МОДЕЛЬ ДВИЖЕНИЯ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ В ТРУБЕ КРУГОВОГО СЕЧЕНИЯ

Каянович С.С.
Минск, Беларус

В работе [1] рассматривалась модель стержневого течения вязкой несжимаемой жидкости в канале. Полученные там результаты позволили доказать теорему существования единственного решения дифференциально-разностной краевой задачи для такого течения [2]. В настоящем докладе рассматривается модель уже не плоского, а пространственного течения в цилиндрической трубе кругового сечения.

Уравнения движения жидкости (уравнения Навье – Стокса) записываем в цилиндрических координатах r, φ, z и кроме того полагаем, что искомые неизвестные: компоненты скорости u_z, u_r и давление p, являются функциями только переменных r, z (и времени t) и что плотность ρ равна 1

$$\frac{\partial u_r}{\partial t}+u_r\frac{\partial u_r}{\partial r}+u_z\frac{\partial u_r}{\partial z}=-\frac{\partial p}{\partial r}+\nu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u_r}{\partial r}\right)+\frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2}-\frac{u_r}{r^2}\right), \tag{1}$$

$$\frac{\partial u_z}{\partial t}+u_r\frac{\partial u_z}{\partial r}+u_z\frac{\partial u_z}{\partial z}=-\frac{\partial p}{\partial z}+\nu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u_z}{\partial r}\right)+\frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2}\right), \tag{2}$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial(ru_r)}{\partial r}+\frac{\partial u_z}{\partial z}=0. \tag{3}$$

Длина трубы – L, $0\le z\le L$, радиус сечения – R, в качестве оси z выбрана ось трубы. Из (1) – (3) для давления получаем уравнение Пуассона и записываем систему (см. [1])

$$\frac{\partial u_z}{\partial t}+u_r\frac{\partial u_z}{\partial r}+u_z\frac{\partial u_z}{\partial z}=-\frac{\partial p}{\partial z}+\nu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u_z}{\partial r}\right)+\frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2}\right), \tag{4}$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial(ru_r)}{\partial r}+\frac{\partial u_z}{\partial z}=0, \qquad \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial(ru_r)}{\partial r}\right)+\frac{\partial^2 u_z}{\partial z\partial r}=0, \tag{5,6}$$

$$\frac{\partial^2 p}{\partial r^2}+\frac{\partial^2 p}{\partial z^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial r}+\left(\frac{\partial u_r}{\partial r}\right)^2+2\frac{\partial u_r}{\partial z}\frac{\partial u_z}{\partial r}+\left(\frac{\partial u_z}{\partial z}\right)^2+\frac{1}{r^2}u_r^2=0. \tag{7}$$

Учитывая специфику полученных уравнений, помимо срезающей функции $\zeta(x)$, введённой в [1] (здесь она обозначается $\zeta(z)$), вводим в рассмотрение срезающую функцию $\xi(r)$

$$\left.\begin{array}{lll}\zeta(z)=0, & \text{если} & \left[0\le z\le\frac{\delta}{2}\right]\cup\left[L-\frac{\delta}{2}\le z\le L\right]\\ 0\le\zeta(z)\le 1, & \text{если} & \left[\frac{\delta}{2}\le z\le\delta\right]\cup\left[L-\delta\le z\le L-\frac{\delta}{2}\right]\\ \zeta(z)=1, & \text{если} & \delta\le z\le L-\delta\end{array}\right\}, \qquad -R\le r\le R,$$

$$\left.\begin{array}{lll} \xi(r)=0, & если & -\dfrac{\varepsilon}{2}\le r\le\dfrac{\varepsilon}{2} \\ 0\le\xi(r)\le 1, & если & \left[-\varepsilon\le r\le-\dfrac{\varepsilon}{2}\right]\bigcup\left[\dfrac{\varepsilon}{2}\le r\le\varepsilon\right] \\ \xi(r)=1, & если & \left[-R\le r\le-\varepsilon\right]\bigcup\left[\varepsilon\le r\le R\right] \end{array}\right\}, \qquad 0\le z\le L,$$

где δ,ε – малые положительные числа.

В плоскостях $z=const$, перпендикулярных к оси трубы, имеем дело с полярными координатами r,φ. Так как значение полярного угла φ зависит только от выбора направления полярной оси, в произвольном сечении трубы плоскостью $z=const$ получаем круг радиуса R с центром на оси z и искомые функции не зависят от φ, то, не уменьшая общности, можем рассматривать задачу в плоскости, образованной двумя полуплоскостями $\varphi=0$ и $\varphi=\pi$, проходящими через ось z. Введем в рассмотрение новую переменную $\tilde{r}$, равную полярному радиусу r при условии $\varphi=0$, и равную $-r$ при условии $\varphi=\pi$. Тогда эта переменная $\tilde{r}$ будет изменяться от $-R$ до R. Чтобы не усложнять обозначений в системе уравнений, будем эту новую переменную $\tilde{r}$ обозначать прежним символом r.

С учётом вышесказанного от системы уравнений (4) – (7) приходим к системе

$$\frac{\partial u_z}{\partial t}+u_r\frac{\partial u_z}{\partial r}+u_z\frac{\partial u_z}{\partial z}=-\frac{\partial p}{\partial z}+\nu\left(\xi(r)\frac{1}{r}\frac{\partial u_z}{\partial r}+\frac{\partial^2 u_z}{\partial r^2}+\frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2}\right), \tag{8}$$

$$\xi(r)\frac{1}{r}u_r+\frac{\partial u_r}{\partial r}+\frac{\partial u_z}{\partial z}=0, \quad \xi(r)\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial r}-\frac{1}{r^2}u_r\right)+\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2}+\frac{\partial^2 u_z}{\partial z\partial r}=0, \tag{9,10}$$

$$\frac{\partial^2 p}{\partial (r)^2}+\frac{\partial^2 p}{\partial z^2}+\xi(r)\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial r}+\left(\frac{\partial u_r}{\partial r}\right)^2+2\frac{\partial u_r}{\partial z}\frac{\partial u_z}{\partial r}+\left(\frac{\partial u_z}{\partial z}\right)^2+\xi(r)\frac{1}{r^2}u_r^2=0. \tag{11}$$

Для уравнения (8), которое решается относительно компоненты скорости u_z, рассматриваем задачу Дирихле (первую краевую задачу), предварительно заменив в нём производную по времени разностной производной. Компонента скорости u_r находится из уравнений (9), (10). Уравнение (10) было введено в связи с тем, что число краевых условий не должно превышать порядка уравнения, а компонента u_r должна удовлетворять двум условиям: $u_r\big|_{r=-R}=0$ и $u_r\big|_{r=R}=0$ (условия прилипания на твердой стенке). Краевые условия, при которых решаются уравнения (9) и (10), строго заданы в [1] . Для уравнения (11), из которого находится давление, рассматривается задача Неймана (вторая краевая задача) с граничным условием (в граничном условии нормаль будем считать внутренней [3])

$$\left.\frac{\partial p}{\partial \bar{n}}\right|_S=\zeta(s)\left(\nu\left(\xi(r)\frac{1}{r}\frac{\partial u_z}{\partial r}+\frac{\partial^2 u_z}{\partial r^2}+\frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2}\right)-u_r\frac{\partial u_z}{\partial r}-u_z\frac{\partial u_z}{\partial z}-\frac{\partial u_z}{\partial t}\right)\cos\alpha_1|_S+$$

$$+\zeta(s)\left(\nu\left(\xi(r)\frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial r}+\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2}+\frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2}-\xi(r)\frac{u_r}{r^2}\right)-u_r\frac{\partial u_r}{\partial r}-u_z\frac{\partial u_r}{\partial z}-\frac{\partial u_r}{\partial t}\right)\cos\alpha_2|_S,$$

где S – граница сечения трубы двумя полуплоскостями $\varphi=0$ и $\varphi=\pi$, указанными выше, $\left.\dfrac{\partial p}{\partial \bar{n}}\right|_S$ – производная по направлению вектора $\bar{n}$ внутренней нормали к границе, α_1,α_2 – углы между вектором $\bar{n}$ и соответственно осью z, направлением от точки (0,0) к точке $(R,0)$ в координатах r,z. При решении задачи граница S сглаживается, как это показано в [1].

Рассмотренная модель может быть применена к расчёту вязкого течения при наличии в нём ненулевой поперечной компоненты скорости u_r.

Список литературы:

1. Каянович С. С. Разрешимость дифференциальной модели стержневого течения. // Весці НАН Беларусі. № 1. 2015. Сер. фіз.-мат. навук. С. 52–59.

2. Каянович С. С. О разрешимости дифференциально-разностной задачи для стержневого течения. // Тезисы докладов XVII Международной научной конференции по дифференциальным уравнениям «Еругинские чтения – 2017». Часть 2. (Минск, 16 – 20 мая 2017 г.). Минск, 2017. С. 10–11.

3. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. М., 1972. 735с