ОРТОГОНАЛИЗАЦИЯ СИСТЕМЫ ДНФ БУЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ

Кардаш С. Н.
Объединённый институт проблем информатики Национальной академии наук Беларуси
Минск, Республика Беларусь
E-mail: gold@newman.bas-net.by

Предлагается новый алгоритм ортогонализации системы дизъюнктивных нормальных форм булевых функций.

I. Введение

Для решения многих задач синтеза, диагностики и анализа надежности технических систем используется представление булевых функций в виде дизъюнктивных нормальных форм (ДНФ). Часто бывает полезно иметь такие ДНФ, в которых все входящие в них элементарные конъюнкции взаимно ортогональны. Для получения таких ДНФ необходимо проводить ортогонализацию исходных систем ДНФ. В работе [1] даны как необходимые понятия, так и некоторые идеи, способствующие решению этой задачи. В настоящей работе приводится алгоритм, на основе которого разработана компьютерная программа, решающая задачу ортогонализации системы ДНФ и некоторые результаты ее экспериментального исследования.

В случае небольшого числа переменных задачу ортогонализации ДНФ можно решить, разложив дизъюнктивно каждую элементарную конъюнкцию по всем отсутствующим в ней переменным, и после приведения подобных получить в результате совершенную ДНФ. Однако такой способ может оказаться неприемлем, когда переменных много. В частности, для системы ДНФ, зависящих от n переменны, число конъюнкций в ортогонадизованной системе может достигать 2^n.

Предлагаемый ниже алгоритм основан на идее дизъюнктивного разложения элементарной конъюнкции на серию других конъюнкций, каждая из которых либо ортогональна всем конъюнкциям из некоторой совокупности, либо поглощается одной из них. В последнем случае поглощаемая конъюнкция удаляется из решения, а число остающихся конъюнкций по возможности минимизируется – это сокращает последующие вычисления.

II. Основные определения.

Представим исходную систему ДНФ в матричном виде парой булевых матриц – U (троичной) и S (булевой). Столбцы матрицы U соответствуют аргументам системы, а строки задают элементарные конъюнкции. Столбцы матрицы S соответствуют функциям системы, а единичные значения элементов в матрице S отмечают вхождения соответствующих конъюнкций в ДНФ функций системы.

Строки троичной матрицы задаются троичными векторами, а строки булевой матрицы – булевыми. Строки u и s представляют матрицы U и S соответственно. Троичный вектор u представляется парой булевых векторов U0 и U1. Троичный вектор w представляется парой булевых векторов W0 и W1. Булевы вектора g и s представляются булевыми векторами G1 и S1 соответственно.

Определим следующие бинарные отношения на множестве векторов одинаковой размерности.

Ортогональность. Троичные векторы и и v ортогональны по i-й компоненте, если и только если i-я компонента имеет значение 0 в одном из этих векторов и 1 – в другом. Троичные векторы ортогональны, если они ортогональны хотя бы по одной компоненте.

Поглощение. Троичный вектор w поглощает троичный вектор u, тогда и только тогда, когда все компоненты вектора w, значения которых отличны от «–», совпадают с одноименными компонентами вектора u.

Булев вектор g поглощает булев вектор s, если всем единичным компонентам вектора s соответствуют единичные компоненты вектора g.

Склеивание булевых векторов. Два булевых вектора можно заменить одним вектором, у которого значения компонент определяются следующим образом. Компонента, в которой соответствующая компонента хотя бы одного исходного вектора имела единичное значение, приобретает значение «1». Значения остальных компонент получают значение «0».

Постановка задачи. Пусть задана система ДНФ булевых функций. Требуется построить эквивалентную ортогонализованную систему, содержащую минимальное число элементарных конъюнкций.

Для решения этой задачи предлагается эвристический алгоритм.

III. Описание алгоритма

Результат ортогонализации представляется парой матриц – W (троичной) и G (булевой).

Строки w и g представляют матрицы W и G соответственно.

Результат разложения двух строк представляется троичной матрицей V, каждая строка v которой представляется парой булевых векторов V0 и V1.

Алгоритм. Матрица W полагается пустой (не содержащей строк).

1. В матрицу W заносится первая строка u матрицы U, а в матрицу G заносится первая строка s матрицы S.

2. Из матрицы U выбирается очередная строка u. Если все строки матрицы U просмотрены – переход на п. 3.

2.1. Выбирается очередная строка w матрицы W. Если все строки матрицы W просмотрены – переход на п. 3. Иначе – строки u и w сравниваются.

Если u и w ортогональны – переход на п.2.1.

Если строки u и w совпадают, то строки s и g склеиваются, и результат склеивания заменяет строку g в матрице G, переход на п.3.

Если w поглощает u, а g поглощает s, то переход на п.3.

Для строк u и w строится разложение – троичная матрица V. Алгоритм построения разложения описан в [1].

2.2. Первые n-1 строк матрицы V переносятся в матрицу W, а соответствующие n-1 строк матрицы G, являются копией строки S1. Последняя строка матрицы V добавляется в матрицу W, строки s и g склеиваются, и результат склеивания добавляется в матрицу G. Переход на п.2.

3. Если на шаге 2 были склеивания или поглощения - переход на п.2. Строка u добавляется в матрицу W, а строка s – в матрицу G. Переход на п.2.

4. Если на шаге 2 не было разложений - переход на п.5. В матрицу U в обратном порядке переносятся строки матрицы W. Переход на п.1.

5. Конец.

IV. Организация эксперимента

Для проверки эффективности предложенного алгоритма был проведен вычислительный эксперимент.

Всего для каждого примера рассматривалось четыре варианта ортогонализации, представленные в таблице столбцами А, Б, В, Г. При первом (столбец А) – использовалась программа, реализующаяся алгоритм, предложенный в [1], в остальных случаях – описанный выше. Причем, во втором случае (столбец Б) производилось предварительное упорядочивание строк матриц U и S по возрастанию весов строк матрицы U, в третьем (столбец В) – по убыванию, а в четвертом (столбец Г) – упорядочивание не производилось.

Примеры матричных описаний систем полностью определенных булевых функций были взяты из набора промышленных тестовых примеров, входящих в библиотеку примеров Berkeley PLA Test Set [2].

V. Результаты экспериментального исследования

Результаты экспериментального исследования представлены в таблице 1. Здесь: n – число переменных, m – число функций, k – число элементарных конъюнкций исходной системы ДНФ булевых функций. Результатом является число элементарных конъюнкций в ортогонализованной системе.

Заключение

Эксперимент показал, что для исследованного множества примеров использование нового алгоритма во всех случаях обеспечивало нахождение лучшего решения, при этом программа работала быстрее.

Список литературы

1. Поттосин, Ю.В., Шестаков Е.А. Ортогонализация системы полностью определенных булевых функций / Ю.В.Поттосин, Е.А.Шестаков / Логическое проектирование, Вып.5. – Минск: Институт технической Кибернетики НАН Беларуси, 2000 г. – С. 107–115.
2. Berkeley PLA test set [Electronic resorce]. – Mode of access: http://www1.cs.columbia.edu/ cs4861/sis/espresso-examples/ex/. – Date of access: 10.10.2011.

Таблица 1 – Результаты эксперимента

Имя	n	k	m	А	Б	В	Г
Alu1	12	8	19	2531	1683	1598	1924
B2	16	17	110	249	175	206	185
Mp2d	14	14	123	813	580	541	537
newtpla	15	5	23	127	86	108	93
X6dn	39	5	121	560	364	368	380
sex	9	14	23	185	209	210	165
In2	19	10	137	5369	955	1316	1772
tial	14	8	640				10358