ISSN 1561-8323 (Print)
ISSN 2524-2431 (Online)

УДК 530:531.51
https://doi.org/10.29235/1561-8323-2020-64-4-399-402

Поступило в редакцию 01.11.2019
Received 01.11.2019

ФИЗИКА

PHYSICS

Ю. П. Выблый[1], А. А. Леонович[2]

[1]*Институт физики имени Б. И. Степанова Национальной академии наук Беларуси, Минск, Республика Беларусь*
[2]*Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники, Минск, Республика Беларусь*

СФЕРИЧЕСКИ-СИММЕТРИЧНОЕ ВОЛНОВОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ЭЙНШТЕЙНА В ПРИБЛИЖЕНИИ СЛАБОГО ПОЛЯ

(Представлено членом-корреспондентом Л. М. Томильчиком)

Аннотация. В линейном приближении общей теории относительности получено точное сферически-симметричное нестатическое решение уравнений Эйнштейна, описывающее гравитационную волну, зависящую от запаздывающего аргумента. Получены отличные от нуля выражения для плотности импульса волны и сил, действующих на пробную частицу.

Ключевые слова: уравнения Эйнштейна, слабое поле, гравитационная волна, теорема Биркгоффа, тензор энергии-импульса

Для цитирования. Выблый, Ю. П. Сферически-симметричное волновое решение уравнений Эйнштейна в приближении слабого поля / Ю. П. Выблый, А. А. Леонович // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. – 2020. – Т. 64, № 4. – С. 399–402. https://doi.org/10.29235/1561-8323-2020-64-4-399-402

Yury P. Vyblyi[1], Anatoly A. Leonovich[2]

[1]*B. I. Stepanov Institute of Physics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Republic of Belarus*
[2]*Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics, Minsk, Republic of Belarus*

SPHERICALLY SYMMETRIC WAVE SOLUTION OF EINSTEIN'S EQUATIONS IN THE WEAK FIELD APPROXIMATION

(Communicated by Corresponding Member Lev M. Tomilchik)

Abstract. In the linear approximation of general relativity, an exact spherically symmetric non-static solution of Einstein's equations is obtained. It describes a gravitational wave depending on a retarded argument. The non-zero expressions for the momentum density of the wave and the forces acting on a test particle are obtained.

Keywords: Einstein's equations, weak field, gravitational wave, Birkhoff theorem, energy-momentum tensor

For citation: Vyblyi Yu. P., Leonovich A. A. Spherically-symmetric wave solution of Einstein equations in the weak field approximation. *Doklady Natsional'noi akademii nauk Belarusi = Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus*, 2020, vol. 64, no. 4, pp. 399–402 (in Russian). https://doi.org/10.29235/1561-8323-2020-64-4-399-402

В общей теории относительности (ОТО) в приближении слабого поля волновые решения получены, начиная с работы Эйнштейна [1], для плоских гравитационных волн, но аналогичные сферически-симметричные решения не рассматриваются. Такая ситуация может быть обусловлена существованием теоремы Биркгоффа, которая часто интерпретируется как утверждение о том, что центрально-симметричное гравитационное поле в пустоте должно быть статическим. Однако эта теорема утверждает только, что всегда найдется система координат, в которой некоторое нестатическое решение приводится к зависимости от одной пространственно-подобной переменной и, таким образом, она не запрещает, вообще говоря, существование сферически-симметричных решений, зависящих от времени. Следовательно, имеет смысл задача о нахождении таких решений, в частности, в приближении слабого поля. В слабом поле метрика g_{ik} представляется в виде суммы метрики Минковского и гравитационного потенциала: $g_{ik} = \gamma_{ik} + h_{ik}$, а выбор вида этой метрики задает систему координат. Если в инерциальных сферических координатах с метрикой Минковского $\gamma_{ik} = \mathrm{diag}(1, -1, -r^2, -r^2 \sin^2 \theta)$ существуют решения, зависящие от времени и радиальной координаты, то система координат, в которой согласно теореме Биркгоффа решение будет зависеть от одной пространственной переменной, будет, вообще говоря, неинерциальной.

В линейном приближении ОТО уравнения Эйнштейна в вакууме в общековариантной форме являются волновыми уравнениями для потенциала h_{ik}, дополненными условиями Гильберта (см., напр., [2])

$$\Box h_{ik} = 0, \tag{1}$$

$$D_i\left(h^{ik} - \frac{1}{2} h\gamma^{ik}\right) = 0, \tag{2}$$

где $\Box = -\gamma^{ik} D_i D_k$, $h = h_{ik}\gamma^{ik}$, D_i – ковариантная производная в пространстве Минковского.

Рассмотрим сферически-симметричные нестатические решения системы уравнений (1)–(2). В инерциальных сферических координатах компоненты потенциала h_{00}, h_{01}, h_{11}, h_{22} будут тогда функциями только переменных t и r, $h_{33} = \sin^2\theta h_{22}$, а остальные компоненты в силу сферической симметрии будут равны нулю. Введем обозначения

$$h_{00} = u,\ h_{01} = a,\ h_{11} = v,\ h_{22} = w;$$

$$\dot{f} = \frac{\partial f}{\partial t},\ f' = \frac{\partial f}{\partial r},$$

тогда уравнения (1)–(2) записываются в виде

$$\begin{aligned}
&\ddot{u} - u'' - \frac{2}{r}u' = 0,\\
&\ddot{a} - a'' - \frac{2}{r}a' + \frac{2}{r^2}a = 0,\\
&\ddot{v} - v'' - \frac{2}{r}v' + \frac{4}{r^2}v - \frac{4}{r^4}w = 0,\\
&\ddot{w} - w'' + \frac{2}{r}w' - 2v = 0.
\end{aligned} \tag{3}$$

$$\begin{aligned}
&\dot{u} - 2a' + \dot{v} + \frac{2}{r}\dot{w} - \frac{4}{r}a = 0,\\
&\dot{a} - \frac{3}{2}v' + \frac{1}{2}u' - \frac{1}{r^2}w' - \frac{2}{r}v + \frac{2}{r^3}w = 0.
\end{aligned} \tag{4}$$

Система уравнений (3)–(4) имеет волновое решение, зависящее от запаздывающего аргумента $\tau = t - \frac{r}{c}$, где c – скорость света, которую в дальнейшем будем полагать равной единице:

$$\begin{aligned}
&u = -\frac{\ddot{T}}{r},\\
&a = \frac{\ddot{T}}{r} + \frac{\dot{T}}{r^2},\\
&v = -\left(\frac{\ddot{T}}{r} + \frac{\dot{T}}{r^2} + \frac{2T}{r^3}\right),\\
&w = \dot{T} + \frac{T}{r},
\end{aligned} \tag{5}$$

где T – произвольная функция запаздывающего аргумента τ, точка означает дифференцирование как по t, так и по τ. Из решения (5) следует также, что след тензорного потенциала h равен нулю.

Найденное решение носит калибровочный характер в том смысле, что его можно выразить через производные от вектора λ_i

$$h_{ik} = D_i \lambda_k + D_k \lambda_i,$$

где компоненты калибровочного вектора λ_i имеют вид

$$\lambda_0 = -\frac{\dot{T}}{2r}, \lambda_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{\dot{T}}{r} + \frac{T}{r_2}\right), \lambda_2 = \lambda_3 = 0.$$

Вычислим плотность импульса сферически-симметричной волны, соответствующей решению (5). В линейном приближении тензор энергии-импульса гравитационного поля является симметризованным каноническим тензором, полученным из лагранжиана для симметричного тензорного поля, и имеет вид [3]

$$t_{ik} = \frac{1}{4}\left[2(D_i h^{mn})(D_k h_{mn}) - h,_i h,_k - \gamma_{ik}((D_i h^{mn})(D_k h_{mn}) - \frac{1}{2} h,_n h,^n)\right].$$

Для плотности импульса $p^1 = -t_{01}$ имеем

$$p^1 = -\frac{1}{2}(D_0 h^{mn})(D_1 h_{mn}) =$$

$$= \frac{2}{r^4}\dddot{T}\dot{T} + \frac{1}{r^4}\ddot{T}^2 + \frac{3}{r^5}\dddot{T}T + \frac{7}{r^5}\ddot{T}\dot{T} + \frac{6}{r^6}\ddot{T}T + \frac{6}{r^6}\dot{T}^2 + \frac{6}{r^7}\dot{T}T.$$

Для того чтобы плотность импульса была положительно-определенной величиной достаточно, чтобы функция T и ее производные имели одинаковый знак.

Решение (5) позволяет, исходя из уравнения геодезических, определить «силы», которые выражаются через символы Кристоффеля и действуют на пробную частицу в волновом поле

$$\frac{du^i}{ds} = \Gamma^i_{mn} u^m u^n,$$

где в линейном приближении

$$\Gamma^i_{mn} = \frac{1}{2}\gamma^{ik}(h_{kn,m} + h_{km,n} - h_{mn,k}).$$

Рассмотрим в качестве примера движение частицы, у которой в начальный момент времени отлична от нуля компонента 4-скорости u^1

$$\frac{du^1}{ds} = \Gamma^1_{00}(u^0)^2 + 2\Gamma^1_{01}u^0 u^1 + \Gamma^1_{11}(u^1)^2.$$

Если в начальный момент времени экваториальная скорость u^2 была равна нулю, то будет равно нулю и ее экваториальное ускорение, как это следует из уравнения

$$\frac{du^2}{ds} = \Gamma^2_{00}(u^0)^2 + 2\Gamma^2_{01}u^0 u^1 + \Gamma^2_{11}(u^1)^2 \tag{6}$$

и значений символов Кристоффеля $\Gamma^2_{00} = \Gamma^2_{01} = \Gamma^2_{11} = 0$, и, следовательно, в данном волновом поле частица может совершать радиальное движение. Вычислим входящие в (6) компоненты символов Кристоффеля:

$$\Gamma^1_{00} = -\frac{3}{2}\left(\frac{\dddot{T}}{r} + \frac{\ddot{T}}{r^2}\right),$$

$$\Gamma^1_{01} = \frac{1}{2}\frac{\ddddot{T}}{r} + \frac{\ddot{T}}{r^2} + \frac{\dot{T}}{r^3},$$

$$\Gamma^1_{11} = -\left(\frac{1}{2}\frac{\ddddot{T}}{r} + \frac{3}{2}\frac{\ddot{T}}{r^2} + \frac{3\dot{T}}{r^3} + \frac{3T}{r^4}\right).$$

Таким образом, в сферических координатах пространства Минковского пробная частица движется с ускорением. Отметим отличие этой ситуации от электродинамики, когда электромагнитные потенциалы, имеющие калибровочную структуру $A_i = \partial_i \lambda$, приводят к равенству нулю тензора напряженности поля и отсутствию сил, действующих на пробный заряд.

Для физической интерпретации полученного решения необходимо сопоставить его с решениями уравнений Эйнштейна с источником – тензором энергии импульса материи T_{ik}. В линейном приближении решение волнового уравнения с источником

$$\Box h_{ik} = \kappa T_{ik}$$

выражается с помощью запаздывающих потенциалов и приводит к выводу о том, что излучать гравитационные волны могут только источники, обладающие квадрупольным моментом [4; 5]. Это не означает, вообще говоря, что функцию T в найденном решении необходимо положить равной нулю. Вывод о необходимости для излучения квадрупольного момента получен при решении системы линейных уравнений Даламбера и вопрос о его справедливости для решений точных уравнений Эйнштейна является открытым. Если эти решения допускают не только квадрупольное, но и монопольное излучение, найденные решения (5) будут совпадать с их соответствующим линейным приближением, при этом функция $T(u)$ должна определяться компонентами тензора энергии-импульса материи, вычисленными в высших приближениях. Методы получения точных сферически-симметричных вакуумных нестатических решений уравнений Эйнштейна рассматривались в [6–9].

Список использованных источников

1. Эйнштейн, А. Собрание научных трудов / А. Эйнштейн. – М., 1965. – Т. 1. – С. 514.
2. Вейнберг, С. Гравитация и космология / С. Вейнберг. – М., 1975. – 634 с.
3. Ohanian, H. Gravitation and Spacetime / H. Ohanian, R. Ruffini. – Cambridge, 2013. – 528 p.
4. Захаров, В. Д. Гравитационные волны в теории тяготения Эйнштейна / В. Д. Захаров. – М., 1972. – 199 с.
5. Бичак, И. Гравитационные волны в ОТО и проблема их обнаружения / И. Бичак, В. Н. Руденко. – М., 1987. – 268 с.
6. Leonovich, A. A. Exact solution for spherical gravitational wave in relativistic theory of gravitation / A. A. Leonovich, Yu. P. Vyblyi // Nonlinear Dynamics and Applications. – 2010. – Vol. 17. – P. 106–110.
7. Общий класс вакуумных сферически-симметричных решений уравнений общей теории относительности / В. В. Корбановский [и др.] // Журн. эксперим. и теорет. физики. – 2012. – Т. 142, № 2. – С. 238–241.
8. Выблый, Ю. П. Сферически-симметричные нестатические гравитационные поля в тензорной теории гравитации / Ю. П. Выблый, А. А. Леонович // Сб. тр. LIV Всерос. конф. по проблемам динамики, физики частиц, физики плазмы и оптоэлектроники. – М., 2018. – С. 31–34.
9. Leonovich, A. A. The Classical Energy-Momentum Problem and Fock Tensor / A. A. Leonovich, Yu. P. Vyblyi // Nonlinear Phenomena in Complex Systems. – 2018. – Vol. 2, N 4. – P. 406–410.

References

1. Einstein A. *Collection of scientific papers, Vol. 1.* Moscow, 1965, p. 514 (in Russian).
2. Weinberg S. *Gravitation and Cosmolog.* Moscow, 1975. 634 p. (in Russian).
3. Ohanian H., Ruffini R. *Gravitation and Spacetime.* Cambridge, 2013. 528 p.
4. Zakharov V. D. *Gravitational Waves in Einstein Theory of Gravity*. Moscow, 1972. 199 p. (in Russian).
5. Bichak I., Rudenko V. N. *Gravitational Waves in General Relativity and Its Detection Problem*. Moscow, 1987. 268 p. (in Russian).
6. Leonovich A. A., Vyblyi Yu. P. Exact solution for spherical gravitational wave in relativistic theory of gravitation. *Nonlinear Dynamics and Applications*, 2010, vol. 17, pp. 106–110.
7. Karbanovski V. V., Sorokin O. M., Nesterova M. I., Bolotnyaya V. A., Markov V. N., Kairov T. V., Lyash A. A., Tarasyuk O. R. The general class of the vacuum spherically symmetric equations of the general relativity theory. *Journal of Experimental and Theoretical Physics*, 2012, vol. 115, no. 2, pp. 208–211. https://doi.org/10.1134/s1063776112070084
8. Vyblyi Yu. P., Leonovich A. A. Spherically-Symmetric Nonstatic Gravitational Fields in tensor Theory of Gravity. *Sbornik trudov LIV Vserossiiskoi konferentsii po problemam dinamiki, fiziki chastits, fiziki plazmy i optoelektroniki* [Proceedings LIV Russian Conference on Problems of Dynamics, Particle Physics, Plasma Physics and Optoelectronics]. Moscow, 2018, pp. 31–34 (in Russian).
9. Leonovich A. A., Vyblyi Yu. P. The Classical Energy-Momentum Problem and Fock Tensor. *Nonlinear Phenomena in Complex Systems*, 2018, vol. 2, no. 4, pp. 406–410.

Информация об авторах

Выблый Юрий Петрович – канд. физ.-мат. наук, вед. науч. сотрудник. Институт физики им. Б. И. Степанова НАН Беларуси (пр. Независимости, 68-2, 220072, Минск, Республика Беларусь). E-mail: Vyblyi@gmail.com.

Леонович Анатолий Александрович – канд. физ.-мат. наук, доцент. Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники (ул. П. Бровки, 6, 220068, Минск, Республика Беларусь). E-mail: kaffiz@bsuir.by.

Information about the authors

Vyblyi Yury P. – Ph. D. (Physics and Mathematics), Leading researcher. B. I. Stepanov Institute of Physics of the National Academy of Sciences of Belarus (68-2, Nezavisimosti Ave., 220072, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: Vyblyi@gmail.com.

Leonovich Anatoly A. – Ph. D. (Physics and Mathematics), Associate professor. Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics (P. Brovka Str., 6, 220068, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: kaffiz@bsuir.by.