ISSN 1816-0301 (Print)
ISSN 2617-6963 (Online)

***ЛОГИЧЕСКОЕ ПРОЕКТИРОВАНИЕ***

*LOGICAL DESIGN*

УДК 519.711

*Поступила в редакцию 20.06.2019*
*Received 20.06.2019*

*Принята к публикации28.08.2019*
*Accepted 28.08.2019*

# Метод бидекомпозиции частичных булевых функций

**Ю. В. Поттосин**

*Объединенный институт проблем информатики*
*Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь*
*E-mail: pott@newman.bas-net.by*

**Аннотация.** Задача бидекомпозиции (от англ. bi-decomposition) булевой функции заключается в представлении заданной булевой функции в виде некоторой заданной операции алгебры логики над двумя булевыми функциями и сводится таким образом к определению этих функций. Каждая из искомых функций должна обладать меньшим числом аргументов, чем заданная. Предлагается метод бидекомпозиции для не полностью определенных (частичных) булевых функций, который использует подход, применяемый в решении общей задачи их параллельной декомпозиции. Задание исходной функции должно иметь вид пары матриц. Одна из них, матрица аргументов, может быть троичной или булевой и представляет область определения заданной функции. Другая матрица, матрица значений, имеет вид одного булева вектора-столбца и показывает значения функции на интервалах или элементах булева пространства аргументов. Рассматриваются граф ортогональности строк матрицы аргументов и граф ортогональности одноэлементных строк матрицы значений. Задача бидекомпозиции сводится к задаче о двухблочном взвешенном покрытии множества ребер графа ортогональности строк матрицы значений полными двудольными подграфами (бикликами) графа ортогональности строк матрицы аргументов. Каждой биклике приписывается определенным образом дизъюнктивная нормальная форма (ДНФ), и весом биклики считается минимальный ранг элементарной конъюнкции в соответствующей ДНФ. По каждой из биклик полученного покрытия строится булева функция, аргументами которой служат переменные из элементарной конъюнкции минимального ранга соответствующей ДНФ, что является решением задачи бидекомпозиции.

**Ключевые слова:** частичная булева функция, бидекомпозиция булевой функции, суперпозиция функций, операции алгебры логики, матричное задание булевой функции, задача о покрытии, полный двудольный подграф графа

**Для цитирования.** Поттосин, Ю. В. Метод бидекомпозиции частичных булевых функций / Ю. В. Поттосин // Информатика. – 2019. – Т. 16, № 4. – С. 77–87.

# A method for bi-decomposition of partial Boolean functions

**Yuri V. Pottosin**

*The United Institute of Informatics Problems of the National Academy*
*of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus*
*E-mail: pott@newman.bas-net.by*

**Abstract.** The problem of bi-decomposition of a Boolean function is to represent a given Boolean function in the form of a given logic algebra operation over two Boolean functions and so is reduced to specification of these functions. Any of the required functions must have fewer arguments than the given function. A method of bi-decomposition for an incompletely specified (partial) Boolean function is suggested, this method uses the approach applied in solving the general problem of parallel decomposition of partial Boolean functions. The specification of the given function must be in the form of a pair of matrices. One of them, argument matrix, can be ternary or binary and represents the definitional domain of the given function. The other one, value matrix, is a binary column-vector and represents the function values on the intervals or elements of the Boolean space of the arguments. The graph of orthogonality of the argument matrix rows and the graph of orthogonality of one-element rows of the value matrix are considered. The problem of bi-decomposition is reduced to the problem of a weighted two-block covering the edge set of the orthogonality graph of the value matrix rows by complete bipartite subgraphs (bicliques) of the orthogonality graph of the argument matrix rows. Every biclique is assigned with a disjunctive normal form (DNF) in definite way. The weight of a biclique is the minimum rank of a term of the assigned DNF. According to each biclique of the obtained cover, a Boolean function is constructed whose arguments are the variables from the term of minimal rank on the DNF.

**Keywords:** partial Boolean function, Boolean function bi-decomposition, superposition of functions, logic algebra operations, matrix representation of Boolean functions, covering problem, complete bipartite subgraph

**For citation.** Pottosin Yu. V. A method for bi-decomposition of partial Boolean functions. *Informatics*, 2019, vol. 16, no. 4, pp. 77–87 (in Russian).

**Введение.** Под декомпозицией булевой функции понимается ее представление в виде суперпозиции двух или более функций, каждая из которых в некотором смысле проще исходной. Задача декомпозиции булевых функций является одной из важных и сложных задач из области логического проектирования, успешное решение которой непосредственно влияет на качество и стоимость проектируемых цифровых устройств. Решение этой задачи дает возможность в ряде случаев заменить сложную задачу аппаратной реализации булевой функции от большого числа переменных на более простую задачу реализации нескольких функций с гораздо меньшим числом аргументов.

Существует довольно много видов декомпозиции булевой функции [1]. Одним из таких видов является бидекомпозиция. Задача бидекомпозиции формулируется следующим образом. Для заданной булевой функции $y = f(\mathbf{x})$, где компоненты вектора $\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$ – булевы переменные, составляющие множество $X$, требуется найти суперпозицию $f(\mathbf{x}) = \varphi(g_1(\mathbf{z}_1), g_2(\mathbf{z}_2))$, где компоненты векторов $\mathbf{z}_1$ и $\mathbf{z}_2$ – булевы переменные из множеств $Z_1 \subset X$ и $Z_2 \subset X$ соответственно. Функция $\varphi$ от двух переменных также задана. Это может быть любая из десяти булевых функций, существенно зависящих от обеих переменных и представляемых операциями алгебры логики. Обычно множества $Z_1$ и $Z_2$ заданы и $Z_1 \cap Z_2 = \varnothing$. Такая бидекомпозиция называется *разделительной* в отличие от неразделительной декомпозиции, где условие $Z_1 \cap Z_2 = \varnothing$ необязательное, но при этом на мощности множеств $Z_1$ и $Z_2$ могут быть наложены ограничения. Получение указанной суперпозиции приводит к логической схеме, изображенной на рис. 1.

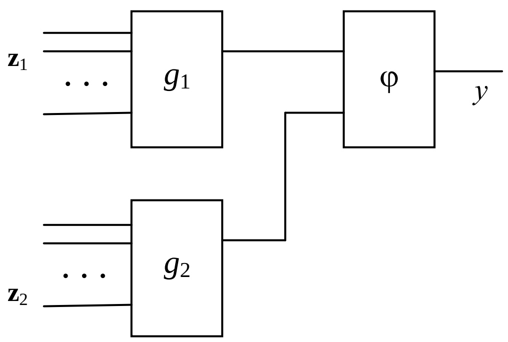


Рис. 1. Структура, получаемая с помощью бидекомпозиции

Известны примеры применения методов бидекомпозиции для повышения быстродействия схем [2, 3] и при синтезе схем на базе программируемой вентильной матрицы (FPGA) [4]. Задача бидекомпозиции при выходной функции, выражаемой операцией сложения по модулю 2, рассматривается в работе [5], где для ее решения предлагается использовать логические уравнения. Вероятность существования какой-либо декомпозиции для полностью определенных булевых функций весьма низка, но по-другому дело обстоит, когда рассматриваемые функции являются не полностью определенными (частичными), особенно когда они определены только на небольшом числе комбинаций значений аргументов. Такой случай разделительной бидекомпозиции при заданном разбиении ($Z_1$, $Z_2$) подробно исследован в работе [6].

Далее рассматривается задача бидекомпозиции частичной булевой функции. В этом случае для заданной частичной булевой функции $y = f(\mathbf{x})$ надо найти суперпозицию $\varphi(g_1(\mathbf{z}_1), g_2(\mathbf{z}_2)) \succ f(\mathbf{x})$, где компонентами векторов $\mathbf{z}_1$ и $\mathbf{z}_2$ являются переменные из множеств $Z_1 \subset X$ и $Z_2 \subset X$ соответственно, а символ $\succ$ обозначает отношение реализации, т. е. значения функции $\varphi$ совпадают со значениями функции $f$ везде, где они определены. Множества $Z_1$ и $Z_2$ могут пересекаться, но обычно требуется, чтобы сумма их мощностей была минимальной. Существуют разнообразные методы решения как разделительной, так и неразделительной бидекомпозиции [7–10]. В настоящей статье излагается метод бидекомпозиции, использующий подход к решению задачи параллельной декомпозиции системы частичных булевых функций, описанный в статьях [11, 12]. Этот подход не требует задания множеств $Z_1$ и $Z_2$.

**Применяемый подход.** Подход к решению задачи декомпозиции, предложенный в статьях [11, 12], рассчитан на системы частичных функций, каждая из которых задана в интервальной форме. Эта форма представляет собой пару троичных матриц **X** и **F**, где матрица **X** задает множество интервалов булева пространства переменных из множества $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$, а матрица **F** – значения функций заданной системы на этих интервалах. Строки матриц **X** и **F** имеют общую естественную нумерацию. Заданная система рассматривается как векторная функция $\mathbf{f}(\mathbf{x})$, и в общем случае надо получить суперпозицию, а также векторную функцию $\boldsymbol{\varphi}(g_1(\mathbf{z}_1), g_2(\mathbf{z}_2), \ldots, g_k(\mathbf{z}_k))$, реализующую $\mathbf{f}(\mathbf{x})$.

Строятся графы $G_X = (V, E_X)$ и $G_F = (V, E_F)$, где множество вершин $V$ является множеством общих номеров строк матриц **X** и **F**, а множества ребер $E_X$ и $E_F$ – множествами пар номеров ортогональных строк матриц **X** и **F** соответственно. Две строки троичной матрицы ортогональны, если имеется столбец, у которого в одной из этих строк расположен нуль, а в другой – единица [13]. Каждому ребру из множества $E_X$ приписаны переменные из множества $X$, по которым соответствующие строки ортогональны. Полному двудольному подграфу, или *биклике,* графа $G_X$ припишем множество переменных из $X$, взятых по одной из каждого ребра, принадлежащего данной биклике. Биклику назовем *полезной*, если она содержит хотя бы одно ребро из множества $E_F$.

Множество переменных, приписываемых биклике, определяется следующим образом. Пусть $\{x_i, x_j, ..., x_l\}$ – множество переменных, по которым ортогональны две строки, соответствующие ребру из множества $E_X$. Образуем элементарную дизъюнкцию $x_i \vee x_j \vee ... \vee x_l$ из этих переменных. Получим конъюнктивную нормальную форму (КНФ), членами которой будут указанные дизъюнкции, взятые по всем ребрам, входящим в данную биклику. После удаления возможных поглощаемых элементарных дизъюнкций преобразуем полученную КНФ, раскрыв скобки, в ДНФ. Множество переменных, приписанных биклике, составят переменные, входящие в элементарную конъюнкцию минимального ранга полученной ДНФ.

Пусть $B_1, B_2, \ldots, B_k$ – покрытие бикликами множества ребер $E_X$. Каждая биклика $B_i$ может быть задана парой множеств вершин $\langle V_i', V_i'' \rangle$. Каждая функция $g_i(\mathbf{z}_i)$ искомой суперпозиции задается матрицами $\mathbf{X}_i$ и $\mathbf{F}_i$. Матрица $\mathbf{X}_i$ является минором матрицы **X**, образованным столбцами, которые соответствуют переменным, приписанным биклике $B_i$. Матрица $\mathbf{F}_i$ состоит из одного столбца, где в строке с номером, соответствующим вершине из $V_i'$, находится 0, в строке с номером, соответствующим вершине из $V_i''$, находится 1 (или наоборот), а в строке, которой не соответствует ни одна вершина ни из $V_i'$, ни из $V_i''$, – символ «–». Векторная функция $\boldsymbol{\varphi}$ задается матрицами **U** и **Φ**. Матрица **U** состоит из столбцов, представляющих матрицы $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \ldots, \mathbf{F}_k$, а матрица **Φ** совпадает с матрицей **F**.

Таким образом, процесс решения задачи декомпозиции включает следующие этапы:

1. Нахождение всех максимальных биклик в графе $G_X$. Для этого можно использовать метод, представленный в работе [14], который позднее был описан в статье [15].

2. Получение кратчайшего покрытия множества $E_F$ найденными бикликами. Если число биклик, составляющих покрытие, не меньше $n$, то для заданной системы функций не существует нетривиальной декомпозиции указанного вида.

3. Построение булевых функций $g_1(\mathbf{z}_1)$, $g_2(\mathbf{z}_2)$, …, $g_k(\mathbf{z}_k)$ и векторной функции $\boldsymbol{\varphi}$.

На этапе получения покрытия можно продолжить оптимизацию решения, уменьшая сумму чисел компонент векторов $\mathbf{z}_1$, $\mathbf{z}_2$, …, $\mathbf{z}_k$. Каждую биклику нужно снабдить весом в виде числа приписанных ей переменных и решать задачу о взвешенном покрытии. При доопределении не полностью определенных булевых функций в процессе декомпозиции некоторые аргументы могут оказаться несущественными. Тогда можно выбирать вариант с наименьшим числом существенных аргументов.

**Метод бидекомпозиции.** Задачу бидекомпозиции можно рассматривать как частный случай задачи параллельной декомпозиции. Особенностью этого случая является то, что рассматривается одна функция, а не система функций, вид функции φ задан и число ее аргументов равно двум. Матрица **X** может быть троичной или булевой, а матрица **F** имеет вид одного булева вектора-столбца. Задание вида функции φ влечет представление исходных данных в виде трех матриц. Кроме матриц **X** и **F** добавляется еще матрица **G**, задающая через запятую возможные значения функций $g_1$ и $g_2$. Например, если φ представляет собой сложение по модулю 2, т. е. $f(\mathbf{x}) = g_1(\mathbf{z}_1) \oplus g_2(\mathbf{z}_2)$, то это задание выглядит подобно матрицам

$$\mathbf{X} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & - & 0 & 1 & 0 \\ 0 & - & - & 0 & 1 & - \\ 0 & - & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & - & 1 & 0 \\ 1 & 0 & - & 1 & 1 & - \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array}, \quad \mathbf{G} = \begin{array}{c} g_1 g_2 \\ \begin{bmatrix} 00,11 \\ 01,10 \\ 00,11 \\ 01,10 \\ 00,11 \\ 01,10 \end{bmatrix} \end{array}, \quad \mathbf{F} = \begin{array}{c} y \\ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \end{array}.$$

На той части пространства переменных $x_1$, $x_2$, $x_3$, $x_4$, $x_5$, $x_6$, которое не охвачено интервалами, представленными матрицей **X**, значения функции не определены. Из матрицы **G** в данном примере видно, что согласно способу построения функций $g_1$ и $g_2$ вершины $v_1$, $v_3$ и $v_5$ оказываются вместе в одной доле во всех бикликах из всех полезных двухблочных покрытий. Любая из остальных вершин в таких бикликах попадает в доли, соответствующие различным значениям функций $g_1$ и $g_2$.

Если φ представляет собой штрих Шеффера (отрицание конъюнкции), то исходное задание для этой же функции представляется матрицами

$$\mathbf{X} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & - & 0 & 1 & 0 \\ 0 & - & - & 0 & 1 & - \\ 0 & - & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & - & 1 & 0 \\ 1 & 0 & - & 1 & 1 & - \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array}, \quad \mathbf{G} = \begin{array}{c} g_1 g_2 \\ \begin{bmatrix} 11 \\ 00,01,10 \\ 11 \\ 00,01,10 \\ 11 \\ 00,01,10 \end{bmatrix} \end{array}, \quad \mathbf{F} = \begin{array}{c} y \\ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \end{array}.$$

Пусть биклики $B_1$ и $B_2$ графа $G_X$ составляют двухблочное покрытие множества $E_F$, по которому можно построить функции $g_1$, $g_2$ и φ. Приведенные примеры позволяют легко установить следующие свойства покрытий, по которым строятся эти функции:

А. Множество вершин (обозначим его $W$), каждая их которых соответствует одинаковым значениям функций $g_1$ и $g_2$, является подмножеством одной из долей каждой из биклик $B_1$ и $B_2$.

Б. Если вершины $v_i$ и $v_j$ из множества $V \setminus W$ находятся в разных долях одной биклики, то они находятся также в разных долях другой биклики. Если они находятся в одной и той же доле одной биклики, то они находятся в одной и той же доле другой биклики.

Для линейных функций, к которым относятся сложение по модулю 2 и его отрицание (эквиваленция), оба свойства являются обязательными. Для нелинейных функций, т. е. всех остальных функций, существенно зависящих от обоих аргументов, свойство Б необязательно.

Двухблочное покрытие множества $E_F$ полезными бикликами графа $G_X$ назовем *полезным для нелинейной функции* φ, если оно обладает свойством А, и *полезным для линейной функции* φ, если оно обладает свойствами А и Б.

Рассматриваемая задача с минимизацией суммы чисел аргументов функций $g_1$ и $g_2$ решается поэтапно:

*Этап 1.* Нахождение всех максимальных полезных биклик в графе $G_X$, обладающих свойством А с соответствующими ДНФ. Заметим, что в данной задаче граф $G_F$ является бикликой графа $G_X$, которую не следует считать полезной, так как она является одноблочным покрытием, приводящим к тривиальному решению, одна из функций $g_i$ при этом является константой. Каждой найденной биклике приписывается вес, равный минимальному рангу элементарной конъюнкции в соответствующей ДНФ.

*Этап 2.* Получение двухблочного покрытия множества $E_F$ найденными бикликами. Покрытие должно быть с минимальным весом, а для линейной функции φ обладать свойством Б. Вес покрытия определяется как сумма весов составляющих его биклик. На этом же этапе удовлетворяется требование пустого пересечения множеств $Z_1$ и $Z_2$ при разделительной бидекомпозиции.

*Этап 3.* Построение булевых функций $g_1(\mathbf{z}_1)$ и $g_2(\mathbf{z}_2)$ с учетом задания вида функции φ. Функции $g_1(\mathbf{z}_1)$ и $g_2(\mathbf{z}_2)$ представляются соответственно парами матриц $\mathbf{X}_1$, $\mathbf{F}_1$ и $\mathbf{X}_2$, $\mathbf{F}_2$, а функция φ – формулой с заданной операцией алгебры логики.

Узким местом рассматриваемого подхода является получение всех максимальных биклик, число которых для полного графа равно $2^{n-1}-1$, где $n$ – число вершин графа. Очевидно, граф $G_X$ является полным, если все строки матрицы $\mathbf{X}$ взаимно ортогональны, что всегда имеет место, когда $\mathbf{X}$ – булева матрица. Свойство А дает возможность значительно уменьшить число рассматриваемых биклик, заменив вершины из множества $W$ одной вершиной путем их стягивания. Число максимальных биклик в таком графе будет $2^{n-|W|}-1$, где $|W|$ – мощность множества $W$. Размерность задачи о покрытии снижается еще и за счет того, что ребра, инцидентные вершинам из множества $W$, содержатся в одних и тех же бикликах. Поэтому согласно правилу редукции, применяемому при решении задачи о покрытии [13], достаточно вместо всех ребер, связывающих некоторую вершину из множества $W$ с вершинами из множества $V \setminus W$, учитывать только одно из этих ребер. Следует также заметить, что сложность задачи нахождения всех двухблочных покрытий выражается полиномом второй степени относительно количества покрывающих множеств. Поэтому перебор всех двухблочных покрытий не считается трудоемкой задачей.

**Демонстрация метода.** Пусть для частичной булевой функции, представленной приведенными ниже матрицами $\mathbf{X}$ и $\mathbf{F}$, надо получить реализующую ее функцию, представимую выражением $g_1(\mathbf{z}_1) \oplus g_2(\mathbf{z}_2)$, при минимуме суммы длин векторов $\mathbf{z}_1$ и $\mathbf{z}_2$.

$$\mathbf{X} = \begin{array}{c} \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \end{matrix}, \quad \mathbf{G} = \begin{array}{c} g_1 g_2 \\ \begin{bmatrix} 01, 10 \\ 01, 10 \\ 01, 10 \\ 01, 10 \\ 00, 11 \\ 00, 11 \\ 00, 11 \\ 00, 11 \\ 00, 11 \end{bmatrix} \end{array}, \quad \mathbf{F} = \begin{array}{c} y \\ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{array}.$$

Матрица $\mathbf{G}$ показывает возможные значения функций $g_1$ и $g_2$. Графы $G_X$ и $G_F$ имеют общее множество вершин $V = \{v_1, v_2, ..., v_9\}$. Граф $G_X$ является полным, а граф $G_F$ – полным двудольным. Матрица **G** определяет множество вершин $W = \{v_5, v_6, v_7, v_8, v_9\}$. В табл. 1, где строки и столбцы соответствуют вершинам графа $G_X$, даны множества переменных, приписанных ребрам графа $G_X$.

Таблица 1

Переменные, приписанные ребрам графа $G_X$

| $v_2$ | $v_3$ | $v_4$ | $v_5$ | $v_6$ | $v_7$ | $v_8$ | $v_9$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_1, x_2, x_5, x_7$ | $x_2, x_3, x_4$ | $x_1, x_2, x_5$ | $x_1, x_3, x_4, x_5, x_7$ | $x_5$ | $x_4, x_6$ | $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_7$ | $x_2, x_4$ | $v_1$ |
| | $x_1, x_3, x_4, x_5, x_7$ | $x_7$ | $x_2, x_3, x_4$ | $x_1, x_2, x_7$ | $x_1, x_2, x_4, x_5, x_6, x_7$ | $x_3, x_4$ | $x_1, x_4, x_5, x_7$ | $v_2$ |
| | | $x_1, x_3, x_4, x_5$ | $x_1, x_2, x_5, x_7$ | $x_2, x_3, x_4, x_5$ | $x_2, x_3, x_6$ | $x_1, x_5, x_7$ | $x_3$ | $v_3$ |
| | | | $x_2, x_3, x_4, x_7$ | $x_1, x_2$ | $x_1, x_2, x_4$ $x_5, x_6$ | $x_3, x_4, x_7$ | $x_1, x_4, x_5$ | $v_4$ |
| | | | | $x_1, x_3, x_4, x_7$ | $x_1, x_2, x_5, x_6, x_7$ | $x_2$ | $x_1, x_2, x_3, x_5, x_7$ | $v_5$ |
| | | | | | $x_5, x_5, x_6$ | $x_1, x_2, x_3, x_4, x_7$ | $x_2, x_4, x_5$ | $v_6$ |
| | | | | | | $x_1, x_2, x_3, x_5, x_6, x_7$ | $x_2, x_6$ | $v_7$ |
| | | | | | | | $x_1, x_3, x_5, x_7$ | $v_8$ |

Все максимальные полезные биклики графа $G_X$ представлены в виде пар подмножеств вершин вместе с соответствующими КНФ и ДНФ:

$$\langle\{v_1,v_2,v_3,v_5,v_6,v_7,v_8,v_9\}, \{v_4\}\rangle - x_7(x_1 \vee x_2)(x_1 \vee x_4 \vee x_5) = x_1 x_7 \vee x_2 x_4 x_7 \vee x_2 x_5 x_7;$$
$$\langle\{v_1,v_2,v_3\}, \{v_4,v_5,v_6,v_7,v_8,v_9\}\rangle - x_3 x_5 x_7 (x_4 \vee x_6)(x_2 \vee x_4) =$$
$$= x_2 x_3 x_4 x_5 x_7 \vee x_2 x_3 x_5 x_6 x_7 \vee x_3 x_4 x_5 x_7;$$
$$\langle\{v_1,v_2,v_4,v_5,v_6,v_7,v_8,v_9\}, \{v_3\}\rangle - x_3(x_1 \vee x_5 \vee x_7) = x_1 x_3 \vee x_3 x_5 \vee x_3 x_7;$$
$$\langle\{v_1,v_2,v_4\}, \{v_3,v_5,v_6,v_7,v_8,v_9\}\rangle - x_5(x_2 \vee x_4)(x_4 \vee x_6)(x_1 \vee x_2)(x_3 \vee x_4) =$$
$$= x_1 x_4 x_5 \vee x_2 x_3 x_5 x_6 \vee x_2 x_4 x_5;$$
$$\langle\{v_1,v_2,v_5,v_6,v_7,v_8,v_9\}, \{v_3,v_4\}\rangle - x_3 x_7(x_1 \vee x_2)(x_1 \vee x_4 \vee x_5) =$$
$$= x_1 x_3 x_7 \vee x_2 x_3 x_4 x_7 \vee x_2 x_3 x_5 x_7;$$
$$\langle\{v_1,v_2\}, \{v_3,v_4,v_5,v_6,v_7,v_8,v_9\}\rangle - x_5 x_7(x_2 \vee x_4)(x_4 \vee x_6)(x_3 \vee x_4) = x_2 x_3 x_5 x_6 x_7 \vee x_4 x_5 x_7;$$
$$\langle\{v_1,v_3,v_4,v_5,v_6,v_7,v_8,v_9\}, \{v_2\}\rangle - x_7 (x_3 \vee x_4) = x_3 x_7 \vee x_4 x_7;$$
$$\langle\{v_1,v_3,v_4\}, \{v_2,v_5,v_6,v_7,v_8,v_9\}\rangle - x_3 x_5 x_7 (x_4 \vee x_6)(x_2 \vee x_4)(x_1 \vee x_2) =$$
$$= x_1 x_3 x_4 x_5 x_7 \vee x_2 x_3 x_5 x_6 x_7 \vee x_2 x_3 x_4 x_5 x_7;$$
$$\langle\{v_1,v_3,v_5,v_6,v_7,v_8,v_9\}, \{v_2,v_4\}\rangle - (x_1 \vee x_2)(x_3 \vee x_4)(x_1 \vee x_4 \vee x_5) =$$
$$= x_1 x_3 \vee x_1 x_4 \vee x_2 x_4 \vee x_2 x_3 x_5;$$
$$\langle\{v_1,v_3\}, \{v_2,v_4,v_5,v_6,v_7,v_8,v_9\}\rangle - x_3 x_5 (x_4 \vee x_6)(x_2 \vee x_4) = x_2 x_3 x_5 x_6 \vee x_3 x_4 x_5;$$
$$\langle\{v_1,v_4,v_5,v_6,v_7,v_8,v_9\}, \{v_2,v_3\}\rangle - x_3 x_7;$$
$$\langle\{v_1,v_4\}, \{v_2,v_3,v_5,v_6,v_7,v_8,v_9\}\rangle - x_5 x_7 (x_2 \vee x_4)(x_4 \vee x_6)(x_1 \vee x_2) =$$
$$= x_1 x_4 x_5 x_7 \vee x_2 x_4 x_5 x_7 \vee x_2 x_5 x_6 x_7;$$
$$\langle\{v_1,v_5,v_6,v_7,v_8,v_9\}, \{v_2,v_3,v_4\}\rangle - x_3(x_1 \vee x_2)(x_1 \vee x_5 \vee x_7)(x_1 \vee x_4 \vee x_5) =$$
$$= x_1 x_3 \vee x_1 x_3 x_4 \vee x_2 x_3 x_4 x_7 \vee x_2 x_3 x_5;$$
$$\langle\{v_1\}, \{v_2,v_3,v_4,v_5,v_6,v_7,v_8,v_9\}\rangle - x_5 (x_2 \vee x_4)(x_4 \vee x_6) = x_4 x_5 \vee x_2 x_5 x_6.$$

Покрытия этими бикликами ребер графа $G_F$ приведены в табл. 2. Как уже отмечалось, достаточно вместо всех ребер, связывающих какую-либо вершину из множества $W$ с вершинами из множества $V \setminus W$, учитывать только одно из этих ребер.

Таблица 2

| Биклики | $v_1v_5$ | $v_2v_5$ | $v_3v_5$ | $v_4v_5$ | Вес |
|---|---|---|---|---|---|
| $\langle\{v_1,v_2,v_3,v_5,v_6,v_7,v_8,v_9\},\ \{v_4\}\rangle$ | | | | 1 | 2 |
| $\langle\{v_1,v_2,v_3\},\ \{v_4,v_5,v_6,v_7,v_8,v_9\}\rangle$ | 1 | 1 | 1 | | 4 |
| $\langle\{v_1,v_2,v_4,v_5,v_6,v_7,v_8,v_9\},\ \{v_3\}\rangle$ | | | 1 | | 2 |
| $\langle\{v_1,v_2,v_4\},\ \{v_3,v_5,v_6,v_7,v_8,v_9\}\rangle$ | 1 | 1 | | 1 | 3 |
| $\langle\{v_1,v_2,v_5,v_6,v_7,v_8,v_9\},\ \{v_3,v_4\}\rangle$ | | | 1 | 1 | 3 |
| $\langle\{v_1,v_2\},\ \{v_3,v_4,v_5,v_6,v_7,v_8,v_9\}\rangle$ | 1 | 1 | | | 3 |
| $\langle\{v_1,v_3,v_4,v_5,v_6,v_7,v_8,v_9\},\ \{v_2\}\rangle$ | | 1 | | | 2 |
| $\langle\{v_1,v_3,v_4\},\ \{v_2,v_5,v_6,v_7,v_8,v_9\}\rangle$ | 1 | | 1 | 1 | 4 |
| $\langle\{v_1,v_3,v_5,v_6,v_7,v_8,v_9\},\ \{v_2,v_4\}\rangle$ | | 1 | | 1 | 2 |
| $\langle\{v_1,v_3\},\ \{v_2,v_4,v_5,v_6,v_7,v_8,v_9\}\rangle$ | 1 | | 1 | | 3 |
| $\langle\{v_1,v_4,v_5,v_6,v_7,v_8,v_9\},\ \{v_2,v_3\}\rangle$ | | 1 | 1 | | 2 |
| $\langle\{v_1,v_4\},\ \{v_2,v_3,v_5,v_6,v_7,v_8,v_9\}\rangle$ | 1 | | | 1 | 4 |
| $\langle\{v_1,v_5,v_6,v_7,v_8,v_9\},\ \{v_2,v_3,v_4\}\rangle$ | | 1 | 1 | 1 | 2 |
| $\langle\{v_1\},\ \{v_2,v_3,v_4,v_5,v_6,v_7,v_8,v_9\}\rangle$ | 1 | | | | 2 |

Одним из покрытий, приводящих к решению задачи, является покрытие, содержащее биклику $\langle\{v_1,v_5,v_6,v_7,v_8,v_9\},\ \{v_2,v_3,v_4\}\rangle$ с элементарной конъюнкцией наименьшего ранга $x_1\ x_3$ и биклику $\langle\{v_1\},\ \{v_2,v_3,v_4,v_5,v_6,v_7,v_8,v_9\}\rangle$ с конъюнкцией $x_4\ x_5$.

Искомую суперпозицию (вид функции φ задан) представляют матрицы

$$\mathbf{X}_1 = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} x_1 & x_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ 1\\2\\3\\4\\5\\6\\7\\8\\9 \end{array},\ \mathbf{F}_1 = \begin{array}{c} g_1 \\ \begin{bmatrix} 1\\0\\0\\0\\1\\1\\1\\1\\1 \end{bmatrix} \end{array};\ \mathbf{X}_2 = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} x_4 & x_5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ 1\\2\\3\\4\\5\\6\\7\\8\\9 \end{array},\ \mathbf{F}_2 = \begin{array}{c} g_2 \\ \begin{bmatrix} 0\\1\\1\\1\\1\\1\\1\\1\\1 \end{bmatrix} \end{array}.$$

Получен результат разделительной бидекомпозиции, представимый следующими формулами (переменные $x_2$, $x_6$ и $x_7$ оказались несущественными аргументами):

$$g_1 = x_1 \oplus x_3, \quad g_2 = x_4 \vee x_5, \quad y = g_1 \oplus g_2.$$

Если для функции из рассмотренного примера нужно получить результат бидекомпозиции с функцией, выражаемой операцией «стрелка Пирса» (отрицание дизъюнкции), т. е. $y = g_1 \uparrow g_2 = \overline{g_1 \vee g_2}$, то исходное задание имеет вид

$$\mathbf{X} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ 1\\2\\3\\4\\5\\6\\7\\8\\9 \end{array},\quad \mathbf{G} = \begin{array}{c} g_1 g_2 \\ \begin{bmatrix} 00 \\ 00 \\ 00 \\ 00 \\ 01, 10, 11 \\ 01, 10, 11 \\ 01, 10, 11 \\ 01, 10, 11 \\ 01, 10, 11 \end{bmatrix} \end{array},\quad \mathbf{F} = \begin{array}{c} y \\ \begin{bmatrix} 1\\1\\1\\1\\0\\0\\0\\0\\0 \end{bmatrix} \end{array}.$$

Здесь матрица **G** определяет множество вершин $W = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$. Граф $G_X$ обладает следующим множеством полезных биклик:

$\langle\{v_1,v_2,v_3,v_4,v_5,v_6,v_7,v_8\}, \{v_9\}\rangle - x_3(x_2 \vee x_4)(x_1 \vee x_4 \vee x_5)(x_2 \vee x_6) =$
$= x_1x_2x_3 \vee x_2x_3x_4 \vee x_2x_3x_5 \vee x_3x_4x_6;$

$\langle\{v_1,v_2,v_3,v_4,v_5,v_6,v_7,v_9\}, \{v_8\}\rangle - x_2(x_3 \vee x_4)(x_1 \vee x_5 \vee x_7) =$
$= x_1x_2x_3 \vee x_1x_2x_4 \vee x_2x_3x_5 \vee x_2x_3x_7 \vee x_2x_4x_5 \vee x_2x_4x_7;$

$\langle\{v_1,v_2,v_3,v_4,v_5,v_6,v_7\}, \{v_8,v_9\}\rangle - x_2x_3(x_1 \vee x_5 \vee x_7)(x_1 \vee x_4 \vee x_5) =$
$= x_1x_2x_3 \vee x_2x_3x_4x_7 \vee x_2x_3x_5;$

$\langle\{v_1,v_2,v_3,v_4,v_5,v_6,v_8,v_9\}, \{v_7\}\rangle - (x_4 \vee x_6)(x_2 \vee x_6)(x_1 \vee x_3 \vee x_5 \vee x_6 \vee x_7) =$
$= x_1x_2x_4 \vee x_2x_3x_4 \vee x_2x_4x_5 \vee x_6 \vee x_2x_4x_7;$

$\langle\{v_1,v_2,v_3,v_4,v_5,v_6,v_8\}, \{v_7,v_9\}\rangle - x_3(x_4 \vee x_6)(x_2 \vee x_4)(x_1 \vee x_4 \vee x_5) =$
$= x_1x_2x_3x_6 \vee x_3x_4 \vee x_2x_3x_5x_6;$

$\langle\{v_1,v_2,v_3,v_4,v_5,v_6,v_9\}, \{v_7,v_8\}\rangle - x_2(x_4 \vee x_6)(x_1 \vee x_5 \vee x_7)(x_3 \vee x_4) =$
$= x_1x_2x_3x_6 \vee x_1x_2x_4 \vee x_2x_3x_5x_6 \vee x_2x_3x_6x_7 \vee x_2x_4x_5 \vee x_2x_4x_7;$

$\langle\{v_1,v_2,v_3,v_4,v_5,v_6\}, \{v_7,v_8,v_9\}\rangle - x_2x_3(x_4 \vee x_6)(x_1 \vee x_5 \vee x_7)(x_1 \vee x_4 \vee x_5) =$
$= x_1x_2x_3x_4 \vee x_1x_2x_3x_6 \vee x_2x_3x_4x_5 \vee x_2x_3x_4x_7 \vee x_2x_3x_5x_6 \vee x_2x_3x_6x_7;$

$\langle\{v_1,v_2,v_3,v_4,v_5,v_7,v_8,v_9\}, \{v_6\}\rangle - x_5(x_1 \vee x_2)(x_1 \vee x_3 \vee x_4 \vee x_7) =$
$= x_1x_5 \vee x_2x_3x_5 \vee x_2x_4x_5 \vee x_2x_5x_7;$

$\langle\{v_1,v_2,v_3,v_4,v_5,v_7,v_8\}, \{v_6,v_9\}\rangle - x_3x_5(x_1 \vee x_2)(x_2 \vee x_4)(x_2 \vee x_6) = x_2x_3x_5 \vee x_1x_3x_4x_5x_6;$

$\langle\{v_1,v_2,v_3,v_4,v_5,v_7,v_9\}, \{v_6,v_8\}\rangle - x_2x_5(x_3 \vee x_4) = x_2x_3x_5 \vee x_2x_4x_5;$

$\langle\{v_1,v_2,v_3,v_4,v_5,v_7\}, \{v_6,v_8,v_9\}\rangle - x_2x_3x_5;$

$\langle\{v_1,v_2,v_3,v_4,v_5,v_8,v_9\}, \{v_6,v_7\}\rangle - x_5(x_1 \vee x_2)(x_1 \vee x_3 \vee x_4 \vee x_7)(x_4 \vee x_6)(x_2 \vee x_6) =$
$= x_1x_5x_6 \vee x_2x_3x_5x_6 \vee x_2x_4x_5 \vee x_2x_5x_6x_7;$

$\langle\{v_1,v_2,v_3,v_4,v_5,v_8\}, \{v_6,v_7,v_9\}\rangle - x_3x_5(x_1 \vee x_2)(x_4 \vee x_6)(x_2 \vee x_4) =$
$= x_1x_3x_4x_5 \vee x_2x_3x_4x_5 \vee x_2x_3x_5x_6;$

$\langle\{v_1,v_2,v_3,v_4,v_5,v_9\}, \{v_6,v_7,v_8\}\rangle - x_2x_5(x_3 \vee x_4)(x_4 \vee x_6) = x_2x_4x_5 \vee x_2x_3x_5x_6;$

$\langle\{v_1,v_2,v_3,v_4,v_5\}, \{v_6,v_7,v_8,v_9\}\rangle - x_2x_3x_5(x_4 \vee x_6) = x_2x_3x_4x_5 \vee x_2x_3x_5x_6;$

$\langle\{v_1,v_2,v_3,v_4,v_6,v_7,v_8,v_9\}, \{v_5\}\rangle - x_2(x_1 \vee x_3 \vee x_4 \vee x_7)(x_1 \vee x_3 \vee x_5 \vee x_6 \vee x_7) =$
$= x_1x_2 \vee x_2x_3 \vee x_2x_4x_5 \vee x_2x_4x_6 \vee x_2x_7;$

$\langle\{v_1,v_2,v_3,v_4,v_6,v_7,v_8\}, \{v_5,v_9\}\rangle - x_2x_3(x_1 \vee x_4 \vee x_5) = x_1x_2x_3 \vee x_2x_3x_4 \vee x_2x_3x_5;$

$\langle\{v_1,v_2,v_3,v_4,v_6,v_7,v_9\}, \{v_5,v_8\}\rangle - (x_3 \vee x_4)(x_1 \vee x_5 \vee x_7)(x_1 \vee x_3 \vee x_5 \vee x_6 \vee x_7) =$
$= x_1x_3 \vee x_1x_4 \vee x_3x_5 \vee x_3x_7 \vee x_4x_5 \vee x_4x_7;$

$\langle\{v_1,v_2,v_3,v_4,v_6,v_7\}, \{v_5,v_8,v_9\}\rangle - x_3(x_1 \vee x_5 \vee x_7)(x_2 \vee x_4)(x_1 \vee x_4 \vee x_5)(x_2 \vee x_6) =$
$= x_1x_2x_3 \vee x_1x_3x_4x_6 \vee x_2x_3x_4x_7 \vee x_2x_3x_5 \vee x_3x_4x_5x_6 \vee x_3x_4x_6x_7;$

$\langle\{v_1,v_2,v_3,v_4,v_6,v_8,v_9\}, \{v_5,v_7\}\rangle - x_2(x_1 \vee x_3 \vee x_4 \vee x_7)(x_4 \vee x_6) =$
$= x_1x_2x_6 \vee x_2x_3x_6 \vee x_2x_4 \vee x_2x_6x_7;$

$\langle\{v_1,v_2,v_3,v_4,v_6,v_8\}, \{v_5,v_7,v_9\}\rangle - x_2x_3(x_4 \vee x_6)(x_1 \vee x_4 \vee x_5) =$
$= x_1x_2x_3x_6 \vee x_2x_3x_4 \vee x_2x_3x_5x_6;$

$\langle\{v_1,v_2,v_3,v_4,v_6,v_9\}, \{v_5,v_7,v_8\}\rangle - (x_3 \vee x_4)(x_1 \vee x_5 \vee x_7)(x_4 \vee x_6)(x_2 \vee x_6) =$
$= x_1x_2x_4 \vee x_1x_3x_6 \vee x_1x_4x_6 \vee x_2x_4x_5 \vee x_2x_4x_7 \vee x_3x_5x_6 \vee x_3x_6x_7 \vee x_4x_5x_6 \vee x_4x_6x_7;$

$\langle\{v_1,v_2,v_3,v_4,v_6\}, \{v_5,v_7,v_8,v_9\}\rangle - x_3(x_1 \vee x_5 \vee x_7)(x_4 \vee x_6)(x_2 \vee x_4)(x_1 \vee x_4 \vee x_5) =$
$= x_1x_2x_3x_6 \vee x_1x_3x_4 \vee x_3x_4x_5 \vee x_3x_4x_7 \vee x_2x_3x_5x_6;$

$\langle\{v_1,v_2,v_3,v_4,v_7,v_8,v_9\}, \{v_5,v_6\}\rangle - x_2x_5;$

$\langle\{v_1,v_2,v_3,v_4,v_7,v_8\}, \{v_5,v_6,v_9\}\rangle - x_2x_3x_5;$

$\langle\{v_1,v_2,v_3,v_4,v_7,v_9\}, \{v_5,v_6,v_8\}\rangle - x_5(x_3 \vee x_4)(x_1 \vee x_2) = x_1x_3x_5 \vee x_1x_4x_5 \vee x_2x_3x_5 \vee x_2x_4x_5;$

$\langle\{v_1,v_2,v_3,v_4,v_7\}, \{v_5,v_6,v_8,v_9\}\rangle - x_3x_5(x_1 \vee x_2)(x_2 \vee x_4)(x_2 \vee x_6) = x_2x_3x_5 \vee x_1x_3x_4x_5x_6;$

$\langle\{v_1,v_2,v_3,v_4,v_8,v_9\}, \{v_5,v_6,v_7\}\rangle - x_2x_5(x_4 \vee x_6) = x_2x_4x_5 \vee x_2x_5x_6;$

$\langle\{v_1,v_2,v_3,v_4,v_8\}, \{v_5,v_6,v_7,v_9\}\rangle - x_2x_3x_5(x_4 \vee x_6) = x_2x_3x_4x_5 \vee x_2x_3x_5x_6;$

$\langle\{v_1,v_2,v_3,v_4,v_9\}, \{v_5,v_6,v_7,v_8\}\rangle - x_5(x_3 \vee x_4)(x_1 \vee x_2)(x_4 \vee x_6)(x_2 \vee x_6) =$
$= x_1x_3x_5x_6 \vee x_1x_4x_5x_6 \vee x_2x_3x_5x_6 \vee x_2x_4x_5.$

При нахождении двухблочного покрытия уместно применить следующее правило редукции: если $i$-я строка таблицы покрытия имеет единицы везде, где имеет единицы $j$-я строка, а вес $j$-й строки не меньше веса $i$-й строки, то $j$-ю строку можно исключить из рассмотрения. После сокращения таблицы покрытия согласно этому правилу она принимает вид табл. 3.

Таблица 3

| Биклики | $v_1v_5$ | $v_1v_6$ | $v_1v_7$ | $v_1v_8$ | $v_1v_9$ | Вес |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\langle\{v_1,v_2,v_3,v_4,v_5,v_6,v_8,v_9\},\ \{v_7\}\rangle$ | | | 1 | | | 1 |
| $\langle\{v_1,v_2,v_3,v_4,v_5,v_6,v_8\},\ \{v_7,v_9\}\rangle$ | | | 1 | | 1 | 2 |
| $\langle\{v_1,v_2,v_3,v_4,v_5,v_6,v_9\},\ \{v_7,v_8\}\rangle$ | | | 1 | 1 | | 3 |
| $\langle\{v_1,v_2,v_3,v_4,v_5,v_6\},\ \{v_7,v_8,v_9\}\rangle$ | | | 1 | 1 | 1 | 4 |
| $\langle\{v_1,v_2,v_3,v_4,v_5,v_7,v_8,v_9\},\ \{v_6\}\rangle$ | | 1 | | | | 2 |
| $\langle\{v_1,v_2,v_3,v_4,v_5,v_7\},\ \{v_6,v_8,v_9\}\rangle$ | | 1 | | 1 | 1 | 3 |
| $\langle\{v_1,v_2,v_3,v_4,v_5,v_9\},\ \{v_6,v_7,v_8\}\rangle$ | | 1 | 1 | 1 | | 3 |
| $\langle\{v_1,v_2,v_3,v_4,v_5\},\ \{v_6,v_7,v_8,v_9\}\rangle$ | | 1 | 1 | 1 | 1 | 4 |
| $\langle\{v_1,v_2,v_3,v_4,v_6,v_7,v_9\},\ \{v_5,v_8\}\rangle$ | 1 | | | 1 | | 2 |
| $\langle\{v_1,v_2,v_3,v_4,v_6,v_7\},\ \{v_5,v_8,v_9\}\rangle$ | 1 | | | 1 | 1 | 3 |
| $\langle\{v_1,v_2,v_3,v_4,v_6,v_8,v_9\},\ \{v_5,v_7\}\rangle$ | 1 | | 1 | | | 2 |
| $\langle\{v_1,v_2,v_3,v_4,v_6\},\ \{v_5,v_7,v_8,v_9\}\rangle$ | 1 | | 1 | 1 | 1 | 3 |
| $\langle\{v_1,v_2,v_3,v_4,v_7,v_8,v_9\},\ \{v_5,v_6\}\rangle$ | 1 | 1 | | | | 2 |
| $\langle\{v_1,v_2,v_3,v_4,v_7\},\ \{v_5,v_6,v_8,v_9\}\rangle$ | 1 | 1 | | 1 | 1 | 3 |
| $\langle\{v_1,v_2,v_3,v_4,v_8\},\ \{v_5,v_6,v_7,v_9\}\rangle$ | 1 | 1 | 1 | | 1 | 4 |
| $\langle\{v_1,v_2,v_3,v_4,v_9\},\ \{v_5,v_6,v_7,v_8\}\rangle$ | 1 | 1 | 1 | 1 | | 3 |

Среди полезных покрытий можно выбрать покрытие, состоящее из биклик $\langle\{v_1,v_2,v_3,v_4,v_7,v_8,v_9\},\ \{v_5,v_6\}\rangle$ и $\langle\{v_1,v_2,v_3,v_4,v_6\},\ \{v_5,v_7,v_8,v_9\}\rangle$ и дающее наиболее простые формулы. У первой из них соответствующая ДНФ имеет только одну элементарную конъюнкцию – $x_2x_5$. Второй биклике соответствует ДНФ $x_1\, x_2\, x_3\, x_6 \vee x_1\, x_3\, x_4 \vee x_3\, x_4\, x_5 \vee x_3\, x_4\, x_7 \vee x_2\, x_3\, x_5\, x_6$, имеющая три элементарные конъюнкции минимального ранга 3. Таким образом, это покрытие дает следующие решения:

$$\mathbf{X}_1 = \begin{array}{c} x_2\ x_5 \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \end{array},\ \mathbf{F}_1 = \begin{array}{c} g_1 \\ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{array};\ \mathbf{X}_2 = \begin{array}{c} x_1\ x_3\ x_4 \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array},\ \text{или}\ \begin{array}{c} x_3\ x_4\ x_5 \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array},\ \text{или}\ \begin{array}{c} x_3\ x_4\ x_7 \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array},\ \mathbf{F}_2 = \begin{array}{c} g_2 \\ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \end{array}.$$

Данные решения выражаются формулами, две из которых представляют разделительные бидекомпозиции:

$$y = g_1 \uparrow g_2,\quad \text{где } g_1 = x_2 x_5,\quad g_2 = x_4(x_1 \vee x_3),\ \text{ или }\ g_2 = x_4(x_3 \vee x_5),\ \text{ или }\ g_2 = x_4(x_3 \vee \bar{x}_7).$$

**Заключение.** Описанный метод бидекомпозиции отличается от многих известных методов прежде всего тем, что не требует задания разбиения множества аргументов исходной функции. Метод не всегда может быть реализован на задачах практической размерности ввиду трудоемкости выполнения первых двух этапов описанного процесса. Однако по сравнению с общим методом параллельной декомпозиции, для которого бидекомпозицию можно считать частным случаем, есть возможность значительно сократить размерность задачи, учитывая особенности этого частного случая. Число полезных биклик сокращается в $2^{|W|}$ раза, где $W$ – множество вершин, которые всегда содержатся в одной и той же доле любой из этих биклик. Кроме того, при решении задачи о покрытии значительно сокращается число покрываемых ребер, а само покрытие должно содержать ровно две биклики. Поиск двухблочных покрытий является, очевидно, задачей полиномиальной сложности. Описанный метод показывает направление поиска решения, что может быть использовано при разработке эвристических методов.

### Список использованных источников

1. Perkowski, M. A. A Survey of Literature on Functional Decomposition, Version IV (Technical Report) / M. A. Perkowski, S. Grygiel. – Portland, USA : Portland State University, Department of Electrical Engineering, 1995. – 188 p.

2. Cortadella, J. Timing-driven logic bi-decomposition / J. Cortadella // IEEE Trans. on Computer-Aided Design of Integrated Circuits and Systems. – 2003. – Vol. 22, no. 6. – P. 675–685.

3. Mishchenko, A. An algorithm for bi-decomposition of logic functions / A. Mishchenko, B. Steinbach, M. Perkowski // Proc. of the 38th Annual Design Automation Conf. (DAC'2001), 18–22 June 2001, Las Vegas, USA. – Las Vegas, 2001. – P. 103–108.

4. Chang, S.-C. Technology mapping for TLU FPGA's based on decomposition of binary decision diagrams / S.-C. Chang, M. Marek-Sadowska, T. Hwang // IEEE Trans. Computer-Aided Design. – 1996. – Vol. 15, no. 10. – P. 1226–1235.

5. Бибило, П. Н. Декомпозиция булевых функций на основе решения логических уравнений / П. Н. Бибило. – Минск : Беларус. навука, 2009. – 211 с.

6. Zakrevskij, A. D. On a special kind decomposition of weakly specified Boolean functions / A. D. Zakrevskij // Second Intern. Conf. on Computer-Aided Design of Discrete Devices (CAD DD'97), 12–14 Nov. 1997, Minsk, Belarus / National Academy of Sciences of Belarus, Institute of Engineering Cybernetics. – Minsk, 1997. – Vol. 1. – P. 36–41.

7. Cheng, D. Bi-decomposition of logical mappings via semi-tensor product of matrices / D. Cheng, X. Xu // Automatica. – 2013. – Vol. 49, no. 7. – P. 1979–1985.

8. Choudhury, M. Bi-decomposition of large Boolean functions using blocking edge graphs / M. Choudhury, K. Mohanram // 2010 IEEE/ACM Intern. Conf. on Computer-Aided Design (ICCAD'2010). – San Jose : IEEE Press, 2010. – P. 586–591.

9. Fišer, P. Small but nasty logic synthesis examples / P. Fišer, J. Schmidt ; ed. by B. Steinbach // Proc. of the 8th Intern. Workshop on Boolean Problems (IWSBP'8), 18–19 Sept. 2008, Freiberg, Germany. – Freiberg, 2008. – P. 183–190.

10. Steinbach, B. Vectorial bi-decomposition for lattices of Boolean functions / B. Steinbach, C. Posthoff ; ed. by B. Steinbach // Further Improvements in the Boolean Domain. – Cambridge Scholars Publishing, 2018. – P. 175–198.

11. Поттосин, Ю. В. Метод многоблочной параллельной декомпозиции системы частичных булевых функций / Ю. В. Поттосин // Информатика. – 2017. – № 3(55). – С. 92–98.

12. Поттосин, Ю. В. Параллельная декомпозиция системы частичных булевых функций / Ю. В. Поттосин // Вестник Томск. гос. ун-та. Управление, вычислительная техника и информатика. – 2018. – № 45. – С. 83–91.

13. Закревский, А. Д. Логические основы проектирования дискретных устройств / А. Д. Закревский, Ю. В. Поттосин, Л. Д. Черемисинова. – М. : Физматлит, 2007. – 592 с.

14. Поттосин, Ю. В. Нахождение в графе максимальных полных двудольных подграфов / Ю. В. Поттосин // Автоматизация логического проектирования дискретных систем. – Минск : Ин-т техн. кибернетики АН Беларуси, 1991. – С. 19–27.

15. Pottosina, S. Finding maximal complete bipartite subgraphs in a graph / S. Pottosina, Yu. Pottosin, B. Sedliak // J. Applied Mathematics. – 2008. – Vol. 1, no. 1. – P. 75–81.

### References

1. Perkowski M. A., Grygiel S. *A Survey of Literature on Functional Decomposition, Version IV (Technical Report).* Portland, USA, Portland State University, Department of Electrical Engineering, 1995, 188 p.

2. Cortadella J. Timing-driven logic bi-decomposition. *IEEE Transactions on Computer-Aided Design of Integrated Circuits and Systems*, 2003, vol. 22, no. 6, pp. 675–685.

3. Mishchenko A., Steinbach B., Perkowski M. An algorithm for bi-decomposition of logic functions. *Proceedings of the 38th Annual Design Automation Conference (DAC'2001), 18–22 June 2001, Las Vegas, USA*. Las Vegas, 2001, pp. 103–108.

4. Chang S.-C., Marek-Sadowska M., Hwang T. Technology mapping for TLU FPGA's based on decomposition of binary decision diagrams. *IEEE Transactions Computer-Aided Design*, 1996, vol. 15, no. 10, pp. 1226–1235.

5. Bibilo P. N. Dekompozicija bulevyh funkcij na osnove reshenija logicheskih uravnenij. *Decomposition of Boolean functions on the base of solving logical equations*. Minsk, Belaruskaja navuka, 2009, 211 p. (in Russian).

6. Zakrevskij A. D. On a special kind decomposition of weakly specified Boolean functions. *Second International Conference on Computer-Aided Design of Discrete Devices (CAD DD'97), Minsk, Belarus, 12–14 November 1997*. National Academy of Sciences of Belarus, Institute of Engineering Cybernetics, Minsk, 1997, vol. 1, pp. 36–41.

7. Cheng D., Xu X. Bi-decomposition of logical mappings via semi-tensor product of matrices. *Automatica*, 2013, vol. 49, no. 7, pp. 1979–1985.

8. Choudhury M., Mohanram K. Bi-decomposition of large Boolean functions using blocking edge graphs. *2010 IEEE/ACM International Conference on Computer-Aided Design (ICCAD'2010)*. San Jose, IEEE Press, 2010, pp. 586–591.

9. Fišer P., Schmidt J. Small but nasty logic synthesis examples. *Proceedings* of the *8th International Workshop on Boolean Problems (IWSBP'8), 18–19 September 2008, Freiberg, Germany*. Freiberg, 2008, pp. 183–190.

10. Steinbach B., Posthoff C. Vectorial bi-decomposition for lattices of Boolean functions. *Further Improvements in the Boolean Domain*. In B. Steinbach (ed.). Cambridge Scholars Publishing, 2018, pp. 175–198.

11. Pottosin Yu. V. Metod mnogoblochnoj parallel'noj dekompozicii sistemy chastichnyh bulevyh funkcij [A method for multi-block parallel decomposition of a system of partial Boolean functions]. Informatika [*Informatics*], 2017, no. 3(55), pp. 92–98 (in Russian).

12. Pottosin Yu. V. Parallel'naja dekompozicija sistemy chastichnyh bulevyh funkcij [Parallel decomposition of a system of partial Boolean functions]. Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naja tehnika i informatika [*Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*], 2018, no. 45, pp. 83–91 (in Russian).

13. Zakrevskij A. D., Pottosin Yu. V., Cheremisinova L. D. Logicheskie osnovy proektirovanija diskretnyh ustrojstv. *Logical Fundamentals for Design of Discrete Devices*. Moscow, Fizmatlit, 2007, 592 p. (in Russian).

14. Pottosin Yu. V. Nahozhdenie v grafe maksimal'nyh polnyh dvudol'nyh podgrafov [Finding maximal complete bipartite subgraphs in a graph]. Avtomatizacija logicheskogo proektirovanija diskretnyh system [*Automation of Logical Design of Discrete Systems*]. Minsk, Institute of Engineering Cybernetics of Academy of Sciences of Belarus, 1991, pp. 19–27 (in Russian).

15. Pottosina S., Pottosin Yu., Sedliak B. Finding maximal complete bipartite subgraphs in a graph. *Journal of Applied Mathematics*, 2008, vol. 1, no. 1, pp. 75–81.

## Информация об авторе

*Поттосин Юрий Васильевич*, кандидат физико-математических наук, ведущий научный сотрудник, Объединенный институт проблем информатики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь.
E-mail: pott@newman.bas-net.by

## Information about the author

*Yuri V. Pottosin*, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Leading Researcher, The United Institute of Informatics Problems of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus.
E-mail: pott@newman.bas-net.by