ЖАРИХИНА ЛЮДМИЛА ПЕТРОВНА
доцент, кандидат физико-математических наук, доцент

КАРПОВИЧ ЕЛЕНА ЛЕОНИДОВНА
старший преподаватель

Военная академия Республики Беларусь

ПРИМЕРЫ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ФОРМУЛ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ ПРИ ИЗУЧЕНИИ РАЗДЕЛОВ ФИЗИКИ И РЕШЕНИИ НЕКОТОРЫХ ФИЗИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

Аннотация. *Рассматривается применение математического аппарата в основных разделах физики, приводятся примеры некоторых физических задач.*

Ключевые слова: *высшая математика, физика, физические задачи.*

Основу инженерной подготовки в военных и технических вузах, как известно, составляют высшая математика и физика. В учреждении образования «Военная академия Республики Беларусь» изучение математики начинается в первом семестре первого курса и заканчивается в четвертом семестре второго курса, курс физики начинается во втором семестре первого курса и заканчивается в третьем семестре второго курса, можно сказать, что высшая математика «готовит» курсантов к восприятию теоретических разделов курса физики и поэтому играет определяющую роль в их изучении.

В курсе физики аппарат высшей математики используется практически во всех разделах [1]. Так, например, первое знакомство с векторной алгеброй в физике начинается в механике, затем в разделе «электричество и магнетизм».

В средней школе даны лишь некоторые понятия этого раздела. В высшей школе курса физики векторные величины встречаются повсеместно. Курсанты должны уметь определять знак проекции скорости и силы на выбранное направление движения, уметь складывать, вычитать вектора, умножать и делить их на определенное постоянное число.

Одной из самых распространенных задач в механике является задача на нахождение равнодействующей множества сил, действующих на тело. Приведем пример такой задачи.

Задача 1. Найти равнодействующую $\vec{R}$ двух приложенных в одной точке сил $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$, модули которых $F_1 = 5H$, $F_2 = 7H$; угол между силами

$\varphi = 60°$. Определить модуль равнодействующей силы $\vec{R}$, а также углы α и β, образуемые равнодействующей $\vec{R}$ с силами $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$).

Дано:
$F_1 = 5H$
$F_2 = 7H$
$\varphi = 60°$

Найти:
R, α, β.

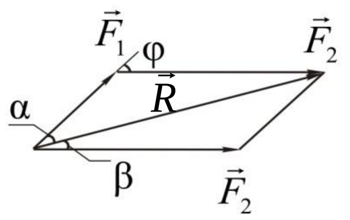
Решение

Модуль равнодействующей силы R определяем по теореме косинусов:

$$R = \sqrt{5^2 + 7^2 - 2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \cos 120°} \approx 10,44H.$$

Углы α и β находим по теореме синусов, учитывая, что $\varphi = \alpha + \beta$:

$$\frac{F_1}{\sin\beta} = \frac{F_2}{\sin\alpha} = \frac{R}{\sin(180° - \varphi)}.$$



Поскольку $\sin(180° - \varphi) = \sin\varphi$, то

$$\sin\alpha = \frac{F_2 \sin\varphi}{R} = 0,581; \quad \alpha = 35°30';$$

$$\sin\beta = \frac{F_1 \sin\varphi}{R} = 0,415; \quad \beta = 24°30'.$$

Проверяем: $\alpha + \beta = 35°30' + 24°30' = 60° = \varphi$.

Ответ: 10,44 *Н*, 35°30′, 24°30′.

В курсе физики курсанты часто сталкиваются с такими понятиями как скалярное и векторное произведения. Приведем пример такой математической задачи, решаемой для двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Задача 2. Найти угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, проекции которых на координатные оси *Ox, Oy* и *Oz* равны:

$a_x = 3;\ a_y = 4;\ a_z = -2;\ b_x = 1;\ b_y = -1;\ b_z = 0.$

Дано:
a (3,4,-2)
b (1,-1,0)

Найти:
$(\vec{a}, \vec{b})$.

Решение

Скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = ab\cos(\vec{a}, \vec{b}) = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z,$$

откуда $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \dfrac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{ab}$.

Модуль вектора $\vec{a}$ равен $a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = \sqrt{29} \approx 5,4$;

модуль вектора $\vec{b}$ равен

$$b = \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2} = \sqrt{2} \approx 1,41;$$

$$\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{3 - 4 + 0}{5,4 \cdot 1,41} \approx -0,13;$$

$$(\vec{a}, \vec{b}) \approx 97°30'.$$

Ответ: 97°30′.

В механике скалярное произведение $A = \left(\vec{F}, \Delta\vec{r}\right)$ векторов силы $\vec{F}$ и перемещения $\Delta\vec{r}$ есть совершенная силой работа *A,* и приведенное выше решение для отвлеченных векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ можно применить для нахождения угла между силой и перемещением.

Приведем пример использования векторной алгебры при решении задач в электростатике.

Задача 3. Два точечных заряда $q_1 = 7{,}5$ *нКл* и $q_2 = -14{,}7$ *нКл* расположены на расстоянии $r = 5$ *см*. Найти напряженность ***E*** электрического поля в точке, находящейся на расстояниях $a = 3$ *см* от положительного заряда и $b = 4$ *см* от отрицательного заряда.

Дано:

$q_1 = 7{,}5 \cdot 10^{-9}$ *Кл*

$q_2 = -14{,}7 \cdot 10^{-9}$ *Кл*

$r = 5 \cdot 10^{-2}$ *м*

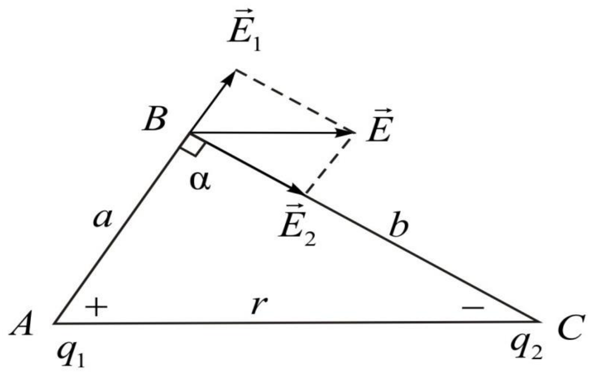
$a = 3 \cdot 10^{-2}$ *м*

$b = 4 \cdot 10^{-2}$ *м*

Найти: E.

Решение

Длины сторон треугольника ABC *b*, *r* и *a* удовлетворяют теореме Пифагора $r^2 = a^2 + b^2$, следовательно, треугольник прямоугольный, угол $\alpha = 90°$.



Согласно принципу суперпозиции полей результирующая напряженность в точке *C*:

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2,$$

где $\vec{E}_1$ – напряженность, создаваемая положительным зарядом q_1, $\vec{E}_2$ – напряженность, создаваемая отрицательным зарядом q_2.

По правилу сложения двух взаимно перпендикулярных векторов в скалярном виде

$$E = \sqrt{E_1^2 + E_2^2}.$$

Поскольку $E_1 = \dfrac{|q_1|}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon a^2}$, а $E_2 = \dfrac{|q_2|}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon b^2}$, то

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon} \cdot \sqrt{\frac{q_1^2}{a^4} + \frac{q_2^2}{b^4}} = 112 \ кВ/м.$$

Ответ: 112 *кВ/м*.

Умение определять направление результирующего вектора векторного произведения позволит курсантам определить направление моментов силы, импульса, магнитной индукции, сил Ампера и Лоренца, то есть правильно решить базовые задачи курса физики.

Минимальное знакомство с матричным исчислением, являющимся основой изучения линейной алгебры, позволяет решать задачи динамики твердого тела.

Разделы линейной алгебры, в которые входят вычисление различных определителей, нужны в физике для расчета электрических полей постоянного тока по правилам Кирхгофа, а также определения момента силы и ее координат. Приведем пример расчета электрической цепи постоянного тока методом Кирхгофа.

Задача 4. Батареи имеют ЭДС $\varepsilon_1 = 110В$ и $\varepsilon_2 = 220В$, сопротивления $R_1 = R_2 = 100\ Ом$, $R_3 = 500\ Ом$, сопротивление амперметра $R_А = 0,2\ кОм$. Найти показания амперметра.

Дано:

$\varepsilon_1 = 110В$

$\varepsilon_2 = 220В$

$R_1 = R_2 = 100Ом$

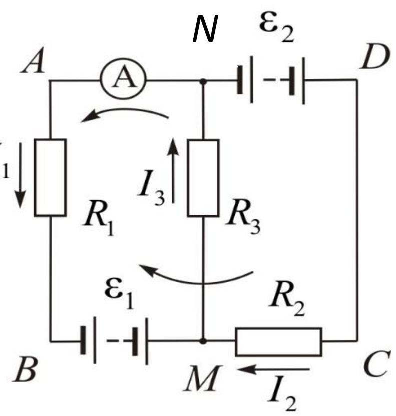
$R_3 = 500Ом$

$R_A = 200Ом$

Найти: $I_А$.

Решение

Выберем и рассмотрим два контура *ABCD* и *ABMN*, для каждого из них укажем направление обхода.



Предположительно определим направление токов в каждом сопротивлении. По второму правилу Кирхгофа для контура *ABMN* имеем

$$\varepsilon_1 = I_3R_3 + I_1\left(R_A + R_1\right); \tag{1}$$

для контура *ABCD* имеем

$$\varepsilon_2 - \varepsilon_1 = I_2R_2 - I_1\left(R_A + R_1\right). \tag{2}$$

Согласно первому правилу Кирхгофа для узла *M* имеем

$$I_3 = I_1 + I_2. \tag{3}$$

Из уравнения (1) выразим ток I_3

$$I_3 = \frac{\varepsilon_1 - I_1 + (R_1 + R_A)}{R_3},$$

из уравнения (2) выразим ток I_2

$$I_2 = \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1 + I_1(R_1 + R_A)}{R_2}.$$

Амперметр покажет ток I_A такой же, как ток I_1 через сопротивление R_1 (последовательное соединение).

Из уравнения (3) искомый ток

$$I_A = I_1 = I_3 - I_2 = \frac{\varepsilon_1 - I_1(R_1 + R_A)}{R_3} - \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1 + I_1(R_1 + R_A)}{R_2} \Rightarrow$$

$$I_1\left(1 + \frac{R_1 + R_A}{R_3} + \frac{R_1 + R_A}{R_2}\right) = -\left(\frac{\varepsilon_1}{R_3} + \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{R_2}\right).$$

В результате преобразований и подстановки численных значений сопротивлений и ЭДС, получим, что $I_1 = I_A \approx -0,2A$.

Знак «минус» означает, что мы ошиблись в выборе направления тока I_1, т.е. в действительности он течет в направлении, противоположном выбранному.

Применим для решения системы уравнений (1)–(3) правило Крамера. Подставим в систему численные значения известных величин (сопротивлений и ЭДС). Полученная система относительно трех неизвестных значений сил тока примет вид

$$\begin{cases} 50I_3 + 30I_1 = 11, \\ 10I_2 - 30I_1 = 11, \\ I_3 - I_2 = I_1. \end{cases}$$

Запишем расширенную матрицу системы:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 30 & 0 & 50 & 11 \\ -30 & 10 & 0 & 11 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right).$$

Ее определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} 30 & 0 & 50 \\ -30 & 10 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -2300.$$

Заменив первый столбец определителя, соответствующий коэффициентам при искомом неизвестном I_A, на столбец свободных членов расширенной матрицы, получим определитель Δ_1:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 11 & 0 & 50 \\ 11 & 10 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 440.$$

Тогда $I_A = \dfrac{\Delta_1}{\Delta} = \dfrac{440}{-2300} \approx -0,2(A).$

Ответ: – 0,2 A.

Высшая математика используется и в других разделах курса физики. Вкратце приведем эти разделы, а также укажем методы высшей математики, используемы в них.

Элементы математического анализа, в частности, умение вычислять производные любых функций и вычислять интегралы нужно практически во всех разделах физики, начиная с классической механики и заканчивая квантовой.

Теория вероятностей используется в физике при изучении молекулярной физики, классических и квантовых статистик (Больцмана, Максвелла, Ферми-Дирака и Бозе-Эйнштейна).

В курсе физики комплексные числа используются только в квантовой механике при решении задачи о рассмотрении движения свободной частицы и частицы в бесконечно глубокой потенциальной яме, но умение работать с комплексными числами обязательно понадобится при изучении специальных предметов.

Дифференциальные уравнения встречаются в физике при решении задач по механическим, электромагнитным колебаниям и при решении уравнения Шредингера в квантовой механике. Умение решать однородные и неоднородные дифференциальные уравнения позволяет более детально исследовать физические процессы, происходящие в колебательных системах при затухающих и вынужденных колебаниях

К сожалению, применяя уравнения высшей математики в других (физических) обозначениях, курсанты часто не узнают знакомые выражения формул и не видят за ними реальных физических процессов. Это связано, по нашему мнению, с тем, что высшая математика оперирует с абстрактными понятиями и не заостряет внимание курсантов на область применения в физике (и других науках и учебных дисциплинах) тех или иных уравнений и формул.

Преподавателям кафедры высшей математики следует наладить тесное сотрудничество преподавателями других кафедр (в частности физики) с целью обеспечения качественного и приближенного к реальности образования в области высшей математики (а так же и физики). В настоящее время это становится одной из самых важных задач, решаемых в технических вузах. Преподаватели Военной академии обязаны так же внедрять достижения новейших военных технологий, так как часто курсанты не видят связи между фундаментальными и военно-прикладными знаниями, а преподавание этих дисциплин (высшей математики и физики) без учета военной специфики ведет к потере интереса курсантов к обучению [2].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1 Акулович, Н.И. Элементы высшей математики в физических задачах [Текст] : учебное пособие / Н.И. Акулович, Л.П. Жарихина, Л.В. Михайловская. – Минск : ВА РБ, 2010. – 85 [4, 88] с.

2 Жарихина, Л.П. Применение основных формул высшей математики при решении физических задач [Текст] / Л.П. Жарихина, Е.Л. Карпович // Актуальные вопросы тактики, вооружения и военной техники ПВО, пути их решения. Тезисы выступлений 10-й межвузовской научно-технической конференции курсантов, магистрантов и адъюнктов факультета противовоздушной обороны / Редкол.: О.К. Котоласов [и др.]. – Минск : ВА РБ, 2019. – С. 29–30.