О ЧИСЛЕННЫХ МЕТОДАХ И ТЕХНОЛОГИЯХ ПОСТРОЕНИЯ КРАТЧАЙШИХ ПУТЕЙ

Пилипчук Л. А., Полячок Е. Н., Лобко А. Э., Шкурский Д. А.
Кафедра компьютерных технологий и систем, УО «Белорусский государственный университет»
Минск, Республика Беларусь
E-mail: pilipchuk@bsu.by, artem1102zx@gmail.com, daniilshkurski@gmail.com

Работа посвящена исследованию эффективности алгоритмов поиска кратчайших путей в графе с использованием новых возможностей организации вычислительных процессов, заложенных в высокоуровневых языках программирования, которые имеют в наличии дополнительные структуры и библиотеки для прикладного использования. Применяются новые технологии разреженного матричного и сетевого анализа в синтезе с современными достижениями в области теоретической информатики.

Введение

В различных технических, экономических, информационных, экологических, транспортных и других системах актуальной проблемой является создание эффективных вычислительных методов, алгоритмов и технологий для решения задачи поиска оптимальных путей в графе. Крупные изменения используемых вычислительных средств, улучшение характеристик вычислительной техники, ее быстродействия и оперативной памяти, появление многопроцессорных систем и новых возможностей организации вычислительных процессов, заложенных в высокоуровневых языках программирования, которые имеют в наличии дополнительные структуры и библиотеки для прикладного использования, позволяют создать эффективные вычислительные алгоритмы построения оптимальных (субоптимальных) решений задачи об оптимальных путях с использованием методов динамического программирования [1] и базисных методов [2], основанных на концепциях симплекс-метода, с использованием результатов теории графов, разреженного матричного анализа в синтезе с современными достижениями в области теоретической информатики.

I. Принцип динамического программирования для задачи о кратчайшем пути. Уравнение Беллмана

Задан конечный ориентированный связный граф $G = (I, U)$ с множеством узлов I и множеством дуг U. Обозначим $I_i^+(U) = \{j \in I : (i,j) \in U\}$, $I_i^-(U) = \{j \in I : (j,i) \in U\}$, $x_{i,j}$ – величина дугового потока дуги (i,j), $c_{i,j}$ - стоимость перемещения единицы дугового потока $x_{i,j}$ по дуге (i,j), $c(L_{s,t})$ – стоимость пути $L_{s,t}$ из узла s в достижимый узел t,

$$c(L_{s,t}) = \sum_{(i,j)\in L_{s,t}} c_{i,j}x_{i,j}.$$

Математическая модель задачи поиска кратчайшего пути из узла s в достижимый узел t графа $G = (I, U)$ имеет следующий вид:

$$\sum_{(i,j)\in U} c_{i,j}x_{i,j} \to \min \tag{1}$$

$$\sum_{j\in I_i^+(U)} x_{i,j} - \sum_{j\in I_i^-(U)} x_{j,i} = \begin{cases} 1, & i = s, \\ -1, & i = t, \\ 0, & i \in I \setminus \{s,t\}, \end{cases} \tag{2}$$

$$x_{i,j} \geq 0,\ (i,j) \in U, \quad x_{i,j} \in \mathbb{N}, \tag{3}$$

Построим начальное допустимое решение задачи (1) – (3). Величины дуговых потоков для дуг произвольного пути $L_{s,t}$ из узла s в узел t положим равными единице. Дуговые потоки остальных дуг графа $G = (I, U)$ положим равными 0. Стоимость $c(L_{s,t})$ пути $L_{s,t}$ из узла s в достижимый узел t равна

$$c(L_{s,t}) = \sum_{(i,j)\in L_{s,t}} c_{i,j}x_{i,j} = \sum_{(i,j)\in L_{s,t}} c_{i,j}.$$

Длину кратчайшего пути из узла s в произвольный достижимый узел i обозначим B_i (функция Беллмана). Согласно принципу динамического программирования [1] функция B_i удовлетворяет уравнению Беллмана

$$B_j = \min_{i\in I_j^-(U)} \{B_i + c_{i,j}\},\ j \neq s,\ j \in I \tag{4}$$

с краевым условием

$$B_s = 0 \tag{5}$$

при условии, что в графе $G = (I, U)$ нет отрицательных контуров, $I_j^-(U) = \{i : (i,j) \in U\}$.

Если $B_i, i \in I$ является решением уравнения Беллмана (4) с краевым условием (5) и $\{i,\, i_k,\, i_{k-1},\, \ldots,\, i_2,\, s)\}$ – последовательность узлов, найденная из соотношений

$$B_i = B_{i_k} + c_{i_k,i} = \min_{j\in I_i^-(U)} (B_j + c_{j,i}),$$

$$B_{i_k} = B_{i_{k-1}} + c_{i_{k-1},i_k} = \min_{j\in I_{i_k}^-(U)} (B_j + c_{j,i_k}),$$

$$\ldots$$

$$B_{i_2} = B_s + c_{s,i_2} = \min_{j \in I^-_{i_2}(U)} (B_j + c_{j,i_2}),$$

то последовательность дуг

$$(s, i_2),\ (i_2, i_3),\ \ldots,\ (i_k, i)$$

составляет кратчайший путь из узла s в узел i.

II. Базисные решения задачи о кратчайших путях

Математическая модель задачи поиска кратчайших путей из узла s в достижимые узлы $I \backslash \{s\}$ графа $G = (I, U)$ имеет следующий вид:

$$\sum_{(i,j) \in U} c_{i,j} x_{i,j} \to \min \tag{6}$$

$$\sum_{j \in I^+_i(U)} x_{i,j} - \sum_{j \in I^-_i(U)} x_{j,i} = \begin{cases} n-1, & i = s, \\ -1, & i \in I \backslash \{s\}, \end{cases} \tag{7}$$

$$x_{i,j} \geq 0,\ (i,j) \in U,\ n = |I|,\ x_{i,j} \in \mathbb{N}, \tag{8}$$

$I^+_i(U) = \{j \in I : (i,j) \in U\}$, $I^-_i(U) = \{j \in I : (j,i) \in U\}$.

Экстремальная задача (6) – (8) состоит в том, чтобы минимизировать общее расстояние, пройденное потоком величины $n-1$ единиц из узла s до всех узлов $I \backslash \{s\}$, при этом в каждом узле $I \backslash \{s\}$ требуется одна единица потока, $n = |I|$.

Пусть задано начальное базисное множество дуг U_0, представляющее собой покрывающее дерево $G_0 = (I, U_0)$, при этом, G_0 – *дерево достижимости* из узла s (для $\forall i \in I \backslash \{s\}$ существует единственный путь из узла s). Следуя [2] построим начальное допустимое решение задачи (1) – (3) [2]. Опорный поток $\{x, U_0\}$ является невырожденным, так как для дуговых потоков дуг корневого дерева выполняются условия $x_{i,j} > 0$, $(i,j) \in U_0$, при этом, допустимые решения $x = (x_{i,j}, (i,j) \in U)$ экстремальной задачи (6) – (8) являются целочисленными.

Подсчитаем оценки $\Delta_{\tau\rho}, (i,j) \in U_N = U \backslash U_0$

$$\Delta_{\tau\rho} = c_{\tau\rho} + \sum_{(i,j) \in U_0} c_{ij} \delta^{\tau\rho}_{ij} = \sum_{(i,j) \in L(\tau,\rho)} c_{ij} \delta^{\tau\rho}_{ij} =$$

$$= c_{\tau\rho} - (u_\tau - u_\rho), (\tau, \rho) \in U_N,$$

где $u_i, i \in I$ – потенциалы, которые вычисляются из системы:

$$u_i - u_j = c_{i,j},\ (i,j) \in U_0,\ u_s = 0.$$

В [2] представлены структурные и алгоритмические решения задачи (6) – (8) построения оптимальных путей в графе с использованием технологий разреженного матричного и сетевого анализа в синтезе с современными достижениями в области теоретической информатики.

При разработке конструктивной теории решения экстремальной задачи поиска кратчайших путей из заданного узла во все достижимые узлы особое внимание уделено специфике корневых деревьев и эффективной реализации поиска наименьшего общего предка при построении фундаментального цикла, удалению дуги из дерева и слиянию корневых деревьев. С применением результатов теоретической информатики разработаны алгоритмы и структуры данных для хранения и преобразования корневых деревьев. Разработан эффективный алгоритм построения начального допустимого решения с использованием алгоритма поиска поддерева с корнем в заданном узле. Для повышения эффективности базисного метода в силу специфики условий оптимальности для допустимого опорного потока $\{x, U_0\}$ и свойств корневого дерева U_0 совокупность операций $\{x, U_0\} \to \{\overline{x}, \overline{U}_0\}$ итерационного процесса сводится преобразования корневых деревьев $U_0 \to \overline{U}_0$. В результате структурных преобразований корневых деревьев получено дерево кратчайших путей $\widetilde{U}_0$ (выполняются условия оптимальности). Дуговой поток $\widetilde{x}_{pred[i],i}$ дуги $(pred[i], i)$ равен числу узлов поддерева с корнем в узле $i \in I$ для оптимального решения $\widetilde{x}$ [2].

III. Заключение

Рассматриваются методы построения оптимальных решений задачи об оптимальных путях с использованием методов динамического программирования [1] и базисных методов [2]. При создании вычислительных методов построения оптимальных решений задач о кратчайших путях, особое внимание уделяется разработке алгоритмических, структурных и технологических решений, основанных на современных достижениях теоретической информатики и результатах разреженного матричного и сетевого анализа

Список литературы

1. Романовский И. В. Перебор субоптимальных решений в дискретных задачах оптимизации / И. В. Романовский // Компьютерные инструменты в образовании. – 6, 2012. – С. 25 – 34.
2. Пилипчук, Л.А. Оптимальные пути: алгоритмические, структурные и технологические решения / Л.А. Пилипчук [и др.] // Веснік Гродзенскага дзяржаўнага ніверсітэта імя Янкі Купалы. Серыя 2. Матэматыка. Фізіка. Інфарматыка, вылічальная тэхніка і кіраванне. – Т 10 (3), 2020. – С. 143 – 151.