

ISSN 1816-0301 (Print)  
ISSN 2617-6963 (Online)

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ**  
*MATHEMATICAL MODELING*

УДК 681.32  
<https://doi.org/10.37661/1816-0301-2020-17-2-86-102>

Поступила в редакцию 23.09.2019  
Received 23.09.2019

Принята к публикации 10.03.2020  
Accepted 10.03.2020

**Алгоритмы планирования рабочего времени  
в условиях интервальной неопределенности**

Ю. Н. Сотсков<sup>1✉</sup>, Н. Г. Егорова<sup>1</sup>, Н. М. Матвейчук<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Объединенный институт проблем информатики  
Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь  
✉E-mail: [sotskov48@mail.ru](mailto:sotskov48@mail.ru)

<sup>2</sup>Белорусский государственный аграрный технический университет,  
Минск, Беларусь

**Аннотация.** Тайм-менеджмент используется для планирования доступного времени в соответствии с персональными целями и предпочтениями работника. Критерий эффективности тайм-менеджмента состоит в достижении поставленных целей за минимально возможное время. Предлагается краткий обзор публикаций по тайм-менеджменту. Показывается, как теория расписаний может использоваться в оптимальном планировании для тайм-менеджмента. Рассматривается задача построения оптимального расписания выполнения работником запланированных работ при условии, что при составлении расписания известны только нижняя и верхняя границы возможной длительности выполнения каждой из запланированных работ.

Разработаны программы для построения перестановки выполнения запланированных работ на основе построенных перестановок с наибольшим относительным полупериметром параллелепипеда оптимальности. Проведенный на компьютере вычислительный эксперимент показал эффективность предложенных алгоритмов при составлении расписаний для тайм-менеджмента.

**Ключевые слова:** теория расписаний, тайм-менеджмент, один прибор, среднее время обслуживания требований, неопределенные длительности обслуживания требований

**Для цитирования.** Сотсков, Ю. Н. Алгоритмы планирования рабочего времени в условиях интервальной неопределенности / Ю. Н. Сотсков, Н. Г. Егорова, Н. М. Матвейчук // Информатика. – 2020. – Т. 17, № 2. – С. 86–102. <https://doi.org/10.37661/1816-0301-2020-17-2-86-102>

**Algorithms for planning working time under interval uncertainty**

Yuri N. Sotskov<sup>1✉</sup>, Natalja G. Egorova<sup>1</sup>, Natalja M. Matsveichuk<sup>2</sup>

<sup>1</sup>The United Institute of Informatics Problems of the National Academy  
of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus  
✉E-mail: [sotskov48@mail.ru](mailto:sotskov48@mail.ru)

<sup>2</sup>Belarusian State Agrarian Technical University, Minsk, Belarus

**Abstract.** Time-management refers to planning the available time in correspondence with personal goals and preferences of the employee. The criterion for efficient time-management lies in achieving definite goals in minimum possible time. This paper presents a short review of the literature on time-management. It is shown how scheduling theory may be used for optimal planning in time-management. The problem of minimizing the total (average) weighted completion time of the planned jobs by an employee is considered provided that only

lower and upper bounds of the possible processing time of each job are known before scheduling. Software for constructing a permutation of the given jobs with the largest relative semi-perimeter of the optimality parallelepiped has been developed. Computational experiment on the computer showed the effectiveness of the developed algorithms for constructing schedules for time-management.

**Keywords:** scheduling theory, time-management, single machine, average job completion time, uncertain job processing time periods

**For citation.** Sotskov Yu. N., Egorova N. G., Matsveichuk N. M. Algorithms for planning working time under interval uncertainty. *Informatics*, 2020, vol. 17, no. 2, pp. 86–102 (in Russian). <https://doi.org/10.37661/1816-0301-2020-17-2-86-102>

**Введение.** Методики тайм-менеджмента основаны на психологических и социологических исследованиях, целью которых является эффективное планирование деятельности человека. Тайм-менеджмент представляет собой технологию организации целенаправленной деятельности в течение определенного периода времени. Совокупность правил, рекомендаций и утверждений позволяет более эффективно использовать время для повышения производительности труда, уменьшения возникающих перегрузок и усталости, устранения нервозности и стрессов. Использование тайм-менеджмента может позволить работнику экономить до 50 % времени на выполнение запланированных работ, потратив при этом до 10 % времени на планирование рабочего дня, недели, месяца [1, 2]. Это принесет пользу и повысит прибыль всей компании, поскольку «эффективная компания начинается с эффективных сотрудников» [3].

Эффективность использования технологии тайм-менеджмента оценивается по различным критериям. В качестве одного из таких критериев можно использовать максимизацию условного дохода, который связан со скорейшим завершением всех запланированных работ.

В настоящей статье рассматривается задача построения оптимальных расписаний выполнения запланированных работ одним исполнителем. Критерием оптимальности расписания является минимизация суммарного (или среднего) взвешенного времени завершения множества работ, запланированных исполнителем на определенный период времени. Предполагается, что на этапе составления расписания для каждой запланированной работы известны нижняя и верхняя границы возможной продолжительности работы.

Перестановка  $\pi_e = (\pi_{e_1}, \pi_{e_2}, \dots, \pi_{e_p})$  выполнения работ в заданном интервале планирования определяется как конкатенация перестановок  $\pi_{e_k}$  выполнения работ, запланированных на  $k$ -й день. Перестановка  $\pi_{e_k}$  выполнения работ, запланированных на  $k$ -й день, может включать только те работы, которые поступили для выполнения на момент составления дневного расписания. Иными словами, перестановка  $\pi_{e_k}$  включает работы, поступившие в  $k$ -й день для последующего выполнения, а также работы, поступившие и не выполненные в предыдущие дни интервала планирования. В течение  $k$ -го дня работы выполняются исполнителем в соответствии с перестановкой  $\pi_k$  до тех пор, пока начало  $s_{k_r}$  выполнения очередной работы  $J_{k_r}$  согласно перестановке  $\pi_k = (J_{k_1}, J_{k_2}, \dots, J_{k_d})$  не выйдет за пределы рабочего времени  $k$ -го дня.

В качестве приближенного решения задачи построения оптимального расписания на  $k$ -й день используется перестановка  $\pi_k$  выполнения запланированных работ с наибольшим относительным полупериметром параллелепипеда оптимальности. Перестановка  $\pi_k$  строится на основе блочной структуры распределения работ. В статье приводится ряд утверждений, которые используются для разработки полиномиальных алгоритмов и компьютерных программ для нахождения перестановки  $\pi_{e_k}$ , а также представлены результаты вычислительного эксперимента, проведенного на персональном компьютере для построения тестовых расписаний.

**Обзор литературы и мотивация исследований.** Большинство людей, хотя и стремятся повысить эффективность своей деятельности, все же недостаточно внимания уделяют планированию рабочего времени, что приводит к снижению эффективности работы и, как следствие, к уменьшению доходов [3]. В последние три десятилетия тайм-менеджмент стал популярным направлением учебных курсов, пособий, тренингов и семинаров. Тайм-менеджменту посвяще-

но множество статей и книг, предлагающих практические рекомендации по планированию работ и оценке эффективности использования рабочего и личного времени.

В статье [3] отмечается, что некоторые люди стремятся выполнять несколько работ и решать несколько сложных задач на работе или дома одновременно. При этом каждый человек может сомневаться в том, что у него будет достаточно времени для завершения начатых и запланированных работ. В результате переживаний у людей возникают проблемы со сном, поскольку и ночью их не покидают мысли о незавершенных и невыполненных делах. После бессонной ночи человек просыпается с чувством вины, начинает очередной день так же, как и предыдущий, с выполнения работ, которые являются малозначимыми и несущественными. Такой порочный круг продолжается день за днем, месяц за месяцем.

В работах [3, 4] описывается ситуация, возникающая из-за привычки человека откладывать на потом важные и срочные дела, которые могут быть неприятными и непривычными, либо из-за его стремления выполнять идеально малозначимые и бесполезные работы. Вследствие неорганизованности и потери контроля над своим временем у человека накапливается усталость, что приводит к низкой производительности и неэффективности усилий, потраченных на малозначимые работы. В итоге беспокойство, тревога и стресс становятся постоянными спутниками человека. В тайм-менеджменте даются рекомендации, как научиться «управлять своим временем, вместо того чтобы позволить времени управлять собой» [4].

В статье [2] приведен список вопросов, на которые предлагается ответить тем, кто сомневается в полезности тайм-менеджмента для работы. Тратите ли вы много времени на совещания? Часто ли вашу работу прерывают телефонные звонки или неожиданные посетители? Работаете ли вы дольше ваших подчиненных? Часто ли вы берете работу на дом? Загружен ли ваш рабочий стол бумагами, ожидающими решений? Чувствуете ли вы, что вам приходится вникать в каждую деталь делегированной подчиненному работы потому, что он не может выполнить поручения правильно и в установленные сроки? Если бы вы завершали работу за семь часов вместо восьми, как обычно, смогли бы вы эффективно использовать освободившееся время? Если хотя бы на несколько из перечисленных вопросов получены положительные ответы, то рабочее время используется вами неэффективно.

В публикациях [1, 5–11] описаны результаты исследований по оценке влияния применения тайм-менеджмента на эффективность работников, успеваемость учеников старших классов и студентов колледжей и университетов. Была обнаружена корреляция между использованием тайм-менеджмента и исполнительностью респондентов, а также между использованием тайм-менеджмента и академической успеваемостью учеников и студентов. Так, в работах [6–8] отмечается, что успеваемость студентов главным образом обусловлена их умением правильно распоряжаться доступным временем. Недостаточно эффективное планирование времени уменьшает объем и снижает качество академических достижений, приводит к недостаточности времени для личных и социальных мероприятий, снижает удовлетворенность полученными результатами в образовании, препятствует развитию таких черт личности, как критическое мышление и способность принимать обоснованные решения. Между тем в статье [6] утверждается, что с повышением доли дистанционного образования значение тайм-менеджмента для эффективной учебы студентов будет возрастать.

В статье [9] отмечено, что показатель творческих способностей человека зависит от использования тайм-менеджмента, при этом познавательные способности человека не оказывают существенного влияния на эффективность его применения. Таким образом, тайм-менеджмент представляет собой технологию, которую практически любой индивидуум может использовать для повышения качества своих достижений и эффективности работы.

В статье [12] исследовалась устойчивость связи между применением технологии тайм-менеджмента и основными видами памяти (перспективной и ретроспективной). На основе полученных данных был сделан вывод о том, что технология тайм-менеджмента помогает людям даже с плохой памятью успешно выполнять поставленные перед ними задачи. Замечено также, что использование тайм-менеджмента со временем позволяет все более точно оценивать время, которое фактически требуется для выполнения той или иной работы.

В работах [10, 11, 13] обращается внимание на то, как по-разному люди следуют одним и тем же рекомендациям тайм-менеджмента. В [10] отмечено, что для успешного применения

тайм-менеджмента недостаточно формально ознакомиться с этой методикой, необходимо освоить ее применение на практике. В [11] показано, что разработка консультантом индивидуальных ежедневных планов с учетом личных особенностей человека является наиболее эффективной для повышения его производительности. Некоторые публикации по тайм-менеджменту могут вызвать у читателя беспокойство, неудовлетворенность собой и даже чувство вины, поскольку следовать на практике рекомендациям тайм-менеджмента, оказывается, достаточно сложно, что может привести человека к неуверенности в себе. Стресс, чувство вины и потеря контроля над своим временем могут повысить тревожность человека. В таком состоянии человеку трудно взяться за выполнение новых и важных для него работ. Это согласуется с замечаниями, приведенными в статьях [4, 11], о том, что самостоятельное составление человеком расписания выполнения запланированных работ может повлечь сомнения в правильности (оптимальности) построенного расписания. В результате может возникнуть дополнительная причина для беспокойства. В этой связи следует обратить внимание на публикации [2, 4], авторы которых предостерегают от механического, непродуманного использования рекомендаций тайм-менеджмента неподготовленными пользователями.

В статье [14] отмечается, что общее структурирование и упорядочение рабочего и личного времени на основе технологии тайм-менеджмента, как правило, уменьшает чувство беспокойства человека по поводу выполнения запланированных работ. Обнаружена отрицательная корреляция между уровнем тревожности респондентов и применением тайм-менеджмента. Ключевым компонентом, позволяющим повысить уверенность при организации рабочего и личного времени, является работа с календарем. Большинство людей плохо используют как бумажные, так и электронные календари. Описанный в работе [15] эксперимент показал, что менее 15 % респондентов записывали в календаре три или более работы, запланированные на день. Установлено, что успешное применение тайм-менеджмента повышает мотивацию человека использовать эту технологию в дальнейшем.

Тайм-менеджмент можно применять как средство эффективного распределения времени с целью своевременного выполнения запланированных работ [4, 10]. Тайм-менеджмент включает: решение о том, какие работы следует выбрать для выполнения (правило 1); расстановку приоритетов работ как по важности, так и по срочности и последующее упорядочение выбранных работ в соответствии с приоритетами (правило 2); концентрацию внимания на наиболее важных работах и выполнение их в периоды наибольшей активности человека (правило 3); эффективное управление возможными обстоятельствами, отвлекающими от выполнения начатой работы (правило 4).

Относительно правила 4 отмечается, что следует избегать прерываний выполнения начатой работы (незапланированных совещаний, телефонных разговоров, приема посетителей), поскольку помимо прямых потерь времени возникает необходимость тратить время на повторную подготовку к выполнению прерванной работы [2, 3].

Рассмотрим правила 1 и 2. Для рабочего времени общий список планируемых к выполнению работ составляется достаточно просто (в отличие от процесса определения общих жизненных целей человека на продолжительный период времени). Поэтому при составлении расписания на небольшой интервал (день, неделю и даже месяц) вначале следует рассмотреть весь список предполагаемых работ и выбрать из этого списка наиболее важные работы, которые планируется выполнить именно в данный период времени. Далее регулярно (еженедельно, а по возможности ежедневно) следует пересматривать список запланированных работ, поскольку приоритеты работ могут с течением времени меняться [4].

Во многих публикациях по тайм-менеджменту указывается на необходимость упорядочения выбранных работ. В статье [4] обращается внимание на то, что упорядочение работы особенно полезно в случаях, когда имеется эффективный алгоритм оптимального упорядочения или у пользователя есть возможность делегировать этот процесс. В противном случае упорядочение выбранных работ само по себе может стать для исполнителя непростой работой, требующей и дополнительного времени, и определенных навыков. Как правило, расстановку приоритетов для выполнения работ, запланированных на определенный интервал, и определение порядка невыполненных работ приходится выполнять многократно в течение интервала планирования. Поэтому так важно иметь быстро реализуемое средство для определения оптимального порядка

для выполнения запланированных работ с целью оперативного и эффективного управления своим временем.

Приведенный обзор публикаций [1–15] позволяет сделать вывод о том, что тайм-менеджмент представляет собой средство, помогающее пользователю решать различные вопросы, связанные с оптимальным распределением своего времени, с целью выполнения большего числа наиболее полезных работ в оптимальные для этих работ сроки. Для более эффективного применения технологии тайм-менеджмента желательно автоматизировать процесс составления расписаний выполнения запланированных работ для того, чтобы пользователь мог достаточно оперативно получать рекомендации по порядку выполнения текущих и новых для него работ. Заканчивая очередную работу, пользователь должен иметь возможность быстро определить, какую именно работу из множества запланированных, но еще не выполненных работ следует начинать в данный момент времени.

Далее описываются алгоритмы, предназначенные для составления близких к оптимальным расписаний при выполнении множества запланированных работ. Эффективность алгоритмов и разработанных программ продемонстрирована на случайно сгенерированных примерах.

**Постановка задачи оптимального упорядочения.** Из публикаций [1–15] следует важность разработки алгоритмов для решения задачи составления оптимальных расписаний выполнения работ одним исполнителем. Такая задача составления расписаний имеет ряд особенностей, первая из которых состоит в неопределенности длительностей выполнения запланированных работ на момент составления расписания их выполнения. Действительно, для человека в отличие от станка, робота или машины довольно сложно заранее определить точное время, которое фактически потребуется для выполнения той или иной работы. Между тем можно заранее определить вполне реалистичную оценку промежутка времени, который будет заведомо содержать длительность выполнения работы исполнителем, т. е. можно заранее определить верхние и нижние границы возможной длительности выполнения каждой работы из общего списка запланированных работ.

Вторая особенность определяется возможностью для исполнителя выбирать из списка предполагаемых работ множество тех работ, выполнение которых следует запланировать в течение определенного интервала времени. Согласно одному из принципов Парето 20 % выполняемых исполнителем работ приносят ему 80 % прибыли, поэтому вполне оправданным представляется подход, позволяющий исполнителю перед составлением расписания на определенный период времени выбирать, какие именно работы из списка возможных работ следует выполнить в течение заданного интервала планирования. Вместе с тем работы могут иметь различную важность для исполнителя. Важность работы можно характеризовать положительным числом, которое будем называть весом. Вес работы может быть связан с условным доходом, который получит исполнитель в результате ее выполнения. Целью планирования работ для исполнителя будем считать максимизацию его условного дохода от выполнения запланированных работ. Достаточно правдоподобным выглядит предположение о том, что доход человека связан с моментами завершения запланированных работ (с учетом их весов), причем доход от выполненной исполнителем конкретной работы тем больше, чем раньше он выполнит эту работу.

Таким образом, получаем задачу, в которой необходимо составить расписание выполнения одним исполнителем множества выбранных работ с неопределенными длительностями, которое является оптимальным в смысле максимизации дохода от реализации расписания выполнения всех запланированных работ. Такие задачи рассматриваются в рамках теории расписаний, что позволяет использовать принятую в теории расписаний терминологию для описания алгоритмов и полученных результатов.

Следует отметить, что классические алгоритмы теории расписаний не учитывают особенности, которые отличают множество работ, выполняемых человеком.

Рассмотрим задачу составления расписаний для одного обслуживающего прибора с неопределенными числовыми параметрами и критерием минимизации суммы взвешенных моментов завершения выполнения всех запланированных работ. В соответствии с трехпозиционной формой  $\alpha/\beta/\gamma$  классификации задач теории расписаний [16–19] такую задачу будем обозначать  $1|p_i^L \leq p_i \leq p_i^U|\sum_i w_i C_i$ . В этой форме обозначения позиция  $\alpha$  характеризует число обслужива-

ющих приборов (в рассматриваемом случае это один исполнитель) и тип системы обслуживания. Позиция  $\beta$  определяет характеристики обслуживаемых требований (т. е. работ одного исполнителя). Позиция  $\gamma$  определяет одну или несколько целевых функций, задающих оптимальность искомого расписания выполнения всех запланированных работ. Отметим, что в большинстве задач теории расписаний рассматривается критерий минимизации значения целевой функции на множестве допустимых расписаний.

В задаче  $1 \mid p_i^L \leq p_i \leq p_i^U \mid \sum w_i C_i$  требуется построить оптимальное расписание выполнения одним исполнителем множества работ  $G = \{J_1, J_2, \dots, J_n\}$  с заданными весами  $w_i > 0$ ,  $J_i \in G$ . В качестве критерия оптимальности используется минимизация суммы  $\sum_{i=1}^n w_i C_i$  взвешенных моментов  $C_i$  завершения выполнения всех работ  $J_i \in G$ . Поскольку число работ  $n$  зафиксировано на момент составления расписания, то минимизация суммы  $\sum_{i=1}^n w_i C_i$  взвешенных моментов  $C_i$  завершения выполнения всех работ  $J_i \in G$  эквивалентна минимизации среднего взвешенного времени  $\sum_{i=1}^n w_i C_i / n$  завершения выполнения каждой работы  $J_i \in G$ .

Покажем, что задачу минимизации целевой функции  $\sum_{i=1}^n w_i C_i$  можно интерпретировать как задачу максимизации суммарной прибыли исполнителя. Пусть выполнение работы  $J_i \in G$  приносит исполнителю прибыль, оцениваемую величиной  $H - C_i$ , где  $H$  – достаточно большое число. Чем раньше закончена работа, тем больше прибыль исполнителя. Задача минимизации величины  $\sum_{i=1}^n w_i C_i$  равносильна задаче максимизации суммарной прибыли  $\sum_{i=1}^n (H - w_i C_i) = nH - \sum_{i=1}^n w_i C_i$  исполнителя, поскольку произведение  $nH$  не зависит от порядка выполнения работ множества  $G = \{J_1, J_2, \dots, J_n\}$ .

В неопределенной задаче  $1 \mid p_i^L \leq p_i \leq p_i^U \mid \sum w_i C_i$  предполагается, что на момент построения расписания известны только нижняя  $p_i^L > 0$  и верхняя  $p_i^U \geq p_i^L$  границы возможной длительности выполнения работы  $J_i \in G$ . Работа  $J_i \in G$  должна быть выполнена без прерываний процесса выполнения за время  $p_i \in [p_i^L, p_i^U]$ , которое становится известным в момент завершения выполнения этой работы.

Если границы  $p_i^L$  и  $p_i^U$  для каждой работы  $J_i \in G$  совпадают, то неопределенная задача  $1 \mid p_i^L \leq p_i \leq p_i^U \mid \sum w_i C_i$  превращается в детерминированную задачу  $1 \mid \sum w_i C_i$ , которая решается за время  $O(n \log n)$  [16].

Пусть  $T = \{p : p \in R_+^n, p_i^L \leq p_i \leq p_i^U, i \in \{1, 2, \dots, n\}\}$  обозначает множество всех векторов  $p = (p_1, p_2, \dots, p_n)$  возможных длительностей выполнения работ из заданного множества  $G = \{J_1, J_2, \dots, J_n\}$ , а  $R_+^n$  – множество векторов размерности  $n$  с неотрицательными действительными компонентами. Вектор  $p \in T$  длительностей работ принято называть сценарием.

Для неопределенной задачи  $1 \mid p_i^L \leq p_i \leq p_i^U \mid \sum w_i C_i$ , вообще говоря, не существует такой перестановки из множества  $S = \{\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_n\}$  всех  $n!$  перестановок выполнения работ множества  $G$ , которая оставалась бы оптимальной при всех сценариях из множества  $T$ .

Для оценки устойчивости оптимальной для сценария  $p = (p_1, p_2, \dots, p_n)$  перестановки  $\pi_k \in S$  выполнения работ множества  $G$  к вариациям  $T$  длительностей выполнения этих работ предлагается использовать относительный полупериметр параллелепипеда оптимальности

перестановки  $\pi_k \in S$ . В статьях [17, 18] были исследованы свойства параллелепипеда оптимальности.

**Блоки работ и параллелепипед оптимальности для перестановки  $\pi_k \in S$  их выполнения.** Детерминированную задачу  $1 | \sum w_i C_i$  с фиксированным сценарием  $p \in T$  будем обозначать  $1 | p | \sum w_i C_i$ . Пусть  $M = (k_1, k_2, \dots, k_{|M|})$ ,  $k_1 < k_2 < \dots < k_{|M|}$ , обозначает упорядоченное подмножество множества  $\{1, 2, \dots, n\}$ .

Определение 1. Максимальный (по включению) параллелепипед

$$OB(\pi_k, T) = [l_{k_1}^*, u_{k_1}^*] \times [l_{k_2}^*, u_{k_2}^*] \times \dots \times [l_{k_{|M|}}^*, u_{k_{|M|}}^*] \subseteq T$$

называют *параллелепипедом оптимальности* для перестановки  $\pi_k = (J_{k_1}, J_{k_2}, \dots, J_{k_n}) \in S$  выполнения работ  $G = \{J_1, J_2, \dots, J_n\}$ , если для любого сценария  $p = (p_1, p_2, \dots, p_n) \in T$ , при котором перестановка  $\pi_k$  является оптимальной для задачи  $1 | p | \sum w_i C_i$ , эта перестановка остается оптимальной и для задачи  $1 | p' | \sum w_i C_i$  со сценарием

$$p' \in [p_1, p_1] \times [p_2, p_2] \times \dots \times [p_{i_g-1}, p_{i_g-1}] \times [l_{i_g}^*, u_{i_g}^*] \times [p_{i_g+1}, p_{i_g+1}] \times \dots \times [p_n, p_n]$$

для любого индекса  $i_g \in M = (k_1, k_2, \dots, k_{|M|})$ . Если не существует сценария  $p \in T$ , при котором перестановка  $\pi_k$  является оптимальной для задачи  $1 | p | \sum w_i C_i$ , то полагаем  $OB(\pi_k, T) = \emptyset$ .

Вариация  $p'$  длительности  $p_{i_g}$  выполнения работы  $J_{i_g} \in G$  в пределах указанного в определении 1 отрезка  $[l_{i_g}^*, u_{i_g}^*]$  не нарушает оптимальности перестановки  $\pi_k \in S$ , если имеет место включение  $p_i \in [l_{i_g}^*, u_{i_g}^*]$ . Непустой отрезок  $[l_{i_g}^*, u_{i_g}^*]$ ,  $l_{i_g}^* < u_{i_g}^*$ , будем называть *отрезком оптимальности работы  $J_{i_g}$  в перестановке  $\pi_k \in S$* .

В качестве приближенного решения задачи  $1 | p_i^L \leq p_i \leq p_i^U | \sum w_i C_i$  будем использовать перестановку  $\pi_k$  с максимальным значением относительного полупериметра  $PerOB(\pi_k)$ , равного сумме величин  $(u_{i_g}^* - l_{i_g}^*) / (p_i^U - p_i^L)$  для всех работ  $G$ . Перестановку  $\pi \in S$  с максимальным значением  $PerOB(\pi_k)$  будем называть *эффективной* для задачи  $1 | p_i^L \leq p_i \leq p_i^U | \sum w_i C_i$ .

Определение 2. Блоком называют максимальное подмножество  $B_r = \{J_{r_1}, J_{r_2}, \dots, J_{r_{|B_r|}}\} \subseteq G$

множества заданных работ  $G = \{J_1, J_2, \dots, J_n\}$ , для которых выполняется соотношение  $\min_{J_{r_i} \in B_r} \left\{ \frac{p_{r_i}^U}{w_{r_i}} \right\} \geq \max_{J_{r_i} \in B_r} \left\{ \frac{r_i}{w_{r_i}} \right\}$ . Отрезок  $[b_r^L, b_r^U]$ , для которого выполняются равенства  $b_r^L = \max_{J_{r_i} \in B_r} \left\{ \frac{p_{r_i}^L}{w_{r_i}} \right\}$  и  $b_r^U = \min_{J_{r_i} \in B_r} \left\{ \frac{p_{r_i}^U}{w_{r_i}} \right\}$ , называют ядром блока  $B_r$ .

Работы, принадлежащие только одному блоку, будем называть *фиксированными* (в блоках), а принадлежащие нескольким блокам – *нефиксированными*. Блоки, содержащие только нефиксированные работы, будем называть *виртуальными*.

**Алгоритмы приближенного решения задачи  $1 | p_i^L \leq p_i \leq p_i^U | \sum w_i C_i$ .** В статье [17] разработан алгоритм сложности  $O(n \log n)$  нахождения всех блоков  $B$  для задачи  $1 | p_i^L \leq p_i \leq p_i^U | \sum w_i C_i$ . Будем полагать, что все блоки  $\{B_1, B_2, \dots, B_m\} = B$  пронумерованы в порядке возрастания как левых, так и правых границ их ядер. В статье [17] доказана следующая теорема.

**Теорема 1.** Если существуют два смежных блока  $B_r$  и  $B_{r+1}$  без общих работ,  $B_r \cap B_{r+1} = \emptyset$ , то задачу  $1 | p_i^L \leq p_i \leq p_i^U | \sum w_i C_i$  можно декомпозировать на две подзадачи с множествами работ  $P_1$  и  $P_2$ ,  $G = P_1 \cup P_2$ , где  $P_1$  – множество работ из блоков  $B_1, B_2, \dots, B_r$ , а  $P_2$  – множество работ из блоков  $B_{r+1}, B_{i+2}, \dots, B_m$ . Полученные параллелепипеды оптимальности  $OB(\pi_k(1), T_1)$  и  $OB(\pi_k(2), T_2)$ ,  $T = T_1 \cup T_2$ , для таких задач определяют параллелепипед оптимальности  $OB(\pi_k, T) = OB(\pi_k(1), T_1) \times OB(\pi_k(2), T_2)$  для задачи  $1 | p_i^L \leq p_i \leq p_i^U | \sum w_i C_i$ .

Поскольку декомпозиция задачи на подзадачи возможна при наличии смежных блоков без общих работ, то справедливо неравенство  $\min_{J_i \in B_{r+1}} \left\{ \frac{p_i^L}{w_i} \right\} \geq \max_{J_i \in B_r} \left\{ \frac{p_i^U}{w_i} \right\}$  и для декомпозиции задачи

на подзадачи достаточно в перестановке  $\pi_l = (J_{l_1}, J_{l_2}, \dots, J_{l_n})$ , в которой работы упорядочены в порядке неубывания величины  $\frac{p_i^L}{w_i}$ , найти работы  $J_{l_k}$ , удовлетворяющие условию  $\frac{p_{l_k}^L}{w_{l_k}} \geq \max_{1 \leq j \leq k-1} \left\{ \frac{p_{l_j}^U}{w_{l_j}} \right\}$ . В случае существования такой работы  $J_{l_k}$  задачу  $1 | p_i^L \leq p_i \leq p_i^U | \sum w_i C_i$

можно декомпозировать на две подзадачи с множествами работ  $P_1 = \{J_{l_1}, J_{l_2}, \dots, J_{l_{k-1}}\}$  и  $P_2 = \{J_{l_k}, J_{l_{k+1}}, \dots, J_{l_n}\}$ , так как  $\frac{p_{l_k}^L}{w_{l_k}} = \min_{J_i \in B_{r+1}} \left\{ \frac{p_i^L}{w_i} \right\} \geq \max_{J_i \in B_r} \left\{ \frac{p_i^U}{w_i} \right\} = \max_{0 < j < k} \left\{ \frac{p_{l_j}^U}{w_{l_j}} \right\}$ . Поскольку

$\max_{1 \leq j \leq k-1} \left\{ \frac{p_{l_j}^U}{w_{l_j}} \right\} = \max_{1 \leq j \leq k-2} \left\{ \max \left\{ \frac{p_{l_j}^U}{w_{l_j}}, \frac{p_{l_{j+1}}^L}{w_{l_{j+1}}} \right\} \right\}$ , то для декомпозиции задачи  $1 | p_i^L \leq p_i \leq p_i^U | \sum w_i C_i$ ,

в которой работы упорядочены в порядке неубывания величины  $\frac{p_i^L}{w_i}$ , достаточно выполнить  $O(n)$  элементарных операций.

В статье [17] разработан алгоритм сложности  $O(n \log n)$  декомпозиции задачи  $1 | p_i^L \leq p_i \leq p_i^U | \sum w_i C_i$  на подзадачи и установлено, что если задача  $1 | p_i^L \leq p_i \leq p_i^U | \sum w_i C_i$  содержит только один блок, то параллелепипед  $OB(\pi_k, T)$  с максимальным значением величины  $PerOB(\pi_k)$  определяется первой, второй, предпоследней и последней работами в перестановке  $\pi_k = (J_{k_1}, J_{k_2}, \dots, J_{k_n}) \in S$ , которые можно выбрать на основе соотношений

$$\left( X_1 - \frac{p_{k_1}^L}{w_{k_1}} \right) / \left( \frac{p_{k_1}^U}{w_{k_1}} - \frac{p_{k_1}^L}{w_{k_1}} \right) = \max_{G^*} \left\{ \left( X_1 - \frac{p_i^L}{w_i} \right) / \left( \frac{p_i^U}{w_i} - \frac{p_i^L}{w_i} \right) \right\}, \quad \frac{p_{k_2}^L}{w_{k_2}} = \max_{G^*} \left\{ \frac{p_i^L}{w_i} \right\},$$

$$\frac{p_{k_{n-1}}^U}{w_{k_{n-1}}} = \min_{G^*} \left\{ \frac{p_i^U}{w_i} \right\}, \quad \left( \frac{p_{k_n}^U}{w_{k_n}} - X \right) / \left( \frac{p_{k_n}^U}{w_{k_n}} - \frac{p_{k_n}^L}{w_{k_n}} \right) = \max_{G^*} \left\{ \left( \frac{p_i^U}{w_i} - X \right) / \left( \frac{p_i^U}{w_i} - \frac{p_i^L}{w_i} \right) \right\},$$

где  $G^*$  обозначает множество работ, не выбранных в позиции  $q \in \{1, 2, n-1, n\}$ ,  $X_1 = \max_{G^*} \left\{ \frac{p_i^L}{w_i} \right\}$ ,

$$X_2 = \min_{G^*} \left\{ \frac{p_i^U}{w_i} \right\}.$$

В статье [18] доказана следующая теорема.

**Теорема 2.** Если  $B_1 = G$ , то перестановку  $\pi_k \in S$  с максимальным значением  $PerOB(\pi_k)$  для задачи  $1 | p_i^L \leq p_i \leq p_i^U | \sum w_i C_i$  можно построить за время  $O(n)$ .

Если каждая нефиксированная работа из множества  $G$  назначена в один из блоков подмножества блоков, которым она принадлежит, то полученная на основе теоремы 2 перестановка  $\pi_k$  с максимальным значением  $PerOB(\pi_k)$  может быть построена за время  $O(n \log n)$ .

При построении эффективной перестановки для задачи  $1|p_i^L \leq p_i \leq p_i^U|\sum w_i C_i$ , если условия теорем 1 и 2 не выполняются, используется алгоритм динамического программирования (ДМ).

Алгоритм ДМ строит дерево решений высотой  $m = |B|$ , в котором ранг вершины соответствует номеру анализируемого блока работ. На каждой итерации  $t$  алгоритма ДМ для каждой висячей вершины  $\pi^j(B_r, G^j) \in V$ , выбранной из множества построенных вершин ( $j$  – номер вершины в дереве решений,  $B_r$  – номер блока,  $G^j$  – множество нефиксированных работ, принадлежащих блоку  $B_r$  в вершине  $\pi^j(B_r, G^j) \in V$ ), строим множество всех потомков следующим образом. Пусть  $B_{r+1}^t$  обозначает множество всех работ, фиксированных в блоке  $B_{r+1}$ , а также нефиксированных работ блока  $B_{r+1}$ , не распределенных в свои блоки на предыдущих итерациях алгоритма ДМ. Рассмотрим множество  $G[B_{r+1}^t] \subseteq B_{r+1}^t$ , состоящее из нефиксированных работ, принадлежащих блоку  $B_{r+1}$ . Поскольку работы множества  $G[B_{r+1}^t]$  на последующих итерациях могут быть распределены как в блок  $B_{r+1}$ , так и в один из последующих блоков, то для этих работ строится множество всех подмножеств  $P(G[B_{r+1}^t]) = \{\emptyset, \dots, G[B_{r+1}^t]\}$ , которые порождают  $2^{|G[B_{r+1}^t]|}$  вершин дерева решений (потомков вершины  $\pi^j(B_r, G^j) \in V$ ).

Пусть  $G_i$ ,  $|G_i| = m_i$ , обозначает множество нефиксированных работ, распределенных в блок  $B_{r+1}$  в вершине  $\pi^i(B_{r+1}, G^i)$ ,  $G^i \in P(G[B_{r+1}^t])$ , дерева решений, а также фиксированных работ в соответствующем блоке  $B_{r+1}$ . В каждой построенной вершине  $\pi^i(B_{r+1}, G^i)$ ,  $G^i \in P(G[B_{r+1}^t])$ , дерева решений упорядочим работы множества  $G_i$  и вычислим значение штрафа  $F(\pi^i)$ . Для множества упорядоченных работ  $G_i' = (J_{i_1}, J_{i_2}, \dots, J_{i_{m_i-1}}, J_{i_{m_i}})$  в вершине  $\pi^i(B_{r+1}, G^i)$  штраф  $F(\pi^i)$  вычисляется по формулам

$$F(\pi^i) = F(\pi^j) + \Delta, \quad F(\emptyset) = 0,$$

$$\Delta = \sum_{k=1}^{m_i} \left( 1 - \frac{u_{i_k}^* - l_{i_k}^*}{p^U - p^L} \right) + \max \left\{ 0, \left( \frac{p^U}{w_{j_{m_j}}} - \max \left\{ \frac{p^L}{w_{i_1}}, \frac{p^L}{w_{j_{m_j}}}, \frac{p^U}{w_{j_{m_j-1}}} \right\} \right) \right\} / \left( \frac{p^U}{w_{j_{m_j}}} - \frac{p^L}{w_{j_{m_j}}} \right).$$

В статье [17] доказана следующая теорема.

**Теорема 3.** Если работа  $J_i$  принадлежит хотя бы двум блокам,  $J_i \in B_r$ ,  $J_i \in B_{r+1}$ , и в эффективной перестановке  $\pi_k$  работа  $J_i$  следует за всеми работами (предшествует хотя бы одной работе)  $J_j$ ,  $J_j \in B_r$ ,  $J_j \notin B_{r+1}$ , то эффективную перестановку  $\pi_k$  можно получить в результате включения работы  $J_i$  в блок  $B_{r+s}$ ,  $s \geq 1$  (в блок  $B_{r-s}$ ,  $s \geq 0$ , соответственно).

Из теоремы 3 следует, что при упорядочении работ внутри блока  $B_{r+1}$  в вершине  $\pi^i(B_{r+1}, G^i)$  дерева решений достаточно рассмотреть случаи, в которых последняя работа  $J_{i_{m_i}}$  блока  $B_{r+1}$  удовлетворяет условиям  $J_{i_{m_i}} \in B_{r+1}$  и  $J_{i_{m_i}} \notin B_{r+2}$ . При этом упорядочение работ производится аналогично решению задачи  $1|p_i^L \leq p_i \leq p_i^U|\sum w_i C_i$  с одним блоком  $B_1 = G$ , которое описано в статье [17] и имеет сложность  $O(|B_r|)$ . Для этого достаточно выбрать работы в первую, вторую, предпоследнюю ( $m_i - 1$ ) и последнюю ( $m_i$ ) позиции перестановки работ из блока  $B_{r+1}$  на основе соотношений

$$\frac{p_i^L}{w_i} = \max_{G_i^*} \left\{ \max \left\{ 0, \left( X_1 - \max \left\{ \frac{p_{j_{m_j}}^U}{w_{j_{m_j}}}, \frac{p_i^L}{w_i} \right\} \right) / \left( \frac{p_i^U}{w_i} - \frac{p_i^L}{w_i} \right) \right\} - \right. \\ \left. \max \left\{ 0, \frac{p_{j_{m_j}}^U}{w_{j_{m_j}}} - \max \left\{ \frac{p_i^L}{w_i}, \frac{p_{j_{m_j}}^L}{w_{j_{m_j}}}, \frac{p_{j_{m_j-1}}^U}{w_{j_{m_j-1}}} \right\} \right\} / \left( \frac{p_{j_{m_j}}^U}{w_{j_{m_j}}} - \frac{p_{j_{m_j}}^L}{w_{j_{m_j}}} \right) \right\}, \\ \frac{p_{i_2}^L}{w_{i_2}} = \max_{G_i^*} \left\{ \frac{p_i^L}{w_i} \right\}, \quad \frac{p_{i_{m-1}}^U}{w_{i_{m-1}}} = \min_{G_i^*} \left\{ \frac{p_i^U}{w_i} \right\}, \\ \left( \frac{p_{i_{m_i}}^U}{w_{i_{m_i}}} - X_2 \right) / \left( \frac{p_{i_{m_i}}^U}{w_{i_{m_i}}} - \frac{p_{i_{m_i}}^L}{w_{i_{m_i}}} \right) = \max_{\substack{G^*, J \\ \in B, J \notin B}} \left\{ \left( \frac{p_i^U}{w_i} - X_2 \right) / \left( \frac{p_i^U}{w_i} - \frac{p_i^L}{w_i} \right) \right\},$$

где  $G_i^*$  обозначает множество работ, не выбранных в позиции  $q \in \{1, 2, m_i - 1, m_i\}$ ,

$$X_1 = \max_{G_i^*} \left\{ \frac{p_i^L}{w_i} \right\}, \quad X_2 = \min_{G_i^*} \left\{ \frac{p_i^U}{w_i} \right\}.$$

Вершины  $\pi^j(B_r, G^j)$  дерева решений с одинаковыми номерами блока  $B_r$  и наборами фиксированных работ в блоке  $B_r$  и предыдущих блоках, для которых выполняется неравенство

$$\frac{p_{j_{m_j}}^U}{w_{j_{m_j}}} \leq \min_{J_i \in B_{r+1}} \left\{ \frac{p_i^L}{w_i} \right\}, \text{ определяют одно и то же состояние в пространстве решений задачи} \\ 1) \quad p_i^L \leq p_i \leq p_i^U \mid \sum w_i C_i.$$

Из множества висячих вершин построенного дерева решений для дальнейшего ветвления выбирается вершина  $\pi^i(B_{r+1}, G^i)$  с наименьшим штрафом  $F(\pi^i)$ . Если таких вершин окажется несколько, то выбирается висячая вершина  $\pi^i(B_{r+1}, G^i)$  с наименьшим штрафом  $F(\pi^i)$  из построенного дерева решений с наибольшим номером  $r+1$  блока  $B_{r+1}$ .

Определим условия окончания работы алгоритма ДМ: должна быть построена перестановка, содержащая все работы множества  $G$ ; для построенной перестановки работ множества  $G$  должен быть получен минимальный штраф  $F(\pi^i)$  среди всех штрафов для нерассмотренных (висячих) вершин построенного дерева решений. Если эти условия выполнены, то следует восстановить эффективную перестановку обратным ходом по построенному дереву решений.

**План вычислительного эксперимента.** Был проведен вычислительный эксперимент на персональном компьютере по оценке эффективности разработанных алгоритмов для исполнителя, использующего технологию тайм-менеджмента в течение месяца. В эксперименте оценивался 30-дневный период составления расписаний на каждый день. Предполагалось, что каждый день поступает 10 новых работ для последующего выполнения исполнителем.

Для 10 работ из множества  $G_1 = \{J_1, J_2, \dots, J_{10}\}$ , поступивших для выполнения в первый день, строилась эффективная перестановка  $\pi_k = (J_{k_1}, J_{k_2}, \dots, J_{k_{10}})$  выполнения работ из этого множества. Предполагалось, что для выполнения запланированных на один день работ исполнитель располагал не более чем 800 единицами времени в течение каждого дня. Все расчеты проводились в целых числах указанных единиц времени.

В течение первого дня работы из множества  $G_1 = \{J_1, J_2, \dots, J_{10}\}$  выполнялись исполнителем в соответствии с расписанием (перестановкой  $\pi_k$  для 10 поступивших для выполнения работ) до тех пор, пока начало  $s_{k_r}$  выполнения очередной работы  $J_{k_r}$  в перестановке  $\pi_k = (J_{k_1}, J_{k_2}, \dots, J_{k_{10}})$  не выходило за пределы рабочего времени первого дня, т. е. пока выполнялось неравенство  $s_{k_r} < 800$ .

Все работы подмножества  $G(1)$  множества  $G_1 = \{J_1, J_2, \dots, J_{10}\}$ , которые не были выполнены в первый день, добавлялись к множеству 10 работ  $G_2 = \{J_{11}, J_{12}, \dots, J_{20}\}$ , поступивших для выполнения во второй день. К началу второго дня строилась эффективная перестановка  $\pi_h = (J_{h_1}, J_{h_2}, \dots, J_{h_{10+G(1)}})$  выполнения всех работ из множества  $G_2 \cup G(1)$ . В течение второго дня работы множества  $G_2 \cup G(1)$  выполнялись исполнителем до тех пор, пока начало  $s_{h_u}$  выполнения очередной работы  $J_{h_u}$  в перестановке  $\pi_h = (J_{h_1}, J_{h_2}, \dots, J_{h_{10+G(1)}})$  не выходило за пределы рабочего времени второго дня, т. е.  $s_{h_u} < 800$ .

Все работы подмножества  $G(2)$  множества работ  $G_2 \cup G(1)$ , не выполненные во второй день, добавлялись к множеству 10 работ  $G_3 = \{J_{21}, J_{22}, \dots, J_{30}\}$ , поступивших для выполнения в третий день. К началу третьего дня строилась эффективная перестановка  $\pi_t = (J_{t_1}, J_{t_2}, \dots, J_{t_{10+G(2)}})$  выполнения работ из множества  $G_3 \cup G(2)$ . В течение третьего дня работы множества  $G_3 \cup G(2)$  выполнялись исполнителем до тех пор, пока начало  $s_t$  выполнения очередной работы  $J_{t_v}$  в перестановке  $\pi_t = (J_{t_1}, J_{t_2}, \dots, J_{t_{10+G(2)}})$  не выходило за пределы рабочего времени третьего дня, т. е.  $s_{t_v} < 800$ .

Описанный выше процесс выполнения работ исполнителем продолжался аналогично вплоть до 30-го дня включительно. Начиная с 31-го дня новые работы для исполнителя не поступали. В последующие после 30-го числа дни построение эффективных перестановок для выполнения исполнителем производилось только для подмножества ранее поступивших для выполнения работ, которые не были выполнены исполнителем в течение предыдущих 30 дней. Такое изменение регламента поступления новых работ для исполнителя в 31-й и, возможно, в последующие дни было обусловлено необходимостью сравнения эффективности разработанных алгоритмов с другими известными алгоритмами для того, чтобы данное сравнение значений целевой функции  $\sum w_i C_i / n$  выполнялось на одном и том же множестве и при одном и том же значении  $n$  выполненных исполнителем работ. Отметим, что и при реальном планировании работ можно предполагать, что все запланированные для исполнителя работы должны быть в конечном итоге полностью выполнены. К началу последнего дня интервала планирования строилась эффективная перестановка  $\pi_p = (J_{p_1}, J_{p_2}, \dots, J_{p_q})$ .

В проведенном на персональном компьютере вычислительном эксперименте из частичных перестановок  $\pi_k = (J_{k_1}, J_{k_2}, \dots, J_{k_r}, \dots, J_{k_{10}})$ ,  $\pi_h = (J_{h_1}, J_{h_2}, \dots, J_{h_u}, \dots, J_{h_{10+G(1)}})$ ,  $\pi_t = (J_{t_1}, J_{t_2}, \dots, J_{t_v}, \dots, J_{t_{10+G(2)}})$ , ...,  $\pi_p = (J_{p_1}, J_{p_2}, \dots, J_{p_q})$  выполнения работ в каждый день из интервала планирования строилась перестановка  $\pi_e = (J_{k_1}, J_{k_2}, \dots, J_{k_r}, J_{h_1}, J_{h_2}, \dots, J_{h_u}, J_{t_1}, J_{t_2}, \dots, J_{t_v}, \dots, J_{p_1}, J_{p_2}, \dots, J_{p_q})$  выполнения исполнителем всех работ в течение всех дней рассматриваемого интервала планирования. Аналогично из частичных перестановок выполнения работ в течение дня строились перестановки  $\pi_{opt}$  и  $\pi_{mid-p}$ .

Перестановка  $\pi_{opt}$  строилась из частичных перестановок работ, которые являются оптимальными для фактических длительностей  $p^* = (p_1^*, p_2^*, \dots, p_n^*)$  выполнения работ. Напомним, что все фактические длительности выполнения работ становятся известными только после завершения выполнения всех работ множества  $G$ .

Перестановка  $\pi_{mid-p}$  строилась из частичных перестановок работ, оптимальных для соответствующей детерминированной задачи  $1|p|\sum w_i C_i$ , с фиксированными средними значениями  $p_i = 1/2(p_i^U + p_i^L)$  заданных интервалов длительностей выполнения работ.

Цель вычислительного эксперимента состояла в определении отклонения  $\gamma = [(\Phi - \Phi^*) / \Phi^*] \cdot 100\%$  значения целевой функции  $\Phi = \sum_{i=1}^n w_i C_i^0$ , полученного для перестановки  $\pi_e$  выполнения исполнителем запланированных работ, от значения целевой функции  $\Phi^* = \sum_{i=1}^n w_i C_i^*$ , полученного для перестановки  $\pi_{opt}$ . Кроме того, определялось отклонение  $\gamma_{mid-p} = [(\Phi^{mid-p} - \Phi^*) / \Phi^*] \cdot 100\%$  значения целевой функции  $\Phi^{mid-p}$ , полученного для перестановки  $\pi_{mid-p}$ , от значения целевой функции  $\Phi^*$ , полученного для перестановки  $\pi_{opt}$ . По значениям  $\Phi$  и  $\Phi^{mid-p}$  оценивалось соотношение  $\Phi^{mid-p} / \Phi$ , показывающее преимущества разработанных алгоритмов по сравнению с известными алгоритмами [19].

Вторая часть эксперимента проводилась по тому же плану, что и первая часть, с той лишь разницей, что ежедневно поступало для выполнения 20 новых работ вместо 10 (как в первой части эксперимента), причем с меньшими отрезками возможных длительностей выполнения.

При проведении вычислительного эксперимента были выделены случаи, когда предложенные в настоящей статье алгоритмы оказываются более эффективными по сравнению с известными алгоритмами [18, 19], разработанными для приближенного решения задачи  $1|p_i^L \leq p_i \leq p_i^U | \sum w_i C_i$ .

**Результаты экспериментальных исследований.** В вычислительном эксперименте были сгенерированы и решены серии примеров с единственным блоком работ, а также серии примеров, содержащих случайное число  $k$  нефиксированных работ,  $(n-k)$  фиксированных работ и случайное количество блоков работ. Веса работ выбирались равномерно из диапазона [1, 10]. Фиксированные работы распределялись примерно поровну между  $m$  блоками работ.

Отрезки допустимых длительностей выполнения работ  $[p_i^L, p_i^U]$  определялись из сгенерированных отрезков  $[p_i^L, p_i^U] = [p_i^L / w_i, p_i^U / w_i]$  как  $[p_i^L, p_i^U] = [w_i p_i^L, w_i p_i^U]$ .

Генерация отрезков  $[p_i^L, p_i^U]$  для фиксированных работ, содержащихся в блоке  $B_j$ , проводилась следующим образом: по заданному ядру блока  $[b_j^L, b_j^U]$  генерировались отрезки  $[p_i^L, p_i^U] \supset [b_j^L, b_j^U]$ ,  $p_i^L \in [b_j^L - D, b_j^L]$ ,  $p_i^U \in [b_j^U, b_j^U + D]$ ,  $D \in \{2, 3, 5, 7, 10, 15\}$ .

Генерация отрезков  $[p_i^L, p_i^U]$  для нефиксированных работ проводилась аналогично. Для заданного отрезка  $[b_i^L, b_i^U] \supset [b_i^L, b_i^U]$  генерировались отрезки  $[p_i^L, p_i^U] \supset [b_i^L, b_i^U]$ ,  $p_i^L \in [b_i^L - D, b_i^L]$ ,  $p_i^U \in [b_i^U, b_i^U + D]$ ,  $D \in \{1, 2, 3, 4, 5, 10\}$ .

При генерации отрезков  $[p_i^L, p_i^U]$  для примеров с единственным блоком работ для заданных отрезков  $[b_i^L, b_i^U] \supset [b_i^L, b_i^U]$  генерировались отрезки  $[p_i^L, p_i^U] \supset [b_i^L, b_i^U]$ ,  $p_i^L \in [b_i^L - D, b_i^L]$ ,  $p_i^U \in [b_i^U, b_i^U + D]$ ,  $D \in \{1, 2, 3, 4, 5, 10\}$ .

Для генерации фактического сценария использовались законы распределения случайной величины, а именно равномерное распределение, гамма-распределение с параметрами  $\alpha = 9$  и  $\beta = 2$ , гамма-распределение с параметрами  $\alpha = 4$  и  $\beta = 2$ . Закон распределения вероятностей случайной длительности работы выбирался случайным образом из множества трех указанных распределений. Для каждой серии сгенерированных задач вычислялось среднее значение относительных погрешностей  $\gamma$  и  $\gamma_{mid-p}$ .

Каждая серия вычислительного эксперимента состояла из 10 задач. В табл. 1 представлены результаты вычислений первой части, а в табл. 2 – второй части эксперимента. Серии задач в вычислительном эксперименте отличаются одна от другой количеством фиксированных работ и блоков.

Таблица 1

Результаты построения эффективных и фактически оптимальных перестановок  
для случайно сгенерированных задач в первой части эксперимента

Число блоков /B/	Количество нефиксированных работ	$\gamma$	$\gamma_{mid-p}$	$\Phi^{mid-p} / \Phi$	Уменьшение относительной погрешности, %
1	–	0,177 112	0,189 004 7	1,000 119	6,292 430 8
2	1	0,088 176	0,108 613	1,000 204	18,816 080
2	2	0,111 966	0,143 524	1,000 316	21,988 040
2	3	0,114 696	0,143 250	1,000 285	19,932 880
2	4	0,186 075	0,204 768	1,000 187	9,129 282
2	5	0,320 890	0,351 293	1,000 303	8,654 531
2	10	0,697 202	0,947 337	1,002 488	26,404 030
3	1	0,095 627	0,151 388	1,000 557	36,832 750
3	2	0,057 943	0,062 483	1,000 046	7,264 948
3	3	0,084 613	0,101 448	1,000 168	16,595 360
3	4	0,112 494	0,195 184	1,000 827	42,365 380
3	5	0,158 733	0,279 461	1,001 217	43,200 360
4	1	0,188 805	0,269 446	1,000 805	29,928 390
4	2	0,288 984	0,473 585	1,001 847	38,979 460
4	3	0,180 573	0,337 540	1,001 573	46,503 200
4	4	0,298 377	0,445 823	1,001 468	33,072 780
4	5	0,257 539	0,384 898	1,001 278	33,088 990
8	1	0,116 846	0,138 202	1,000 213	15,452 890
Среднее значение	–	0,196 481	0,273 736	1,000 772	25,250 100

Таблица 2

Результаты построения эффективных и фактически оптимальных перестановок  
для случайно сгенерированных задач во второй части эксперимента

Число блоков /B/	Количество нефиксированных работ	$\gamma$	$\gamma_{mid-p}$	$\Phi^{mid-p} / \Phi$	Уменьшение относительной погрешности, %
1	–	0,423 003	0,461 168	1,000 380	8,275 659 7
2	1	0,087 304	0,103 415	1,000 164	15,578 700
2	2	0,132 425	0,160 933	1,000 285	17,714 160
2	3	0,192 217	0,279 213	1,000 873	31,157 531
2	4	0,428 103	0,444 762	1,000 166	3,745 740
2	5	0,434 013	0,483 155	1,000 492	10,171 060
2	10	0,740 477	0,885 048	1,001 435	16,334 810
3	1	0,058 425	0,087 667	1,000 295	33,355 640
3	2	0,137 929	0,174 655	1,000 371	21,028 180
3	3	0,195 673	0,201 804	1,000 062	3,038 112
3	4	0,432 008	0,549 198	1,001 178	21,338 400
3	5	0,476 762	0,549 237	1,000 729	13,195 710
4	1	0,091 829	0,118 126	1,000 265	22,261 680
4	2	0,087 443	0,131 205	1,000 438	33,354 240
4	3	0,113 506	0,138 308	1,000 248	17,932 620
4	4	0,130 495	0,177 014	1,000 466	26,280 004
4	5	0,152 188	0,169 121	1,000 169	10,012 310
8	1	0,248 513	0,264 660	1,000 162	6,101 085
Среднее значение	–	0,253 462	0,298 816	1,000 454	17,270 870

В перестановках, полученных с использованием частичных перестановок с максимальным значением величины  $PerOB(\pi_k)$  для многогранника оптимальности, значение погрешности целевой функции в среднем было на 21 % меньше, чем значение погрешности в перестановках, полученных с использованием частичных перестановок, построенных по известным алгоритмам [18, 19].

**Заключение.** В работе исследована задача построения оптимальных расписаний выполнения запланированных на месяц работ одним исполнителем, оценивался 30-дневный период составления дневных расписаний. Предполагалось, что каждый день поступает 10 или 20 новых работ для последующего выполнения исполнителем. При планировании работ на один день решалась задача  $1 | p_i^L \leq p_i \leq p_i^U | \sum w_i C_i$  составления расписания выполнения одним исполнителем множества запланированных работ с неопределенными длительностями их выполнения с целью минимизации суммы взвешенных моментов завершения выполнения работ.

Приведены алгоритмы построения эффективной перестановки  $\pi_k$  множества работ с максимальным значением относительного полупериметра  $PerOB(\pi_k)$ , которую предлагается использовать в качестве приближенного решения задачи  $1 | p_i^L \leq p_i \leq p_i^U | \sum w_i C_i$ , а также алгоритм построения перестановки выполнения всех запланированных работ на основе эффективных перестановок для множества поступивших работ.

Для выбора наиболее важных для пользователя работ и составления оптимального плана (расписания) их выполнения использовался персональный компьютер. Проведенный вычислительный эксперимент на случайно сгенерированных тестовых задачах показал, что применение эффективной перестановки, построенной разработанными программами, обеспечивает погрешность, не превышающую 0,75 % от фактически оптимальной перестановки выполнения работ, полученной при известных длительностях всех запланированных работ. (Фактически оптимальная перестановка может быть построена только после завершения выполнения всех запланированных работ, когда становятся известными длительности выполнения всех запланированных работ.) Значение достигаемой погрешности было в среднем на 21 % меньше по сравнению с погрешностью, полученной при использовании известных алгоритмов приближенного решения задачи  $1 | p_i^L \leq p_i \leq p_i^U | \sum w_i C_i$ .

Предложенные алгоритмы могут применяться и для решения задач составления производственных расписаний для одного обслуживающего прибора, а также в случае, когда среди множества имеющихся приборов только один прибор является «узким местом» производственного процесса.

Отметим, что при составлении расписания для человека можно не ограничиваться одним критерием оптимальности выполнения запланированных работ. Важных для исполнителя критериев оптимальности может быть несколько в зависимости от его особенностей и специфики самих работ. Поэтому в дальнейшем предполагается применить описанный в настоящей статье подход для случая нескольких критериев оптимальности, упорядочивая их по важности для конкретного исполнителя.

В статье [20] приведены следующие критерии, которые могут использоваться при составлении расписаний для тайм-менеджмента:

- максимизация числа работ, выполненных в течение рабочего дня;
- минимизация общего времени завершения всех работ  $C_{\max} = \max \{ C_i : J_i \in G \}$ ;
- минимизация взвешенного числа запаздывающих работ  $J_i \in G$  относительно заданных директивных сроков  $D_i$  (минимизация значения функции  $\sum w_i U_i$ , где  $U_i = 1$ , если завершение работы  $J_i$  запаздало,  $C_i > D_i$ , и  $U_i = 0$ , если работа  $J_i$  выполнена в срок,  $C_i \leq D_i$ );
- минимизация взвешенного суммарного запаздывания работ  $J_i \in G$  относительно директивных сроков  $D_i$ , т. е. минимизация значения функции  $\sum w_i \max \{ 0, C_i - D_i \}$ ;
- минимизация максимального временного смещения моментов  $C_i$  завершения работ  $J_i \in G$  относительно заданных директивных сроков  $D_i$ , т. е. минимизация функции  $\max \{ C_i - D_i : J_i \in G \}$ ;

- минимизация числа работ, начатых в течение рабочего дня, но не завершенных к концу рабочего дня;
- минимизация суммы времен переналадок (переходов, переездов и подготовки рабочего места), необходимых для выполнения очередной работы после завершения предыдущей;
- обеспечение чередования в расписании легких и трудных работ из множества  $G$ ;
- предпочтение к выполнению сложных работ утром в начале рабочего дня или, наоборот, в конце рабочего дня;
- предпочтение к выполнению наибольшего количества последовательных работ на одном рабочем месте исполнителя;
- минимизация числа прерываний работ (минимизация числа переключений с одной работы на другую, если из-за этого возникают дополнительные потери времени или другие издержки);
- предпочтение к расписаниям с повторяющимися перестановками одних и тех же (или близких по содержанию) работ в течение длительного периода времени (периодичность расписаний).

### Список использованных источников

1. The relationship between time management and job performance in event management / N. L. Ahmad [et al.] // *Procedia – Social and Behavioral Sciences*. – 2012. – Vol. 65. – P. 937–941.
2. Eilon, S. Time-management / S. Eilon // *OMEGA Intern. J. of Management Sciences*. – 1993. – Vol. 21, no. 3. – P. 255–259.
3. Sherwood, B. J. Personal time-management allows you to work smarter with less effort / B. J. Sherwood // *Sherwood on Management*. – 2005. – July/August. – P. 44–45.
4. Jackson, V. P. Time management: a realistic approach / V. P. Jackson // *J. of the American College of Radiology*. – 2009. – Vol. 6, no.6. – P. 434–436.
5. Xu, J. Predicting homework time management at the secondary school level: a multilevel analysis / J. Xu // *Learning and Individual Differences*. – 2010. – Vol. 20. – P. 34–39.
6. MacCann, C. Strategies for success in education: time management is more important for part-time than full-time community college students / C. MacCann, G. J. Fogarty, R. D. Roberts // *Learning and Individual Differences*. – 2012. – Vol. 22. – P. 618–623.
7. Assessing time-management skills in terms of age, gender and anxiety levels: a study of nursing and midwifery students in Turkey / H. Kaya [et al.] // *Nurse Education in Practice*. – 2012. – Vol. 12. – P. 284–288.
8. The assessment of time management in middle-school students / O. L. Liu [et al.] // *Personality and Individual Differences*. – 2009. – Vol. 47. – P. 174–179.
9. Zampetakis, L. A. On the relationship between individual creativity and time management / L. A. Zampetakis, N. Bouranta, V. S. Moustakis // *Thinking Skills and Creativity*. – 2010. – Vol. 5. – P. 23–32.
10. Woolfolk, A. E. Time management: an experimental investigation / A. E. Woolfolk, R. L. Woolfolk // *J. of School Psychology*. – 1986. – Vol. 24. – P. 267–275.
11. Indreica, E.-S. Effects of learning styles and time management on academic achievement / E.-S. Indreica, A.-M. Cazan, C. Truta // *Procedia – Social and Behavioral Sciences*. – 2011. – Vol. 30. – P. 1096–1102.
12. Macan, T. Will you remember to read this article later then you have time? The relationship between prospective memory and time management / T. Macan, J.M. Gibson, J. Cunningham // *Personality and Individual Differences*. – 2010. – Vol. 48. – P. 725–730.
13. Ho, B. Time management of final undergraduate English projects: supervisees' and the supervisor's coping strategies / B. Ho // *System*. – 2003. – Vol. 31. – P. 231–245.
14. Kelly, W. E. No time to worry: the relationship between worry, time structure, and time management / W. E. Kelly // *Personality and Individual Differences*. – 2003. – Vol. 35. – P. 1119–1126.
15. Hund, P. M. Representation of time in digital calendars: an argument for a unified, continuous a multi-granular calendar view / P. M. Hund, J. Dowell, K. Mueller // *Intern. J. of Human-Computer Studies*. – 2014. – Vol. 72. – P. 1–11.
16. Smith, W. E. Various optimizers for single-stage production / W. E. Smith // *Naval Research Logistics Quarterly*. – 1956. – Vol. 3, no. 1. – P. 59–66.
17. The optimality box in uncertain data for minimizing the sum of the weighted job completion times / T.-C. Lai [et al.] // *Intern. J. of Production Research*. – 2018. – Vol. 56, no. 19. – P. 6336–6362.
18. Sotskov, Yu. N. Single machine scheduling problem with interval processing times and total completion time objective / Yu. N. Sotskov, N. G. Egorova // *Algorithms*. – 2018. – Vol. 75. – P. 21–40.

19. Allahverdi, A. Single machine scheduling problem with interval processing times to minimize mean weighted completion times / A. Allahverdi, H. Aydilek, A. Aydilek // *Computers & Operations Research*. – 2014. – Vol. 51. – P. 200–207.

20. Модели и комплекс программ для планирования рабочего времени / Ю. Н. Сотсков [и др.] // *Информатика*. – 2007. – № 4. – С. 23–36.

---

---

## References

1. Ahmad N. L., Yusuf A. N. M., Shobri N. D. M., Wahab S. The relationship between time management and job performance in event management. *Procedia – Social and Behavioral Sciences*, 2012, vol. 65, pp. 937–941.

2. Eilon S. Time-management. *OMEGA International Journal of Management Sciences*, 1993, vol. 21, no 3, pp. 255–259.

3. Sherwood B. J. Personal time-management allows you to work smarter with less effort. *Sherwood on Management*, 2005, July/August, pp. 44–45.

4. Jackson V. P. Time management: a realistic approach. *Journal of the American College of Radiology*, 2009, vol. 6, no 6, pp. 434–436.

5. Xu J. Predicting homework time management at the secondary school level: a multilevel analysis. *Learning and Individual Differences*, 2010, vol. 20, pp. 34–39.

6. MacCann C., Fogarty G. J., Roberts R. D. Strategies for success in education: time management is more important for part-time than full-time community college students. *Learning and Individual Differences*, 2012, vol. 22, pp. 618–623.

7. Kaya H., Kaya N., Palloş A. Ö., Küçük L. Assessing time-management skills in terms of age, gender and anxiety levels: a study of nursing and midwifery students in Turkey. *Nurse Education in Practice*, 2012, vol. 12, pp. 284–288.

8. Liu O. L., Rijmen F., MacCann C., Roberts R. The assessment of time management in middle-school students. *Personality and Individual Differences*, 2009, vol. 47, pp. 174–179.

9. Zampetakis L. A., Bouranta N., Moustakis V. S. On the relationship between individual creativity and time management. *Thinking Skills and Creativity*, 2010, vol. 5, pp. 23–32.

10. Woolfolk A. E., Woolfolk R. L. Time management: an experimental investigation. *Journal of School Psychology*, 1986, vol. 24, pp. 267–275.

11. Indreica E.-S., Cazan A.-M., Truta C. Effects of learning styles and time management on academic achievement. *Procedia – Social and Behavioral Sciences*, 2011, vol. 30, pp. 1096–1102.

12. Macan T., Gibson J. M., Cunningham J. Will you remember to read this article later then you have time? The relationship between prospective memory and time management. *Personality and Individual Differences*, 2010, vol. 48, pp. 725–730.

13. Ho B. Time management of final undergraduate English projects: supervisees' and the supervisor's coping strategies. *System*, 2003, vol. 31, pp. 231–245.

14. Kelly W. E. No time to worry: the relationship between worry, time structure, and time management. *Personality and Individual Differences*, 2003, vol. 35, pp. 1119–1126.

15. Hund P. M., Dowell J., Mueller K. Representation of time in digital calendars: an argument for a unified, continuous a multi-granular calendar view. *International Journal of Human-Computer Studies*, 2014, vol. 72, pp. 1–11.

16. Smith W. E. Various optimizers for single-stage production. *Naval Research Logistics Quarterly*, 1956, vol. 3, no 1, pp. 59–66.

17. Lai T.-C., Sotkov Yu. N., Egorova N. G., Werner F. The optimality box in uncertain data for minimizing the sum of the weighted job completion times. *International Journal of Production Research*, 2018, vol. 56, no 19, pp. 6336–6362.

18. Sotkov Yu. N., Egorova N. G. Single machine scheduling problem with interval processing times and total completion time objective. *Algorithms*, 2018, vol. 75, pp. 21–40.

19. Allahverdi A., Aydilek H., Aydilek A. Single machine scheduling problem with interval processing times to minimize mean weighted completion times. *Computers & Operations Research*, 2014, vol. 51, pp. 200–207.

20. Sotkov Yu. N., Egorova N. G., Matsveichuck N. M., Petrova E. A. Modeli i complex program dlya planirovaniya rabocheho vremeni [Models and program package for optimal scheduling the working time]. *Informatika [Informatics]*, 2007, no. 4, pp. 23–36 (in Russian).

**Информация об авторах**

*Сотсков Юрий Назарович*, доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник лаборатории математической кибернетики, Объединенный институт проблем информатики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь.  
E-mail: sotskov48@mail.ru

*Егорова Наталья Геннадьевна*, кандидат технических наук, старший научный сотрудник лаборатории математической кибернетики, Объединенный институт проблем информатики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь.  
E-mail: NataMog@yandex.by

*Матвейчук Наталья Михайловна*, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры автоматизированных систем управления производством, Белорусский государственный аграрный технический университет, Минск, Беларусь.

**Information about the authors**

*Yuri N. Sotskov*, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Professor, Principal Researcher of the Laboratory of Mathematical Cybernetics, the United Institute of Informatics Problems of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus.  
E-mail: sotskov48@mail.ru

*Natalja G. Egorova*, Cand. Sci. (Eng.), Senior Researcher of the Laboratory of Mathematical Cybernetics, the United Institute of Informatics Problems of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus.  
E-mail: NataMog@yandex.by

*Natalja M. Matsveichuk*, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Associate Professor of the Department of Automated Production Management Systems, Belarusian State Agrarian Technical University, Minsk, Belarus.