МНОГОГРАННИК И ОБЛАСТЬ ОПТИМАЛЬНОСТИ ДЛЯ ОБСЛУЖИВАНИЯ НА ОДНОМ ПРИБОРЕ МНОЖЕСТВА ТРЕБОВАНИЙ С НЕОПРЕДЕЛЕННЫМИ ДЛИТЕЛЬНОСТЯМИ

Егорова Н.Г.,
кандидат технических наук,

Сотсков Ю.Н.,
доктор физико-математических наук, профессор,
Объединенный институт проблем информатики НАН Беларуси, г. Минск

Исследована неопределенная задача $1|p_i^L \le p_i \le p_i^U|\sum C_i$ построения оптимального расписания обслуживания требований $J=\{J_1, J_2, ..., J_n\}$ на одном приборе. При построении расписания для требования J_i известен отрезок $[p_i^L, p_i^U]$, содержащий длительность p_i обслуживания требования J_i (точное значение длительности p_i становится известным только в момент C_i завершения обслуживания требования J_i). В задаче $1|p_i^L \le p_i \le p_i^U|\sum C_i$ необходимо построить перестановку обслуживания требований множества J, для которой суммарное время $\sum_{i=1}^n C_i$ завершения обслуживания всех требований принимает наименьшее из возможных значение.

Поскольку длительность p_i обслуживания требования $J_i \in J$ не определена на момент построения расписания, то для задачи $1|p_i^L \le p_i \le p_i^U|\sum C_i$ в общем случае нельзя построить перестановку обслуживания требований множества J, которая оставалась бы оптимальной при всех возможных сценариях $p=(p_1, p_2, ..., p_n)$ из заданного множества $T=\{p=(p_1, p_2, ..., p_n) \mid p \in R_+^n : p_i^L \le p_i \le p_i^U, i \in \{1,2,...,n\}\}$. Детерминированную задачу $1||\sum C_i$ с фиксированным вектором $p \in T$ длительностей обслуживания требований будем обозначать $1|p|\sum C_i$. Пусть $S=\{\pi_1, \pi_2, ..., \pi_{n!}\}$ множество всех перестановок $\pi_k=(J_{k_1}, J_{k_2}, ..., J_{k_n})$, определяющих порядок обслуживания требований множества J.

В [1] разработан алгоритм построения перестановки с максимальным относительным периметром многогранника оптимальности $OB(\pi_k,T)$ для задачи $1|p_i^L \le p_i \le p_i^U|\sum C_i$. В проведенных вычислительных экспериментах выделены случаи, когда данный подход к приближенному решению задачи $1|p_i^L \le p_i \le p_i^U|\sum C_i$ оказывается более эффективным по сравнению с известными алгоритмами.

В докладе для задачи $1|p_i^L \le p_i \le p_i^U|\sum C_i$ рассматривается область оптимальности $OR(\pi_k,T) \supseteq OB(\pi_k,T)$ согласно следующему определению.

Определение. Максимальная замкнутая область $OR(\pi_k,T) \subseteq T$ называется областью оптимальности для перестановки $\pi_k=(J_{k_1}, J_{k_2}, ..., J_{k_n}) \in S$ относительно T, если перестановка π_k является оптимальной для задачи $1|p|\sum C_i$ при любом сценарии $p=(p_1, p_2, ..., p_n) \in OR(\pi_k,T)$. Если же не существует сценария $p \in T$, при котором перестановка π_k является оптимальной для задачи $1|p|\sum C_i$, то $OR(\pi_k,T)=\varnothing$.

Внутри отрезка $[p_i^L, p_i^U]$ для каждого требования $J_i \in J$ можно выделить три следующих типа отрезков. Отрезком оптимальности для требования $J_i \in J$ в перестановке $\pi_k \in S$ называется максимальный (по включению) отрезок $[l_{k_r}^{opt}, u_{k_r}^{opt}] \subseteq [p_{k_r}^L, p_{k_r}^U]$ такой, что перестановка π_k, оптимальная для задачи $1|p|\sum C_i$ со сценарием $p=(p_1, p_2, ..., p_n) \in T$, остается оптимальной и для задачи $1|p'|\sum C_i$ с любым сценарием $p' \in [p_1, p_1] \times [p_2, p_2] \times ... \times [p_{i_g-1}, p_{i_g-1}] \times [l_{i_g}^{opt}, u_{i_g}^{opt}] \times [p_{i_g+1}, p_{i_g+1}] \times ... \times [p_n, p_n]$. Отрезком неоптимальности для требования $J_i \in J$ в перестановке $\pi_k \in S$ называется максимальный (по включению) отрезок $[l_{k_r}^{non}, u_{k_r}^{non}] \subseteq [p_{k_r}^L, p_{k_r}^U]$ такой, что для любой точки $p_{k_r}^* \in [l_{k_r}^{non}, u_{k_r}^{non}]$ перестановка π_k не является оптимальной для задачи $1|p|\sum C_i$ с любым сценарием $p=(..., p_{k_r}^*, ...) \in T$. Отрезком условной оптимальности для требования $J_i \in J$ в перестановке $\pi_k \in S$ называется максимальный (по включению) отрезок $[l_{k_r}^{copt}, u_{k_r}^{copt}] \subseteq [p_{k_r}^L, p_{k_r}^U]$ такой, что для любой точки $p_{k_r}^* \in [l_{k_r}^{copt}, u_{k_r}^{copt}]$, $p_{k_r}^* \notin [l_{k_r}^{non}, u_{k_r}^{non}]$, существует требование $J_{k_d} \in J$, $d \neq r$, для которого выполняется включение $p_{k_r}^* \in [p_{k_d}^L, p_{k_d}^U]$. Каждое требование $J_i \in J$ в перестановке $\pi_k \in S$ может иметь не более одного отрезка оптимальности, не более двух отрезков условной оптимальности и не более двух отрезков неоптимальности. Отрезок $[p_i^L, p_i^U]$ длительностей обслуживания требования $J_{k_r} \in J$, $r \in \{1, 2, ..., n\}$, в перестановке π_k представляется в виде объединения отрезка оптимальности, отрезков условной оптимальности и отрезков неоптимальности.

Разработаны алгоритмы сложности $O(n)$, которые позволяют для фиксированной перестановки π_k вычислить относительный периметр $\sum OS(\pi_k)$ области оптимальности $OR(\pi_k, T)$ на основе следующих соотношений: $\sum OS(\pi_k) = \sum_{r=1}^{n} \frac{OS(J_{k_r}, \pi_k)}{p_{k_r}^U - p_{k_r}^L}$, $OS(J_{k_r}, \pi_k) = (u_{k_r}^{opt} - l_{k_r}^{opt}) + OS_{k_r}^{copt}$,

$OS_{k_r}^{copt} = \sum_{j=1}^{n(r)} \frac{u_{k_r}^{copt}(r_j) - l_{k_r}^{copt}(r_j)}{|J_r^j|}$, где $[l_{k_r}^{copt}(r_j), u_{k_r}^{copt}(r_j)]$ – j-й отрезок условной оптимальности для требования J_{k_r}, J_r^j-множество требований J_i, для которых выполняется включение $[l_{k_r}^{copt}(r_j), u_{k_r}^{copt}(r_j)] \subseteq [p_{k_i}^L, p_{k_i}^U]$.

Проведенные вычислительные эксперименты показали, что перестановки с наибольшим значением $\sum OS(\pi_k)$ имеют наименьшую относительную погрешность по сравнению с перестановками, построенными известными алгоритмами. Это дает основание предполагать, что перестановки с наибольшим значением $\sum OS(\pi_k)$ более эффективны для решения задачи $1|p_i^L \le p_i \le p_i^U|\sum C_i$, чем перестановки, которые получаются в результате применения опубликованных ранее алгоритмов.

Литература

1. Sotskov, Yu.N. Single Machine Scheduling Problem with Interval Processing Times and Total Completion Time Objective / Yu.N. Sotskov, N.G. Egorova // Algorithms. – 2018. – Vol. 11, Issue 5. – P. 21–40.