АНАЛИЗ ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ МЕТОДОМ УРАВНЕНИЙ МОМЕНТОВ

Русак Л. В., Стасевич Н. А.
Кафедра информационных систем и технологий, Международный институт дистанционного образования
Белорусский национальный технический университет
Кафедра систем управления, Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники
Минск, Республика Беларусь
E-mail: stasevich@bsuir.by

Рассмотрены вопросы анализа дискретной системы методами уравнений моментов на примере системы первого порядка. При анализе данной дискретной системы будем следовать структуре исследования непрерывной системы фазовой автоподстройки частоты.

Введение

Среди множества актуальных задач синтеза систем с фазовым Составление и решение системы уравнений моментов для дискретных систем, в принципе, не отличается от аналогичных действий в случае непрерывных систем. Однако в каждом конкретном случае исследуемой системы процедуру составления системы уравнений моментов необходимо проводить заново, тогда как для непрерывных систем уже получено основное соотношение между моментами для системы, описываемой стохастическим дифференциальным уравнением произвольного порядка. Это и заставило ограничиться рассмотрением, в основном, непрерывных систем. Основные особенности метода уравнений моментов проявляются здесь наиболее выпукло, так как они могут быть рассмотрены независимо от процедуры составления системы уравнений моментов. Тем не менее, принципиальные вопросы анализа систем не зависят от того, дискретной или непрерывной она является. Это же относится и к качественным выводам о влиянии способов полиномиальной аппроксимации нелинейных характеристик на точность решения, получаемого методом уравнений моментов. Разумеется, при этом появляются специфические особенности. На наш взгляд, они важны и интересны, но не носят принципиального характера.

Основной раздел

Рассмотрим вопросы анализа дискретной системы методами уравнений моментов на примере системы первого порядка. При анализе данной дискретной системы будем следовать структуре исследования непрерывной системы фазовой автоподстройки частоты.

Пусть дискретная система описывается уравнением

$$x^+ = f(x) + \xi$$

где $x = x(t)$; $x^+ = f(x+1)$; $\xi = \xi(t)$; $\xi \sim N(0, \sigma)$; $E\{\xi^2\} = a$; $E\{x\xi\} = 0$; $t = 0, 1, 2, \ldots$.

Тогда основное соотношение между моментами примет вид:

$$E\{x^n\} = E\left\{\sum_{k=0}^{n} C_n^k \xi^k f^{n-k}(x)\right\} = \\ = \sum_{k=0}^{n} C_n^k E[\xi^k] E[f^{n-k}(x)] \quad (1)$$

Основной интерес представляют системы уравнений возможно меньшего порядка. Не трудно показать, что в рассматриваемом случае все моменты нечетного порядка $E\{x^n\} = 0$.Поэтому можно ограничиться рассмотрением основных соотношений только между моментами четного порядка. Первые из упомянутых соотношений имеют вид:

$$\vartheta_2 = E\{f^2(x)\} + a;$$

$$\vartheta_4 = E\{f^4(x)\} + 6aE\{f^2(x)\} + 3a^2; \quad (2)$$

$$\vartheta_6 = E\{f^6(x)\} + 15aE\{f^4(x)\} + \\ +45a^2E\{f^2(x)\} + 15a^3; \quad (3)$$

$$\vartheta_8 = E\{f^8(x)\} + 28aE\{f^6(x)\} + \\ +210a^2E\{f^4(x)\} + 420a^3E\{f^2(x)\} + 105a^4. \quad (4)$$

Здесь использовано выражение высших моментов центрированного нормального распределения величин ξ через второй центральный момент (2). При этом речь идет не о нормализации (решения), а используется свойство распределения помехи, которое по определению нормальное.

Для того чтобы рассматриваемая дискретная система имела непосредственное отношение к рассмотренной ранее системе ФАПЧ первого порядка, исследуем случай, когда

$$f(x) = x - F(x) \cong 1/3!x^3 - 1/5!x^5.$$

Как уже отмечалось, для получения системы уравнений моментов из основных соотношений между моментами необходимо представить все нелинейные функции, входящие в упомянутые соотношения, конечными отрезками степенных рядов. Если иметь в виду систематическое использование рядов Тейлора при исследовании системы, то для получения полиномиальной аппроксимации любой функции в произвольной степени достаточно располагать конечным отрезком ряда Тейлора только этой функции. Как и в непрерывном случае, ограничимся тремя членами ряда Тейлора при разложении дискриминационной характеристики (4) ($k < 4$) и примерно таким же числом уравнений моментов.

При ограничении двумя членами ряда Тейлора ($k = 2$) в разложении дискриминационной характеристики $f\,(x) = 1/3!x^3$, $E\,f^i(x) = 1/6^i\vartheta_{3i}$. Тогда уравнения (2) – (4) принимают вид:

$$\vartheta_2 = 1/6^2\vartheta_6 + a; \vartheta_4 = 1/6^4\vartheta_{12} + 1/6a\vartheta_6 + 3a^2; \quad (5)$$

$$\vartheta_6 = 1/6^6\vartheta_{18} + 15/6^4a\vartheta_{12} + 45/36a^2\vartheta_6 + 15a^3. \quad (6)$$

Систематическое использование рядов Тейлора предполагает отбрасывание высших моментов. Это означает, что из одного уравнения моментов может быть определен только второй момент ϑ_2, из двух уравнений – два момента ϑ_2 и ϑ_4из трех – три и т.д. В условиях настоящего примера определение двух моментов ϑ_2 и ϑ_4 по двум уравнениям (5) не привносит ничего нового в полученный ранее результат (при $k = 1$, $n = 1$), так как в полном соответствии с изложенной выше методикой следует положить$\vartheta_6 = \vartheta_{12} = 0$. Поэтому для получения следующего приближения ($k = 2$) рассмотрим три первых уравнения моментов. При $\vartheta_{12} = \vartheta_{18} = 0$ они принимают вид

$$\vartheta_2 = 1/6^2\vartheta_6 + a; \vartheta_4 = 1/6a\vartheta_6 + 3a^2;$$

$$\vartheta_6 = 45/36a^2\vartheta_6 + 15a^3. \quad (7)$$

Отсюда получим

$$\vartheta_2 = a + \frac{5a^3}{12 - 15a^2}. \quad (8)$$

При учете трех членов ряда Тейлора ($k = 3$) $f(x) = 1/6x^3(1 - 1/20x^2)$; $E\,f^i(x) = 1/6^iE\,x^{3i}(1 - 1/20x^2)^i$.

Отсюда следует:

$$E\,f^2(x) = 1/6^2E\,x^6(1 - 1/20x^2)^2 =$$

$$= 1/6^2(\vartheta_6 - 1/10\vartheta_8 + 1/400\vartheta_{10}) \quad (9)$$

$$E\,f^4(x) = 1/6^4E\,x^{12}(1 - 1/20x^2)^4 =$$

$$= 1/6^4(\vartheta_{12} - 1/5\vartheta_{14} + 6/400\vartheta_{16} - \ldots) \quad (10)$$

$$E\,f^6(x) = 1/6^6(\vartheta_{12} - \ldots);$$

$$E\,f^8(x) = 1/6^8(\vartheta_{24} - \ldots)$$

.

Очевидно, что моменты $E\,f^6(x)$ и $E\,f^8(x)$ являются линейными комбинациями моментов не ниже 18-го и 24-го порядков соответственно. Если при анализе системы ограничиться тремя уравнениями моментов, то всеми моментами выше шестого порядка придется пренебречь.

В этом случае система уравнений (2) – (4) с учетом выражений (9) – (10) примет вид системы уравнений (7). Другими словами, решение получившейся системы уравнений моментов будет иметь вид выражения (8). Это означает, что третий член разложения дискриминационной характеристики не может быть учтен при использовании только трех уравнений моментов.

Применение метода уравнений моментов для анализа дискретных систем, в принципе, почти не отличается от применения этого метода для анализа непрерывных систем. При этом, правда, использовались только ряды Тейлора для полиномиальной аппроксимации всех нелинейных зависимостей, входящих в основные соотношения между моментами.

Покажем, что сказанное относится и к методу нормализации. В этом случае моменты высших порядков исследуемой координаты не отбрасываются, а выражаются через низшие моменты.. В нем рассмотрена последовательность примеров, некоторые из которых можно почти дословно повторить, чтобы проиллюстрировать применимость этого метода не только для непрерывных, но для дискретных систем.

Пусть дискриминационная характеристика представлена двумя членами ряда Тейлора, т.е. $k = 2$ Тогда уравнение (2) принимает вид уравнения (5). Вместо отбрасывания момента ϑ_6, как это делалось раньше, можно выразить этот момент через момент второго порядка α некоторого распределения. В соответствии с выражением (2) положим $\vartheta_6 = 5!!\alpha^3$. Тогда уравнение примет вид $\vartheta_2 = 1/6^2\vartheta_6 + a = 15/36\alpha^3 + a$.

Аналогично, при $k = 3$ получим

$$\vartheta_2 = 1/6^2(\vartheta_6 - 1/10\vartheta_8) + a = 1/36(15\alpha^3 - 10,\,5\alpha^4) + a. \quad (11)$$

Сравним последние выражения с аналогичными выражениями для непрерывных систем. Продолжим аналогию и в части их использования для анализа системы. Положив $\vartheta_2 = \alpha$,получим, что второй центральный момент (дисперсия ϑ_2)может быть найден из решения алгебраического уравнения четвертой степени, которое следует из (11) при данном значении параметра α.

Различия в применении метода уравнений моментов к непрерывным и дискретным системам имеются только на этапе составления основных соотношений между моментами. Для дискретных систем они имеют более громоздкий вид, из-за чего без соответствующего программного обеспечения вычисления могут быть доведены до конца только в случае систем невысокого порядка [1].

1. Батура, М. П. Дискретные системы с фазовым управлением / М. П. Батура// Минск:Институт технической кибернетики НАН Беларуси, 2002. – 152 с.