], существует множество индексов I, $|I| \le n + 2$, и векторы $t^m \in T_\varepsilon$, $m \in I$, такие, что для дискретизированной задачи

$$D\,\mathrm{Pr}:\ \max_{x,y\in\mathbb{R}} y,\ x \in \overline{\overline{X}},\ (t^m)^T \mathcal{A}(x)t^m \ge y,\ m \in I,$$

имеет место равенство $\operatorname{val}(D\,\mathrm{Pr}) = \operatorname{val}(\mathrm{Pr})$, где $\operatorname{val}(\mathrm{Pr})$ обозначает оптимальное значение целевой функции в задаче (Pr). Принимая во внимание определения неподвижных индексов и множества T_ε, с учетом выпуклости множества $\overline{\overline{X}}$, можно показать, что существует такой вектор $\hat{x} \in \overline{\overline{X}}$, что $(t^m)^T \mathcal{A}(\hat{x})t^m > 0$, $m \in I$. Из последних неравенств заключаем, что $\operatorname{val}(D\,\mathrm{Pr}) > 0$ и, значит, $\operatorname{val}(\mathrm{Pr}) = \operatorname{val}(D\,\mathrm{Pr}) > 0$. Следовательно, задача (Pr) имеет допустимый план $(\overline{x}, \overline{y})$, для которого $\overline{y} > 0$. Лемма доказана.

Условия оптимальности для задачи (1). Докажем новые условия оптимальности для задачи (1), которые имеют форму критерия и не требуют выполнения предположения о том, что ограничения задачи удовлетворяют условию Слейтера.

Т е о р е м а 1. *Рассмотрим задачу* (1) *с множеством неподвижных индексов* T^* *и вершины* $\{t^*(j),\ j \in J\}$ *выпуклого многогранника* $\operatorname{conv} T^*$. *Вектор* $x^0 \in X$ *являетсяся оптимальным планом задачи* (1) *тогда и только тогда, когда существуют векторы*

$$\lambda \in \mathbb{R}^p(N),\ \ \lambda(j) \in \mathbb{R}^p(N),\ j \in J;\ \ t(i) \in \mathbb{R}^p(N),\ i \in I;\ \ |I| \leq n; \tag{20}$$

такие, что для данного вектора x^0 *и матрицы*

$$\Omega = \sum_{i \in I} t(i)\big(t(i)\big)^T + \sum_{j \in J} t^*(j)\big(\lambda(j)\big)^T \tag{21}$$

выполняются следующие соотношения:

$$-c_m + \lambda^T D_m + \Omega \bullet A_m = 0,\ m = 1,2,...,n;\ \lambda^T D x^0 + \Omega \bullet \mathcal{A}(x^0) = 0, \tag{22}$$

где D_m *обозначает m-й столбец матрицы* $D = (D_m, m = 1,...,n)$.

Доказательство. Необходимость. Допустим, что $x^0 \in X$ является оптимальным планом задачи (1). Пусть $\varepsilon_0 > 0$ – значение параметра, при котором имеет место равенство $\bar{X}_{\varepsilon_0} = X$, где множество $\bar{X}_\varepsilon$ определено в (15). Согласно лемме 6, такое значение существует. Тогда вектор x^0 является также оптимальным планом и для задачи

$$\mathrm{SIP}(\varepsilon_0):\quad \min_{z \in \mathbb{R}^n} c^T z,\ \ z \in \bar{X}_{\varepsilon_0},$$

которая может быть переписана в виде

$$\mathrm{SIP}(\varepsilon_0):\quad \min_{z \in \mathbb{R}^n} c^T z,$$

$$t^T \mathcal{A}(z) t \geq 0 \quad \forall t \in T_{\varepsilon_0},$$

$$e_k^T D x = 0,\ \ e_k^T \mathcal{A}(z) t^*(j) = 0,\ \ k \in M;\ \ e_k^T D x \geq 0,\ \ e_k^T \mathcal{A}(z) t^*(j) \geq 0,\ \ k \in N,\ \ j \in J.$$

Задача $\big(\mathrm{SIP}(\varepsilon_0)\big)$ обладает следующими важными свойствами:

1) множество индексов T_{ε_0} компактно;

2) ограничения задачи удовлетворяют условию Слейтера (см. лемму 7).

Следовательно, применяя классические условия оптимальности (как, например, условия теоремы 5.107 из [7]) к оптимальному плану x^0 задачи $\big(\mathrm{SIP}(\varepsilon_0)\big)$, убеждаемся в том, что существуют такие числа и векторы $y(i) > 0,\ \tau(i) \in T_{\varepsilon_0},\ i \in I,\ |I| \leq n;\ \lambda(j) \in \mathbb{R}^p(N),\ j \in J,\ \lambda \in \mathbb{R}^p(N)$, что выполнены следующие соотношения:

$$-c_m + \sum_{i \in I} y(i)\big(\tau(i)\big)^T A_m \tau(i) + \lambda^T D_m + \sum_{j \in J} \big(\lambda(j)\big)^T A_m t^*(j) = 0,\ \ m = 1,...,n; \tag{23}$$

$$\big(\tau(i)\big)^T \mathcal{A}(x^0)\tau(i) = 0,\ i \in I;\ \ \big(\lambda(j)\big)^T \mathcal{A}(x^0) t^*(j) = 0,\ j \in J;\ \lambda^T D x^0 = 0. \tag{24}$$

Введя обозначение $t(i) := \sqrt{y(i)}\tau(i),\ \ i \in I$, легко заметить, что соотношения (23), (24) могут быть записаны в виде (22) с матрицей Ω, определенной в (21). Необходимость доказана.

Достаточность. Предположим, что для $x^0 \in X$ существуют вектора (20) такие, что для матрицы (21) выполняются соотношения (22). Из этих соотношений следует, что вектор x^0 является оптимальным планом следующей задачи линейного программирования:

$$LP:\quad \min_x c^T x,$$

$$\big(t(i)\big)^T \mathcal{A}(x) t(i) \geq 0,\quad i \in I,$$

$$e_k^T D x = 0, e_k^T \mathcal{A}(z) t^*(j) = 0,\ \ k \in M;\ \ e_k^T D x \geq 0, e_k^T \mathcal{A}(z) t^*(j) \geq 0,\ \ k \in N,\ \ j \in J.$$

Очевидно, что множество допустимых планов X исходной задачи (1) принадлежит множеству допустимых планов задачи (LP). Следовательно, оптимальность вектора $x^0 \in X$ в задаче (LP) влечет оптимальность x^0 в исходной задаче (1). Теорема доказана.

Для любой симметричной матрицы $A \in S(p)$ и любого вектора $\lambda \in \mathbb{R}^p$ справедливо соотношение $t\lambda^T \bullet A = (t\bar{\lambda}^T + \bar{\lambda}t^T) \bullet A,$ где $\bar{\lambda} = \lambda / 2.$ Тогда, без потери общности, можно считать, что в (22) матрица Ω симметрична и имеет вид

$$\Omega = \sum_{i \in I} t(i)\big(t(i)\big)^T + \sum_{j \in J}\left(t^*(j)\big(\lambda(j)\big)^T + \lambda(j)\left(t^*(j)\right)^T \right).$$

Пусть T^* – множество неподвижных индексов, определенное в (8), и пусть $\{t^*(j),\ j \in J\}$ – множество всех вершин выпуклого многогранника $\operatorname{conv} T^*$. Положим $\bar{m} := |J|$ и обозначим через $\mathbb{R}^{p\times\bar{m}}(N)$ множество $p\times\bar{m}$-матриц вида $B = (B_j,\ j \in J),\ B_j \in \mathbb{R}^p(N),\ j \in J.$ Введем матрицу $\mathrm{H} = (t^*(j),\ j \in J) \in \mathbb{R}^{p\times\bar{m}}$, множества матриц

$$V(p,N) := \{V \in S(p) : V = \Lambda \mathrm{H}^T + \mathrm{H}\Lambda^T,\ \Lambda \in \mathbb{R}^{p\times\bar{m}}(N)\},$$
$$C^*(p,N) := \operatorname{conv}\{\, tt^T : t \in \mathbb{R}^p(N)\}$$

и переформулируем теорему 1 следующим образом.

Т е о р е м а 2. *Вектор* $x^0 \in X$ *является оптимальным планом задачи* (1) *тогда и только тогда, когда существует вектор* $\lambda \in \mathbb{R}^p(N)$ *и матрицы* $U^0 \in C^*(p,N),\ V^0 \in V(p,N)$ *такие, что*

$$-c_m + \lambda^T D_m + (U^0 + V^0) \bullet A_m = 0,\ \ m = 1,2,\dots,n;\ \lambda^T D x^0 + (U^0 + V^0) \bullet \mathcal{A}(x^0) = 0.$$

З а м е ч а н и е. Задача (5) и, следовательно, исходная задача (1) могут быть переформулированы в виде следующей задачи конической (conic) оптимизации:

$$\min_{x \in \bar{X}} c^T x,\ \ \mathcal{A}(x) \in C(p,N),$$

где выпуклое множество $\bar{X} \subset \mathbb{R}^n$ определено по формуле (6) и конус матриц $C(p,N) \subset S(p)$ задан следующим образом: $C(p,N) := \{B \in S(p) : t^T B t \ge 0\ \ \forall\, t \in \mathbb{R}^p(N)\}$. Отметим, что конус $C(p,N)$ является обобщением хорошо известных и изученных в литературе конусов, таких как конус положительно полуопределенных матриц $S_+(p) := \{B \in S(p) : t^T B t \ge 0\ \ \forall\, t \in \mathbb{R}^p\}$ и конус коположительных матриц $C(p) := \{B \in S(p) : t^T B t \ge 0\ \ \forall\, t \in \mathbb{R}^p_+\}$. Действительно, для $N = \varnothing$ выполняется $C(p,N) = S_+(p)$ и для $N = P$ мы имеем $C(p,N) = C(p)$. Заметим также, что введенный ранее конус $C^*(p,N)$ является двойственным к конусу $C(p,N)$.

Заключение. Полученные в статье результаты позволяют сделать следующие выводы.

– Для рассматриваемого класса задач множество неподвижных индексов имеет специальную структуру. Учет этой структуры дает возможность описать свойства множества допустимых планов.

– Использование неподвижных индексов в коположительной оптимизации позволяет получить новые условия оптимальности для различных классов специальных задач.

– Сформулированные условия оптимальности могут быть применены для построения новых эффективных численных методов для решения задач коположительной и конической оптимизации.

Благодарности. Работа выполнена при частичной финансовой поддержке в рамках государственной программы «Convergence» Республики Беларусь (задание 1.3.01) и португальского фонда FCT (Фонд Португалии для науки и технологии) через CIDMA (Центр изучения и развития математики и приложений) в рамках проекта UID/MAT/04106/2019.

Acknowledgements. This work was partially supported by the state research program "Convergence" (Republic Belarus), Task 1.3.01 and by Portuguese funds through CIDMA – Center for Research and Development in Mathematics and Applications, and FCT – Portuguese Foundation for Science and Technology, within the project UID/MAT/04106/2019.

Список использованных источников

1. On copositive programming and standard quadratic optimization problems / I. M. Bomze [et al.] // J. Global Optim. – 2000. – Vol. 18, № 4. – P. 301–320. https://doi.org/10.1023/a:1026583532263

2. Bomze, I. M. Copositive optimization – Recent developments and applications / I. M. Bomze // Eur. J. Operational Research. – 2012. – Vol. 216, № 3. – P. 509–520. https://doi.org/10.1016/j.ejor.2011.04.026

3. Dür, M. Copositive Programming – a Survey / M. Dür // Recent advances in Optimization and its applications in Engineering / M. Diehl [et al.]. – Berlin; Heidelberg: Springer-Verlag, 2010. – P. 3–20. https://doi.org/10.1007/978-3-642-12598-0_1

4. Strong duality for Semidefinite Programming / V. Motakuri [et al.] // SIAM J. Optim. – 1997. – Vol. 7, № 3. – P. 641–662. https://doi.org/10.1137/s1052623495288350

5. Zhang, Q. Duality formulations in Semidefinite Programming / Q. Zhang, G. Chen, T. Zhang // J. Ind. Manag. Optimiz. – 2010. – Vol. 6, № 4. – P. 881–893. https://doi.org/10.3934/jimo.2010.6.881

6. Kostyukova, O. I. Optimality conditions for Linear Copositive Programming problems with isolated immobile indices / O. I. Kostyukova, T. V. Tchemisova // Optimization. – 2018. – P. 1–20. https://doi.org/10.1080/02331934.2018.1539482

7. Bonnans, J. F. Perturbation Analysis of Optimization Problems// J. F. Bonnans, A. Shapiro. – New-York: Springer-Verlag, 2000. – 601 p. https://doi.org/10.1007/978-1-4612-1394-9

8. Kostyukova, O. I. Optimality Conditions for Convex Semi-Infinite Programming Problems with Finitely Representable Compact Index Sets / O. I. Kostyukova, T. V. Tchemisova // J. Optim. Theory Appl. – 2017. – Vol. 175, № 1. – P. 76–103. https://doi.org/10.1007/s10957-017-1150-z

9. Kostyukova, O. I. Convex SIP problems with finitely representable compact index sets: immobile indices and the properties of the auxiliary NLP problem / O. I. Kostyukova, T. V. Tchemisova // Set-Valued and Variational Analysis. – 2015. – Vol. 23, № 3. – P. 519–546. https://doi.org/10.1007/s11228-015-0320-0

10. Ahmed, F. Copositive Programming via Semi-Infinite Optimization / F. Ahmed, M. Dür, G. Still // J. Optim. Theory Appl. – 2013. – Vol. 159, № 2. – P. 322–340. https://doi.org/10.1007/s10957-013-0344-2

11. Kostyukova, O. I. Implicit Optimality Criterion for Convex SIP problem with Box Constrained Index Set / O. I. Kostyukova, T. V. Tchemisova // TOP. – 2012. – Vol. 20, № 2. – P. 475–502. https://doi.org/10.1007/s11750-011-0189-5

12. Eaves, B. C. On quadratic programming / B. C. Eaves // Management Science. – 1971. – Vol. 17, № 11. – P. 698–711. https://doi.org/10.1287/mnsc.17.11.698

13. Левин, В. Л. Применение теоремы Э. Хелли в выпуклом программировании, задачах наилучшего приближения и смежных вопросах / В. Л. Левин // Мат. сб. – 1969. – Вып. 79 (21), № 2 (6). – С. 250–263.

References

1. Bomze I. M., Dür M., Klerk E. de, Roos C., Quist A. J., Terlaky T. On copositive programming and standard quadratic optimization problems. *Journal of Global Optimization*, 2000, vol. 18, no. 4, pp. 301–320. https://doi.org/10.1023/a:1026583532263

2. Bomze I. M. Copositive optimization – Recent developments and applications. *European Journal of Operational Research*, 2012, vol. 216, no. 3, pp. 509–520. https://doi.org/10.1016/j.ejor.2011.04.026

3. Dür M., Glineur F., Jarlebring E., Michielis W. Copositive Programming – a Survey. *Recent advances in Optimization and its applications in Engineering*. Berlin-Heidelberg, Springer-Verlag, 2010, pp. 3–20. https://doi.org/10.1007/978-3-642-12598-0_1

4. Motakuri V., Ramana M. V., Tunçel L., Wolkowicz H. Strong duality for Semidefinite Programming. *SIAM Journal on Optimization*, 1997, vol. 7, no 3, pp. 641–662. https://doi.org/10.1137/s1052623495288350

5. Zhang Q., Chen G., and Zhang T. Duality formulations in Semidefinite Programming. *Journal of Industrial and Management Optimization*, 2010, vol. 6, no. 4, pp. 881–893. https://doi.org/10.3934/jimo.2010.6.881

6. Kostyukova O. I., Tchemisova T. V. Optimality conditions for linear copositive programming problems with isolated immobile indices. *Optimization*, 2018, pp. 1–20. https://doi.org/10.1080/02331934.2018.1539482

7. Bonnans J. F., Shapiro A. *Perturbation Analysis of Optimization Problems*. New-York, Springer-Verlag, 2000. 601 p. https://doi.org/10.1007/978-1-4612-1394-9

8. Kostyukova O. I., Tchemisova T. V. Optimality Conditions for Convex Semi-Infinite Programming Problems with Finitely Representable Compact Index Sets. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 2017, vol. 175, no. 1, pp. 76–103. https://doi.org/10.1007/s10957-017-1150-z

9. Kostyukova O. I., Tchemisova T. V. Convex SIP problems with finitely representable compact index sets: immobile indices and the properties of the auxiliary NLP problem. *Set-Valued and Variational Analysis*, 2015, vol. 23, no. 3, pp. 519–546. https://doi.org/10.1007/s11228-015-0320-0

10. Ahmed F., Dür M., Still G. Copositive Programming via Semi-Infinite Optimization. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 2013, vol. 159, no. 2, pp. 322–340. https://doi.org/10.1007/s10957-013-0344-2

11. Kostyukova O. I., Tchemisova T. V. Implicit Optimality Criterion for Convex SIP problem with Box Constrained Index Set. *TOP*, 2012, vol. 20, no. 2, pp. 475–502. https://doi.org/10.1007/s11750-011-0189-5

12. Eaves B. C. On quadratic programming. *Management Science*, 1971, vol. 17, no. 11, pp. 698–711. https://doi.org/10.1287/mnsc.17.11.698

13. Levin V. L. Application of E. Helly's theorem to convex programming, problems of best approximation and related questions. *Mathematics of the USSR-Sbornik*, 1969, vol. 8, no. 2, pp. 235–247.

Информация об авторах

Костюкова Ольга Ивановна – доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник, Институт математики Национальной академии наук Беларуси (ул. Сурганова, 11, 220072, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: kostyukova@im.bas-net.by

Чемисова Татьяна Владимировна – кандидат физико-математических наук, преподаватель Департамента математики Университета г. Авейру (Университетский кампус Сантьяго, 3800-192, г. Авейру, Португалия). E-mail: tatiana@ua.pt

Information about the authors

Olga I. Kostyukova – Dr. Sc. (Physics and Mathematics), Full Professor, Principal Research Fellow, Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus (11, Surganov Str., 220072, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: kostyukova@ im.bas-net.by

Tchemisova Tatiana Vladimirovna – Ph. D. (Physics and Mathematics), Assistant Professor of the Department of Mathematics, University of Aveiro (Campus Universitário Santiago, 3800-192, Aveiro, Portugal). E-mail: tatiana@ua.pt