ИССЛЕДОВАНИЕ РОБАСТНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ СИСТЕМЫ ПО ОДНОМУ ПАРАМЕТРУ В КЛАССЕ КАТАСТРОФЫ «ГИПЕРБОЛИЧЕСКАЯ ОМБИЛИКА»

Бейсенби М. А., Исатаева Г. С., Марков А. В.
Кафедра системного анализа и управления, Евразийский национальный университет им. Л.Н. Гумилева
Кафедра систем управления, Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектороники
Нур-Султан, Казахстан; Минск, Республика Беларусь
E-mail: beisenbi@mail.ru, gainel.issatayeva@gmail.com, markov@bsuir.by

Введение

Одним из ключевых направлений современной теории автоматического управления является анализ и синтез систем управления в условиях неопределенности. Это связано с различными факторами, такими как: неточное знание математической модели технологических процессов и технических объектов, упрощение описания модели, понижение степени сложности или пренебрежение имеющимися нелинейностями. Вследствие чего возникает потребность в создании таких автоматических систем, которые при изменении параметров объекта и влиянии внешних возмущений оставались бы не только в устойчивом состоянии, но и обеспечивали бы необходимое качество функционирования. Исследование и синтез таких систем проводятся в рамках теории робастного управления. Идея робастного проектирования заключается в нахождении таких установок управляющих параметров, при которых влияние шумовых факторов на выходные характеристики было бы минимальным [1]. В статье представлен универсальный подход к построению вектор-функции Ляпунова [2], основанный на геометрической интерпретации теоремы об асимптотической устойчивости прямого метода Ляпунова и понятиях устойчивости.

I. Постановка задачи

Будем рассматривать стационарную замкнутую систему управления с одним входом и одним выходом. Система описывается уравнением состояния:

$$\dot{x} = Ax + Bu \tag{1}$$

где $x(t) \in R^n$ — вектор состояния объекта; $u(t) \in R^1$ — скалярная функция управляющих воздействий; A — матрица объекта управления с неопределенными параметрами $n \times n$; B — матрица управления размерности $m \times 1$. Матрицы A и B имеют следующий вид:

$$A = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \dots & -a_1 \end{Vmatrix}, \quad B = \begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{Vmatrix}$$

Закон управления $u(t)$ в замкнутом контуре задан в форме трехпараметрических структурно-устойчивых отображений — катастрофы «гиперболическая омбилика» [3,4]:

$$u(x) = \frac{1}{b_n}(-x_1^3 - x_2^3 - k_1 x_1 x_2 + k_2 x_2 + k_3 x_1) \tag{2}$$

II. Методы исследования

Систему управления (1) в развернутом виде можно представить как:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_3 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} = x_n \\ \dot{x}_n = -x_1^3 - x_2^3 - k_1' x_1 x_2 - (a_n - k_1)x_1 - \\ -(a_{n-1} - k_2)x_2 - a_{n-2}x_3 - \ldots - a_2 x_{n-1} - a_1 x_n \end{cases} \tag{3}$$

Стационарные состояния системы определяются решением уравнения:

$$\begin{gathered} x_{2S} = 0, x_{3S} = 0, \ldots, x_{n-1,S} = 0 \\ -x_{1S}^3 - x_{2S}^3 - k_1' x_{1S} x_{2S} - (a_n - k_1)x_{1S} - \\ -(a_{n-1} - k_2)x_{2S} - a_{n-2}x_{3S} - \ldots - a_1 x_{nS} = 0 \end{gathered} \tag{4}$$

Найдем стационарные состояния из уравнения (4):

$$x_{1S} = 0, x_{2S} = 0, \ldots, x_{nS} = 0 \tag{5}$$

Другие стационарные состояния могут быть определены решением уравнений:

$$\begin{gathered} -x_{1S}^2 - a_n + k_1 = 0, x_{2S} = 0, \\ x_{3S} = 0, \ldots, x_{nS} = 0 \end{gathered} \tag{6}$$

Уравнения (6) будут иметь мнимые решения при отрицательных $k_1 - a_n (k_1 - a_n < 0)$. Это не может соответствовать какой-либо физически возможной ситуации [5]. При $k_1 - a_n > 0$ уравнения (6) допускают следующие стационарные состояния:

$$\begin{cases} x_{1S}^1 = \sqrt{k_1 - a_n}, x_{2S} = 0, \ldots, x_{nS} = 0, \\ x_{1S}^2 = -\sqrt{k_1 - a_n}, x_{2S} = 0, \ldots, x_{nS} = 0 \end{cases} \tag{7}$$

Исследование устойчивости стационарных состояний (5) и (7) системы (1) будет проводиться методом вектор-функции Ляпунова [6].

Рассмотрим устойчивость стационарного состояния (5). Компоненты вектора градиента от вектор-функции Ляпунова могут быть определены из (3):

$$\begin{cases} \dfrac{\partial V_1(x)}{\partial x_1} = 0, \dfrac{\partial V_1(x)}{\partial x_2} = -x_2, \dfrac{\partial V_1(x)}{\partial x_3} = 0, \ldots, \dfrac{\partial V_1(x)}{\partial x_n} = 0, \\ \dfrac{\partial V_2(x)}{\partial x_1} = 0, \dfrac{\partial V_2(x)}{\partial x_2} = 0, \dfrac{\partial V_2(x)}{\partial x_3} = -x_3, \ldots, \dfrac{\partial V_2(x)}{\partial x_n} = 0, \\ \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \\ \dfrac{\partial V_n(x)}{\partial x_1} = x_1^3 + \dfrac{1}{2}k_1' x_1 x_2 + (a_n - k_1)x_1, \\ \dfrac{\partial V_n(x)}{\partial x_2} = x_2^3 + \dfrac{1}{2}k_1' x_1 x_2 + (a_{n-1} - k_2)x_2, \\ \dfrac{\partial V_n(x)}{\partial x_3} = a_{n-2}x_3, \ldots, \dfrac{\partial V_n(x)}{\partial x_n} = a_1 x_n \end{cases}$$

Разложение компонентов вектора скорости на координаты [6] найдем из уравнения состояния (3):

$$\begin{cases} \left(\dfrac{dx_1}{dt}\right)_{x_1} = 0, \left(\dfrac{dx_1}{dt}\right)_{x_2} = x_2, \\ \left(\dfrac{dx_1}{dt}\right)_{x_3} = 0, \ldots, \left(\dfrac{dx_1}{dt}\right)_{x_n} = 0 \\ \left(\dfrac{dx_2}{dt}\right)_{x_1} = 0, \left(\dfrac{dx_2}{dt}\right)_{x_2} = 0, \\ \left(\dfrac{dx_2}{dt}\right)_{x_3} = x_3, \ldots, \left(\dfrac{dx_2}{dt}\right)_{x_n} = 0 \\ \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \\ \left(\dfrac{dx_{n-1}}{dt}\right)_{x_1} = 0, \left(\dfrac{dx_{n-1}}{dt}\right)_{x_2} = 0, \\ \left(\dfrac{dx_{n-1}}{dt}\right)_{x_3} = 0, \ldots, \left(\dfrac{dx_{n-1}}{dt}\right)_{x_n} = x_n \\ \left(\dfrac{dx_n}{dt}\right)_{x_1} = -x_1^3 - \dfrac{1}{2}k_1' x_1 x_2 - (a_n - k_1)x_1, \\ \left(\dfrac{dx_n}{dt}\right)_{x_2} = -x_2^3 - \dfrac{1}{2}k_1' x_1 x_2 - (a_{n-1} - k_2)x_2, \\ \left(\dfrac{dx_n}{dt}\right)_{x_3} = -a_{n-2}x_3, \ldots, \left(\dfrac{dx_n}{dt}\right)_{x_n} = -a_1 x_n \end{cases}$$

Полная производная по времени от вектор-функции Ляпунова определяется как скалярное произведение:

$$\begin{aligned} \frac{dV(x)}{dt} &= \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial V_i(x)}{\partial x_j}\left(\frac{dx_i}{dt}\right)_{x_j}\right) = \\ &= -x_2^2 - x_3^2 - \ldots - x_n^2 - \\ &- \left(x_1^3 + \frac{1}{2}k_1' x_1 x_2 + (a_n - k_1)x_1\right)^2 - \\ &- \left(x_2^3 + \frac{1}{2}k_1' x_1 x_2 + (a_{n-1} - k_2)x_2\right)^2 - \\ &- (a_{n-2}x_3)^2 - \ldots - (a_1 x_n)^2 \end{aligned} \tag{8}$$

Как мы можем увидеть из (8), полная производная от вектор-функции Ляпунова всегда отрицательно-определенная функция, т.е. всегда выполняется достаточное условие асимптотической устойчивости системы.

Построим функцию Ляпунова в следующем виде по градиенту этой функции:

$$\begin{aligned} V(x) =& \frac{1}{4}x_1^4 + \frac{1}{4}x_2^4 + \frac{1}{4}k_1' x_1^2 x_2^2 + \frac{1}{2}(a_n - k_1 - 1)x_1^2 + \\ &+ \frac{1}{2}(a_{n-1} - k_2 - 1)x_2^2 + \\ &+ \frac{1}{2}(a_{n-2} - 1)x_3^2 + \ldots + \frac{1}{2}(a_1 - 1)x_n^2 \end{aligned} \tag{9}$$

Если $k_1' > 0$, то положительная определенность функции Ляпунова (9) определяется условиями:

$$\begin{cases} a_n - k_1 - 1 > 0 \\ a_{n-1} - k_2 - 1 > 0 \\ a_{n-2} - 1 > 0 \\ \vdots \\ a_1 - 1 > 0 \end{cases} \tag{10}$$

Таким образом, стационарное состояние (5) системы (3) будет асимптотически устойчивым при $k_1' > 0$, если условия (10) выполняются.

Заключение

В статье был предложен новый подход к исследованию робастной устойчивости системы управления, полученный из геометрической интерпретации теоремы А.М. Ляпунова. Функция Ляпунова синтезируется в форме вектор-функции, антиградиент которой задается компонентами вектора скорости (правой частью уравнения состояния) системы в форме тензора. Условия устойчивости получаются из положительной определенности вектор-функции Ляпунова в форме системы неравенств по неопределенным параметрам объектов управления и заданным параметрам регулятора. В конечном итоге, исследования показывают, что система управления с повышенным потенциалом робастной устойчивости для линейных объектов с одним входом и одним выходом асимптотически устойчива в положительной и отрицательно определенных областях стационарных состояний неопределенных параметров объекта управления. Стационарные состояния системы определяются путем синтеза закона управления в классе катастрофы «гиперболическая омбилика».

1. Ковриго, Ю. М. Синтез робастного регулятора для объектов с изменяющимися параметрами /Ю. М. Ковриго, Т. Г. Баган // Доклады БГУИР – 2015. – № 2. – С. 168–171.
2. Бейсенби, М. А. Построение функции Ляпунова в исследовании робастной устойчивости линейных систем /М. А. Бейсенби, Ж. Ж. Ермекбаева // Вестник КазНТУ им. К.Сатпаева. – Алматы, 2013. – № 1. – С. 315-320.
3. Бейсенби, М. А. Системы управления с повышенным потенциалом робастной устойчивости /М. А. Бейсенби, Б. А. Ержанов. – Астана, 2002. – 164 с.
4. Бейсенби, М. А. Методы повышения эффективности робастной устойчивости систем управления. – Астана, 2011. – 352 с.
5. Gregoire Nicolis, Prigogine Ilya. Exploring Complexity: An introduction. – New York: W.H. Freeman and Company, 1989.
6. Бейсенби, М. А. Исследование робастной устойчивости систем автоматического управления методом функции А.М. Ляпунова. – Астана: DR-Project Publ., 2015.