УДК 512.815.6

Н. П. Можей
Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники

ЛИНЕЙНЫЕ АЛГЕБРЫ ЛИ НА ЧЕТЫРЕХМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Исследование линейных групп Ли сопряжено, с одной стороны, с более общей задачей изучения произвольных линейных групп, с другой стороны, линейные группы Ли тесно связаны с алгебраическими группами. Цель работы – описание с точностью до сопряженности подалгебр алгебры Ли $\mathfrak{gl}(4, \mathbb{C})$. Определены основные понятия: линейная алгебра Ли, разделяющая алгебра Ли, разделяющая оболочка, автосопряжение, специальное автосопряжение, подалгебра Леви – Картана, линейный нильрадикал, подалгебра Мальцева. Приведен алгоритм классификации разделяющих алгебр Ли с данным линейным нильрадикалом, а именно: сначала строится нормализатор нильпотентной подалгебры, далее фиксируется некоторая подалгебра Мальцева нормализатора и строится разделяющая алгебра Ли, потом, с точностью до сопряженности, описываются подалгебры алгебры Мальцева, являющиеся редуктивными, и выписываются разделяющие подалгебры. Затем решается задача классификации неразделяющих линейных алгебр Ли с данной разделяющей оболочкой. С применением этих алгоритмов проведено в явном виде описание линейных алгебр Ли на четырехмерном пространстве. Алгоритмы, приведенные в работе, могут быть компьютеризованы и использованы для решения аналогичных задач в больших размерностях.

Ключевые слова: нильпотентный эндоморфизм, линейная группа Ли, алгебра Ли, разделяющая алгебра Ли.

N. P. Mozhey
Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics

LINEAR LIE ALGEBRAS IN FOUR-DIMENSIONAL SPACE

The study of linear Lie groups is connected, on the one hand, with the more general problem of studying arbitrary linear groups, on the other hand, linear Lie groups are closely connected with algebraic groups. The purpose of the work is a description up to conjugacy of subalgebras of a Lie algebra $\mathfrak{gl}(4, \mathbb{C})$. The basic concepts are defined – linear Lie algebra, dividing Lie algebra, dividing cover, auto-conjugation, special auto-conjugation, Levi – Cartan subalgebra, linear nilradical, Maltsev's subalgebra. The classification algorithm for dividing Lie algebras with a given linear nilradical is presented, namely: first, the normalizer of the nilpotent subalgebra is constructed, then a certain Maltsev's subalgebra of normalizer is fixed and a dividing Lie algebra is constructed, then, up to conjugacy, the subalgebras of the Maltsev's algebra that are reductive are described and written out dividing subalgebras. Then the problem of classifying non-dividing linear Lie algebras with a given dividing cover is solved. Using these algorithms, an explicit description of linear Lie algebras on four-dimensional space is carried out. The algorithms described in the work can be computerized and used to solve similar problems in large dimensions.

Key words: nilpotent endomorphism, linear Lie group, Lie algebra, dividing Lie algebra.

Введение. Исследование линейных групп Ли сопряжено с более общей задачей изучения произвольных линейных групп, о таких группах см., например, [1, 2]. Линейные группы Ли также тесно связаны с алгебраическими группами над полями $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$. Подалгебры алгебры Ли $\mathfrak{gl}(4, \mathbb{C})$, состоящие из нильпотентных эндоморфизмов, описаны автором в работе [3]. Целью данной работы является описание любых подалгебр алгебр Ли $\mathfrak{gl}(4, P)$, где $P = \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$, с точностью до сопряженности.

Основная часть. Пусть V – фиксированное конечномерное векторное пространство над полем нулевой характеристики. Напомним, что подалгебры алгебры Ли $\mathfrak{gl}(V)$ называются *линейными алгебрами Ли*. Линейная алгебра Ли называется *разделяющей*, если она содержит полупростую и нильпотентную компоненты каждого своего элемента [4]. *Разделяющей оболочкой* линейной алгебры Ли $\mathfrak{g}$ называется минимальная разделяющая линейная алгебра Ли, содержащая $\mathfrak{g}$, она обозначается как $e(\mathfrak{g})$ [4].

Группа $GL(V)$ действует на алгебре Ли $\mathfrak{gl}(V)$ при помощи ее автоморфизмов:

$$\varphi.x = \varphi \cdot x \cdot \varphi^{-1},$$

где $\varphi \in GL(V)$ и $x \in \mathfrak{gl}(V)$. Если n – нильпотентный эндоморфизм пространства V, то

$$(\exp adn)(x) = (\exp n) \cdot x \cdot (\exp(-n)) = (\exp n).x$$

для всех $x \in \mathfrak{gl}(V)$. Если $\mathfrak{g}$ – линейная алгебра Ли (т. е. $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(V)$), то элементы группы

$$A(\mathfrak{g}) = \{\varphi \in GL(V) \mid \varphi.\mathfrak{g} = \mathfrak{g}\}$$

назовем *автосопряжениями* линейной алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Если $\mathfrak{r}$ – радикал алгебры Ли $\mathfrak{g}$, то автосопряжения вида $\exp n$ $(n \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{r}])$ называются *специальными*. Они образуют подгруппу группы $A(\mathfrak{g})$.

Пусть $\mathfrak{s}$ – подалгебра Леви алгебры Ли $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{h}$ – подалгебра Картана алгебры Ли $Z_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{s})$. Подалгебра $\mathfrak{q} = \mathfrak{s} \oplus \mathfrak{h}$ называется *подалгеброй Леви – Картана* алгебры Ли $\mathfrak{g}$.

Лемма 1. *Пусть* $\mathfrak{g}$ *– линейная разделяющая алгебра Ли; M – множество подалгебр алгебры Ли* $\mathfrak{g}$, *редуктивных в* $\mathfrak{gl}(V)$ *и дополнительных в* $\mathfrak{g}$ *к идеалу* $\mathfrak{n} = \mathfrak{n}_V(\mathfrak{g})$, *и Q – множество подалгебр Леви – Картана алгебры Ли* $\mathfrak{g}$. *Тогда:*

(i) Существует взаимно однозначное соответствие между множествами M и Q.

Если $\mathfrak{m} \in M$; $\mathfrak{m} = \mathfrak{s} \oplus \mathfrak{t}$ $(\mathfrak{s} = [\mathfrak{m}, \mathfrak{m}]$ *и* $\mathfrak{t}$ *– центр алгебры Ли* $\mathfrak{m})$, *то*

$$\mathfrak{h} = Z_{Z_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{s})}(\mathfrak{t}) \text{ –}$$

подалгебра Картана алгебры Ли $Z_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{s})$ *и* $\mathfrak{s} \oplus \mathfrak{h} \in Q$.

Если $\mathfrak{q} \in Q$; $\mathfrak{q} = \mathfrak{s} \oplus \mathfrak{h}$ *и* $\varphi(\mathfrak{h})$ *– множество полупростых эндоморфизмов, лежащих в* $\mathfrak{h}$, *то* $\mathfrak{s} \oplus \varphi(\mathfrak{h}) \in M$.

(ii) Группа специальных автосопряжений алгебры Ли $\mathfrak{g}$ *действует на множестве M транзитивно.*

Действительно, в случае (i) пусть $\mathfrak{m} \in M$ и $\mathfrak{m} = \mathfrak{s} \oplus \mathfrak{t}$, где $\mathfrak{s}$ – подалгебра Леви алгебры Ли $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{t}$ – максимальный элемент множества коммутативных подалгебр радикала $\mathfrak{r}$ алгебры Ли $\mathfrak{g}$, состоящих из полупростых эндоморфизмов. Ясно, что $Z_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{s}) \subset \mathfrak{r}$, так как

$$\mathfrak{g} = [\mathfrak{s}, \mathfrak{g}] \oplus Z_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{s}) = \mathfrak{s} \oplus [\mathfrak{s}, \mathfrak{r}] \oplus Z_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{s});$$
$$\mathfrak{r} = [\mathfrak{s}, \mathfrak{r}] \oplus (Z_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{s}) \cap \mathfrak{r}) \text{ и}$$
$$\dim Z_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{s}) = \dim(Z_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{s}) \cap \mathfrak{r}) \text{ и } \mathfrak{t} \subset Z_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{s}).$$

Поэтому $\mathfrak{t}$ – максимальный элемент множества коммутативных подалгебр алгебры Ли $Z_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{s})$, состоящих из полупростых эндоморфизмов. Подалгебра $Z_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{s})$ является разделяющей и $\mathfrak{s} \oplus \mathfrak{h} \in Q$.

Обратно, пусть $\mathfrak{q} \in Q$ и $\mathfrak{q} = \mathfrak{s} \oplus \mathfrak{h}$, где $\mathfrak{s}$ – подалгебра Леви алгебры Ли $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{h}$ – подалгебра Картана алгебры Ли $Z_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{s})$. Подалгебра $\mathfrak{h}$ является разделяющей [4] и $Z_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{s}) = \mathfrak{h} + [Z_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{s}), Z_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{s})]$. Если $\varphi(\mathfrak{h})$ – множество полупростых эндоморфизмов, лежащих в $\mathfrak{h}$, то $Z_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{s}) = \varphi(\mathfrak{h}) \oplus \mathfrak{n}_V(Z_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{s}))$. Из того, что $\mathfrak{r} = Z_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{s}) \oplus [\mathfrak{s}, \mathfrak{r}] = Z_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{s}) + \mathfrak{n}$ и $\mathfrak{n}_V(Z_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{s})) \subset \mathfrak{n}$, следует, что $\mathfrak{r} = \varphi(\mathfrak{h}) \oplus \mathfrak{n}$. Итак, $\varphi(\mathfrak{h})$ – максимальный элемент множества коммутативных подалгебр радикала $\mathfrak{r}$ алгебры Ли $\mathfrak{g}$, состоящих из полупростых эндоморфизмов, и $[\mathfrak{s}, \varphi(\mathfrak{h})] = \{0\}$. Поэтому $\mathfrak{s} \oplus \varphi(\mathfrak{h}) \in M$. Построенное соответствие будет взаимно однозначным.

В случае (ii) группа специальных автоморфизмов алгебры Ли $\mathfrak{g}$ действует на множестве Q транзитивно [4].

Напомним, что идеал $\mathfrak{n} = \mathfrak{n}_V(\mathfrak{g})$ называется *линейным нильрадикалом* разделяющей алгебры Ли $\mathfrak{g}$, а элементы множества M – *подалгебрами Мальцева* разделяющей алгебры Ли $\mathfrak{g}$.

Лемма 2. *Пусть* $\mathfrak{g}$ *– линейная разделяющая алгебра Ли*; $\mathfrak{n}$ *– ее линейный нильрадикал и* $\mathfrak{m}$ *– ее подалгебра Мальцева. Тогда:*

(i) Если $\mathfrak{a}$ *– подалгебра алгебры Ли* $\mathfrak{g}$, *редуктивная в* $\mathfrak{gl}(V)$, *то существует специальное автосопряжение алгебры Ли* $\mathfrak{g}$, *переводящее* $\mathfrak{a}$ *в некоторую подалгебру в* $\mathfrak{m}$.

(ii) $\mathfrak{m}$ *является максимальным элементом множества подалгебр алгебры Ли* $\mathfrak{g}$, *редуктивных в* $\mathfrak{gl}(V)$.

Действительно, рассмотрим случай (i). Пусть $\mathfrak{b} = \mathfrak{a} + \mathfrak{n}$, тогда $\mathfrak{b}$ – разделяющая подалгебра [4]. Пересечение $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{n}$ является нильпотентным идеалом алгебры Ли $\mathfrak{a}$, состоящим из нильпотентных эндоморфизмов. Из редуктивности $\mathfrak{a}$ в $\mathfrak{gl}(V)$ следует $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{n} = \{0\}$ и $\mathfrak{b} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$. Поэтому отображение проектирования $\mathfrak{a}$ на $\mathfrak{m}$ параллельно $\mathfrak{n}$ задает изоморфизм алгебр Ли $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{a}' = \mathfrak{m} \cap \mathfrak{b}$. Пусть x – элемент центра редуктивной алгебры Ли $\mathfrak{a}$ и $x = y + z$, где $y \in \mathfrak{m}$ и $z \in \mathfrak{n}$. Тогда x – полупростой эндоморфизм; и если мы докажем, что y также является полупростым эндоморфизмом, то тем самым мы докажем редуктивность подалгебры $\mathfrak{a}'$ в $\mathfrak{gl}(V)$. Действительно, элемент x и, следовательно, элемент y лежат в радикале алгебры Ли $\mathfrak{b}$, который является разделяющей подалгеброй. Подалгебра $\mathfrak{m}$ также является разделяющей [4]. Поэтому нильпотентная компонента элемента y лежит в $\mathfrak{n}_V(\mathfrak{b}) \cap \mathfrak{m} = \mathfrak{n} \cap \mathfrak{m} = \{0\}$. Итак, $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{a}'$ – подалгебры Мальцева разделяющей алгебры Ли $\mathfrak{b}$. Следовательно, $\mathfrak{a}$ переводится в $\mathfrak{a}'$ при помощи некоторого специального автосопряжения алгебры Ли $\mathfrak{b}$, которое автоматически является специальным автосопряжением алгебры Ли $\mathfrak{g}$.

Утверждение (ii) является непосредственным следствием утверждения (i).

Лемма 3. *Если* $\mathfrak{h}$ *– подалгебра алгебры Ли* $\mathfrak{g}$, *содержащая ее коммутант* $\mathcal{D}\mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$, *то подалгебры* $\mathfrak{h} + \mathfrak{m}$ *и* $\mathfrak{h} + \mathfrak{n}$ *являются разделяющими.*

Действительно, пусть $x \in \mathfrak{h} + \mathfrak{m}$ и $x = s + n$ – разложение Жордана эндоморфизма x. Мы доказали, что существует такое специальное автосопряжение f алгебры Ли $\mathfrak{g}$, что $f.s \in \mathfrak{m}$. Из того, что $f.s \in s + \mathcal{D}\mathfrak{g} \subset s + \mathfrak{h}$, следует $s \in \mathfrak{h} + \mathfrak{m}$. Поэтому подалгебра $\mathfrak{h} + \mathfrak{m}$ является разделяющей.

Пусть $\mathfrak{h}' = \mathfrak{h} + \mathfrak{n}$ и $\mathfrak{m}' = \mathfrak{m} \cap \mathfrak{h}'$. Из того, что $\mathfrak{h}$ является идеалом алгебры Ли $\mathfrak{g}$, следует, что $\mathfrak{m}'$ является идеалом алгебры Ли $\mathfrak{m}$. Если $\mathfrak{t}$ – центр алгебры Ли $\mathfrak{m}$, то $\mathfrak{m}' \cap \mathfrak{t}$ является радикалом алгебры Ли $\mathfrak{m}'$, состоящим из полупростых эндоморфизмов. Поэтому подалгебры $\mathfrak{m}'$ и $\mathfrak{h}' = \mathfrak{m}' \oplus \mathfrak{n}$ являются разделяющими.

Лемма 4. *Пусть $\mathfrak{g}$ – линейная разделяющая алгебра Ли, $\mathfrak{n}$ – ее линейный нильрадикал и $\mathfrak{m}$ – ее подалгебра Мальцева. Если подалгебры $\mathfrak{m}_1$ и $\mathfrak{m}_2$ алгебры Ли $\mathfrak{m}$ сопряжены при помощи группы $A(\mathfrak{g})$, то они сопряжены посредством группы $A(\mathfrak{g}, \mathfrak{m}) = A(\mathfrak{g}) \cap A(\mathfrak{m})$.*

Действительно, пусть $\varphi \in A(\mathfrak{g})$ и $\varphi.\mathfrak{m}_1 = \mathfrak{m}_2$. Тогда $\mathfrak{m}_2 \subset \varphi.\mathfrak{m}$. Ренее было показано, что существует такое $x \in \mathfrak{n}$, что $(\exp x).(\varphi.\mathfrak{m}) = \mathfrak{m}$. Поскольку $(\exp x).\mathfrak{m}_2 = \exp adx(\mathfrak{m}_2) \subset \mathfrak{m}_2 \oplus \mathfrak{n}$, то $(\exp x).\mathfrak{m}_2 \subset (\mathfrak{m}_2 \oplus \mathfrak{n}) \cap \mathfrak{m} = \mathfrak{m}_2$. Следовательно, $(\exp x) \cdot \varphi \in A(\mathfrak{g}, \mathfrak{m})$ и $((\exp x) \cdot \varphi).\mathfrak{m}_1 = \mathfrak{m}_2$.

Зафиксируем некоторую линейную алгебру Ли $\mathfrak{n}$, состоящую из нильпотентных эндоморфизмов. Нормализатор $N(\mathfrak{n})$ подалгебры $\mathfrak{n}$ в $\mathfrak{gl}(V)$ является разделяющей подалгеброй. Зафиксируем некоторую подалгебру Мальцева $\overline{\mathfrak{m}}$ алгебры Ли $N(\mathfrak{n})$ и положим $\overline{\mathfrak{g}} = \overline{\mathfrak{m}} \oplus \mathfrak{n}$. Ясно, что $\overline{\mathfrak{g}}$ является разделяющей алгеброй Ли, $\mathfrak{n}$ – ее линейным нильрадикалом и $\overline{\mathfrak{m}}$ – ее подалгеброй Мальцева. Все разделяющие алгебры Ли указанного вида сопряжены алгебре Ли $\overline{\mathfrak{g}}$, так как специальные автосопряжения алгебры Ли $N(\mathfrak{n})$ сохраняют идеал $\mathfrak{n}$.

Утверждение 1. *(i) Любая разделяющая алгебра Ли с линейным нильрадикалом $\mathfrak{n}$ сопряжена некоторой разделяющей алгебре Ли $\mathfrak{g}$ с подалгеброй Мальцева $\mathfrak{m} = \mathfrak{g} \cap \overline{\mathfrak{m}}$.*

(ii) Пусть $\mathfrak{m}_1$ и $\mathfrak{m}_2$ – подалгебры алгебры Ли $\overline{\mathfrak{m}}$, редуктивные в $\mathfrak{gl}(V)$. Тогда для того, чтобы алгебра Ли $\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{m}_1 \oplus \mathfrak{n}$ была сопряжена алгебре Ли $\mathfrak{g}_2 = \mathfrak{m}_2 \oplus \mathfrak{n}$, необходимо и достаточно, чтобы подалгебра $\mathfrak{m}_1$ переводилась в подалгебру $\mathfrak{m}_2$ при помощи группы $A(\overline{\mathfrak{g}}, \overline{\mathfrak{m}})$.

Рассмотрим случай (i). Пусть $\mathfrak{g}'$ – разделяющая алгебра Ли с линейным нильрадикалом $\mathfrak{n}$ и подалгеброй Мальцева $\mathfrak{m}'$. Тогда существует такое специальное самосопряжение f алгебры Ли $N(\mathfrak{n})$, что $f.\mathfrak{m}' \subset \overline{\mathfrak{m}}$. Из того, что $f.\mathfrak{n} = \mathfrak{n}$, следует, что $\mathfrak{g} = f.\mathfrak{g}' \subset \overline{\mathfrak{g}}$ и $\mathfrak{m} = f.\mathfrak{m}' = \mathfrak{g} \cap \overline{\mathfrak{m}}$.

В случае (ii) пусть $\varphi \in GL(V)$ и $\varphi.\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{g}_2$, тогда $\varphi.\mathfrak{n} = \mathfrak{n}$ и найдется такое $\psi \in A(\mathfrak{g}_2)$, что $\psi.(\varphi.\mathfrak{m}_1) = \mathfrak{m}_2$. Ясно, что $\psi \cdot \varphi \in A(N(\mathfrak{n}), \mathfrak{n})$, $(\psi \cdot \varphi).\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{g}_2$ и $(\psi \cdot \varphi).\mathfrak{m}_1 = \mathfrak{m}_2$. Повторяя рассуждения, приведенные выше, выбираем такое $x \in \mathfrak{n}_V(N(\mathfrak{n}))$, что $((\exp x) \cdot \psi \cdot \varphi).\overline{\mathfrak{m}} = \overline{\mathfrak{m}}$, и замечаем, что $(\exp x).\mathfrak{m}_2 = \mathfrak{m}_2$, $(\exp x).\mathfrak{n} = \mathfrak{n}$, $(\exp x) \cdot \psi \cdot \varphi \in A(\overline{\mathfrak{g}}, \overline{\mathfrak{m}})$ и $((\exp x) \cdot \psi \cdot \varphi).\mathfrak{m}_1 = \mathfrak{m}_2$.

Итак, алгоритм классификации разделяющих алгебр Ли с данным линейным нильрадикалом $\mathfrak{n}$ выглядит следующим образом:

– строится нормализатор $N(\mathfrak{n})$ подалгебры $\mathfrak{n}$ в $\mathfrak{gl}(V)$;

– фиксируется некоторая подалгебра Мальцева $\overline{\mathfrak{m}}$ алгебры Ли $N(\mathfrak{n})$ и строится разделяющая алгебра Ли $\overline{\mathfrak{g}} = \overline{\mathfrak{m}} \oplus \mathfrak{n}$;

– с точностью до сопряженности относительно группы $A(\overline{\mathfrak{g}}, \overline{\mathfrak{m}})$ описываются подалгебры $\mathfrak{m}_\alpha$ алгебры Ли $\overline{\mathfrak{m}}$, редуктивные в $\mathfrak{gl}(V)$, и выписываются разделяющие подалгебры $\mathfrak{g}_\alpha = \mathfrak{m}_\alpha \oplus \mathfrak{n}$.

Утверждение 2. *Пусть $\mathfrak{g}$ – линейная разделяющая алгебра Ли; $\mathfrak{n}$ – ее линейный нильрадикал; $\mathfrak{m}$ – ее подалгебра Мальцева и $\mathfrak{h}$ – некоторая подалгебра алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Тогда для того, чтобы $e(\mathfrak{h}) = \mathfrak{g}$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:* 1. $\mathcal{D}\mathfrak{g} \subset \mathfrak{h}$; 2. $\mathfrak{h} + \mathfrak{m} = \mathfrak{g}$; 3. $\mathfrak{h} + \mathfrak{n} = \mathfrak{g}$.

Действительно, покажем необходимость. Если $\mathfrak{g} = e(\mathfrak{h})$, то выполняется условие 1, а подалгебры $\mathfrak{h} + \mathfrak{m}$ и $\mathfrak{h} + \mathfrak{n}$ являются разделяющими. Поэтому выполняются условия 2 и 3.

Достаточность. Предположим, что выполнены условия 1–3. Пусть $\mathfrak{n}'$ – линейный нильрадикал алгебры Ли $e(\mathfrak{h})$. Ясно, что $e(\mathfrak{h}) \subset \mathfrak{g}$ и $e(\mathfrak{h}) + \mathfrak{n} = \mathfrak{g}$. Поэтому $\mathfrak{m}' \subset \mathfrak{g}$; $[\mathfrak{n}', \mathfrak{m}] \subset \mathcal{D}\mathfrak{g} \cap \mathfrak{n} \subset e(\mathfrak{h}) \cap \mathfrak{n} \subset \mathfrak{n}'$ (так как $e(\mathfrak{h}) \cap \mathfrak{n}$ является нильпотентным идеалом в $e(\mathfrak{h})$, состоящим из нильпотентных эндоморфизмов) и $[\mathfrak{n}', \mathfrak{g}] = [\mathfrak{n}' e(\mathfrak{h})] + [\mathfrak{n}', \mathfrak{n}] \subset \mathfrak{n}'$. Следовательно, $\mathfrak{n}' \subset \mathfrak{n}$ и $\mathfrak{n}' = e(\mathfrak{h}) \cap \mathfrak{n}$. Пусть $\mathfrak{m}'$ – подалгебра Мальцева алгебры Ли $e(\mathfrak{h})$, тогда $\dim \mathfrak{m}' = \dim \mathfrak{m}$ и $\mathfrak{m}' \cap \mathfrak{n} = \{0\}$ (поскольку $\mathfrak{m}' \cap \mathfrak{n}$ является нильпотентным идеалом в $\mathfrak{m}'$, состоящим из нильпотентных эндоморфизмов). Следовательно, $\mathfrak{m}'$ является подалгеброй Мальцева алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Пусть x – такой нильпотентный эндоморфизм из $\mathcal{D}\mathfrak{g}$, что $(\exp x).\mathfrak{m}' = \mathfrak{m}$. Тогда $x \in \mathfrak{h}$, $(\exp x).e(\mathfrak{h}) = e(\mathfrak{h})$ и $\mathfrak{m} \subset e(\mathfrak{h})$. Из условия 2 следует, что $\mathfrak{g} = e(\mathfrak{h}) + \mathfrak{m} = e(\mathfrak{h})$.

Пусть $\mathfrak{a} = \mathfrak{g} / \mathcal{D}\mathfrak{g}$ и $p : \mathfrak{g} \to \mathfrak{a}$ – каноническая сюръекция. Группа $A(\mathfrak{g})$ естественным образом действует в пространстве $\mathfrak{a}$. При этом ограничение этого действия на подгруппу специальных автосопряжений алгебры Ли $\mathfrak{g}$ тривиально.

Следствие. *(i) Существует взаимно однозначное соответствие между множеством подалгебр $\mathfrak{h}$ алгебры Ли $\mathfrak{g}$, для которых $e(\mathfrak{h}) = \mathfrak{g}$, и множеством подпространств U пространства $\mathfrak{a}$, для которых $U + p(\mathfrak{m}) = \mathfrak{a}$ и $U + p(\mathfrak{n}) = \mathfrak{a}$. При этом соответствии $\mathfrak{h} \mapsto p(\mathfrak{h})$; $U \mapsto p^{-1}(U)$.*

(ii) Если $\mathfrak{h}_1$ и $\mathfrak{h}_2$ – такие подалгебры алгебры Ли $\mathfrak{g}$, что $e(\mathfrak{h}_1) = \mathfrak{g}$ и $e(\mathfrak{h}_2) = \mathfrak{g}$, то подалгебры $\mathfrak{h}_1$ и $\mathfrak{h}_2$ сопряжены друг другу тогда и только тогда, когда соответствующие им подпространства $p(\mathfrak{h}_1)$ и $p(\mathfrak{h}_2)$ сопряжены друг другу относительно действия группы $A(\mathfrak{g}, \mathfrak{m})$.

Действительно, первое утверждение очевидно. Если $\varphi \in GL(V)$ и $\varphi.\mathfrak{h}_1 = \mathfrak{h}_2$, то $\varphi \in A(\mathfrak{g})$. Осталось заметить, что $\varphi = (\exp(-x)) \cdot \psi$ для некоторого нильпотентного эндоморфизма $x \in \mathcal{D}\mathfrak{g} \subset \mathfrak{h}_1 \cap \mathfrak{h}_2$ (такого, что $(\exp x).(\varphi.\mathfrak{m}) = \mathfrak{m}$) и $\psi \in A(\mathfrak{g}, \mathfrak{m})$.

Итак, задача классификации неразделяющих линейных алгебр Ли с разделяющей оболочкой $\mathfrak{g}$

сводится к классификации подпространств $U \subset \mathfrak{a}$, таких, что $U \neq \mathfrak{a}$, $U + p(\mathfrak{m}) = \mathfrak{a}$ и $U + p(\mathfrak{n}) = \mathfrak{a}$, с точностью до сопряженности относительно действия группы $A(\mathfrak{g}, \mathfrak{m})$.

Замечание. *Если* $\mathfrak{t}$ *– центр алгебры Ли* $\mathfrak{m}$, *то* $p(\mathfrak{m}) = p(\mathfrak{t})$. *Из этого, в частности, следует, что* $\mathfrak{a} = p(\mathfrak{t}) \oplus p(\mathfrak{n})$.

Утверждение 3. *Пусть* $\mathfrak{g}$ *– линейная алгебра Ли,* L *– множество подалгебр алгебры Ли* $\mathfrak{g}$, *редуктивных в* $\mathfrak{gl}(V)$, *и* M *– множество максимальных элементов в множестве* L. *Тогда группа специальных автосопряжений алгебры Ли* $\mathfrak{g}$ *действует на множестве* M *транзитивно.*

Действительно, пусть $\mathfrak{m}$ – подалгебра Мальцева разделяющей алгебры Ли $e(\mathfrak{g})$; $\mathfrak{s} = [\mathfrak{m}, \mathfrak{m}]$ и $\mathfrak{t}$ – центр алгебры Ли $\mathfrak{m}$, тогда $\mathfrak{s} \subset [e(\mathfrak{g}), e(\mathfrak{g})] \subset \mathfrak{g}$, $\mathfrak{g} \cap \mathfrak{m} = \mathfrak{s} \oplus (\mathfrak{g} \cap \mathfrak{t})$ и $\mathfrak{g} \cap \mathfrak{t}$ является радикалом алгебры Ли $\mathfrak{g} \cap \mathfrak{m}$, состоящим из полупростых эндоморфизмов. Следовательно, $\mathfrak{g} \cap \mathfrak{m} \in L$. Если $\mathfrak{g} \cap \mathfrak{m} \subset \mathfrak{m}' \in M$ и $\mathfrak{m}_1$ – подалгебра Мальцева алгебры Ли $e(\mathfrak{g})$, содержащая $\mathfrak{m}'$, то из равенств $e(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g} + \mathfrak{m}$, $e(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g} + \mathfrak{m}_1$ и $\dim \mathfrak{m} = \dim \mathfrak{m}_1$ следует $\dim(\mathfrak{g} \cap \mathfrak{m}) = \dim(\mathfrak{g} \cap \mathfrak{m}_1)$ и $\mathfrak{g} \cap \mathfrak{m} = \mathfrak{g} \cap \mathfrak{m}_1 \in M$ (так как $\mathfrak{g} \cap \mathfrak{m} \subset \mathfrak{m}' \subset \mathfrak{m}_1$ и $\mathfrak{m}' \subset \mathfrak{g} \cap \mathfrak{m}_1$). Обратно, если $\mathfrak{m}' \in M$ и $\mathfrak{m}$ – подалгебра Мальцева алгебры Ли $e(\mathfrak{g})$, содержащая $\mathfrak{m}'$, то $\mathfrak{m}' = \mathfrak{g} \cap \mathfrak{m}$.

Пусть $\mathfrak{s}$ – подалгебра Леви и $\mathfrak{r}$ – радикал алгебры Ли $\mathfrak{g}$, тогда $e(\mathfrak{r})$ является разрешимым идеалом алгебры Ли $e(\mathfrak{g})$ и $e(\mathfrak{g}) = e(\mathfrak{s} \oplus e(\mathfrak{r})) = \mathfrak{s} \oplus e(\mathfrak{r})$, т. е. $e(\mathfrak{r})$ является радикалом алгебры Ли $e(\mathfrak{g})$. Следовательно, нильпотентные радикалы алгебр Ли $\mathfrak{g}$ и $e(\mathfrak{g})$ совпадают. Осталось заметить, что группа специальных автосопряжений алгебры Ли $\mathfrak{g}$ совпадает с группой специальных автосопряжений алгебры Ли $e(\mathfrak{g})$, которая транзитивно действует на множестве подалгебр Мальцева алгебры Ли $e(\mathfrak{g})$.

Проиллюстрируем вышесказанное на примере. Пусть $\mathfrak{n} \subset \mathfrak{gl}(4, \mathbb{C})$ – подалгебра, состоящая из нильпотентных элементов:

$$\mathfrak{n} = \left\{ \left. \begin{pmatrix} 0 & -y & x & z \\ 0 & 0 & 0 & x \\ 0 & 0 & 0 & y \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right| x, y, z \in \mathbb{C} \right\}.$$

В качестве примера приведем классификацию подалгебр в $\mathfrak{gl}(4, \mathbb{C})$, для которых линейный нильрадикал разделяющей оболочки совпадает с $\mathfrak{n}$. Имеем

$$N(\mathfrak{n}) = \left\{ \left. \begin{pmatrix} 2u+v & w & p & q \\ 0 & x+u & y & r \\ 0 & z & -x+u & s \\ 0 & 0 & 0 & -v \end{pmatrix} \right| \begin{matrix} \\ x, y, z, u, v, w, p, q, r, s \in \mathbb{C} \end{matrix} \right\}.$$

Как нетрудно проверить, подалгебра

$$\overline{\mathfrak{m}} = \left\{ \left. \begin{pmatrix} 2u+v & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x+u & y & 0 \\ 0 & z & -x+u & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -v \end{pmatrix} \right| \begin{matrix} \\ x, y, z, u, v \in \mathbb{C} \end{matrix} \right\}$$

редуктивна в $\mathfrak{gl}(4, \mathbb{C})$ и дополнительна в $N(\mathfrak{n})$ к $\mathfrak{n}_V(N(\mathfrak{n}))$. Таким образом, она является подалгеброй Мальцева алгебры Ли $N(\mathfrak{n})$. При этом алгебра Ли $\overline{\mathfrak{g}} = \overline{\mathfrak{m}} \oplus \mathfrak{n}$ имеет вид

$$\overline{\mathfrak{g}} = \left\{ \left. \begin{pmatrix} 2u+v & -w & p & q \\ 0 & x+u & y & p \\ 0 & z & -x+u & w \\ 0 & 0 & 0 & -v \end{pmatrix} \right| \begin{matrix} \\ x, y, z, u, v, w, p, q \in \mathbb{C} \end{matrix} \right\}.$$

Группа $A(\overline{\mathfrak{g}}, \overline{\mathfrak{m}})$ изоморфна $GL(2, \mathbb{C}) \times \mathbb{C}^*$ и

$$A(\overline{\mathfrak{g}}, \overline{\mathfrak{m}}) = \left\{ \left. \begin{pmatrix} \det(A) \cdot a & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \right| \begin{matrix} A \in GL(2, \mathbb{C}), \\ a \in \mathbb{C}^* \end{matrix} \right\}.$$

Алгебра Ли $\overline{\mathfrak{m}}$ изоморфна $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) \oplus \mathbb{C}^2$. Группа $A(\overline{\mathfrak{g}}, \overline{\mathfrak{m}})$ действует сопряжением элементами из $GL(2, \mathbb{C})$ на компоненту $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ и тривиальна на $\mathbb{C}^2$.

Описывая все подалгебры $\mathfrak{m} \subset \overline{\mathfrak{m}}$, редуктивные в $\mathfrak{sl}(4, \mathbb{C})$, получаем, что искомые разделяющие подалгебры $\mathfrak{g} = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{n}$ сопряжены одной и только одной из следующих:

1. $\begin{pmatrix} 0 & -x & y & z \\ 0 & 0 & 0 & y \\ 0 & 0 & 0 & x \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

2. $\begin{pmatrix} x & -y & z & u \\ 0 & 0 & 0 & z \\ 0 & 0 & 0 & y \\ 0 & 0 & 0 & -x \end{pmatrix}$.

3. $\begin{pmatrix} (2+\lambda)x & -y & z & u \\ 0 & x & 0 & z \\ 0 & 0 & x & y \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda x \end{pmatrix}$.

4. $\begin{pmatrix} (2\lambda+\mu)x & -y & z & u \\ 0 & (1+\lambda)x & 0 & z \\ 0 & 0 & (-1+\lambda)x & y \\ 0 & 0 & 0 & -\mu x \end{pmatrix}.$

5. $\begin{pmatrix} \lambda x+(2+\mu)y & -z & u & v \\ 0 & x+y & 0 & u \\ 0 & 0 & -x+y & z \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda x-\mu y \end{pmatrix}.$

6. $\begin{pmatrix} 2\lambda x+y & -z & u & v \\ 0 & (1+\lambda)x & 0 & u \\ 0 & 0 & (-1+\lambda)x & z \\ 0 & 0 & 0 & -y \end{pmatrix}.$

7. $\begin{pmatrix} 2x+y & -z & u & v \\ 0 & x & 0 & u \\ 0 & 0 & x & z \\ 0 & 0 & 0 & -y \end{pmatrix}.$

8. $\begin{pmatrix} 2y+z & -u & v & w \\ 0 & x+y & 0 & v \\ 0 & 0 & -x+y & u \\ 0 & 0 & 0 & -z \end{pmatrix}.$

9. $\begin{pmatrix} 0 & -u & v & w \\ 0 & x & y & v \\ 0 & z & -x & u \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$

10. $\begin{pmatrix} (2+\lambda)u & -v & w & p \\ 0 & x+u & y & w \\ 0 & z & -x+u & v \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda u \end{pmatrix}.$

11. $\begin{pmatrix} u & -v & w & p \\ 0 & x & y & w \\ 0 & z & -x & v \\ 0 & 0 & 0 & -u \end{pmatrix}.$

12. $\begin{pmatrix} 2u+v & -w & p & q \\ 0 & x+u & y & p \\ 0 & z & -x+u & w \\ 0 & 0 & 0 & -v \end{pmatrix}.$

Замечание. *Отношение сопряженности подалгебр является отношением эквивалентности на множестве параметров* λ *и* μ. *Это отношение эквивалентности имеет вид: для подалгебры под номером 4 –* $(\lambda, \mu) \sim (-\lambda, -\mu)$, *под номером 5 –* $(\lambda, \mu) \sim (-\lambda, \mu)$, *под номером 6 –* $\lambda \sim -\lambda$.

Перейдем к классификации неразделяющих подалгебр $\mathfrak{h}$ с данной разделяющей оболочкой $\mathfrak{g} = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{n}$ из перечисленных выше. Для этого требуется описать такие собственные подпространства U в $\mathfrak{a} = \mathfrak{g} / \mathcal{D}\mathfrak{g}$, что $U + p(\mathfrak{n}) = U + p(\mathfrak{m}) = \mathfrak{a}$, с точностью до группы $A(\mathfrak{g}, \mathfrak{m})$ (следствие утверждения 2).

Заметим, что для подалгебры под номером 1 имеем $p(\mathfrak{m}) = 0$, а для подалгебр под номерами 2, 6–12 выполняется условие $\mathfrak{n} \subset \mathcal{D}\mathfrak{g}$, т. е. $p(\mathfrak{n}) = 0$. Таким образом, для подалгебр с указанными номерами не существует неразделяющих подалгебр с данной разделяющей оболочкой.

В качестве примера рассмотрим разделяющую подалгебру под номером 3. Если $\lambda \neq -1$, то $\mathfrak{n} \subset \mathcal{D}\mathfrak{g}$ и $p(\mathfrak{n}) = 0$. Следовательно, достаточно ограничиться случаем, когда $\lambda = -1$. Тогда

$$\mathcal{D}\mathfrak{g} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & x \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \middle| x \in \mathbb{C} \right\}$$

и выберем в $\mathfrak{a}$ базис $\{v_1, v_2, v_3\}$, где

$$xv_1 + yv_2 + zv_3 = \begin{pmatrix} x & -z & y & 0 \\ 0 & x & 0 & y \\ 0 & 0 & x & z \\ 0 & 0 & 0 & x \end{pmatrix} + \mathcal{D}\mathfrak{g},$$

$$x, y, z \in \mathbb{C}.$$

Тогда $p(\mathfrak{m}) = \langle v_1 \rangle$, $p(\mathfrak{n}) = \langle v_2, v_3 \rangle$. Нетрудно проверить, что

$$A(\mathfrak{g}, \mathfrak{m}) = \left\{ \begin{pmatrix} \det(A) \cdot a & {}^tB & d \\ 0 & A & C \\ 0 & 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \middle| \begin{array}{c} A \in GL(2, \mathbb{C}),\ a \in \mathbb{C}^*, \\ B, C \in \mathbb{C}^2,\ d \in \mathbb{C} \end{array} \right\}.$$

В выбранном базисе $\{v_1, v_2, v_3\}$ пространства $\mathfrak{a}$ действие группы $A(\mathfrak{g}, \mathfrak{m})$ индуцирует следующую группу преобразований:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a \cdot A \end{pmatrix} \middle| A \in GL(2, \mathbb{C}),\ a \in \mathbb{C}^* \right\}.$$

Условие $U + p(\mathfrak{m}) = \mathfrak{a}$ означает, что $\dim U = 2$, а условие $U + p(\mathfrak{n}) = \mathfrak{a}$ влечет $\dim U \cap p(\mathfrak{n}) = 1$.

При действии группы $A(\mathfrak{g}, \mathfrak{m})$ всякое такое подпространство U сопряжено подпространству вида $\langle v_2, v_1 + v_3 \rangle$. Соответствующая подалгебра $\mathfrak{h} = p^{-1}(U)$:

$$\mathfrak{h} = \left\{ \left. \begin{pmatrix} x & -x & y & z \\ 0 & x & 0 & y \\ 0 & 0 & x & x \\ 0 & 0 & 0 & x \end{pmatrix} \right| x, y, z \in \mathbb{C} \right\}.$$

Случаи 4 и 5 рассматриваются аналогично.

Окончательно получаем, что все искомые неразделяющие подалгебры $\mathfrak{h}$ сопряжены одной и только одной из следующих подалгебр:

$$3.1. \begin{pmatrix} x & -x & y & z \\ 0 & x & 0 & y \\ 0 & 0 & x & x \\ 0 & 0 & 0 & x \end{pmatrix}.$$

$$4.1. \begin{pmatrix} (1+\lambda)x & -x & y & z \\ 0 & (1+\lambda)x & 0 & y \\ 0 & 0 & (-1+\lambda)x & x \\ 0 & 0 & 0 & (-1+\lambda)x \end{pmatrix}.$$

$$5.1. \begin{pmatrix} (1+\lambda)x+y & -y & z & u \\ 0 & (1+\lambda)x+y & 0 & z \\ 0 & 0 & (\lambda-1)x+y & y \\ 0 & 0 & 0 & (\lambda-1)x+y \end{pmatrix}.$$

$$5.2. \begin{pmatrix} x+y & -y & z & u \\ 0 & x+y & 0 & z \\ 0 & 0 & x-y & y \\ 0 & 0 & 0 & x-y \end{pmatrix}.$$

Аналогичным образом могут быть рассмотрены все оставшиеся случаи и получена классификация подалгебр в $\mathfrak{gl}(4, \mathbb{C})$.

Заключение. Приведен алгоритм классификации разделяющих алгебр Ли с данным линейным нильрадикалом, а именно: сначала строится нормализатор нильпотентной подалгебры, далее фиксируется некоторая подалгебра Мальцева нормализатора и строится разделяющая алгебра Ли, потом, с точностью до сопряженности, описываются подалгебры алгебры Мальцева, являющиеся редуктивными, и выписываются разделяющие подалгебры. Затем решается задача классификации неразделяющих линейных алгебр Ли с данной разделяющей оболочкой. С применением этих алгоритмов описаны с точностью до сопряженности подалгебры алгебры Ли $\mathfrak{gl}(4, \mathbb{C})$. Алгоритмы, приведенные в работе, могут быть компьютеризованы и использованы для решения аналогичных задач в больших размерностях.

Список литературы

1. Мерзляков Ю. И. Рациональные группы. М.: Наука, 1987. 464 с.
2. Супруненко Д. А. Группы матриц. М.: Наука, 1979. 351 с.
3. Можей Н. П. Линейные алгебры Ли, состоящие из нильпотентных эндоморфизмов // Труды БГТУ. Сер. 3, Физ.-мат. науки и информатика. 2020. № 1. С. 20–25.
4. Бурбаки Н. Группы и алгебры Ли. М.: Мир, 1972–1978. Гл. I–VIII.

References

1. Merzlyakov Yu. I. *Ratsional’nyye gruppy* [Rational groups]. Moscow, Nauka Publ., 1987. 464 p.
2. Suprunenko D. A. *Gruppy matrits* [Matrix groups]. Moscow, Nauka Publ., 1979. 351 p.
3. Mozhey N. P. Linear Lie algebras consisting of nilpotent endomorphisms. *Trudy BGTU* [Proceedings of BSTU], series 3, Physics and Mathematics. Informatics, 2020, no. 1, pp. 20–25 (In Russian).
4. Burbaki N. *Gruppy i algebry Li* [Groups and Lie algebras]. Moscow, Mir Publ., 1972–1978. Ch. I–VIII.

Информация об авторе

Можей Наталья Павловна − кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры программного обеспечения информационных технологий. Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники (220013, г. Минск, ул. П. Бровки, 6, Республика Беларусь). E-mail: mozheynatalya@mail.ru

Information about the author

Mozhey Natalya Pavlovna − PhD (Physics and Mathematics), Associate Professor, Assistant Professor, the Department of Software for Information Technologies. Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics (6, P. Brovki str., 220013, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: mozheynatalya@mail.ru

Поступила после доработки 09.03.2020