ОБ ОДНОМ СВОЙСТВЕ ХАОТИЧЕСКИХ ПОТОКОВ С КРИВОЙ РАВНОВЕСИЯ

Цегельник В. В.
Кафедра высшей математики, Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники
Минск, Республика Беларусь
E-mail: tsegvv@bsuir.by

Исследован характер возможных подвижных особых точек решений динамических систем со скрытыми аттракторами и линией равновесия. Показано, что ни одна из четырех систем данного семейства не проходит тест Пенлеве. Проведен Пенлеве-анализ решений семейства из пяти динамических систем, обладающих хаотическим поведением и имеющих частные решения без подвижных особых точек. Доказано, что ни одна из систем указанного семейства не является системой Пенлеве-типа.

Введение

Общепризнанно, что математически простые системы дифференциальных уравнений могут проявлять хаос. С появлением быстродействующих компьютеров предоставляется возможным исследовать все пространство параметров этих систем с целью поиска параметров, которые приводят к некоторым желаемым характеристикам системы [1].

Так как одним из ключевых факторов в расчете колебаний нелинейных динамических систем является область притяжения, аттракторы можно разделить на самовозбуждающиеся и скрытые [2]. Самовозбуждающийся аттрактор имеет бассейн притяжения, который ассоциируется с неустойчивым равновесием. Скрытый аттрактор – это аттрактор, область притяжения которого не содержит окрестностей равновесия.

В работе [3], используя систематический компьютерный поиск, были найдены четыре простых хаотических потока с кубическими нелинейностями

$$\begin{cases} \dot{x} = z, \\ \dot{y} = -z(y^2 + xz), \\ \dot{z} = x^2 + y^2 - 1 + z(y^2 - z^2 + x^2), \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} \dot{x} = -z, \\ \dot{y} = z(z^2 - 1), \\ \dot{z} = x^2 - y^2 - 1 + z(y^2 - z^2), \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} \dot{x} = 0,6z, \\ \dot{y} = z(0,3y^2 + 0,5xz), \\ \dot{z} = y^2 - 1 - xyz, \end{cases} \quad (3)$$

$$\dot{x} = -2z, \dot{y} = -z^3, \dot{z} = x^2 + y + z(z - xy), \quad (4)$$

для которых характерна необычная черта обладания кривой равновесия. Такие системы принадлежат к вновь представленному классу хаотических систем со скрытыми аттракторами, которые важны в инженерных исследованиях, поскольку они допускают неожиданные и потенциально катастрофические реакции на возмущения в такой конструкции, как мост или крыло самолета.

I. Постановка задачи

Целью работы является исследование характера возможных подвижных особых точек (т.е. точек, положение которых зависит от начальных условий) решений динамических систем (1)–(4), а также

$$\dot{x} = y,\ \dot{y} = z,\ \dot{z} = -x - 4y^2 + 11xz + 7yz, \quad (5)$$

$$\dot{x} = y, \dot{y} = z, \dot{z} = -z + 0,7x^2 - y^2 + 0,7xy + xy, \quad (6)$$

$$\dot{x} = y, \dot{y} = z, \dot{z} = -5x - 4y - y^2 + xz, \quad (7)$$

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = z, \\ \dot{z} = -x - y - z - y^2 - z^2 + xy + yz + 1, \end{cases} \quad (8)$$

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = z, \\ \dot{z} = -1,01x - y - 1,02z - y^2 + xy + 1 \end{cases} \quad (9)$$

с неизвестными функциями x, y, z в предложении, что независимая переменная t является комплексной.

Каждая из систем (5)–(9) имеет хаотическое поведение [4] и вместе с тем допускает частные решения без подвижных особых точек. А именно, системы (5)–(7) имеют решения

$$x = e^{-\tau}, y = -e^{-\tau}, z = e^{-\tau},$$

а системы (8)–(9) – решения

$$x = \varepsilon \sin\tau, y = \varepsilon\cos\tau, z = -\varepsilon\sin\tau,$$

где $\tau = t - t_0$ (t_0 – произвольная постоянная), $\varepsilon^2 = 1$.

II. Алгоритм

Для решения поставленной задачи использован тест Пенлеве [5], представляющий набор условий, необходимых для отсутствия у общего решения системы дифференциальных уравнений подвижных критических особых точек (свойство Пенлеве). Для анализа решений систем (5)–(9) использован подход, заключающийся в замене каждой из них эквивалентным уравнением третьего порядка и сравнением его с известными уравнениями, являющимися уравнениями Пенлеве–типа.

III. Выводы

Установлено, что ни одна из систем (1)–(4) не проходит тест Пенлеве. Показано, что ни одна из систем (5)–(9) не является системой Пенлеве-типа. Полученный результат согласуется с известной гипотезой [5], согласно которой выполнение для системы свойства Пенлеве с большой долей уверенности считается несовместимым с хаотичностью ее поведения.

С помощью теста Пенлеве в [6] был проведен Пенлеве-анализ решений систем дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = xy, \dot{y} = xz, \dot{z} = x(-x + 1,54y^2 - xz), \quad (10)$$

$$\dot{x} = xy, \dot{y} = x(-x + z), \dot{z} = x(3y^2 - xz), \quad (11)$$

$$\dot{x} = x(y^2 + 2xy), \dot{y} = -xz, \dot{z} = x(1 + xy), \quad (12)$$

$$\dot{x} = -yz, \dot{y} = x(x+z), \dot{z} = z(2y^2+xz-0,35), \quad (13)$$

$$\begin{cases} \dot{x} = -0,4xyz, \\ \dot{y} = xy(1 + z^2 - xy), \\ \dot{z} = xy(x^2 - xy), \end{cases} \quad (14)$$

$$\begin{cases} \dot{x} = xyz(y + 2yz), \\ \dot{y} = xyz(8z + y^2 + 7z^2), \\ \dot{z} = xyz(x^2 - y^2), \end{cases} \quad (15)$$

$$\begin{cases} \dot{x} = 0,4y(1 - x^2 - y^2 - z^2), \\ \dot{y} = xz(1 - x^2 - y^2 - z^2), \\ \dot{z} = (1 - x^2 - y^2 - z^2)(-z - x^2 - 6yz), \end{cases} \quad (16)$$

$$\begin{cases} \dot{x} = (1 + y^2)(1 - x^2 - y^2 - z^2), \\ \dot{y} = (5x^2 - y)(1 - x^2 - y^2 - z^2), \\ \dot{z} = -xy(1 - x^2 - y^2 - z^2), \end{cases} \quad (17)$$

$$\begin{cases} \dot{x} = (y^2 - 5xy)(1 - x^2 - y^2), \\ \dot{y} = xz(1 - x^2 - y^2), \\ \dot{z} = (1 - 7y^2)(1 - x^2 - y^2), \end{cases} \quad (18)$$

$$\begin{cases} \dot{x} = (0,1 - z^2)(1 + x^2 - y^2), \\ \dot{y} = xz(1 + x^2 - y^2), \\ \dot{z} = (y + xz)(1 + x^2 - y^2), \end{cases} \quad (19)$$

$$\begin{cases} \dot{x} = yz(z + x^2 + y^2), \\ \dot{y} = (x - xz)(z + x^2 + y^2), \\ \dot{z} = (x - 0,6z^2)(z + x^2 + y^2), \end{cases} \quad (20)$$

$$\begin{cases} \dot{x} = yz(z + x^2 - y^2), \\ \dot{y} = -0,1x(z + x^2 - y^2), \\ \dot{z} = (-z + 6y^2 + xz)(z + x^2 - y^2). \end{cases} \quad (21)$$

Системы (10)–(21) представляют новый класс хаотических систем со скрытыми аттракторами: системы с поверхностями равновесия. Они получены в [7] используя систематический компьютерный поиск. Доказано, что ни одна из систем (10)–(21) не проходит тест Пенлеве.

1. Sprott, J. C. Elegant chaos: Algebraically simple chaotic flows / J. C. Sprott. – World scientific: Singapore, 2010. – 304 p.
2. Леонов, Г. А., Кузнецов, Н. В. Скрытые колебания в динамических системах: шестнадцатая проблема Гильберта, гипотезы Айзермана и Кальмана, скрытые аттракторы в контурах Чуа / Г. А. Леонов, Н. В. Кузнецов // Современная математика. Фундаментальные направления. – 2012. – Т. 26. – С. 105–121.
3. Barati, K., Jafari, S., Sprott, J. C., Pham, V. -T. Simple chaotic flows with a curve of equilibria / K. Barati, S. Jafari, J. C. Sprott, V. -T. Pham // International Journal of Bifurcation and Chaos. – 2016. – Vol. 26, № 12. – P. 1630034 -1–6.
4. Faghani, Z., Nazarimehr, F., Jafari, S., Sprott, J. C. Simple chaotic systems with specific analytical solutions / Z. Faghani, F. Nazarimehr, S. Jafari, J. C. Sprott // International Journal of Bifurcation and Chaos. – 2019. – Vol. 29, № 9. – P. 1950116 -1–11.
5. Гориэли, А. Интегрируемость и сингулярность / А. Гориэли // М. – Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика»; Институт компьютерных исследований, 2006.– 316 с.
6. Цегельник, В. В. Аналитические свойства решений семейства трехмерных автономных хаотических систем с поверхностями равновесия / В. В. Цегельник // Математическое моделирование и дифференциальные уравнения: материалы IV междунар. науч. конф., посвященной 95–летию со дня рождения чл.-кор. АН БССР, проф. Иванова Е. А. (Респ. Беларусь, Гродно, 17 –19 дек. 2019 г.) / Ин-т математики НАН Беларуси. БГУ, ГрГУ им. Я. Купалы, редкол.: В. И. Корзюк (гл. ред.) и др. – Гродно: ГрГУ, 2019. – С. 99.
7. Jafari, S., Sprott, J. C., Pham, V. -T., Volos, C., Li, C. Simple chaotic 3D flows with surfaces of equilibria / S. Jafari, J. C. Sprott, V. -T. Pham, C. Volos, C. Li // Nonlin. Dynamics. – 2016. – Vol. 86. – P. 1349–1358.