К МЕТОДАМ ПОСТРОЕНИЯ НАЧАЛЬНЫХ ДОПУСТИМЫХ РЕШЕНИЙ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ЗАДАЧ СЕТЕВОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

Пилипчук Л. А., Полячок Е. Н.
Кафедра компьютерных технологий и систем, УО «Белорусский государственный университет»
Минск, Республика Беларусь
E-mail: pilipchuk@bsu.by

Предложены новые подходы и стратегии построения начальных допустимых решений для сетевых моделей математического программирования.На основе исследования теоретико-графовых свойств базисов экстремальных задач об оптимальных путях и максимальном потоке предложены эффективные вычислительные алгоритмы и технологии построения начальных допустимых решений с применением аппарата теории графов, разреженного матричного анализа и современных достижений теоретической информатики.

Введение

В конструктивной теории математического программирования актуальной задачей является обоснование алгоритмических подходов при создании методов построения начальных допустимых решений задач сетевой оптимизации. Для экстремальных задач об оптимальных путях и максимальном потоке предложены новые подходы и стратегии построения начальных допустимых решений. Разработка эффективных алгоритмов основана на исследование теоретико-графовых свойств сетевых моделей, анализе их вычислительной сложности, применении результатов теоретической информатики и на новых возможностях организации вычислительных процессов, крупных изменениях используемых вычислительных средств, появлением более эффективных языков программирования и многопроцессорных систем.

I. Начальное допустимое решение

Математическая модель задачи о кратчайших путях из узла $s \in I$ в узлы $i \in I\backslash\{s\}$ конечного ориентированного связного графа $G = (I, U)$ с множеством узлов I и множеством дуг U, определенных на $I \times I$, $|I| < \infty$, $|U| < \infty$ имеет следующий вид:

$$\sum_{(i,j)\in U} c_{i,j}x_{i,j} \to \min \tag{1}$$

$$\sum_{j\in I_i^+(U)} x_{i,j} - \sum_{j\in I_i^-(U)} x_{j,i} = \begin{cases} n-1, & i = s, \\ -1, & i \in I\backslash\{s\}, \end{cases} \tag{2}$$

$$0 \le x_{i,j} \le n, (i,j) \in U, n = |I|, x_{i,j} \in \mathbb{N}, \tag{3}$$

где $I_i^+(U) = \{j \in I : (i,j) \in U\}$, $I_i^-(U) = \{j \in I : (j,i) \in U\}$, $x_{i,j}$ – величина дугового потока дуги (i,j), $c_{i,j}$ – стоимость перемещения по дуге (i,j) единицы потока $x_{i,j}$ из узла i в узел j, $x = (x_{i,j}, (i,j) \in U)$ – вектор дуговых потоков. Дуговой поток $x_{i,j}$ любой дуги графа G не превышает $n-1$ единиц, т.е. ограничения $x_{i,j} \le n$, $(i,j) \in U$ из (8) являются излишними. Ограничения (8) примут вид:

$$x_{i,j} \ge 0,\ (i,j) \in U,\ x_{i,j} \in \mathbb{N}. \tag{4}$$

Матрица условий сохранения потока (2) является матрицей инцидентности графа G. Матрица инцидентности графа абсолютно унимодулярная, что гарантирует целочисленность оптимального потока x экстремальной задачи (1), (2), (4). Итак, экстремальная задача (1), (2), (4) состоит в том, чтобы минимизировать общее расстояние, пройденное потоком величины $n-1$ единиц из узла s до всех узлов $i \in I\backslash\{s\}$, при этом в каждом узле $i \in I\backslash\{s\}$ требуется одна единица потока.

Пара $\{x, G_0\}$ – опорный поток, где $x = (x_{ij}, (i,j) \in U)$ – допустимый поток (выполняются ограничения (2), (4)) и $G_0 = (I, U_0)$ – произвольное покрывающее дерево, $U_N = U\backslash U_0$. Базис пространства решений однородной системы, порожденной из системы (2), составляют характеристические векторы $\delta(\tau,\rho) = \left(\delta_{ij}^{\tau\rho}, (i,j) \in U\right)$, $(\tau,\rho) \in U\backslash U_0$. Эффективные алгоритмы построения базиса пространства решений $\{\delta(\tau,\rho), (\tau,\rho) \in U\backslash U_0\}$ приведены в [1, 2]. Покрывающее дерево $G_0 = (I, U_0)$ совпадает с деревом достижимости графа G (существует единственный путь из s в каждый узел $i \in I\backslash\{s\}$). Для узлов $I\backslash\{s\}$ и дуг U_0 дерева достижимости графа G построим биективное отображение узлов $i \in I\backslash\{s\}$ на соответствующие элементы $\{\mathrm{pred}(i), \forall i \in I\backslash\{s\}\}$, где $\mathrm{pred}(i)$ есть отец узла i в корневом дереве, $\mathrm{pred}(s) = 0$. Полученное в результате биекции ориентированное дерево $G_0 = (I, U_0)$ называется корневым деревом графа G с корнем в узле s. Дерево достижимости графа G совпадает с корневым деревом.

Приведем списковые структуры [2 – 4], необходимые для реализации базовых операций с элементами корневых деревьев. Список $\{\text{pred}[i], i \in I\}$ определяет для каждого узла $i \in I$ значение $|\text{pred}[i]|$, которое содержит элемент биективного отображения узла i корневого дерева; знак минус определяет корень узла корневого дерева и может содержать число узлов корневого дерева или другую информацию. Элемент списка $\{d[i], \forall i \in I\}$ определяет направление дуги в корневом дереве $G_0 = (I, U_0)$: если узел i является корнем, то $d[i] = 0$; если дуга $(|\text{pred}[i]|, i) \in U$, то $d[i] = 1$; если дуга $(i, |\text{pred}[i]|) \in U$, то $d[i] = -1$. Список $\{\text{depth}[i], \forall i \in I\}$ определяет для каждого узла $i \in I$ уровень узла i: длину (в дугах) до корня в корневом дереве. Элементы династического обхода [2, 3, 4] корневого дерева хранятся в списке $\{\text{thread}[i], \forall i \in I\}$.

Пусть задано некоторое корневое дерево $G_0 = (I, U_0)$ с корнем в узле s и список $\{\text{pred}[i], i \in I\}$, который определяет для каждого узла $i \in I \backslash \{s\}$ значение предка $|\text{pred}[i]|$ (элемент биективного отображения узла i корневого дерева), $\text{pred}[s] = 0$. Построим начальное допустимое решение $x = (x_{i,j}, (i,j) \in U)$ экстремальной задачи (1), (2), (4). Для дуг опорного потока $\{x, G_0\}$, не входящих в состав дерева $G_0 = (I, U_0)$, величины дуговых потоков положим равными нулю: $x_{i,j} = 0$, $(i,j) \in U_N = U \backslash U_0$.

Теорема 1. Для узла $i \in I \backslash \{s\}$ величина дугового потока $x_{\text{pred}[i],i}$ каждой дуги $(\text{pred}[i], i) \in U_0$ равна количеству узлов поддерева с корнем в узле i.

Обозначим m_i – число узлов поддерева с корнем в узле i.

Теорема 2. Теоретическая оценка сложности алгоритма нахождения последовательности узлов поддерева с корнем в узле i, основанная на применении структур данных: $\{\text{thread}[i], \forall i \in I\}$ и $\{\text{depth}[i], \forall i \in I\}$ равна $O(m_i), \forall i \in I$.

Математическая модель поиска кратчайшего пути между двумя узлами s и t графа $G = \{I, U\}$ имеет имеет следующий вид:

$$\sum_{(i,j) \in U} c_{i,j} x_{i,j} \to \min \tag{5}$$

$$\sum_{j \in I_i^+(U)} x_{i,j} - \sum_{j \in I_i^-(U)} x_{j,i} = \begin{cases} 1, & i = s, \\ -1, & i = t, \\ 0, & i \in I \backslash \{s, t\} \end{cases} \tag{6}$$

$$x_{i,j} \in \{0, 1\}, (i,j) \in U \tag{7}$$

Построим начальное допустимое решение задачи (5) –(7). Величины дуговых потоков для дуг, кроме дуг единственного пути из s в t положим равными нулю. Дуговые потоки дуг единственного пути из узла s в узел t в корневом дереве, которое соответствует покрывающему дереву $G_0 = (I, U_0)$, положим равными 1.

Математическая модель задачи определения *максимального потока* v в сети $G = (I, U)$ имеет следующий вид:

$$v \to \max, \tag{8}$$

$$\sum_{j \in I_i^+(U)} x_{i,j} - \sum_{j \in I_i^-(U)} x_{j,i} = \begin{cases} v, & i = s, \\ -v, & i = t, \\ 0, & i \in I \backslash \{s, t\} \end{cases} \tag{9}$$

$$0 \le x_{i,j} \le d_{i,j},\ (i,j) \in U, \tag{10}$$

где $I_i^+(U) = \{j \in I : (i,j) \in U\}$, $I_i^-(U) = \{j \in I : (j,i) \in U\}$.

Матрица системы (9) – абсолютно унимодулярная, что гарантирует целочисленность оптимального решения $\{x, v\}$[2].

Начальное допустимое решение (x, v) экстремальной задачи (8) – (10) сформируем следующим образом. В сети $G = (I, U)$ построим произвольный путь $L_{s,t}$ из узла s в достижимый узел t. Положим $x_{i,j} = 0$, $(i,j) \in U \backslash L_{s,t}$. Дуговые потоки дуг пути $L_{s,t}$ положим равными величине пропускной способности $d(L_{s,t})$ пути $L_{s,t}$:

$$d(L_{s,t}) = \min\{d_{i,j}, (i,j) \in L_{s,t}\}.$$

II. Заключение

Предложены новые подходы и стратегии построения начальных допустимых решений для экстремальных задач поиска оптимальных путей и задачи о максимальном потоке. На основе исследования комбинаторных свойств сетевых моделей, анализе их вычислительной сложности, применении результатов теоретической информатики, аппарата теории графов, разреженного матричного и сетевого анализа и новых возможностей организации вычислительных процессов предложены эффективные методы построения начальных допустимых решений. Разработанные структурные, алгоритмические и технологические решения могут быть применены в теории математического программирования при создании базисных методов построения оптимальных решений задач потокового программирования.

Список литературы

1. Pilipchuk, L.A. The general solutions of sparse systems with rectangular matrices in the problem of sensors optimal location in the nodes of a generalized graph / L.A. Pilipchuk, O.V. German, A.S. Pilipchuk // Вестник БГУ. Серия 1. Физика. Математика. Информатика. – 2015. – №2. С. 91 – 96.
2. Pilipchuk, L.A. Sparse Linear Systems and Their Applications / L.A. Pilipchuk. – Minsk: BSU, 2013. – 235 p.
3. Ahuja, R.K. Network Flows: Theory, Algorithms, and Applications / R.K. Ahuja, T.L. Magnanti, J.B. Orlin. – New Jersey: Prentice Hall, 1993. – 864 p.
4. Йенсен, П. Потоковое программирование / П. Йенсен, Д. Барнес. – М.: Радио и связь, 1984. – 392 с.