

Министерство образования Республики Беларусь
Учреждение образования
«Белорусский государственный университет
информатики и радиоэлектроники»

Кафедра радиотехнических систем

С. А. Ганкевич

РАДИОАВТОМАТИКА

Практикум

для студентов специальностей 1-39 01 02 «Радиоэлектронные системы»,
1-39 01 04 «Радиоэлектронная защита информации»
дневной формы обучения

В 2-х частях

Часть 2

НЕЛИНЕЙНЫЕ И ДИСКРЕТНЫЕ СИСТЕМЫ РАДИОАВТОМАТИКИ. ПРОЕКТИРОВАНИЕ СИСТЕМ

Минск БГУИР 2010

УДК 681.5(076)

ББК 32.965я73

Г19

Р е ц е н з е н т:

доктор технических наук, профессор

В. К. Конопелько

Ганкевич, С. А.

Г19 Радиоавтоматика : практикум для студ. спец. 1- 39 01 02 «Радиоэлектронные системы», 1-39 01 04 «Радиоэлектронная защита информации» днев. формы обуч. В 2 ч. Ч. 2 : Нелинейные и дискретные системы радиоавтоматики. Проектирование систем / С. А. Ганкевич. – Минск : БГУИР, 2010. – 76 с.

ISBN 978-985-488-479-0 (ч. 2)

Вторая часть практикума содержит справочный материал, примеры решения задач, задачи и упражнения по основным разделам теории нелинейных и дискретных систем радиоавтоматики и проектирования систем.

УДК 681.5(076)

ББК 32.965я73

Часть 1 «Линейные системы радиоавтоматики» издана в БГУИР в 2007 году.

ISBN 978-985-488-479-0 (ч. 2)

ISBN 978-985-488-209-3

© Ганкевич С. А., 2010

© УО «Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники», 2010

СОДЕРЖАНИЕ

1. АНАЛИЗ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ РАДИОАВТОМАТИКИ.....	4
1.1. Особенности нелинейных систем	4
1.2. Метод гармонической линеаризации	4
1.2.1. Основы метода	4
1.2.2. Определение условий возникновения автоколебаний в нелинейной системе	9
1.2.3. Анализ точности методом гармонической линеаризации	10
1.2.4. Примеры	11
1.2.5. Задачи.....	18
1.3. Метод статистической линеаризации	22
1.3.1. Основы метода	22
1.3.2. Примеры.....	27
1.3.3. Задачи	31
2. ДИСКРЕТНЫЕ СИСТЕМЫ РАДИОАВТОМАТИКИ.....	32
2.1. Математические модели дискретных систем	32
2.2. Математическое описание дискретных систем	34
2.2.1. Z -преобразование и его свойства.....	34
2.2.2. Передаточные функции дискретных систем.....	35
2.2.3. Разностные уравнения.....	37
2.2.4. Операторный коэффициент передачи дискретной системы	38
2.2.5. Комплексный коэффициент передачи дискретной системы.....	39
2.3. Устойчивость дискретных систем.....	39
2.4. Анализ детерминированных процессов в дискретных системах.....	41
2.5. Анализ случайных процессов в дискретных системах.....	41
2.6. Задачи	43
3. ПРОЕКТИРОВАНИЕ СИСТЕМ РАДИОАВТОМАТИКИ	45
3.1. Краткие теоретические сведения	45
3.1.1. Определение параметров желаемой передаточной функции	45
3.1.2. Определение передаточных функций корректирующих устройств	46
3.1.3. Определение параметров звеньев последовательных корректирующих устройств	48
3.1.4. Выбор параметров гибкой обратной связи	54
3.2. Задачи	58
4. СИНТЕЗ ФИЛЬТРОВ СЛЕДЯЩИХ СИСТЕМ МЕТОДАМИ ОПТИМАЛЬНОЙ ЛИНЕЙНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ	61
4.1. Синтез фильтров на основе решения интегральных уравнений	61
4.1.1. Краткие теоретические сведения.....	61
4.1.2. Примеры	63
4.1.3. Задачи	65
4.2. Фильтры Калмана	67
4.2.1. Краткие теоретические сведения.....	66
4.2.2. Примеры.....	69
4.2.3. Задачи.....	74
ПРИЛОЖЕНИЕ	76
ЛИТЕРАТУРА	77

1. АНАЛИЗ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ РАДИОАВТОМАТИКИ

1.1. Особенности нелинейных систем

К нелинейным системам относят системы, описываемые нелинейными дифференциальными уравнениями. Нелинейные системы характеризуются наличием хотя бы одного звена, описываемого нелинейным дифференциальным уравнением или имеющего нелинейную статическую характеристику. Характерной особенностью нелинейных систем является возможность возникновения в них автоколебаний. Исследование условий возникновения автоколебаний, их устойчивости и параметров является одной из задач анализа нелинейных систем.

Для решения этой задачи в инженерной практике наиболее часто используется метод гармонической линеаризации (метод гармонического баланса).

Анализ нелинейных автоматических систем, находящихся под воздействием случайных возмущений, значительно сложнее, чем подобный анализ линейных систем. Наибольшее распространение для анализа нелинейных систем в этих условиях функционирования получил метод статистической линеаризации.

Наряду с рассмотренными методами для исследования нелинейных систем используются метод кусочно-линейной аппроксимации, метод фазовой плоскости, метод компьютерного моделирования и др.

1.2. Метод гармонической линеаризации

1.2.1. Основы метода

Метод применим для исследования нелинейных систем, описываемых дифференциальными уравнениями различного порядка. Эффективен для расчета параметров собственных колебаний в системе, используется также для анализа точности при гармоническом задающем воздействии.

Рассмотрим метод применительно к расчету параметров собственных колебаний в нелинейной системе [1]. С этой целью разделим систему на линейную часть и нелинейное звено (рис. 1.1).

Уравнение линейной части:

$$x = W_{\text{л}}(p)y \quad \text{или} \quad x = \frac{R(p)}{Q(p)}y, \quad (1.1)$$

где $W_{\text{л}}(p)$ – передаточная функция линейной части.

При возникновении автоколебаний процесс x на выходе линейной части не является строго гармоническим, но если линейное звено является фильтром нижних частот, можно предположить, что оно подавляет все гармоники, за исключением первой. Это предположение называется гипотезой фильтра. Если гипотеза не подтверждается, то ошибки при применении метода гармонической линеаризации могут быть значительными.

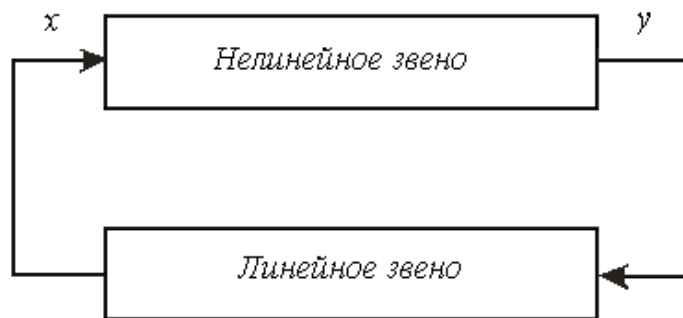


Рис. 1.1

Пусть

$$y = F(x); \quad x = a \sin \omega t, \quad (1.2)$$

где $F(x)$ – характеристика нелинейного звена.

Представим y в виде ряда Фурье:

$$y = C_0 + D_1 \sin \omega t + C_1 \cos \omega t + D_{21} \sin 2\omega t + C_2 \cos 2\omega t + \dots \quad (1.3)$$

Полагаем, что

$$C_0 = \frac{1}{2p} \int_0^{2p} F(a \sin \omega t) d(\omega t) = 0.$$

Это предположение справедливо в том случае, когда нелинейность $F(x)$ симметрична относительно начала координат и отсутствует внешнее воздействие. Полагая, что высшие гармоники подавляются фильтром, будем искать только коэффициенты D_1 и C_1 .

Из уравнения (1.2) находим:

$$\sin \omega t = \frac{x}{a}; \quad \cos \omega t = \frac{px}{aw}. \quad (1.4)$$

Подставив (1.4) в (1.3) и ограничив ряд слагаемыми первой гармоники, получим

$$y = q_0 x + q_1 \frac{px}{aw}, \quad (1.5)$$

где

$$\left. \begin{aligned} q_0 &= \frac{D_1}{a} = \frac{1}{\pi a} \int_0^{2\pi} F(a \sin \varphi) \sin \varphi \cdot d\varphi; \\ \varphi &= \omega \cdot t; \\ q_1 &= \frac{C_1}{a} = \frac{1}{\pi a} \int_0^{2\pi} F(a \sin \varphi) \cos \varphi \cdot d\varphi. \end{aligned} \right\} \quad (1.6)$$

Таким образом, нелинейное уравнение (1.2) для y заменяется приближенным линейным уравнением (1.5) для первой гармоники.

Коэффициенты q_0 и q_1 называют гармоническими коэффициентами передачи нелинейного звена. В рассматриваемом случае q_0 и q_1 зависят только от амплитуды, при более сложной нелинейной зависимости зависят еще и от частоты.

Рассчитанные значения коэффициентов гармонической линейризации для типовых нелинейностей (табл. 1.1) можно найти в учебниках и справочной литературе.

Передаточная функция разомкнутой системы может быть представлена в следующем виде:

$$W_p(p, a) = \frac{R(p)}{Q(p)} \left[q_0 + q_1 \frac{p}{w} \right]; \quad W_p(p, a) = W_{\text{Л}}(p) \cdot W_{\text{Н}}(a),$$

где $W_{\text{Н}}(a) = q_0 + q_1 \frac{p}{w}$ – эквивалентная передаточная функция нелинейного звена

Частотная передаточная функция разомкнутой системы:

$$W(jw, a) = \frac{R(jw)}{Q(jw)} [q_0 + jq_1].$$

Характеристическое уравнение:

$$Q(s) + R(s) \left[q_0 + q_1 \frac{s}{w} \right] = 0.$$

Модуль частотной передаточной функции нелинейного звена:

$$|W(a)| = \sqrt{[q_0]^2 + [q_1]^2}.$$

Фазочастотная характеристика:

$$y(a) = \arctg \frac{q_1}{q_0}; \quad q_0 = q_0(a); \quad q_1 = q_1(a).$$

Модуль определяет отношение амплитуд, а аргумент $y(a)$ – фазовый сдвиг сигнала на выходе относительно входного сигнала.

Если $F(x)$ симметрична относительно начала координат, однозначна и не имеет гистерезиса, то $q_1(a) = 0$; $y(a) = 0$. Тогда

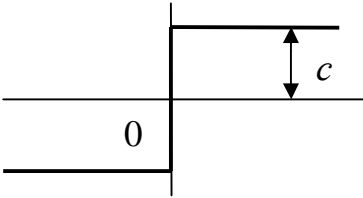
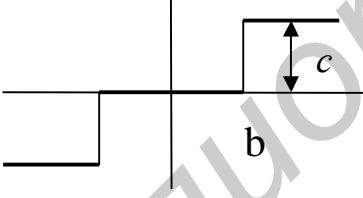
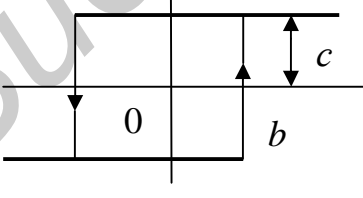
$$W_{\text{Н}}(a) = q_0(a).$$

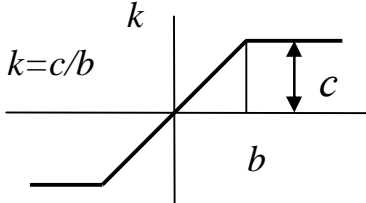
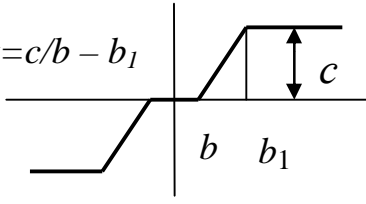
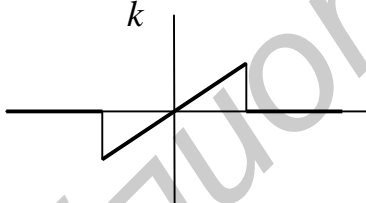
Часто при анализе используется величина, обратная $W_H(a)$. Она называется эквивалентным импедансом нелинейного звена:

$$z_H(a) = \frac{1}{W_H(a)} = u(a) + jv(a).$$

Таблица 1.1

Характеристики типовых нелинейностей

Характеристика нелинейного звена	Коэффициенты гармонической линейаризации	
	$q_0(a)$	$q_1(a)$
1	2	3
Идеальная релейная 	$\frac{4c}{\pi a}$	0
Релейная 	$\frac{4c}{\pi a} \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}, a \geq b$	0
Релейная 	$\frac{4c}{\pi a} \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}, a \geq b$	$-\frac{4cb}{\pi a^2}$

1	2	3
<p>С насыщением</p> 	$\frac{2k}{p} \left(\arcsin \frac{b}{a} + \frac{b}{a} \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} \right),$ <p>$a \geq b$ (k при $a < b$)</p>	<p>0</p>
<p>С зоной нечувствительности и насыщением</p> 	$2k \left(\arcsin \frac{b}{a} - \arcsin \frac{b_1}{a} + \frac{b}{a} \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} - \frac{b_1}{a} \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} \right)$	<p>0</p>
<p>Идеального дискриминатора</p> 	$\frac{2k}{p} \left[\frac{p}{a} + \arcsin \left(1 - \frac{2b}{a} \right) + 2 \left(1 - \frac{2b}{a} \right) \sqrt{\frac{b}{a}} \sqrt{\left(1 - \frac{b}{a} \right)} \right],$ <p>$a \geq b$</p>	$-\frac{4k}{p} \left(1 - \frac{b}{a} \right)$

1.2.2. Определение условий возникновения автоколебаний в нелинейной системе

Для возникновения автоколебаний в системе необходимо выполнение баланса амплитуд и фаз, что справедливо при выполнении условия

$$W(j\omega, a) = W_H(a) \quad W_H(j\omega) = -1$$

или

$$W_H(j\omega) = -1/W_H(a).$$

Проверку выполнения последнего условия удобно производить графическим методом. На плоскости комплексного переменного строят годограф $W_H(j\omega)$ при изменении ω от 0 до ∞ и годограф $-W_H^{-1}(a)$ при изменении a от 0 до ∞ . Если полученные кривые пересекаются, то в системе возможны автоколебания. Амплитуда и частота автоколебаний равны значениям аргументов кривых $W_H(j\omega)$ и $-W_H^{-1}(a)$ в точке пересечения (рис. 1.2).

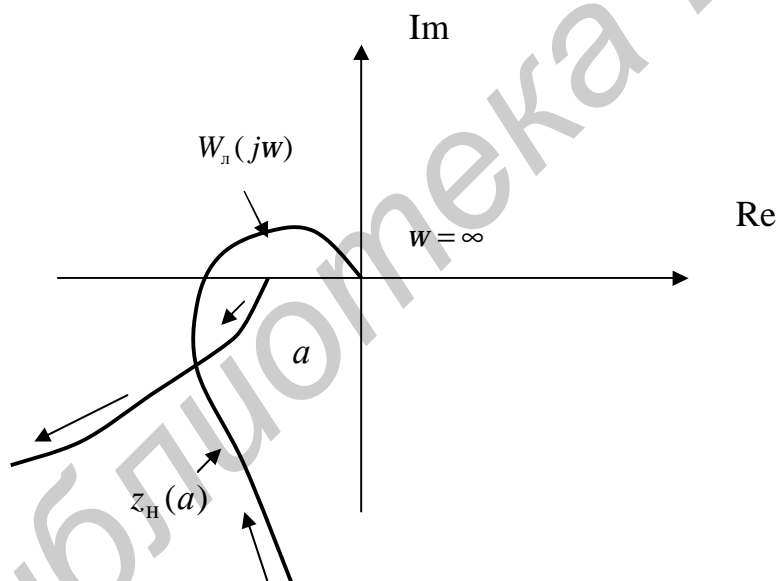


Рис. 1.2

При этом частоту периодического режима находят по отметкам частоты на годографе линейной части, а амплитуду – по отметкам амплитуды на кривой эквивалентного импеданса нелинейного звена. Собственные колебания являются устойчивыми, если годограф частотной передаточной функции линейной части охватывает часть кривой эквивалентного импеданса нелинейного звена, которая соответствует меньшим амплитудам.

1.2.3. Анализ точности методом гармонической линеаризации

Метод гармонической линеаризации может быть использован для анализа точности нелинейной системы [2]. При этом полагают, что задающее воздействие и ошибка управления изменяются по гармоническому закону:

$$\begin{aligned} I(t) &= a \sin \omega t; \\ x(t) &= b \sin \omega t. \end{aligned}$$

Или в комплексной форме

$$\begin{aligned} I(t) &= a e^{j\omega t}; \\ x(t) &= b e^{j\omega t}. \end{aligned}$$

где b и ψ – подлежащие определению амплитуда и фаза сигнала ошибки.

Поскольку при нелинейных характеристиках дискриминационного типа выходной сигнал дискриминатора не имеет постоянной составляющей и фаза выходного сигнала совпадает с фазой сигнала ошибки, то амплитуды квадратурных составляющих в разложении в ряд Фурье равны нулю.

Сигнал на выходе дискриминатора может быть представлен рядом

$$r(t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \sin k \omega t,$$

а при учете только первой гармоники

$$r(t) \approx c_1 \sin \omega t,$$

где

$$c_1 = \frac{1}{P} \int_0^{2p} F(b \sin \omega t) \sin \omega t d \omega t.$$

Гармонический коэффициент нелинейного звена определяется выражением

$$q(b) = \frac{c_1}{b}.$$

Частотная передаточная функция ошибки по задающему воздействию равна

$$H_{1x}(j\omega) = \frac{1}{1 + q(b)W(j\omega)}.$$

Представив частотную передаточную функцию линейной части системы в виде

$$W(j\omega) = A(\omega)e^{j\varphi(\omega)} = A(\omega)[\cos \varphi(\omega) + j \sin \varphi(\omega)],$$

получим

$$H_{\lambda x}(j\omega) = \frac{1}{1 + q(b)A(\omega)\cos \varphi(\omega) + jq(b)A(\omega)\sin \varphi(\omega)}.$$

Уравнение для сигнала ошибки в комплексной форме имеет вид

$$b e^{j\omega t} \cos y + j b e^{j\omega t} \sin y = \frac{a e^{j\omega t}}{1 + q(b)A(\omega) \cos \varphi(\omega) + j q(b)A(\omega) \sin \varphi(\omega)}.$$

Приравняв в обеих частях модули и аргументы, получим уравнения для амплитуды и фазы сигнала ошибки:

$$b = a / \sqrt{1 + 2q(b)A(\omega) \cos \varphi(\omega) + q^2(b)A^2(\omega)};$$

$$\psi = \arctg [q(b)A(\omega) \sin \varphi(\omega) / 1 + q(b)A(\omega) \cos \varphi(\omega)].$$

После решения первого уравнения в правую часть второго необходимо подставить значение $q(b)$, соответствующее найденному значению амплитуды и заданной характеристики нелинейного звена.

1.2.4. Примеры

1. Определить параметры собственных колебаний в следящей системе (рис. 1.3, а), содержащей нелинейное звено с релейной характеристикой. Частотная передаточная функция линейной части имеет вид

$$W_n(j\omega) = \frac{k}{j\omega (1 + j\omega T_1) (1 + j\omega T_2)},$$

где $T_1 = 0,016$ с;

$T_2 = 0,1$ с,

$k = 240$ 1/с,

зона нечувствительности $b = 1$ угл. мин.

Решение. Годограф линейной части изображен на рис. 1.3, б. На основании табл. 1.1 значение коэффициента гармонической линеаризации (при $c = 1$, $b = 1$) равно

$$q_0(a) = \frac{4}{pa} \sqrt{1 - \frac{1}{a^2}},$$

где $a = (a/b)$ – относительная амплитуда.

Поскольку рассматриваемая нелинейность (рис. 1.3, в) является нечетно-симметричной и однозначной, то $q_1(a) = 0$, а $F(x) = q_0(a)x$.

Таким образом, для данной нелинейности

$$-\frac{1}{W_n(a)} = -\frac{pa^2}{4c\sqrt{a^2 - b^2}}.$$

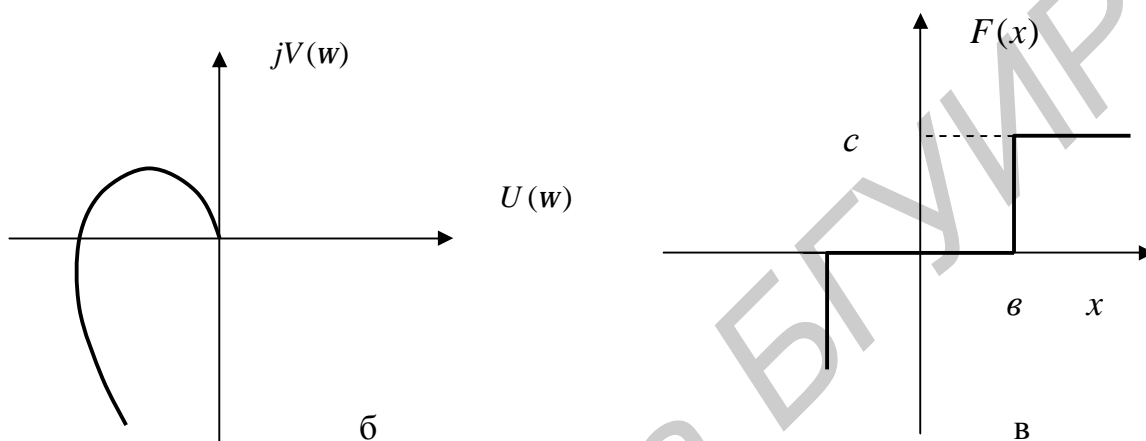
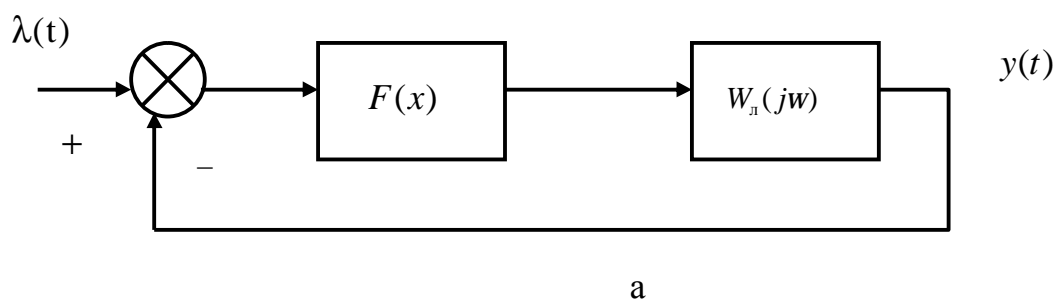


Рис. 1.3

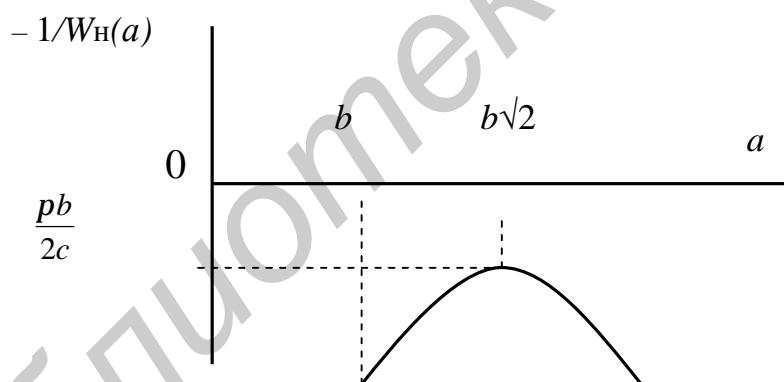


Рис. 1.4

График этой функции изображен на рис. 1.4. Функция $-1/W_n(a)$ является вещественной и вся укладывается на отрицательной полуоси действительных чисел (рис. 1.5). При этом на участке изменения амплитуды $b \leq a \leq b\sqrt{2}$ амплитуда отсчитывается слева извне внутрь кривой $W_n(a)$, а на участке $a \geq b\sqrt{2}$ – в обратную сторону. Следовательно, первая точка пересечения a_1 соответствует неустойчивому периодическому решению, а вторая a_2 – устойчивому (режиму автоколебаний).

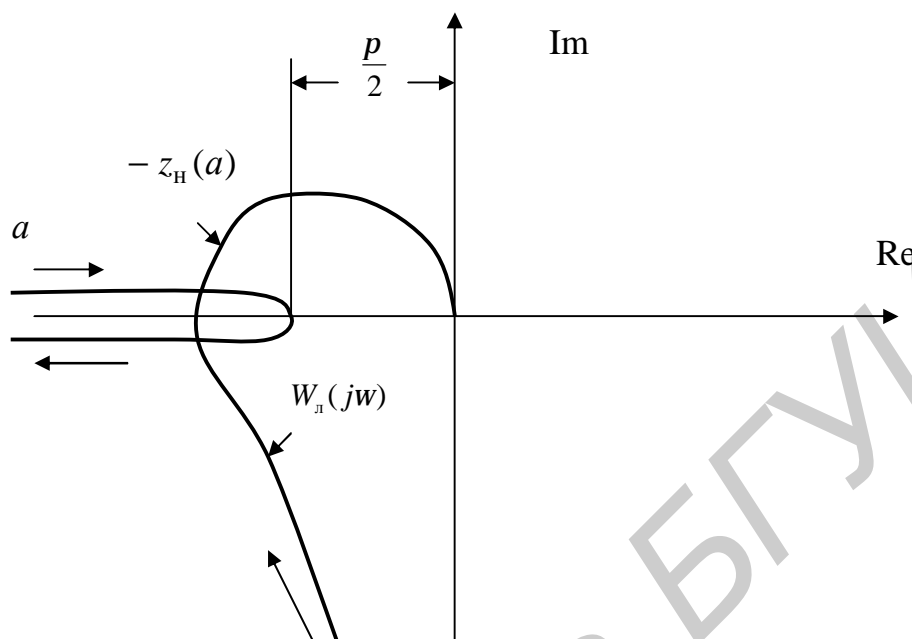


Рис. 1.5

Из выражения для аргумента частотной передаточной функции определим частоту, при которой годограф пересекает отрицательную полуось действительных чисел. Фазовый сдвиг при этом равен $-p$:

$$\varphi(w) = -90^\circ - \arctg wT_1 - \arctg wT_2 = -180^\circ.$$

Отсюда

$$\arctg wT_1 + \arctg wT_2 = p / 2.$$

Обозначив $w = \Omega$ и используя тригонометрическое тождество, получим

$$\arctg wT_1 + \arctg wT_2 = \arctg \frac{\Omega(T_1 + T_2)}{1 - \Omega^2 T_1 T_2} = \frac{p}{2},$$

откуда $\Omega = \frac{1}{\sqrt{T_1 T_2}} = \frac{1}{\sqrt{0,016 \cdot 0,1}} = 25 \text{ c}^{-1}$.

Приравняв модули передаточных функций $W_n(jw)$ при $w = \Omega$ и $W_n(a)$, получим

$$\frac{k}{\Omega \sqrt{1 + \Omega^2 T_1^2} \sqrt{1 + \Omega^2 T_2^2}} = \frac{pa^2}{4\sqrt{a^2 - 1}}.$$

Решив последнее уравнение, для режима устойчивых собственных колебаний найдем $\alpha_{уст} = 4,1$ и амплитуду колебаний:

$$A = b \cdot a_{уст} = 1 \cdot 4,1 = 4,1 \text{ угл. мин.}$$

Для нелинейных систем с одной нелинейностью, обладающих свойством фильтра, граница устойчивости может быть определена как граница существования периодических собственных колебаний в системе, т. е. как граница появления пары чисто мнимых корней в характеристическом уравнении (1.5) гармонически линеаризованной системы.

2. Исследовать устойчивость состояния равновесия системы, структурная схема которой изображена на рис. 1.6. Если в системе устанавливаются автоколебания, то определить их частоту и амплитуду для переменной x_1 . Исходные дан-

ные: $T_1 = 1c, T_2 = 0,01c, k_1 = 10, k_2 = 5c^{-1}, W_1(s) = \frac{k_1}{T_1s + 1}; W_2(s) = \frac{k_2}{s(T_2s + 1)}$.

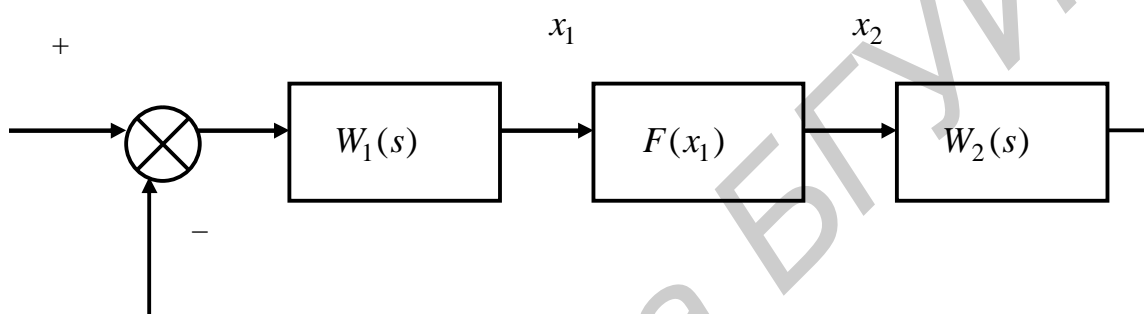


Рис. 1.6

Статическая характеристика нелинейного звена изображена на рис. 1.7.

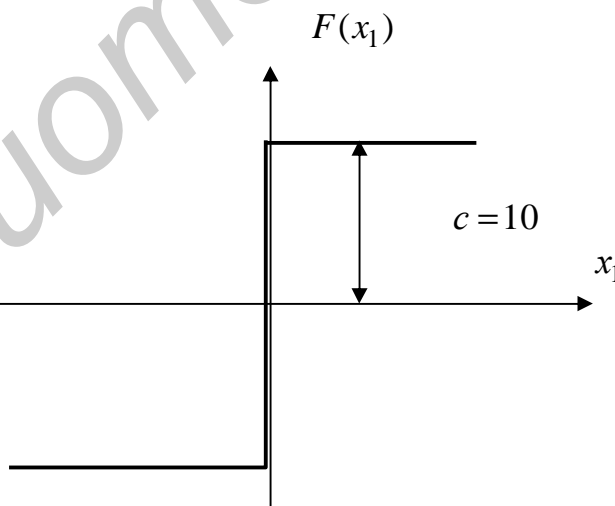


Рис. 1.7

Решение. Для нелинейного звена $F(x_1)$ составим гармонически линеаризованное уравнение

$$x_2 = \left[q_0(a) + \frac{q_1(a)}{w} p \right] x_1,$$

где в соответствии с табл. 1.1 для заданной нелинейности (см. рис. 1.7)

$$q_0(a) = \frac{4c}{pa}; \quad q_1(a) = 0.$$

По структурной схеме составим передаточную функцию замкнутой системы:

$$H_{1y}(s) = \frac{4ck_1k_2}{pas(1+T_1s)(1+T_2s)}.$$

Передаточной функции соответствует характеристическое уравнение:

$$paT_1T_2 s^3 + pa(T_1 + T_2)s^2 + pas + 4ck_1k_2 = 0.$$

Для определения условий существования периодического решения воспользуемся критерием Михайлова. С этой целью составим характеристический комплекс путем замены в характеристическом уравнении s на $j\omega$; выделим вещественную и мнимую части и приравняем их нулю:

$$\operatorname{Re}(a, \omega) = 4ck_1k_2 - pa(T_1 + T_2)\omega^2;$$

$$\operatorname{Im}(a, \omega) = p a \omega (1 - T_1T_2 \omega^2).$$

Из второго уравнения найдем частоту периодического решения

$$\omega = \Omega = \frac{1}{\sqrt{T_1T_2}} = \frac{1}{\sqrt{10^{-2}}} = 10 \text{ c}^{-1}.$$

Подставив найденное значение частоты в первое уравнение, определим искомую амплитуду:

$$a = A = \frac{4ck_1k_2}{p(T_1 + T_2)\omega^2} = \frac{4 \cdot 10 \cdot 50}{3,14 \cdot 1,01 \cdot 100} = 6,3.$$

Ответ. В системе устанавливаются автоколебания с амплитудой $A \approx 6,3$ и частотой $\Omega = 10 \text{ c}^{-1}$:

$$x_1 = 6,3 \sin 10t.$$

Примечание. Для исследования устойчивости найденных периодических решений необходимо использовать приближенное аналитическое условие [3], согласно которому периодическое решение устойчиво, если выполняется неравенство

$$\left(\frac{d \operatorname{Re}(a, \omega)}{da} \right) \cdot \left(\frac{d \operatorname{Im}(a, \omega)}{d\omega} \right) - \left(\frac{d \operatorname{Im}(a, \omega)}{da} \right) \cdot \left(\frac{d \operatorname{Re}(a, \omega)}{d\omega} \right) > 0.$$

3. Рассчитать динамическую ошибку в нелинейной системе при гармоническом входном сигнале $I(t) = a \sin \omega t$, нелинейной дискриминационной характеристике релейного типа и частотной передаточной функции фильтра $W(j\omega) = \frac{k}{j\omega}$.

Решение. Для расчета ошибки воспользуемся уравнением

$$b = \frac{a}{\sqrt{1 + q(b)A(\omega)\cos j(\omega)q^2(b)A^2(\omega)}}, \quad (1.7)$$

где $A(\omega) = \frac{k}{\omega}$ – модуль частотной передаточной функции фильтра;

$$\varphi(\omega) = \frac{\pi}{2}; \quad \cos \varphi(\omega) = 0; \quad q(b) = \frac{4c}{\pi b}.$$

Подставив значения переменных в уравнение (1.7), получим

$$b = \frac{a}{\sqrt{1 + \left(\frac{4c}{\pi b}\right)^2 \frac{k^2}{\omega^2}}}.$$

Отсюда

$$b = \sqrt{a^2 - \frac{16c^2 k^2}{\omega^2 \pi^2}}.$$

Очевидно, что уравнение не имеет решения при отрицательной величине подкоренного выражения.

Уравнения могут быть решены также графическим способом. С этой целью строится график функции $q(b)$ и на этом же графике изображается функция правой части уравнения для амплитуды от переменной $q(b)$. Точка пересечения двух кривых определяет значения b и $q(b)$. После этого необходимо подставить $q(b)$ в правую часть уравнения для фазы и определить значение φ .

4. Рассчитать динамическую ошибку в нелинейной системе при гармоническом входном сигнале $I(t) = a \sin \omega t$, нелинейной дискриминационной характеристике типа идеального дискриминатора (рис. 1.8) и частотной передаточной функции фильтра $W(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega T}$.

Решение. Для расчета ошибки воспользуемся уравнением (1.7),

где

$$A(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega T)^2}}; \quad j(\omega) = \arctg \omega T; \quad \cos j(\omega) = \cos(\arctg \omega T);$$

$$q(b) = \frac{2k}{p} \left[\arcsin \frac{\Delta}{b} - \frac{1}{2} \sin(2 \arcsin \frac{\Delta}{b}) \right].$$

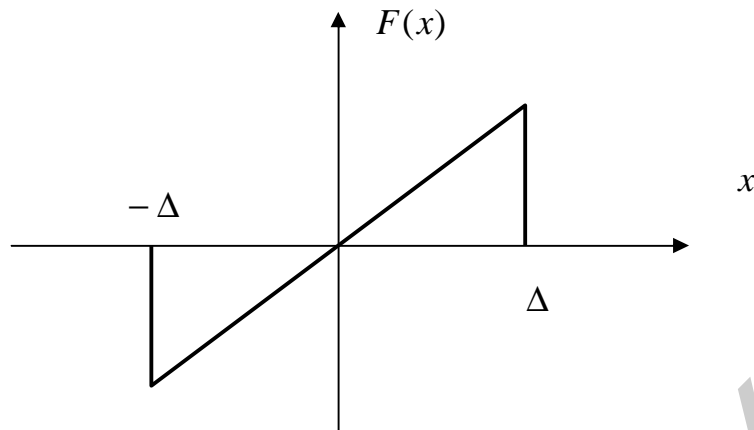


Рис. 1.8

Относительную ошибку слежения найдем из уравнения

$$\frac{b}{\Delta} = \frac{a/\Delta}{\sqrt{1 + \frac{4k}{b} \left[\arcsin \frac{\Delta}{b} - \frac{1}{2} \sin(2 \arcsin \frac{\Delta}{b}) \right] \cos(\arctg T) \frac{1}{\sqrt{1 + (wT)^2}} + \left[\frac{2k}{b} \left[\arcsin \frac{\Delta}{b} - \frac{1}{2} \sin(2 \arcsin \frac{\Delta}{b}) \right] \right]^2 \frac{1}{1 + wT}} \quad (1.8)$$

Зададим значение произведения $wT=0,1$ и построим график зависимости $q(b)$ (рис. 1.9). На этом же графике строим график зависимости функции правой части уравнения (1.8) от величины $q(b)$ для значений a/Δ , равных 1; 1,5; 2. Точки пересечения кривых определяют решения уравнения, по которым можно найти величины b/Δ и $q(b)$.

1.2.5. Задачи

1. Исследовать устойчивость состояния равновесия нелинейной системы, структурная схема которой изображена на рис. 1.10, если заданы параметры линейной части системы:

$$W(s) = \frac{k}{s(T_1s + 1)(T_2s + 1)},$$

и статическая характеристика нелинейного звена (рис. 1.11), для которой $b = 0,25, c = 110$.

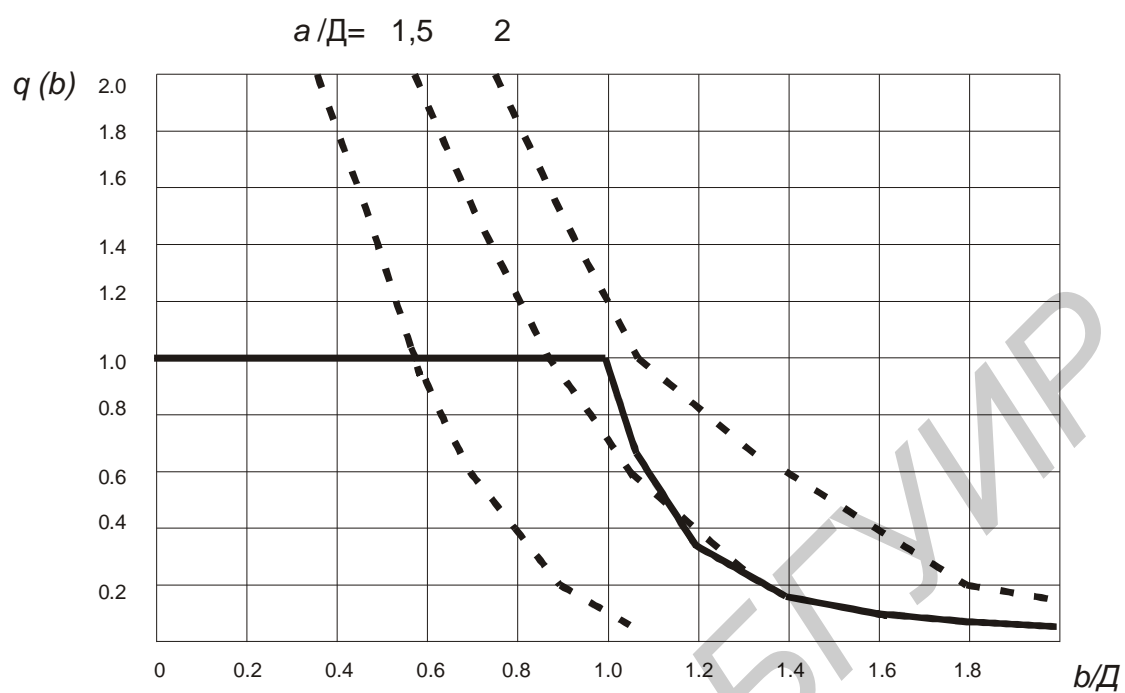


Рис. 1.9

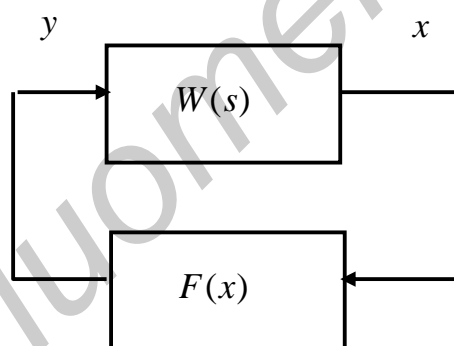


Рис. 1.10

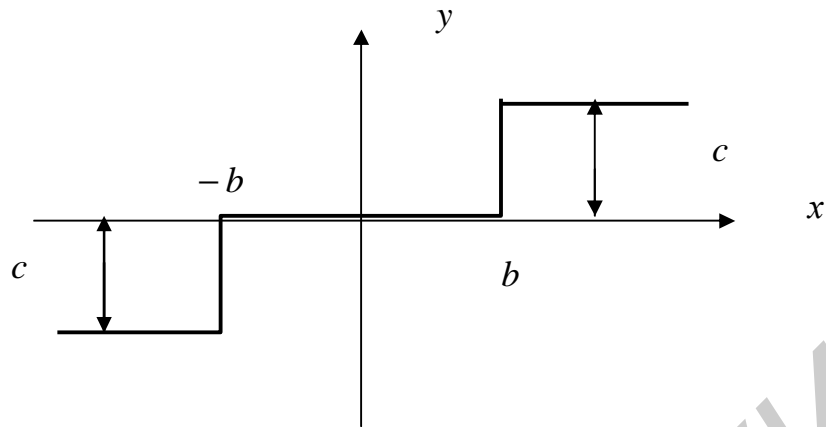


Рис. 1.11

2. Решить задачу 1, если:

- 1) $k = 2c^{-1}$, $T_1 = 0,05c$, $T_2 = 0,02c$, $b = 0,25$, $c = 110$.
- 2) $k = 4c^{-1}$, $T_1 = 0,01c$, $T_2 = 0,08c$, $b = 0,25$, $c = 110$.
- 3) $k = 0,5c^{-1}$, $T_1 = 0,1c$, $T_2 = 0,01c$, $b = 0,5$, $c = 110$.
- 4) $k = 2c^{-1}$, $T_1 = 0,05c$, $T_2 = 0,05c$, $b = 0,1$, $c = 40$.
- 5) $k = 2c^{-1}$, $T_1 = 0,05c$, $T_2 = 0,02c$, $b = 0,25$, $c = 11$.

3. Исследовать устойчивость состояния равновесия нелинейной системы, структурная схема которой изображена на рис. 1.10, если заданы параметры линейной части системы:

$$W(s) = \frac{k}{s(T_1s + 1)}, \quad k = 10c^{-1}, \quad T_1 = 0,1c$$

и статическая характеристика нелинейного звена (рис. 1.12), для которой $b_1 = 0,1$, $b_2 = 0,3$, $k = \operatorname{tg} \alpha = 5$.

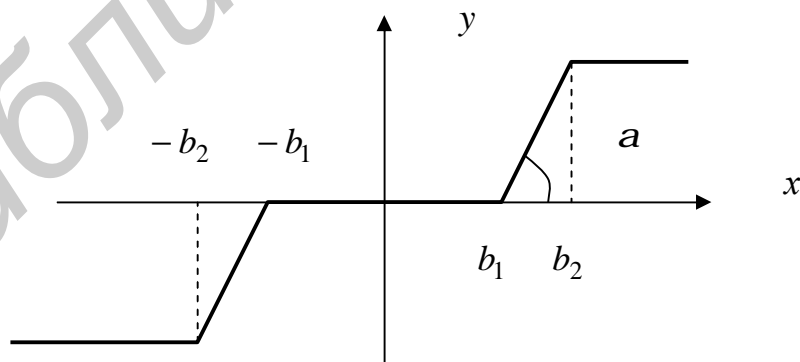


Рис. 1.12

4. Исследовать устойчивость состояния равновесия нелинейной системы, структурная схема которой изображена на рис. 1.6, если заданы параметры линейной части системы:

$$W_1(s) = \frac{k_1}{T_1 s + 1}, W_2(s) = \frac{k_2}{(T_2 s + 1)(T_3 s + 1)}, \quad k_1 = 0,5, k_2 = 5, T_1 = 1,0 c,$$

$$T_2 = 0,9 c, T_3 = 1,1 c$$

и статическая характеристика нелинейного звена (рис. 1.13), для которой $b_1 = 1, k_3 = 4$.

5. Исследовать устойчивость состояния равновесия нелинейной системы, структурная схема которой изображена на рис. 1.6, если заданы параметры линейной части системы:

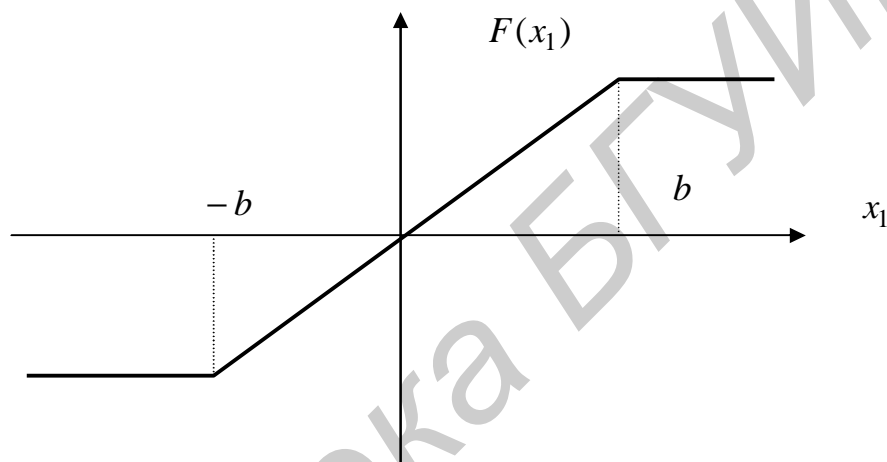


Рис. 1.13

$$W_1(s) = k_1, W_2(s) = \frac{k_2}{s(T^2 s^2 + 2\alpha T s + 1)},$$

$$k_1 = 2, k_2 = 10 \text{ c}^{-1}, T_1 = 0,02 \text{ c}, \alpha = 0,15$$

и статическая характеристика нелинейного звена (рис. 1.14).

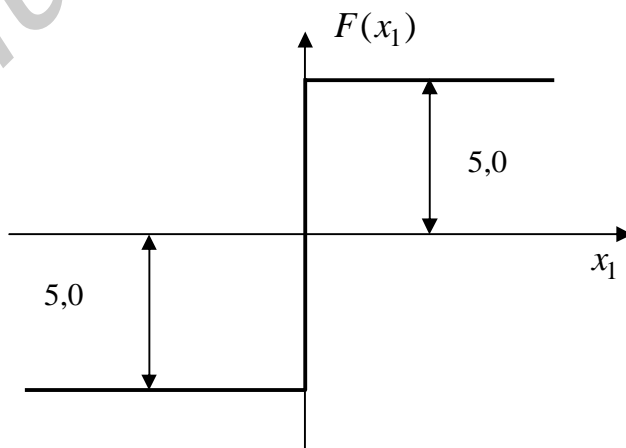


Рис. 1.14

6. Исследовать устойчивость состояния равновесия системы, структурная схема которой изображена на рис. 1.15, если задан коэффициент передачи линейной части системы $k = 10c^{-1}$, $W(s) = k/s$ и статическая характеристика нелинейного звена $F(x)$ (рис. 1.16), для которой $b = 0,5$, $c = 10$.

7. Рассчитать динамическую ошибку в нелинейной системе при гармоническом входном сигнале $I(t) = a\sin\omega t$, нелинейной дискриминационной характеристике идеального релейного типа (см. табл. 1.1) и частотной передаточной функции линейной части: $W(j\omega) = \frac{k}{j\omega}$.

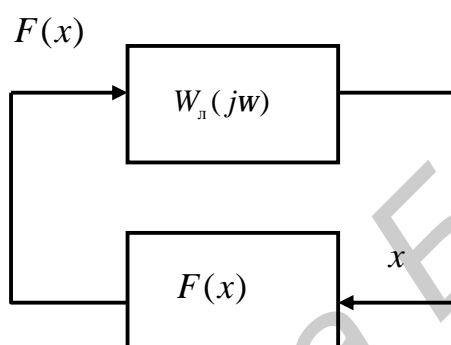


Рис. 1.15

8. Рассчитать динамическую ошибку в нелинейной системе при гармоническом входном сигнале $I(t) = a\sin\omega t$, нелинейной дискриминационной характеристике типа нелинейного звена с насыщением (рис. 1.8) и частотной передаточной функции фильтра $W(j\omega) = \frac{1}{1+j\omega}$.

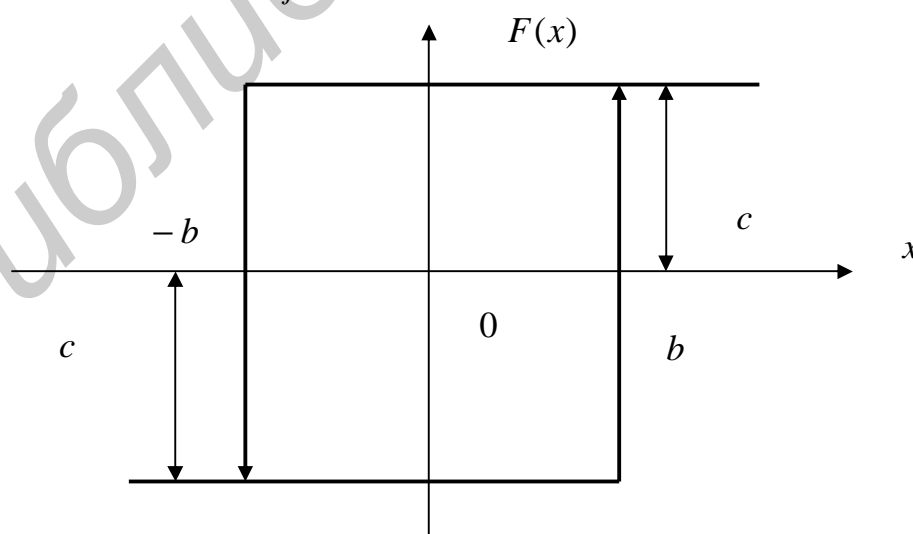


Рис. 1.16

1.3. Метод статистической линеаризации

1.3.1. Основы метода

Метод основан на замене нелинейного преобразования случайных процессов статистически эквивалентными им линейными преобразованиями. Линеаризация системы производится заменой нелинейного элемента линейным эквивалентом (рис. 1.17), что позволяет применять для исследования нелинейных систем более простые методы исследования линейных систем.

Замена нелинейного преобразования линейным является приближенной и справедливой лишь в некоторых отношениях. Поэтому не существует однозначной эквивалентности при использовании различных критериев.

В частности, если нелинейность определяется безынерционной зависимостью вида

$$v = j(x), \quad (1.9)$$

то используются два критерия эквивалентности.

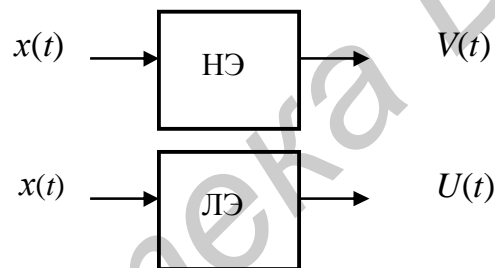


Рис. 1.17

Первый критерий предполагает равенство на выходе нелинейного элемента (НЭ) и его линейного эквивалента (ЛЭ) математических ожиданий и дисперсий процессов, а второй – минимум среднего квадрата разности процессов на выходе нелинейного элемента и его линейного эквивалента.

Для расчета коэффициентов передачи линейных эквивалентов процесс на входе и выходе нелинейного элемента представляют в виде

$$x(t) = m_x(t) + x^0(t); \quad (1.10)$$

$$v(t) = m_v(t) + v^0(t), \quad (1.11)$$

где $m_v(t)$ – математическое ожидание процесса на выходе НЭ;

$v^0(t)$ – центрированная случайная составляющая на выходе НЭ.

Процесс на выходе ЛЭ представляют в следующем виде:

$$u(t) = k_0 m_x(t) + k_1 x^0(t), \quad (1.12)$$

где k_0 – коэффициент передачи линейного эквивалента по математическому ожиданию;

k_1 – коэффициент передачи по центрированной случайной составляющей.

Приравняв в соответствии с первым критерием эквивалентности математические ожидания и дисперсии процессов на выходах нелинейного элемента и его линейного эквивалента, находят уравнения для расчета коэффициентов передачи линейного эквивалента:

$$\left. \begin{aligned} m_v &= k_0 m_x, \\ d_v^2 &= k_1^2 S_x^2. \end{aligned} \right\} \quad (1.13)$$

Отсюда

$$k_0 = \frac{m_v}{m_x} = \frac{1}{m_x} \int_{-\infty}^{+\infty} y(x) w(x) dx;$$

$$k_1 = k_{11} = \frac{1}{S_x} \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} j^2(x) w(x) dx - m_v^2},$$

где $w(x)$ – плотность вероятности процесса на входе нелинейного элемента;

k_{11} – коэффициент передачи линейного эквивалента по центрированной случайной составляющей (по первому критерию).

В соответствии со вторым критерием эквивалентности имеем

$$M[(v - u)^2] = \overline{(v - u)^2} = \min, \quad (1.14)$$

где $v(t) = m_v(t) + v^0(t)$;

$$u(t) = k_0 m_x(t) + k_1 x^0(t). \quad (1.15)$$

Подставив в (1.14) значения переменных (1.15), получим

$$m_v^2 + S_v^2 + k_0^2 m_x^2 + k_1^2 S_x^2 - 2k_0 m_v m_x - 2k_1 \overline{x^0 v} = \min.$$

Для определения k_0 и k_1 , при которых выполняется условие эквивалентности, приравнивают нулю частные производные:

$$\frac{\partial[\sigma]}{\partial k_0} = 2k_0 m_x^2 - 2m_v m_x = 0; \quad k_0 = \frac{m_v}{m_x};$$

$$\frac{\partial[\sigma]}{\partial k_1} = 2S_x^2 k_1 - 2\overline{x^0 v} = 0; \quad k_1 = k_{12} = \frac{\overline{x^0 v}}{S_x^2};$$

$$k_1 = k_{12} = \frac{1}{S_x^2} \int_{-\infty}^{+\infty} (x - m_x) y(x) w(x) dx.$$

При расчете этих коэффициентов полагают, что распределение случайного процесса на входе нелинейного звена нормальное:

$$w(x) = \frac{1}{\sqrt{2ps_x}} e^{-\frac{(x-m_x)^2}{2s_x^2}}.$$

Определив величины $k_0 = k_0(m_x, s_x^2)$; $k_1 = k_1(m_x, s_x^2)$ для типовых нелинейностей, заменяют последние коэффициентами передачи линейного эквивалента и анализируют систему линейными методами.

Как показано в [4], рассмотренные критерии эквивалентности приводят к различным погрешностям в воспроизведении спектра, а следовательно, и корреляционной функции выходного процесса. Первый критерий завышает корреляционную функцию, а второй занижает. Поэтому рекомендуется использовать в качестве коэффициента передачи централизованной случайной составляющей среднее арифметическое значение коэффициентов k_{11} и k_{12} . Однако с учетом того, что в радиоэлектронных следящих системах наибольшее значение имеют низкочастотные компоненты, предпочтительно использование второго критерия, как обеспечивающего наибольшую точность.

Для основных типов нелинейностей при нормальном распределении входного процесса коэффициенты рассчитаны и представлены в виде табличных значений. В частности, для дискриминационной характеристики релейного типа (рис. 1.18)

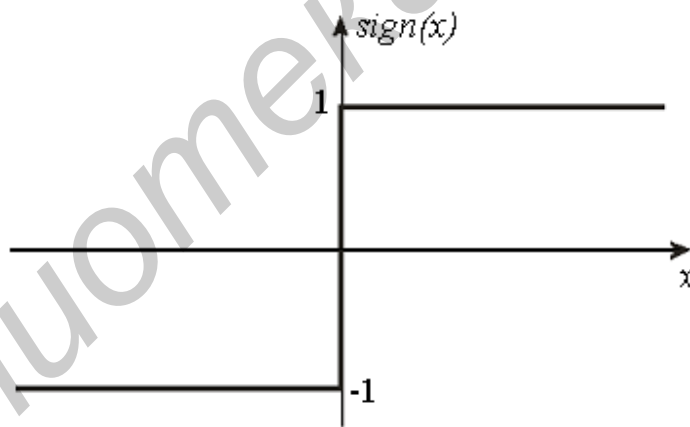


Рис. 1.18

$$j(x) = A \operatorname{sign} x; \operatorname{sign} x = \begin{cases} -A; & x < 0; \\ A; & x > 0 \end{cases}$$

коэффициенты равны:

$$k_0 = \frac{A}{m_x} 2\Phi\left(\frac{m_x}{s_x}\right); \quad k_{12} = \frac{2A}{s_x} \frac{1}{\sqrt{2p}} e^{-\frac{m_x^2}{2s_x^2}}; \quad \Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2p}} \int_0^z e^{-\frac{y^2}{2}} dy. \quad (1.16)$$

Для дискриминатора с синусоидальной характеристикой:

$$\begin{aligned}
F(x) &= A \sin ax; \\
k_0 &= (A/m_x) \sin(am_x) \exp(-0,5a^2\sigma_x^2); \\
k_{11} &= \frac{A}{\sigma_x} \left\{ 0,5 \left[1 - \exp(-2a^2\sigma_x^2) \cos(2am_x) \right] - \left(\frac{k_0 m_x}{A} \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}}; \quad (1.17) \\
k_{12} &= Aa \cos(am_x) \exp(-0,5a^2\sigma_x^2).
\end{aligned}$$

Коэффициенты статистической линейаризации для ряда других нелинейностей можно найти в [4].

Метод статистической линейаризации позволяет вычислить математическое ожидание и дисперсию ошибки слежения.

Рассмотрим основные этапы расчета. Положим, что передаточная функция линейной части представлена в виде

$$W_{\text{л}}(s) = \frac{B(s)}{s^v A(s)},$$

где $B(s)$, $A(s)$ – полиномы числителя и знаменателя передаточной функции;
 v – порядок астатизма системы.

На входе системы действует аддитивная смесь детерминированного задающего воздействия

$$I(t) = \sum_{i=0}^n a_i t^i$$

и случайной помехи $n(t)$ с нулевым математическим ожиданием и известной спектральной плотностью $S_n(\omega)$.

Выполняя статистическую линейаризацию нелинейного элемента, можно перейти от общей структурной схемы (рис. 1.19, а) к структурной схеме для математических ожиданий (рис. 1.19, б) и центрированных процессов (рис. 1.19, в).

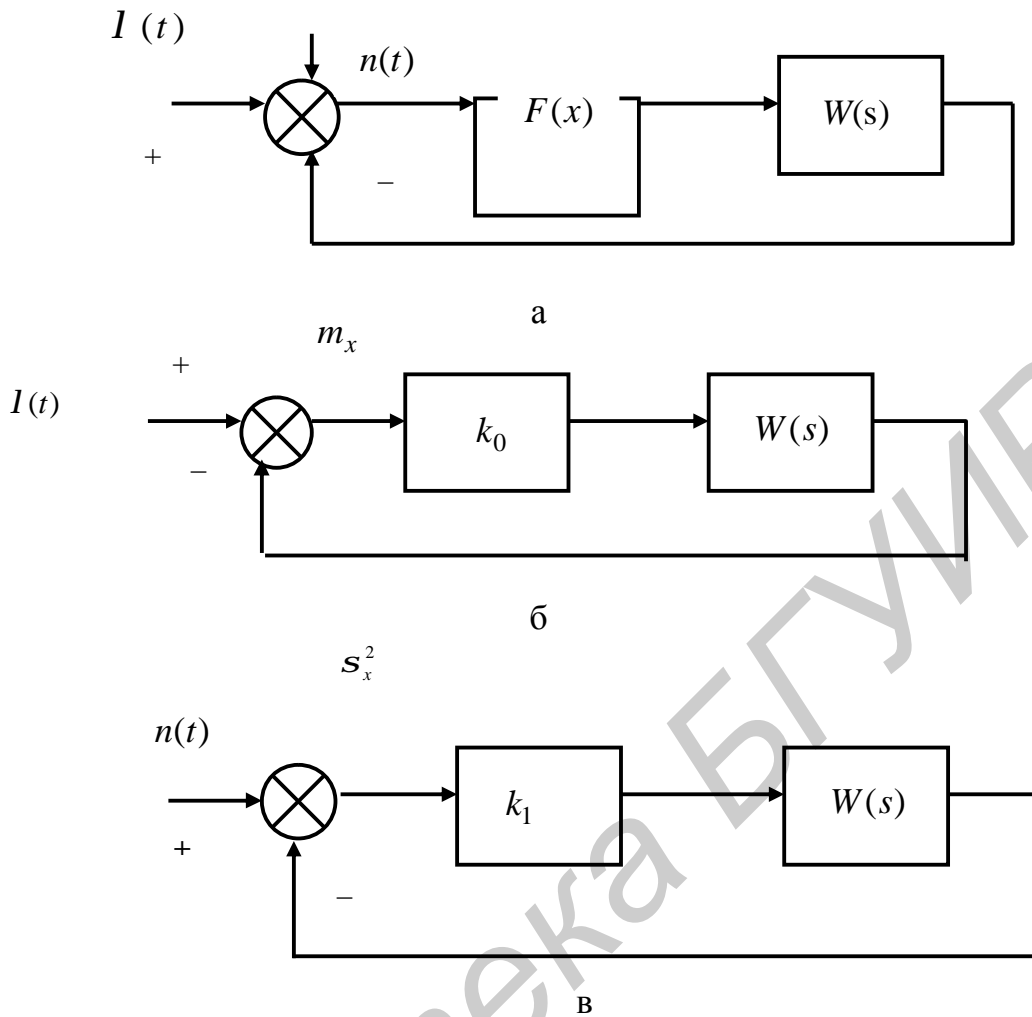


Рис. 1.19

Ограничимся анализом стационарного режима работы системы. Установление последнего возможно, если степень полинома n не превосходит порядка астатизма системы ν .

Для расчета математического ожидания ошибки слежения используем метод преобразований Лапласа и воспользуемся теоремой о предельном значении оригинала:

$$m_x = \lim_{s \rightarrow 0} s H_{Ix}(s) \quad M_I(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{M_I(s)}{k_0(m_x, s_x)W(s) + 1} \quad (1.18)$$

где $M_I(s) = L[I(t)]$.

Для определенности положим $\nu = n$. Тогда математическое ожидание равно

$$m_x = a_n / k_0(m_x, s_x) K, \quad (1.19)$$

где K – коэффициент усиления линейной части разомкнутого контура.

Для расчета дисперсии ошибки слежения используем известное выражение [5], произведя замену нелинейного элемента коэффициентом передачи линейного эквивалента по централизованной случайной составляющей:

$$s_x^2 = \frac{1}{2p} \int_{-\infty}^{\infty} S(w) |H_{ny}(jw)|^2 dw = \frac{1}{2p} \int_{-\infty}^{\infty} S(w) \left| \frac{k_1(m_x, s_x)W(jw)}{1 + k_1(m_x, s_x)W(jw)} \right|^2 dw. \quad (1.20)$$

Для расчета математического ожидания и дисперсии ошибок слежения необходимо решить систему уравнений (1.19) и (1.20). Если порядок астатизма системы больше степени полинома, описывающего задающее воздействие, математическое ожидание ошибки слежения равно нулю и уравнение (1.20) может быть решено аналитически. В общем случае система уравнений решается методом последовательных приближений или графоаналитическим методом.

1.3.2. Примеры

1. Определить математическое ожидание m_x и дисперсию ошибки слежения s_x^2 в системе (см. рис. 1.18, а) при действии на ее входе детерминированного процесса $I(t) = a_1 t$ и центрированного белого шума $n(t)$, приведенного ко входу дискриминатора, со спектральной плотностью S_0 . Характеристика нелинейности аппроксимирована релейной зависимостью

$$F(x) = A \operatorname{sign} x = \begin{cases} A & \text{при } x \geq 0, \\ -A & \text{при } x < 0, \end{cases}$$

а линейная цепь задана передаточной функцией $W(s) = \frac{k_n}{s}$.

Решение. Для расчета воспользуемся вторым критерием эквивалентности, при котором значения коэффициентов равны (1.16).

Анализ линеаризованной системы произведем отдельно для детерминированного воздействия $I(t)$ и случайного воздействия $n(t)$. В первом случае нелинейный элемент заменяем линейным эквивалентом $k_0(m_x, s_x)$, а во втором – линейным эквивалентом $k_{12}(m_x, s_x)$.

Решением уравнения для математического ожидания является величина

$$m_x = \frac{\alpha_1}{k_0(m_x, s_x)k_n}. \quad (1.21)$$

Дисперсия ошибки слежения рассчитывается по формуле (1.20). Ее значения определяется выражением

$$s_x^2 = S_0 \frac{k_{12}(m_x, s_x)k_n}{2}. \quad (1.22)$$

В результате получены четыре алгебраических уравнения с четырьмя неизвестными $k_0(m_x, s_x)$, $k_{12}(m_x, s_x)$, m_x , s_x , которые можно свести к двум уравнениям:

$$\Phi \left(\frac{m_x}{\sigma_x} \right) = \frac{\alpha_1}{2Ak_{и}}, \quad (1.23)$$

$$S_x^2 = S_0 \frac{A k_u}{s_x \sqrt{2p}} \exp\left(-\frac{m_x^2}{2s_x^2}\right). \quad (1.24)$$

Из уравнения (1.23) по таблицам интеграла вероятности (см. приложение) при известных значениях $\alpha_1, A, k_{и}$ можно найти аргумент $\frac{m_x}{s_x}$. Подставив его значение в уравнение (1.24), можно определить s_x , а затем и m_x .

Решение задачи графоаналитическим способом рассмотрим на следующем примере [5, 6].

2. Структурная схема системы углового сопровождения показана на рис. 1. 20.

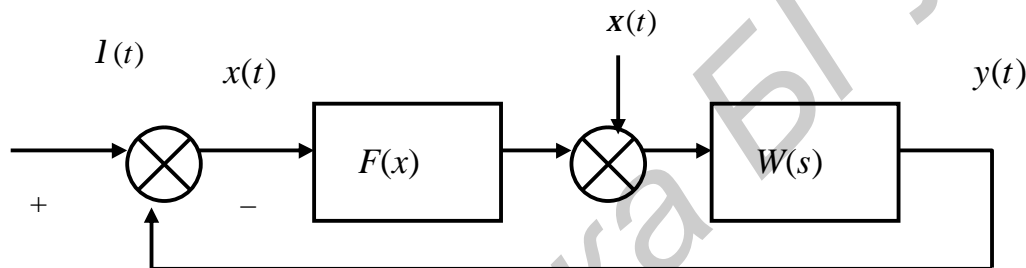


Рис. 1.20

Входное воздействие $x(t) = a_1 t$, $a_1 = 3$ град/с. Передаточная функция линейной части системы

$$W(s) = \frac{k}{s(1 + sT)},$$

где $k = 2$ град/с, $T = 1$ с.

Нелинейная характеристика дискриминатора аппроксимируется функцией

$$F(x) = A \sin ax, a = 0,1 \text{град}^{-1}, A = 4 \text{ В.}$$

Возмущающее воздействие $\xi(t)$ представляет собой белый шум со спектральной плотностью $N_0 = S(0) = 10$ В/Гц и нулевым математическим ожиданием.

Решение. В соответствии с описанной выше методикой найдем динамическую ошибку в установившемся режиме и дисперсию случайной ошибки от возмущающего воздействием.

В рассматриваемой схеме порядок астатизма системы равен степени полинома входного воздействия. Следовательно, в системе возможно установление стационарного режима слежения.

По таблицам преобразований Лапласа найдем изображение математического ожидания входного воздействия:

$$M_I(s) = a_1 / s^2.$$

Математическое ожидание ошибки слежения равно (1.21)

$$m_x = \frac{\alpha_1}{k_0(m_x, \sigma_x) k_{и}}. \quad (1.25)$$

Запишем это уравнение в виде

$$m_x k_0(m_x, \sigma_x) = \frac{\alpha_1}{k_{и}} = 1,5 \text{ В.}$$

Величина дисперсии ошибки слежения рассчитывается по формуле

$$\sigma_x^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{\xi}(0) |H_{\xi x}(j\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{\xi}(0) \left| \frac{k_{и}}{j\omega(1 + j\omega T) + k_1(m_x, \sigma_x) + k_{и}} \right|^2 d\omega. \quad (1.26)$$

Вычислим интеграл (1.26)

$$\sigma_x^2 / S_{\xi}(0) = k_{и} / 2k_1(m_x, \sigma_x). \quad (1.27)$$

Полученную систему уравнений (1.25), (1.27) решаем графически. Построим семейство кривых

$$m_u = m_x k_0(m_x, \sigma_x),$$

Значение $k_0(m_x, \sigma_x)$ для данного типа нелинейности вычисляется по формуле

$$k_0(m_x, \sigma_x) = (A / m_x) \sin(am_x) \exp(-0,5a^2 \sigma_x^2).$$

На полученном графике (см. рис. 1.21) проводим прямую в соответствии с уравнением (1.25). Точки пересечения прямой с семейством кривых $m_u(m_x)$ определяют зависимость (рис. 1.22)

$$s_x = g(m_x), \quad (1.28)$$

связывающую значения m_x и s_x , удовлетворяющие уравнению (1.25).

Для нахождения значений m_x и s_x , удовлетворяющих одновременно уравнениям (1.25) и (1.27), введем переменную b и представим уравнение (1.27) в виде системы, отображающей левую и правую части уравнения (1.27):

$$b = s_x^2 / S_{\xi}(0), \quad (1.29)$$

$$b = k_{и} / 2k_1(m_x, \sigma_x) \quad (1.30)$$

Для каждой пары значений m_x и s_x (см. рис. 1.22), связанных соотношением (1.28), вычислим коэффициент $k_1(m_x, s_x)$ по формуле

$$k_1(m_x, s_x) = k_{12} = Aa \cos(am_x) \exp(-0,5a^2 s_x^2)$$

и построим зависимость v от s_x (1.30).

На этом же графике (рис. 1.23) проведем прямую, соответствующую уравнению (1.29).

В точке пересечения зависимостей А и Б определим величину s_{x1} и связанную с ней зависимостью (1.28) величину m_{x1} . Найденные значения являются решениями рассматриваемой задачи, как удовлетворяющие одновременно уравнениям (1.25) и (1.27).

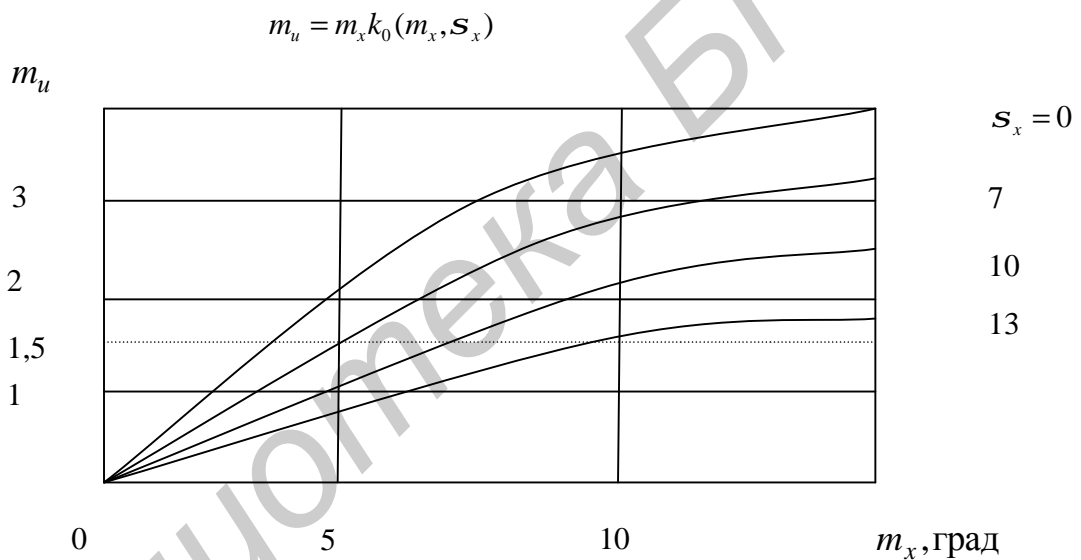


Рис. 1.21

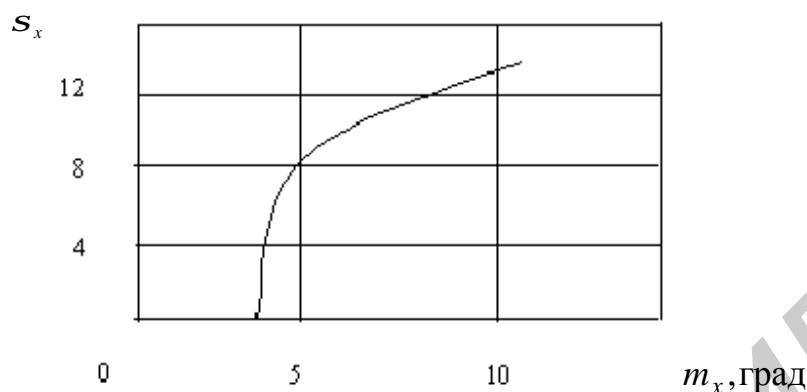


Рис. 1.22

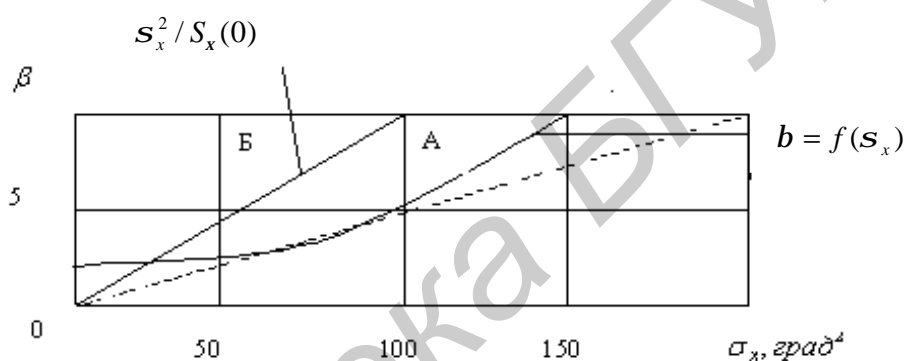


Рис. 1.23

1.3.3. Задачи

1. Определить математическое ожидание и дисперсию ошибки слежения в установившемся режиме в следящей системе (рис. 1.20), если $I(t) = ct$, $S_x(w) = S_x(0)$, $W(s) = k_{и2}(1 + sT_1)/s^2$, $F(x) = A \text{sign} x$.

2. Решить задачу 1, если $F(x) = A \sin ax$, $A = 1B$, $a = 1$, $T_1 = 1c$, $S_x(0) = 0,015B^2/\text{Гц}$, $c = 10\text{рад/с}$.

3. Для условий задачи 2 найти критическое значение спектральной плотности шума $x(t)$, превышение которого приводит к срыву слежения.

4. Решить задачу 1, если $F(x) = A \text{sign} x$, $A = 1B$, $T_1 = 1c$, $c = 10\text{рад/с}$, $S_x(0) = 0,01B^2/\text{Гц}$,

5. Определить дисперсию ошибки слежения в системе, изображенной на рис. 1.20, если $W(s) = k_{и}/s$, $F(x) = A \text{sign} x$, $S_x(w) = S_x(0)$, $I(t)$ – случайный процесс со спектральной плотностью $S_I(w) = a^2/w^2$.

6. Нелинейная следящая система показана на рис. 1.20. Регулярное задающее воздействие $I(t) = a_0 + a_1 t$, $a_0 = 0,5$ рад, $a_1 = 1$ рад c^{-1} , возмущающее воздействие $x(t)$ — белый шум со спектральной плотностью $S_x(0) = 3 \cdot 10^{-3} \frac{\text{рад}}{c^2}$. Передаточная функция линейной части $W(s) = k_{\text{и}} / s$, $k = 0,5$ рад/с. Дискриминационная характеристика нелинейного звена аппроксимируется выражением $F(x) = A \text{sign } x$, $A = 1$ В. Определить математическое ожидание и дисперсию ошибки слежения.

2. ДИСКРЕТНЫЕ СИСТЕМЫ РАДИОАВТОМАТИКИ

2.1. Математические модели дискретных систем

В импульсных радиотехнических системах входным сигналом в следящей системе является периодическая последовательность импульсов. Такие следящие системы относят к системам прерывистого регулирования. Функциональная и структурная схемы следящих систем прерывистого регулирования отличаются наличием ключа, замыкаемого на время приема импульса и размыкаемого в промежутке между импульсами. Для обеспечения необходимого коэффициента усиления ключ часто дополняется фиксатором (экстраполятором нулевого порядка) с передаточной функцией

$$W(s) = \frac{k_{\text{и}}}{s} (1 - e^{-sT}),$$

где $k_{\text{и}}$ — коэффициент передачи интегратора (величина обратная постоянной времени);

T — период следования импульсов.

Анализ систем прерывистого регулирования определяется соотношением между частотой следования импульсов, длительностью импульсов, полосой пропускания следящей системы. Если частота следования импульсов намного больше полосы пропускания следящей системы, такие системы анализируются теми же методами, что и непрерывные системы. Если это условие не выполняется, но ошибка слежения за время действия импульса изменяется незначительно, следящая система представляется дискретной моделью. В дискретной модели учитывается только период следования импульсов T и не учитывается их длительность. При формировании математической модели дискретной следящей системы ключ с конечным временем замыкания заменяется импульсным элементом, коэффициент передачи которого представляет последовательность d -функций. Для обеспечения

подобия процессов на выходе ключа и импульсного элемента последний дополняется формирующим фильтром с импульсной характеристикой, равной коэффициенту передачи ключа:

$$h_{\Phi,\Phi}(t) = k(t).$$

Передаточная функция формирующего фильтра является преобразованием Лапласа его импульсной характеристики:

$$W_{\Phi,\Phi}(s) = L[h_{\Phi,\Phi}(t)] = \frac{1 - e^{-st_n}}{s}.$$

Таким образом, математическую модель дискретной следящей системы можно представить в виде следующей структурной схемы (рис. 2.1).

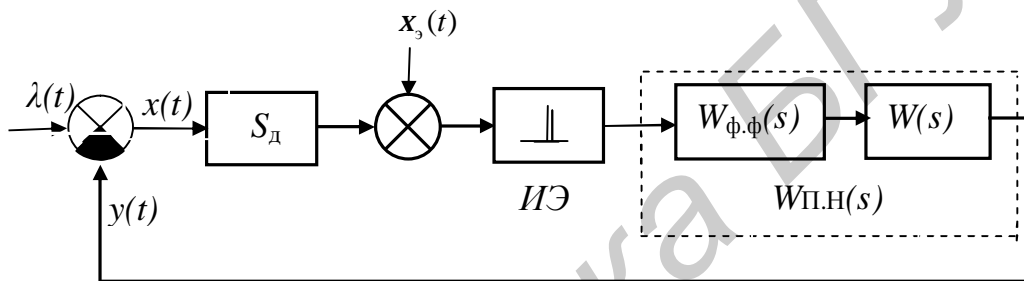


Рис. 2.1

$W_{\text{П.Н}}(s)$ называется передаточной функцией приведенной непрерывной части системы

$$W_{\text{П.Н}}(s) = W_{\Phi,\Phi}(s)W_{\Phi}(s).$$

При наличии фиксатора передаточная функция звена

$$W_{\Phi,\Phi}(s) = \frac{1 - e^{-st_n}}{s} \frac{k_u}{s} (1 - e^{-sT}).$$

Если $e^{-st_n} \ll 1$, то e^{-st_n} можно приближенно записать в виде

$$e^{-st_n} \approx 1 - st_n;$$

$$W_{\Phi,\Phi}(s) = \frac{st_n k_u}{s^2} (1 - e^{-sT}).$$

Обычно полагают, что $t_n k_u = 1$.

Тогда

$$W_{\Phi.\Phi}(s) = \frac{1}{s}(1 - e^{-sT}).$$

2.2. Математическое описание дискретных систем

2.2.1 . Z-преобразование и его свойства

При математическом описании дискретных систем вместо операций дифференцирования используют операции вычитания, операции интегрирования заменяют операциями сложения, вместо дифференциальных уравнений используют разностные уравнения. В качестве математического аппарата используют дискретное преобразование Фурье, дискретное преобразование Лапласа, z-преобразование. К z-преобразованию

$$X(z) = Z\{x(kT)\} = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)z^{-k}$$

переходят путем замены в дискретном преобразовании Лапласа

$$X_{\partial}(s) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)e^{-skT}$$

переменной $e^{sT} = z$:

$$X(z) = Z\{x(kT)\} = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)z^{-k}.$$

Основные свойства z-преобразования определяются рядом теорем:

– теорема обращения, позволяющая по изображению определить оригинал:

$$x(kT) = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} X(z)z^{k-1} dz;$$

– z-изображение суммы или разности дискретных процессов:

$$Z\{x_1(kT) \pm x_2(kT)\} = X_1(z) \pm X_2(z);$$

– z-изображение произведения постоянной величины и дискретного процесса (свойство линейности):

$$Z\{x_1(kT)a\} = aX(z);$$

– теорема о предельном значении оригинала:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x(kT) = \lim_{Z \rightarrow 1} (z-1)X(z);$$

– теорема о начальном значении оригинала:

$$\lim_{k \rightarrow 0} x(kT) = \lim_{Z \rightarrow \infty} X(z);$$

– теорема свертки оригиналов:

$$Z \left\{ \sum_{i=0}^k x_1(t-iT)x_2(iT) \right\} = X_1(z) \cdot X_2(z);$$

– теорема запаздывания:

$$Z\{x(t-kT)\} = Z^{-k} \left[X(z) + \sum_{m=1}^k z^m x(-mT) \right], \text{ если } x(t) \neq 0 \text{ при } t < 0.$$

При нулевых начальных условиях :

$$Z\{x(t-kT)\} = z^{-k} X(z);$$

– z-преобразование непрерывной функции времени

$$Z\{x(t)\} = Z\{x(kT)\} = X(z),$$

где $x(t)$ – непрерывная величина.

Z-преобразование изображения по Лапласу непрерывного процесса по определению совпадает с z-преобразованием процесса $x(t)$:

$$\begin{aligned} Z\{x(s)\} &= Z\{x(kT)\}; \\ Z\{x(t)\} &= Z\{x(kT)\} = X(z), \end{aligned}$$

где $x(t)$ – непрерывная величина.

Таким образом,

$$Z\{x(t)\} = Z\{x(kT)\} = Z\{x(s)\} = X(z).$$

2.2.2. Передаточные функции дискретных систем

Передаточная функция дискретной системы определяется как отношение z-изображений выходной и входной величин при нулевых начальных условиях:

$$H_{ly}(z) = \frac{Y(z)}{\Lambda(z)}; \quad H_{lx}(z) = \frac{X(z)}{\Lambda(z)}.$$

Передаточные функции дискретной системы (см. рис. 2.1) при нулевом значении флюктуационной составляющей определяются выражениями:

$$H_{I_x}(z) = \frac{1}{1 + S_d W_{П.Н}(z)}; \quad (2.1)$$

$$H_{I_y}(z) = \frac{S_d W_{П.Н}(z)}{1 + S_d W_{П.Н}(z)}, \quad (2.2)$$

где S_d – крутизна дискриминационной характеристики.

Если в системе используется фиксатор, то передаточная функция приведенной непрерывной части системы определяется выражением

$$W_{П.Н}(s) = \frac{1 - e^{-sT}}{s} W_{\Phi}(s),$$

где $\frac{1 - e^{-sT}}{s}$ – передаточная функция последовательного соединения фиксатора и формирующего фильтра.

$$W_{П.Н}(s) = (1 - e^{-sT}) \frac{W_{\Phi}(s)}{s};$$

$$W_{П.Н}(z) = Z \left\{ \frac{W_{\Phi}(s)}{s} \right\} - Z \left\{ \frac{e^{-sT} W_{\Phi}(s)}{s} \right\}.$$

Умножение изображения по Лапласу на e^{-sT} соответствует задержке оригинала на величину T . С учетом теоремы сдвига и обозначения

$$Z \left\{ \frac{W_{\Phi}(s)}{s} \right\} = K(z) \quad (2.3)$$

получим

$$W_{П.Н}(z) = K(z) - z^{-1} K(z) = \frac{z-1}{z} K(z). \quad (2.4)$$

$K(z) = Z \left\{ \frac{W_{\Phi}(s)}{s} \right\}$ определяется по таблицам z изображений.

Пример 2.1

Определить передаточную функцию $H_{I_y}(z)$ дискретной системы (см. рис. 2.1), передаточная функция приведенной непрерывной части которой равна

$$W_{П.Н}(s) = \frac{1 - e^{-sT}}{s} \frac{k_u}{s}.$$

Искомая передаточная функция описывается выражением (2.2).

Решение. В соответствии с (2.4) z -изображение передаточной функции приведенной непрерывной части равно

$$W_{\Pi.H}(z) = \frac{z-1}{z} Z \left\{ \frac{k_u}{s^2} \right\}. \quad (2.5)$$

По таблицам z -изображений находим:

$$Z \left\{ \frac{k_u}{s^2} \right\} = \frac{Tzk_u}{(z-1)^2}.$$

Отсюда с учетом (2.5)

$$W_{\Pi.H}(z) = \frac{k_u T}{z-1}. \quad (2.6)$$

Подставляя (2.6) в (2.2), находим передаточную функцию замкнутой дискретной системы:

$$H_{ly}(z) = \frac{S_d k_u T}{z-1 + S_d k_u T}. \quad (2.7)$$

2.2.3. Разностные уравнения

Разностные уравнения определяют связь между дискретными значениями выходной и входной величин в тактовых точках.

Чтобы составить разностное уравнение, надо представить дискретную передаточную функцию в следующем виде:

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_m z^{-m}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_n z^{-n}}. \quad (2.8)$$

Если $V(z)$ – значение выходной величины, а $\Lambda(z)$ – входной в виде z -изображения, то связь между ними определяется выражением

$$V(z) = H(z) \cdot \Lambda(z). \quad (2.9)$$

Подставим (2.8) в (2.9):

$$V(z) \cdot (1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_n z^{-n}) = (b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_m z^{-m}) \cdot \Lambda(z). \quad (2.10)$$

Применим к левой и правой частям уравнения (2.7) теорему обращения. С учетом теоремы запаздывания оригинала получим

$$U_k + a_1 U_{k-1} + a_2 U_{k-2} + \dots + a_n U_{k-n} = b_0 I_k + b_1 I_{k-1} + b_2 I_{k-2} + \dots + b_m I_{k-m}, \quad (2.11)$$

где $U_k = U(kT)$; $U_{k-n} = U(kT - nT)$.

Решив уравнение (2.11) относительно U_k , получим

$$U_k = \sum_{i=0}^m b_i I_{k-i} - \sum_{i=0}^n a_i U_{k-i}. \quad (2.12)$$

Уравнение (2.12) является разностным уравнением, определяющим связь между входной и выходной величинами в тактовых точках.

Пример 2.2. Составить разностное уравнение, связывающее значения управляемой величины и задающего воздействия в тактовых точках для системы, рассмотренной в примере 2.1.

Решение. Представим передаточную функцию $H_{ly}(z)$ в виде дробно-рациональной функции переменной z^{-1} , для чего разделим числитель и знаменатель выражения (2.7) на слагаемое в знаменателе с максимальной степенью z . Для рассматриваемого примера это непосредственно величина z .

В результате получим

$$H_{ly}(z) = \frac{S_d k_n T z^{-1}}{1 - (1 - S_d k_n T) z^{-1}}. \quad (2.13)$$

Сопоставив (2.13) с (2.8), найдем коэффициенты:

$$b_0 = 0; \quad b_1 = S_d k_n T; \quad a_1 = S_d k_n T - 1.$$

Воспользовавшись (2.12), получим

$$y(kT) = S_d k_n T I(kT - T) - (S_d k_n T - 1) y(kT - T).$$

2.2.4. Операторный коэффициент передачи дискретной системы

Для составления операторного коэффициента передачи вводится оператор запаздывания – c .

Действие его на временную функцию приводит ее к сдвигу по времени на величину T :

$$\begin{aligned} c v(kT) &= v(kT - T); \\ c^2 v(kT) &= v(kT - 2T); \\ &\dots\dots\dots \\ c^n v(kT) &= v(kT - nT). \end{aligned}$$

При использовании оператора c разностное уравнение записывается в виде

$$y(kT) = H(c) \cdot I(kT),$$

где

$$H(c) = \frac{b_0 + b_1c + b_2c^2 + \dots + b_m c^m}{1 + a_1c + a_2c^2 + \dots + a_n c^n}.$$

Чтобы перейти от дискретной ПФ к операторному коэффициенту передачи, необходимо сделать замену переменной:

$$z^{-1} = c.$$

2.2.5. Комплексный коэффициент передачи дискретной системы

Комплексный коэффициент передачи дискретной системы (частотная передаточная функция) можно получить из передаточной функции дискретной системы путем замены $z = e^{j\omega T}$:

$$H_d(j\omega) = H(e^{j\omega T}) = H(z) \Big|_{z = e^{j\omega T}}.$$

Комплексный коэффициент передачи дискретной системы определяется как отношение комплексных амплитуд управляемой величины $Y(kT)$ и задающего воздействия в тактовых точках kT . По формированию значений выходного процесса в тактовых точках дискретная система эквивалентна непрерывной с комплексным коэффициентом передачи $H_d(j\omega)$.

Комплексный коэффициент передачи есть величина периодическая. Период его равен

$$\Omega_n = \frac{2\pi}{T}.$$

2.3. Устойчивость дискретных систем

Устойчивость дискретной системы связана с расположением полюсов ее передаточной функции на комплексной плоскости. Если все полюса расположены в левой полуплоскости, система устойчива. Таким образом, заменив в передаточной функции $H(z)$ z на e^{sT} и решив характеристическое уравнение, можно определить устойчивость по значениям его корней.

При переходе от s -плоскости к z -плоскости левая полуплоскость плоскости s трансформируется в круг единичным радиусом на z -плоскости. Поэтому дискретная система устойчива, если полюсы ее передаточной функции $H(z)$ расположены внутри окружности единичным радиусом, т. е. удовлетворяют условию

$$|z_i| < 1, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

где z_i – корни характеристического уравнения

$$A(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0 = 0. \quad (2.14)$$

Характеристическое уравнение формируется из знаменателя передаточной функции замкнутой системы $H(z)$ путем приравнивания его к нулю:

$$H(z) = \frac{B(z)}{A(z)}.$$

Для определения устойчивости дискретных систем используют алгебраические и частотные критерии.

Алгебраический критерий состоит в проверке выполнения системы неравенств, составленных из коэффициентов характеристического уравнения.

$$\begin{aligned} \text{При } n = 1: & \quad \left. \begin{aligned} a_1 + a_0 > 0, \\ a_1 - a_0 > 0. \end{aligned} \right\} \\ \text{При } n = 2: & \quad \left. \begin{aligned} a_2 + a_1 + a_0 > 0, \\ a_2 - a_1 + a_0 > 0, \\ a_2 - a_0 > 0. \end{aligned} \right\} \end{aligned} \quad (2.15)$$

При $n = 3$ указанная система неравенств принимает вид:

$$\begin{aligned} a_3 + a_2 + a_1 + a_0 > 0; \\ a_3 - a_2 + a_1 - a_0 > 0; \\ a_3^2 - a_0^2 + a_0 a_2 - a_1 a_3 > 0; \\ 3(a_3 + a_0) - a_2 - a_1 > 0; \\ 3(a_3 - a_0) + a_2 - a_1 > 0. \end{aligned}$$

Частотный критерий (критерий Найквиста): если годограф комплексного коэффициента передачи разомкнутой системы при изменении частоты от 0 до $2\pi/T$ не охватывает точку с координатами $(-1; j0)$, то система устойчива.

Пример 2.3. Определить условия устойчивости системы, рассмотренной в примере 2.1.

Решение. Передаточная функция замкнутой системы описывается выражением (2.7). Следовательно, характеристическое уравнение системы имеет вид

$$A(z) = z - 1 + S_d k_n T = 0. \quad (2.16)$$

Сопоставив (2.16) с общей формой записи характеристического уравнения, получим

$$n=1; a_1 = 1; a_0 = -1 + S_d k_n T. \quad (2.17)$$

Подставив полученные значения коэффициентов (2.17) в неравенства (2.15), получим систему неравенств, определяющих условия устойчивости системы:

$$S_{д}k_{и}T > 0; \quad S_{д}k_{и}T < 2. \quad (2.18)$$

2.4. Анализ детерминированных процессов в дискретных системах

Задачей анализа является определение динамической ошибки $x_{уст}$ или зависимости выходной величины от входной. Анализ может быть произведен с помощью z -преобразований.

Если имеем z -изображение

$$Y(z) = H_{ly}(z) \cdot \Lambda(z)$$

и необходимо определить оригинал по z -изображению выходной величины, то может воспользоваться интегралом обращения, вычисляемым с помощью теоремы о вычетах:

$$y(kT) = \frac{1}{2\pi \cdot j} \oint Y(z) \cdot z^{k-1} dz = \sum_{z_i} \text{Выч} [Y(z)z^{k-1}]. \quad (2.19)$$

Вычет функции для простого полюса равен

$$\text{Выч}_{z_i} f(z) = \lim_{z \rightarrow z_i} (z - z_i) \cdot f(z). \quad (2.20)$$

Для полюса порядка m

$$\text{Выч}_{z_i} f(z) = \lim_{z \rightarrow z_i} \left[\frac{1}{(m-1)!} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} (z - z_i)^m \cdot f(z) \right].$$

Для расчета установившегося значения используется теорема о предельном значении оригинала:

$$y(kT) = \lim_{k \rightarrow \infty} (z-1) \cdot Y(z). \quad (2.21)$$

Для перехода от z изображения к оригиналу можно воспользоваться таблицами непосредственно или после разложения z -изображения на простые слагаемые.

Для определения реакции системы на детерминированное воздействие можно также использовать разностное уравнение. При высоком порядке разностного уравнения для его решения используют вычислительные средства.

2.5. Анализ случайных процессов в дискретных системах

Наиболее часто используемой характеристикой является дисперсия случайного процесса, в частности дисперсия ошибки слежения. Дисперсия выходного процесса в тактовых точках (в моменты времени $t = kT$) при стационарном случайном воздействии $u(t)$ на входе с известной корреляционной функцией и спектральной плотностью $S(w)$ определяется выражением

$$\sigma^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(z) \cdot |H(z)|^2 \left[2 \cdot \frac{1}{1+u^2} \right] \cdot du, \quad (2.22)$$

$$|z| = \frac{1+ju}{1-ju}$$

Подынтегральное выражение (2.22) является дробно-рациональной функцией переменной ju . Вычисление интеграла производится по методике, используемой при расчете дисперсии в линейных непрерывных системах.

Если воздействие $u(t)$ на входе дискретной системы широкополосно и корреляционная функция удовлетворяет условию

$$R(t) = 0 \quad \text{при } |t| < T,$$

то значения дискретного случайного процесса некоррелированы и процесс называется дискретным белым шумом. Его спектральная плотность равна

$$S^* = R(0) = s_u^2. \quad (2.23)$$

Пример 2.4. Для системы, описанной в примере 2.1, найдите в установившемся режиме дисперсию ошибки слежения в моменты времени $t = kT$, приняв, что $I(t) = 0$, $x(t)$ – широкополосный случайный процесс с функцией корреляции $R(t)$, равной нулю при $\tau > T$, и дисперсией s_x^2 .

Решение. Для расчета дисперсии ошибки слежения воспользуемся выражением

$$\sigma^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(z) \cdot |H_{\xi x}(z)|^2 \left[2 \cdot \frac{1}{1+u^2} \right] \cdot du, \quad (2.24)$$

$$|z| = \frac{1+ju}{1-ju}$$

где $S(z) = s_x^2$; $H_{xx}(z) = \frac{-W_{П.Н}(z)}{1 + S_d W_{П.Н}(z)} = -\frac{k_u T}{z - 1 + S_d k_u T}$.

Приведем интеграл (2.24) к стандартному виду:

$$I_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{G_n(ju)}{H_n(ju) H_n(-ju)} du,$$

где

$$G_n(j\omega) = b_0(j\omega)^{2n-2} + b_1(j\omega)^{2n-4} + \dots + b_{n-1};$$

$$H_n(j\omega) = a_0(j\omega)^n + a_1(j\omega)^{n-1} + \dots + a_n.$$

Произведя замену переменной

$$z = \frac{1 + j\omega}{1 - j\omega},$$

получим
$$H_x(j\omega) = \frac{-k_u T(1 - j\omega)}{(2 - S_d k_u T)j\omega + S_d k_u T};$$

$$|H_x(j\omega)|^2 = \frac{k_u^2 T^2 [1 - (j\omega)^2]}{|(2 - S_d k_u T)j\omega + S_d k_u T|^2}.$$

Произведем разложение второго сомножителя в (2.24) на комплексно-сопряженные функции:

$$\frac{2}{1 + u^2} = \frac{2}{(1 + j\omega)(1 - j\omega)}.$$

Определим значения функций $G_n(j\omega)$ и $H_n(j\omega)$ и коэффициентов:

$$G_2(j\omega) = 2k_u^2 T^2 [1 - (j\omega)^2]; \quad H_2(j\omega) = (2 - S_d k_u T)(j\omega)^2 + 2j\omega + S_d k_u T;$$

$$b_0 = -2k_u^2 T^2; \quad b_1 = 2k_u^2 T^2; \quad a_0 = 2 - S_d k_u T; \quad a_1 = 2; \quad a_2 = S_d k_u T.$$

Значение стандартного интеграла вычислим по формуле

$$I_2 = \frac{-b_0 + a_0 b_1 / a_2}{2a_0 a_1}.$$

Таким образом,

$$S_x^2 = S_y^2 \frac{k_u^2 T^2 (4 - S_d k_u T)}{4(2 - S_d k_u T)}.$$

2.6. Задачи

1. В дискретной системе (см. рис. 2.2) найти передаточные функции $H_{1x}(z) H_{1y}(z)$, приняв, что $W_{\phi,\phi}(p) = (1 - e^{-pT})/p$, $W_\phi(p) = k_1(1 + pT_1)/p^2$, $W_{\phi,\phi}(s) = \frac{1 - e^{-sT}}{s}$.

2. Для дискретной системы (см. рис. 2.2) определить передаточные функции $W_p(z), H_{I_x}(z), H_{I_y}(z)$, если $W_\Phi(s) = \frac{k_{\text{и}}}{s}$.

3. Для дискретной системы (см. рис. 2.2) определить передаточные функции $W_p(z), H_{I_x}(z), H_{I_y}(z)$, если $W_\Phi(s) = \frac{k_1}{1 + T_1 s}$.

4. Для дискретной системы (см. рис. 2.2) определить передаточные функции $W_p(z), H_{I_x}(z), H_{I_y}(z)$, если $W_\Phi(s) = \frac{k_{\text{и}}(1 + sT_1)}{s}$.

5. Для дискретной системы (рис. 2.2) определить передаточные функции $W_p(z), H_{I_x}(z), H_{I_y}(z)$, если $W_\Phi(s) = \frac{ke^{-sT}}{s}$.

6. Определить условие устойчивости системы в задаче 1.

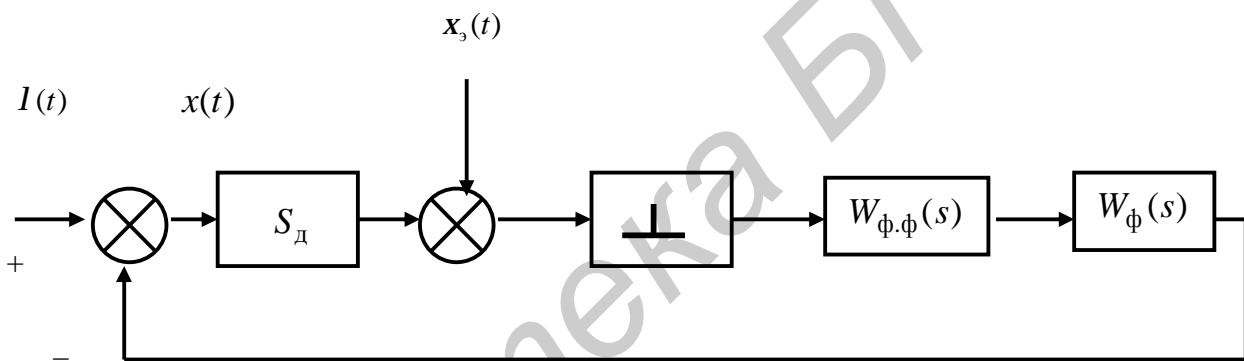


Рис. 2.2

7. Определить условие устойчивости системы в задаче 2.

8. Оценить устойчивость системы в задаче 3.

9. Определить условие устойчивости системы в задаче 4.

10. Оценить устойчивость дискретной системы (см. рис. 2.2), если

$$W_\Phi(s) = \frac{k}{s^2}.$$

11. Для условий задачи 1 вычислить установившуюся ошибку слежения при входном сигнале $I(t) = t^2$.

12. Для условий задачи 3 вычислить установившуюся ошибку слежения при входном сигнале $I(t) = at$.

13. Для условий задачи 3 вычислить ошибку слежения в переходном режиме, если $kT = 0,5, I(t) = at$.

14. Вычислить ошибку для системы задачи 4 для случая, когда $T = T_1 = 0,1$ с; $k_1 = 0,5, I(t) = at$.

15. Вычислить ошибку в системе задачи 1 при управляющем воздействии $I(t) = at$.

16. Для дискретной системы (см. рис. 2.2) составить разностное уравнение, связывающее задающее воздействие и управляемую величину в тактовых точках, если $W_{\phi}(s) = \frac{k_n(1 + sT_1)}{s^2}$.

17. Для дискретной системы (см. рис. 2.2), составить разностное уравнение, связывающее задающее воздействие и величину ошибки в тактовых точках если

$$W_{\phi}(s) = \frac{k_n(1 + sT_1)}{s^2}.$$

18. Определить величину установившейся ошибки в системе (см. рис. 2.2) для задающего воздействия

$$I(t) = at^2, \text{ если } W_{\phi}(s) = \frac{k_n(1 + sT_1)}{s^2}.$$

19. Определить величину установившейся ошибки и изменение ошибки в переходном режиме в тактовых точках в системе (см. рис. 2.2) для задающего воздействия

$$I(t) = at, \text{ если } W_{\phi}(s) = \frac{k_n(1 + sT_1)}{s^2}.$$

20. Для системы, описанной в задаче 1, найти в установившемся режиме дисперсию ошибки слежения в моменты времени $t = kT$, приняв, что $I(t) = 0$, $x_s(t)$ – широкополосный случайный процесс с функцией корреляции $R(t)$, равной нулю при $\tau > T$, и дисперсией s^2 .

3. ПРОЕКТИРОВАНИЕ СИСТЕМ РАДИОАВТОМАТИКИ

3.1. Краткие теоретические сведения

3.1.1. Определение параметров желаемой передаточной функции

Задачей проектирования является выбор конструкций схемы, определение ее параметров и способа технической реализации на основании назначения и требований, предъявляемых к системе [7].

На первом этапе проектирования определяется желаемая передаточная функция разомкнутой системы и постоянные времени ее звеньев.

Пусть желаемая передаточная функция разомкнутой системы с астатизмом первого порядка имеет вид

$$W_{\text{рж}}(s) = \frac{K(1 + sT_2)}{s(1 + sT_1)(1 + sT_3) \prod_{i=4}^n (1 + sT_i)},$$

где T_i – постоянные времени звеньев.

Звенья с T_i , $i = \overline{4, n}$ учитывают влияние устройств с малыми постоянными времени.

Запас устойчивости по фазе Δj определяют по заданной величине колебательности M :

$$\Delta j = \arcsin \frac{1}{M}.$$

Частота среза w_{cp} определяется исходя из значения полосы пропускания w_n :

$$w_{cp} = \frac{w_n}{2 \cos \Delta j}.$$

По допустимым значениям ошибок по скорости $x_{ск}$ и ускорению $x_{уск}$ находят коэффициенты ошибок:

$$c_0 = 0; \quad c_1 = \frac{x_{ск}}{I'(t)}; \quad c_2 = \frac{2x_{уск}}{I''(t)}.$$

Здесь $I^{(i)}(t)$ – производные задающего воздействия.

Коэффициент усиления K равен

$$K = \frac{1}{c_1}.$$

Постоянные времени T_1, T_2, T_3 находят с помощью следующих выражений:

$$T_1 = \frac{KT_2}{w_{cp}}; \quad T_2 = \frac{KC_2 w_{cp}}{K - w_{cp}};$$

$$\Delta j = -\frac{p}{2} - \operatorname{arctg} w_{cp} T_1 + \operatorname{arctg} w_{cp} T_2 - \operatorname{arctg} w_{cp} T_3 - \operatorname{arctg} \sum_{i=4}^M w_{cp} T_i.$$

Аналогично определяются параметры статических систем и систем с астатизмом второго порядка.

3.1.2. Определение передаточных функций корректирующих устройств

Коррекция системы производится с целью обеспечения требуемого запаса устойчивости, полосы пропускания, показателей переходного процесса и осуществляется путем включения в контур системы корректирующих звеньев.

Различают два вида корректирующих устройств: последовательные, включаемые в тракт прямой передачи сигнала последовательно (табл. 3.1), и параллельные, включаемые в цепь местной обратной связи.

Желаемая передаточная функция системы $W_{жел}(s)$ для первого и второго видов соответственно равна

$$W_{жел1}(s) = W(s)W_{п}(s); \quad (3.1)$$

$$W_{\text{жел}2}(s) = \frac{W(s)}{1 + W_{\text{ОХВ}}(s)W_{\text{ОС}}(s)}, \quad (3.2)$$

где $W(s)$ – передаточная функция исходной системы;

$W_{\Pi}(s)$ – передаточная функция последовательного корректирующего устройства;

$W_{\text{ОС}}(s)$ – передаточная функция параллельного корректирующего устройства;

$W_{\text{ОХВ}}(s)$ – передаточная функция охватываемых звеньев.

Приравняв (3.1) и (3.2), получим связь между передаточными функциями $W_{\Pi}(s)$ и $W_{\text{ОС}}(s)$ корректирующих устройств, оказывающих одинаковое воздействие на систему:

$$W_{\Pi}(s) = \frac{1}{1 + W_{\text{ОХВ}}(s)W_{\text{ОС}}(s)};$$

$$W_{\text{ОС}}(s) = \frac{1}{W_{\text{ОХВ}}(s)} \left[\frac{1}{W_{\Pi}(s)} - 1 \right].$$

Таким образом, одинаковые корректирующие устройства, включенные последовательно и параллельно, вызывают качественно противоположный эффект. Применение параллельных корректирующих устройств в цепи обратной связи повышает стабильность характеристик системы.

Параллельные корректирующие устройства различают по виду обратной связи:

а) жесткая, при которой на вход корректирующих звеньев подается выходная величина;

б) гибкая, при которой на вход звеньев подаются производные выходной величины.

Для жесткой обратной связи

$$W_{\text{ОС}}(s) = b_0.$$

Для гибкой обратной связи

$$W_{\text{ОС}}(s) = \frac{K_{\text{ОС}} s^{\nu} (1 + sT_1)(1 + sT_2)\dots}{(1 + sT_a)(1 + sT_b)\dots}; \quad \nu = \overline{1, r}.$$

В табл. 3.2 приведены примеры звеньев, охваченных жесткой обратной связью, их частотные передаточные функции и эквивалентные схемы с последовательными корректирующими звеньями.

Жесткая обратная связь приводит к уменьшению фазового сдвига и добротности системы.

В табл. 3.3 приведена зависимость фазового сдвига на сопряженных частотах ($1/T$ и $1/aT$) от величины b для звена с опережением по фазе.

Гибкая обратная связь действует в переходном режиме. В табл. 3.4 приведены примеры звеньев, охваченных гибкой обратной связью, и эквивалентные схемы.

Таким образом, как видно из приведенных примеров, включение одной и той же цепочки в цепь обратной связи и в виде последовательного звена приводит к качественно противоположным результатам.

3.1.3. Определение параметров звеньев последовательных корректирующих устройств

Методику выбора параметров рассмотрим на конкретных примерах [8].

Пусть исходная передаточная функция разомкнутой системы определяется выражением

$$W(j\omega) = \frac{200}{j\omega(1 + j\omega 0,02)(1 + j\omega 0,01)}$$

Ее логарифмическая характеристика приведена на рис. 3.1

Система неустойчива. Цель коррекции – сужение полосы до $\omega_{\text{ср. жел}} = 20 \frac{1}{\text{с}}$

целью обеспечения требуемого запаса устойчивости.

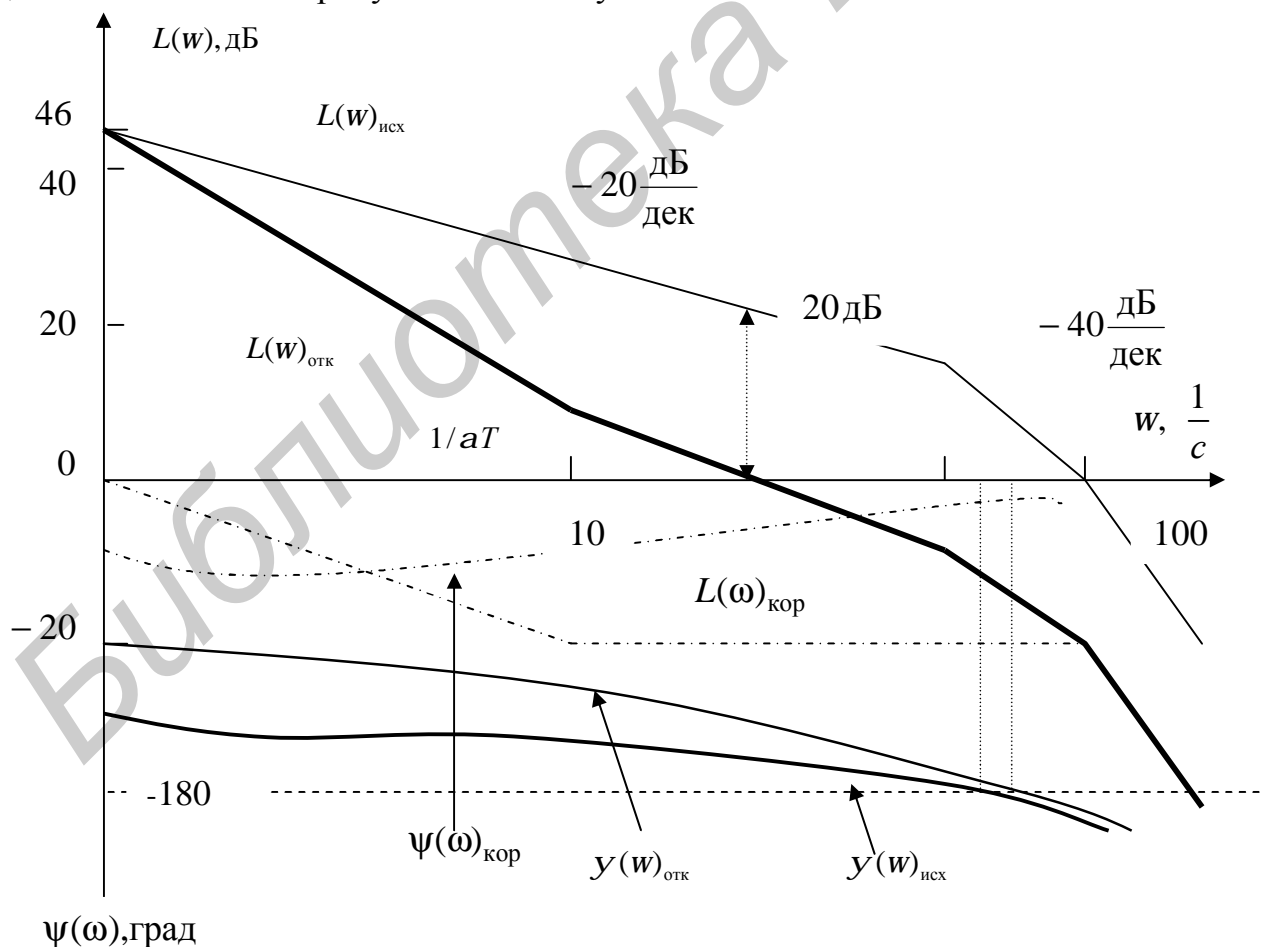


Рис. 3.1

В качестве корректирующего используем звено, обеспечивающее отставание по фазе (см. табл. 3.1).

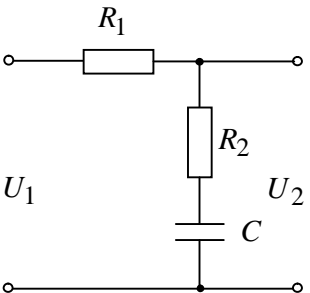
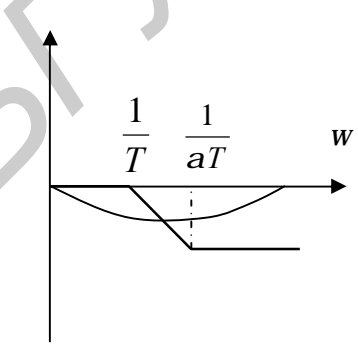
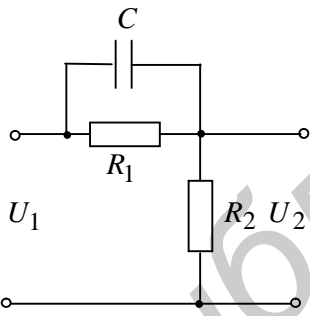
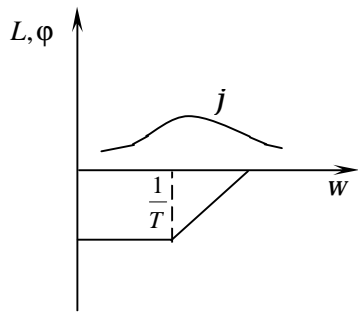
Параметр b определим из выражения

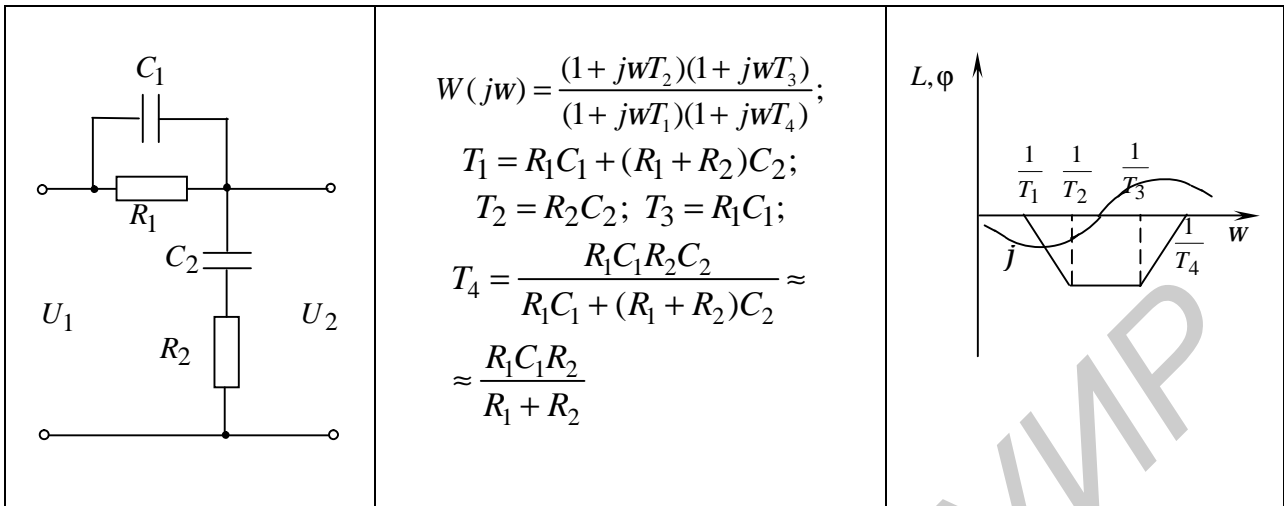
$$L_k(\omega) = 20 \lg \omega \alpha T - 20 \lg \omega T = 20 \lg \alpha = L(\omega_{\text{ср. жел}}),$$

где $L_k(w)$ – ослабление, вносимое корректирующей цепью;

Таблица 3.1

Основные виды корректирующих звеньев

Схема звена	Параметры звена	Логарифмические характеристики
	$W(j\omega) = \frac{1 + j\omega\alpha T}{1 + j\omega T};$ $a = \frac{R_2}{R_1 + R_2}; T = (R_1 + R_2)C;$ $\varphi(\omega_M) = \arcsin \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha};$ $\omega_M = \frac{\sqrt{\frac{1}{\alpha}}}{T}$	
	$W(j\omega) = a \frac{1 + j\omega T}{1 + j\omega a T};$ $a = \frac{R_2}{R_1 + R_2}; T = R_1 C;$ $j(\omega_M) = \arcsin \frac{1 - a}{1 + a};$ $\omega_M = \frac{\sqrt{\frac{1}{\alpha}}}{T}$	



$L(\omega_{\text{ср. жел}})$ – усиление исходной системы на желаемой частоте среза.

Следовательно,

$$20 \lg a = -20; \quad a = 0,1.$$

Таблица 3.2

Примеры звеньев, охваченных жесткой обратной связью

Структурная схема звена	Эквивалентная схема
$W_s(j\omega) = \frac{k_1}{1 + k_1 b_0} \frac{1}{1 + j\omega \frac{T_1}{1 + k_1 b_0}}$	$a = \frac{1}{1 + k_1 b_0}; \quad T = T_1$
$W_s(j\omega) = \frac{1}{b_0} \frac{1}{1 + j\omega \frac{T_1}{b_0}}; \quad T_1 = 1/k_1$	$T_n = \frac{1}{k_1 b_0}.$

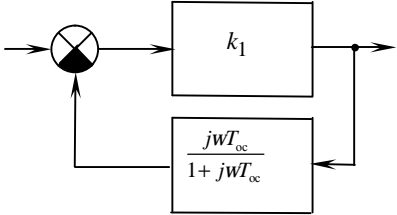
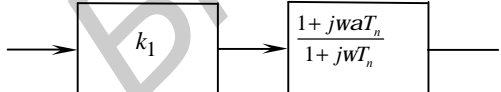
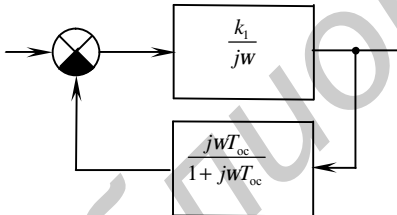
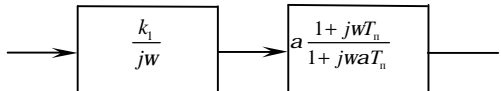
Таблица 3.3

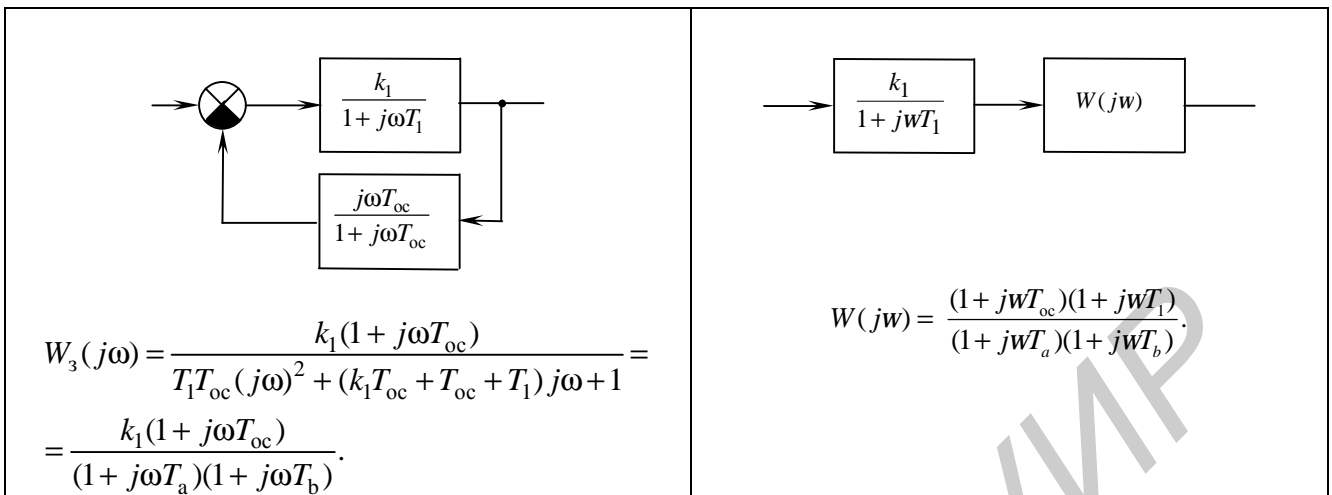
Зависимость $\varphi(\omega_c)$ от a

a	0,01	0,02	0,05	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
$\varphi(\omega_c)^\circ$	45	44	42	39	34	28	23	19	14	10	6	3

Таблица 3.4

Примеры звеньев, охваченных гибкой обратной связью

Структурная схема звена	Эквивалентная схема
<p>1</p>  $W_3(jw) = \frac{k_1(1 + jwT_{oc})}{1 + jwT_{oc}(1 + k_1)}$	<p>2</p>  $T_n = (1 + k_1)T_{oc}; \quad \alpha = \frac{1}{1 + k_1}$
 $W_3(jw) = \frac{k_1}{jw} \frac{1 + jwT_{oc}}{(1 + k_1T_{oc})(1 + jw \frac{T_{oc}}{1 + k_1T_{oc}})}$	 $T_n = T_{oc}; \quad \alpha = \frac{1}{1 + k_1T_{oc}}$



Выбор величины T произведем исходя из требуемых запасов устойчивости по фазе. Фазовый сдвиг в исходной системе на частоте $20 \frac{1}{c}$ равен

$$\varphi_{исх}(20) = -90^\circ - \arctg 20 \cdot 0,02 - \arctg 20 \cdot 0,01 = -124^\circ.$$

Следовательно, запас устойчивости в исходной системе на желаемой частоте среза

$$\Delta\varphi_{исх}(20) = 180^\circ - 124^\circ = 56^\circ.$$

Для выбора T воспользуемся табл. 3.3, характеризующей фазовый сдвиг, создаваемый звеном на сопряженных частотах $\frac{1}{aT}$ и $\frac{1}{T}$ в зависимости от a . Величина T выбирается такой, чтобы большая из сопряженных частот была на 1–2 октавы ниже желаемой частоты среза.

Пусть $T = 1c$, тогда $\frac{1}{aT} = 10 \frac{1}{c}$.

Запас устойчивости на желаемой частоте среза

$$\Delta\varphi_{отк}(20) = \Delta\varphi_{исх}(20) - \Delta\varphi_{кор}(20) = 56 - \arctg 20 \cdot 1 + \arctg 20 \cdot 0,1 = 32^\circ,$$

что является достаточным.

Корректирующая цепь на частоте

$$\omega_{max} = \frac{\sqrt{\frac{1}{\alpha}}}{T} \approx 3 \frac{1}{c}$$

будет создавать максимальный фазовый сдвиг:

$$\varphi(\omega)_{max} = \arcsin \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha} = -55^\circ.$$

Суммарный фазовый сдвиг в скорректированной системе равен -150° . Следовательно, и на этой частоте запас устойчивости по фазе, равный

$$\Delta\varphi(3) = 280^\circ - 150^\circ = 30^\circ,$$

является достаточным.

Запас устойчивости по амплитуде составляет $\Delta L = 1,1$ дБ, что также является приемлемым.

Пусть исходная система имеет частотную передаточную функцию разомкнутой системы

$$W(j\omega) = \frac{40}{j\omega(1 + j\omega 0,2)(1 + j\omega 0,02)}.$$

ЛЧХ системы изображены на рис. 3.2.

При этом $\Delta\varphi = 4^\circ$, $\Delta L = 2$ дБ, $\omega_{\text{ср}} = 14 \frac{1}{\text{с}}$.

Необходимо обеспечить достаточные запасы устойчивости и расширить полосу пропускания до

$$\omega_{\text{ср. жел}} = 20 \frac{1}{\text{с}}.$$

Поскольку в исходной системе $\varphi(\omega_{\text{ср. жел}}) = -190^\circ$, то для обеспечения $\Delta\varphi = 30^\circ$ необходимо, чтобы на $\omega = 20 \frac{1}{\text{с}}$ корректирующая цепь внесла положительный фазовый сдвиг $\varphi(\omega)_{\text{max}} = 40^\circ$. Приняв

$$\omega_{\text{max}} = \frac{\sqrt{1-a}}{T} = 20 \frac{1}{\text{с}},$$

найдем

$$\frac{1-a}{1+a} = \sin 40^\circ = 0,64; \quad a = \frac{0,36}{1,64} = 0,22; \quad T = \frac{2,13}{20} \approx 0,1 \text{ с}.$$

Следовательно, $\frac{1}{T} = 10 \frac{1}{\text{с}}$; $\frac{1}{aT} = 45 \frac{1}{\text{с}}$.

Строим логарифмические характеристики звена и скорректированной системы с учетом увеличения усиления на $20 \lg \frac{1}{a} = 12$ дБ. По асимптотической ЛАХ строим точную. Получаем

$$\Delta\varphi = 33^\circ, \quad \Delta L = 12 \text{ дБ}.$$

Если полученного запаса устойчивости по усилению недостаточно, следует уменьшить b и одновременно увеличить усиление в системе.

3.1.4. Выбор параметров гибкой обратной связи

Первым шагом является определение характеристик замкнутого контура. Последние получают с помощью специальных номограмм следующим образом. На номограмме строится кривая, каждая точка которой имеет координаты $L(\omega_i)$, $\varphi(\omega_i)$, полученные из ЛЧХ разомкнутой системы. При этом на каждой точке кривой отмечается значение частоты. Пересечение полученной кривой с ветвью номограммы для замкнутой системы дает значение усиления на данной частоте, для ЛФЧХ – величину фазового сдвига в замкнутой системе. Совокупность полученных точек позволяет построить ЛАЧХ и ЛФЧХ замкнутой системы.

Логарифмические характеристики для замкнутой системы строятся для сравнительно узкого диапазона значения L : $-20 \text{ дБ} \leq L(w) \leq +20 \text{ дБ}$, так как при $L(w) \leq -20 \text{ дБ}$ характеристики замкнутой и разомкнутой систем совпадают, а при $L(w) \geq +20 \text{ дБ}$ $L_s(w) = 0$.

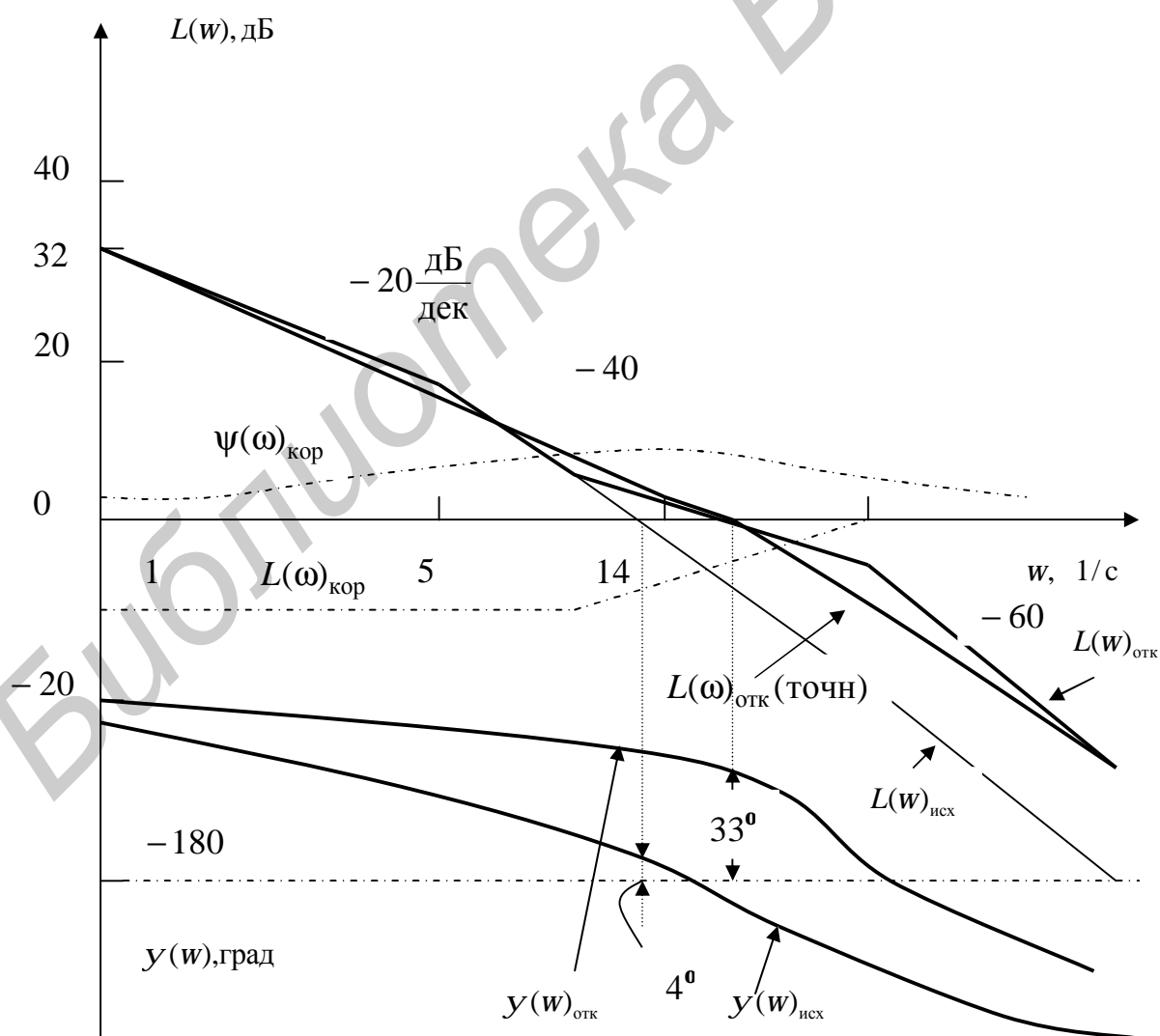


Рис. 3.2

В качестве примера на номограмме (рис. 3.3) построена ЛЧХ разомкнутой системы с частотной передаточной функцией:

$$W(j\omega) = \frac{40}{j\omega(1 + j\omega 0,2)(1 + j\omega 0,02)}.$$

При построении следует иметь в виду, что номограмма симметрична относительно вертикальной оси $\varphi(\omega) = -180^\circ$, следовательно, можно пользоваться половиной номограмм от $\varphi(\omega) = 0$ до $\varphi(\omega) = -180^\circ$. В левой и правой положениях номограмм углы $\varphi_3(\omega)$ имеют разные знаки. Например, если в правой половине $\varphi_3(\omega) = -80^\circ$, то в левой половине ему соответствует угол $\varphi_3(\omega) = +80^\circ = -280^\circ$.

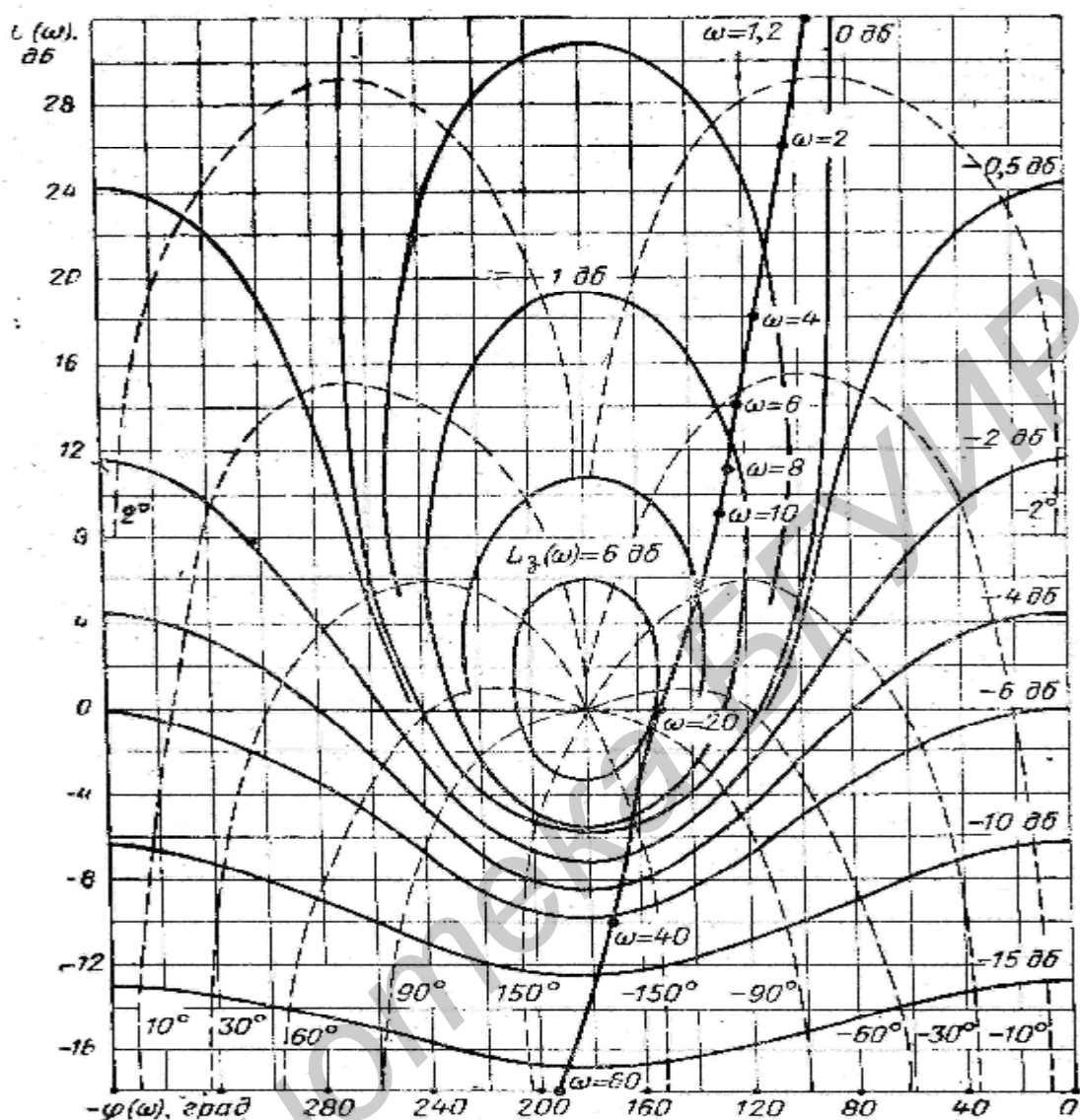


Рис. 3.3

Таким образом получим характеристики замкнутой системы с $b_0 = 1$. Для систем с гибкой обратной связью строятся логарифмические частотные характеристики для произведения частотных передаточных функций охватываемых звеньев $W_{\text{о.в.}}(j\omega)$ и гибкой обратной связи $W_{\text{о.с.}}(j\omega)$. Затем с помощью номограмм определяют

$$W_3(j\omega) = \frac{W_{\text{о.в.}}(j\omega) \cdot W_{\text{о.с.}}(j\omega)}{1 + W_{\text{о.в.}}(j\omega)W_{\text{о.с.}}(j\omega)}$$

Вычитая из ординат полученных ЛАЧХ и ЛФЧХ ординаты ЛАЧХ и ЛФЧХ цепи обратной связи, получим искомые характеристики для замкнутого контура.

Выбор параметров гибкой обратной связи производят с помощью точного и приближенного способов. При точном способе строятся исходная и желаемая ЛАЧХ. Вычитая из второй первую, получают ЛАЧХ последовательного корректирующего устройства. Путем выбора эквивалентных звеньев или с помощью номограмм производится переход к характеристикам параллельного корректирующего устройства. При использовании номограмм делается обратный переход от характеристик замкнутой системы к характеристикам разомкнутой системы, т. е. от $W_3'(j\omega)$ к произведению $W_{\text{о.в.}}(j\omega) \cdot W_{\text{о.с.}}(j\omega)$. Таким образом будет найдена сумма $L_{\text{о.в.}}(\omega) + L_{\text{о.с.}}(\omega)$. Вычитая ЛАЧХ $L_{\text{о.в.}}(\omega)$, определяют $L_{\text{о.с.}}(\omega)$.

При приближенном методе полагают, что $1 \ll A_{\text{о.в.}}(\omega)A_{\text{о.с.}}(\omega)$. Тогда уравнение (3.2) упрощается:

$$W_{\text{жел}}(s) = \frac{W(s)}{W_{\text{о.в.}}(s) \cdot W_{\text{о.с.}}(s)}, \quad (3.3)$$

или $L_{\text{жел}}(\omega) = L(\omega) - [L_{\text{о.в.}}(\omega) + L_{\text{о.с.}}(\omega)]$.

Вычитая из желаемой характеристики системы характеристику исходной системы, получают (с обратным знаком) ЛАЧХ произведения $W_{\text{о.в.}}(j\omega) \cdot W_{\text{о.с.}}(j\omega)$. Выбрав звено, охватываемое обратной связью, определяют характеристику обратной связи. Упрощение дает ошибку в ЛАЧХ, не превышающую 3 дБ, если выполняется следующее условие для заданного диапазона частот:

$$20 \lg [1 + A_{\text{о.в.}}(\omega)A_{\text{о.с.}}(\omega)] > 11 \text{ дБ.}$$

Рассмотрим пример использования упрощенной методики.

Пусть исходная система имеет

$$W(j\omega) = \frac{40}{j\omega(1 + j\omega 0,1)(1 + j\omega 0,025)}.$$

ЛЧХ исходной системы приведены на рис. 3.4.

Система находится на границе устойчивости, $\omega_{\text{кр}} = \omega_{\text{ср}} = 20 \frac{1}{\text{с}}$. Необходимо сузить полосу пропускания до $\omega_{\text{с}} = 10 \frac{1}{\text{с}}$ и обеспечить наклон -20 дБ/дек в районе частоты среза.

Желаемая ЛАЧХ строится от $\omega_{\text{ср. жел}} = 10 \frac{1}{\text{с}}$ с наклоном -20 дБ/дек. Точка перелома (а) определяется как пересечение участка ЛАЧХ, проходящего через $\omega_{\text{ср. жел}}$, и участка ЛАЧХ с наклоном -40 дБ/дек, проходящего через точку с координатами $\omega = 1 \frac{1}{\text{с}}$ и $L(\omega) = 20 \lg K = 32$ дБ. Точка б – как пересечение участка ЛАЧХ, проходящего через $\omega_{\text{ср. жел}}$ с исходной ЛАЧХ.

По желаемой асимптотической ЛАЧХ определяется желаемая частотная передаточная функция $W_{\text{жел}}(j\omega)$:

$$W_{\text{жел}}(j\omega) = \frac{40(1 + j0,25)}{j\omega(1 + j\omega)(1 + j\omega 0,025)}$$

Из уравнения (3.3) следует, что

$$W_{\text{ос}}(j\omega) = \frac{W(j\omega)}{W_{\text{жел}}(j\omega) \cdot W_{\text{охв}}(j\omega)}$$

Охватим обратной связью инерционное звено с передаточной функцией:

$$W_{\text{охв}}(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega 0,1}$$

После подстановки значений $W(j\omega)$, $W_{\text{жел}}(j\omega)$, $W_{\text{охв}}(j\omega)$ получаем

$$W_{\text{ос}}(j\omega) = \frac{1 + j\omega 1}{1 + j\omega 0,25}$$

Таким образом, в цепь обратной связи, охватывающей инерционное звено, должна быть включена цепочка, вносящая опережение по фазе. С учетом дополнительного увеличения усиления на $k_{\text{доп}} = \frac{1}{a}$ цепочка имеет

$$W(j\omega) = \frac{1 + j\omega T}{1 + j\omega aT}$$

Откуда $a = 0,25$ и $T = 1$ с.

Запас устойчивости откорректированной системы $\Delta j = 60^\circ$, что превышает минимально необходимый.

3.2. Задачи

1. Определить передаточные функции звеньев, охваченных жесткой обратной связью, и эквивалентных им по воздействию последовательных корректирующих звеньев; построить асимптотические ЛАХ, если передаточные функции охватываемых звеньев определяются выражениями:

- а) $W(j\omega) = j\omega T$;
- б) $W(j\omega) = j\omega T / (1 + j\omega T)$;
- в) $W(j\omega) = 1 + j\omega T$.

2. Построить желаемую ЛАХ и произвести выбор параметров последовательного корректирующего звена с отставанием по фазе, если передаточная функция разомкнутой системы в исходном состоянии и желаемая частота среза соответственно равны:

- а) $W(j\omega) = \frac{250}{j\omega(1 + j\omega 0,02)(1 + j\omega 0,015)}$, $\omega_{\text{ср. жел}} = 20$ с⁻¹;

$$\text{б) } W(j\omega) = \frac{200}{j\omega(1+j\omega 0,02)(1+j\omega 0,015)}, \quad \omega_{\text{ср. жел}} = 15 \text{ с}^{-1};$$

$$\text{в) } W(j\omega) = \frac{300}{j\omega(1+j\omega 0,025)(1+j\omega 0,01)}, \quad \omega_{\text{ср. жел}} = 30 \text{ с}^{-1}.$$

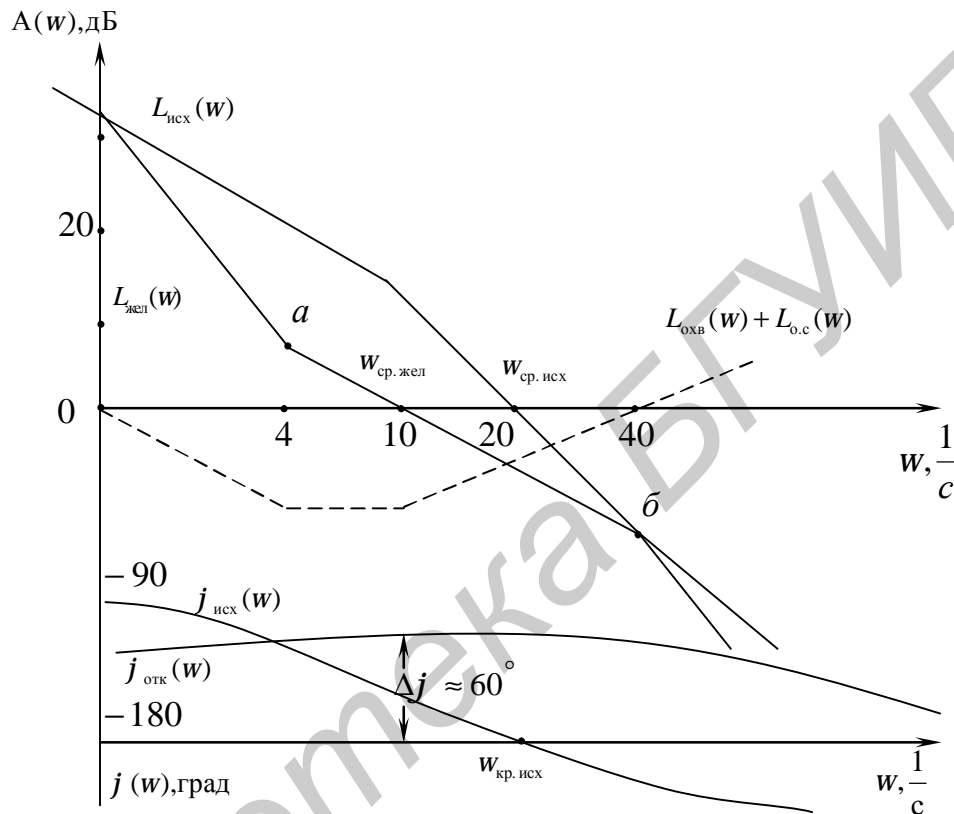


Рис. 3.4

3. Построить желаемую ЛАХ и произвести выбор параметров последовательного корректирующего звена с опережением по фазе, если передаточная функция разомкнутой системы в исходном состоянии и желаемая частота среза соответственно равны:

$$\text{а) } W(j\omega) = \frac{30}{j\omega(1+j\omega 0,2)(1+j\omega 0,02)}, \quad \omega_{\text{ср. жел}} = 20 \text{ с}^{-1};$$

$$\text{б) } W(j\omega) = \frac{60}{j\omega(1+j\omega 0,25)(1+j\omega 0,03)}, \quad \omega_{\text{ср. жел}} = 40 \text{ с}^{-1};$$

$$\text{в) } W(j\omega) = \frac{60}{j\omega(1+j\omega 0,2)(1+j\omega 0,02)}, \quad \omega_{\text{ср. жел}} = 40 \text{ с}^{-1}.$$

4. Построить желаемую ЛАХ и произвести выбор последовательного корректирующего звена, обеспечивающего необходимый запас устойчивости, если передаточная функция разомкнутой системы в исходном состоянии равна

$$W(j\omega) = K / j\omega(1 + j\omega 0,1)(1 + j\omega 0,02)(1 + j\omega 0,01), \quad c_1 = 4 \cdot 10^{-3}.$$

5. Определить параметры гибкой обратной связи из условия обеспечения устойчивости и желаемой частоты среза, если

$$\text{а) } W(j\omega) = \frac{50}{j\omega(1 + j\omega 0,1)(1 + j\omega 0,025)}, \quad \omega_{\text{ср. жел}} = 10 \text{ с}^{-1};$$

$$\text{б) } W(j\omega) = \frac{40}{j\omega(1 + j\omega 0,2)(1 + j\omega 0,025)}, \quad \omega_{\text{ср. жел}} = 5 \text{ с}^{-1};$$

$$\text{в) } W(j\omega) = \frac{40}{j\omega(1 + j\omega 0,05)(1 + j\omega 0,02)}, \quad \omega_{\text{ср. жел}} = 10 \text{ с}^{-1}.$$

6. Определить передаточные функции звеньев, охваченных гибкой обратной связью, и эквивалентных им по воздействию последовательных корректирующих звеньев; построить асимптотические ЛАХ, если передаточные функции охватываемых звеньев и звеньев в цепи обратной связи соответственно равны:

$$\text{а) } W_{\text{исх}}(j\omega) = k_1, \quad W_{\text{о.с}}(j\omega) = 1 + j\omega T_1;$$

$$\text{б) } W_{\text{исх}}(j\omega) = k_1 / (1 + j\omega T_1), \quad W_{\text{о.с}}(j\omega) = 1 + j\omega T_1.$$

7. С помощью любого вида коррекции обеспечить необходимые запасы устойчивости и показатели качества без снижения добротности для систем, имеющих передаточные функции в разомкнутом состоянии:

$$\text{а) } W(j\omega) = \frac{50}{j\omega(1 + j\omega 0,1)(1 + j\omega 0,025)};$$

$$\text{б) } W(j\omega) = \frac{100}{j\omega(1 + j\omega 0,05)^2(1 + j\omega 0,01)};$$

$$\text{в) } W(j\omega) = \frac{20}{j\omega(1 + j\omega 0,1)(1 + j\omega 0,05)}.$$

8. Синтезировать следящую систему и определить передаточные функции корректирующих устройств из условия обеспечения показателя колебательности не более 1,3, ошибки по скорости не более $0,15 \cdot 10^{-2}$ рад, полосы пропускания 10 с^{-1} , нулевой ошибки по положению при максимальном значении производной задающего воздействия $0,15 \text{ рад} \cdot \text{с}^{-1}$, если передаточная функция исходной части разомкнутой системы равна

$$W(j\omega) = K / j\omega(1 + j\omega T_1).$$

4. СИНТЕЗ ФИЛЬТРОВ СЛЕДЯЩИХ СИСТЕМ МЕТОДАМИ ОПТИМАЛЬНОЙ ЛИНЕЙНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ

4.1. Синтез фильтров на основе решения интегральных уравнений

4.1.1. Краткие теоретические сведения

Теория оптимальной линейной фильтрации базируется на двух подходах. Первый состоит в решении интегрального уравнения для импульсной характеристики оптимального фильтра (уравнения Винера – Хопфа), второй связан с использованием метода пространства состояний. Если на вход фильтра поступает аддитивная смесь

$$r(t) = I(t) + x(t) / S_n = I(t) + n(t),$$

при этом $I(t)$ и $n(t)$ являются стационарными и стационарно связанными случайными процессами с нулевыми математическими ожиданиями и известными функциями корреляции, то импульсная характеристика оптимального фильтра определяется решением интегрального уравнения Винера:

$$R_{r,l}(t) = \int_0^{\infty} R_r(t-q)h_0(q)dq \quad \text{при } t \geq 0, \quad (4.1)$$

где $R_{r,l}(t) = M\{r(t-t)I(t)\}$ — взаимокорреляционная функция процессов $I(t)$ и $r(t)$;

$R_r(t-q) = M\{r(t-t)r(t-q)\}$ — корреляционная функция;

h_0 — импульсная характеристика (весовая функция) оптимального фильтра.

На основе интегрального уравнения (4.1) определяется передаточная функция физически нереализуемого фильтра, для которого $-\infty \leq t \leq \infty$:

$$\Phi(jw) = \frac{S_l(w)}{S_l(w) + S_n(w)}.$$

Для оптимального физически реализуемого фильтра частотная передаточная функция определяется выражением

$$\Phi(jw) = \frac{1}{y(jw)} \int_0^{\infty} e^{-jw t} \frac{1}{2p} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{S_l(w)}{y(-jw)} e^{jw t} dw dt, \quad (4.2)$$

где $|y(jw)|^2 = S_r(w)$.

Для практических расчетов формула (4.2) приводится к виду

$$\Phi(jw) = \frac{1}{y(jw)} \left[\frac{S_l(w)}{y(-jw)} \right]_+, \quad (4.3)$$

где $\left[\frac{S_l(w)}{y(-jw)} \right]_+$ — целая часть и дроби, соответствующие полюсам, расположенным в верхней полуплоскости комплексной переменной.

Вычисление по формуле (4.3) производится следующим образом.

1. Производится факторизация спектральной плотности, т. е. функция $S_r(w)$ представляется в виде

$$S_r(w) = Y(jw) \cdot Y(-jw).$$

2. Отношение $S_l(w)/Y(-jw)$ разлагается на простые дроби и выделяется целая часть и дроби, соответствующие полюсам, расположенным в верхней полуплоскости $[\cdot]_+$. Дроби, соответствующие полюсам, расположенным в нижней полуплоскости, отбрасываются.

3. Отношение $[\cdot]_+/Y(-jw)$ представляет искомую передаточную функцию оптимального фильтра.

Разложение отношения $S_l(w)/Y(-jw)$ на простые дроби при отсутствии кратных полюсов имеет следующий вид:

$$\frac{S_l(w)}{Y(-jw)} = \sum_i \frac{a_i}{w - v_i} + \sum_i \frac{b_i}{w - h_i} + k,$$

где v_i – полюсы отношения, расположенные в верхней полуплоскости комплексной переменной w ;

h_i – полюсы, расположенные в нижней полуплоскости;

k – целая часть отношения $\frac{S_l(w)}{Y(-jw)}$;

$$a_i = \lim_{w \rightarrow v_i} [(w - v_i) S_l(w) / Y(-jw)].$$

Если отношение $S_l(w)/Y(-jw)$ имеет кратные полюсы, то каждому полюсу кратностью c в разложении $S_l(w)/Y(-jw)$ на простые дроби соответствует сумма вида

$$\sum_{j=1}^c \frac{a_{ij}}{(w - v_i)^{c-j+1}},$$

где

$$a_{ij} = \frac{1}{(j-1)!} \left[\frac{d^{j-1}}{d\omega^{j-1}} (\omega - v_i) \frac{S_l(\omega)}{\Psi(-j\omega)} \right]_{\omega=v_i}.$$

При известной крутизне дискриминационной характеристики S_d передаточная функция оптимального фильтра в контуре следящей системы определяется выражением

$$W(jw) = \frac{1}{S_d} \cdot \frac{\Phi(jw)}{1 - \Phi(jw)}. \quad (4.4)$$

Если помеха $n(t)$ аппроксимируется белым шумом со спектральной плотностью $S_n(\omega) = S_n(0)$, а спектральная плотность сообщения описывается дробно-рациональной функцией вида

$$S_I(\omega) = \frac{P(\omega^2)}{D(\omega^2)},$$

то $\Phi(j\omega)$ может быть определена по формуле

$$\Phi(j\omega) = 1 - \frac{\sqrt{S_n(0)}}{Y(j\omega)}. \quad (4.5)$$

Дисперсия ошибки фильтрации вычисляется по формуле

$$S_{\min}^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [S_I(\omega) - S_r(\omega) |\Phi(j\omega)|^2] d\omega. \quad (4.6)$$

Если помеха не зависит от $I(t)$ и является белым шумом со спектральной плотностью $S_n(0)$, то

$$S_{\min}^2 = S_n(0) \cdot h_0(0). \quad (4.7)$$

4.1.2. Примеры

1. Для следящей системы найти частотную передаточную функцию фильтра в контуре $W(j\omega)$, при которой минимизируется дисперсия ошибки в установившемся режиме. Крутизна S_d дискриминатора известна, шум $X(t)$ и воздействие $I(t)$ не коррелированы и имеют следующие характеристики:

$$S_I(\omega) = \frac{a^2}{\omega^2}; \quad R_x(t) = S(0) \cdot d(t).$$

Решение. Определяем спектральную плотность шума $S_x(\omega)$:

$$S_x(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_x(t) e^{-j\omega t} dt = S(0) \int_{-\infty}^{\infty} d(t) e^{-j\omega t} dt = S(0).$$

Спектральная плотность шума, приведенная ко входу дискриминатора,

$$S_n(\omega) = S_x(\omega) / S_d^2 = S(0) / S_d^2.$$

Определяем спектральную плотность смеси:

$$S_r(\omega) = S_I(\omega) + S_n(\omega) = \frac{a^2}{\omega^2} + \frac{S(0)}{S_d^2} = \frac{a^2 S_d^2 + \omega^2 S(0)}{\omega^2 S_d^2};$$

$$S_r(\omega) = \frac{c^2 + \omega^2 S(0)}{\omega^2 S_d^2}; \quad c^2 = a^2 S_d^2.$$

Представим $S_r(\omega)$ в виде произведения функции $Y(-j\omega)$ и $Y(j\omega)$:

$$S_r(w) = \frac{(c + jw\sqrt{S(0)})(c - jw\sqrt{S(0)})}{jS_d w} \cdot \frac{(c - jw\sqrt{S(0)})}{-jS_d w}.$$

Таким образом,

$$y(jw) = \frac{c + jw\sqrt{S(0)}}{jwS_d}; \quad y(-jw) = \frac{c - jw\sqrt{S(0)}}{jwS_d}.$$

Запишем отношение

$$\frac{S_l(w)}{y(jw)} = \frac{-jwS_d a^2}{w^2(c - jw\sqrt{S(0)})} = \frac{a^2 S_d^2}{w(jc + w\sqrt{S(0)})}$$

и разложим его на простые дроби:

$$\frac{S_l(w)}{y(jw)} = \frac{a_1}{w} + \frac{b_1}{jc + w\sqrt{S(0)}}.$$

Отбрасываем второе слагаемое, соответствующее полюсу, расположенному в нижней полуплоскости. Определяем

$$a_1 = \frac{a^2 S_d w}{\sqrt{S(0)} \cdot w(j \frac{c}{\sqrt{S(0)}} + w)} = -ja.$$

Следовательно,

$$\left[\frac{S_l(w)}{y(-jw)} \right]_+ = \frac{a}{jw}; \quad \Phi(jw) = \frac{[\cdot]_+}{y(jw)} = \frac{c}{c + jw\sqrt{S(0)}}.$$

По найденному значению $\Phi(jw)$, используя формулу (4.4), определим $W(jw)$:

$$W(jw) = \frac{1}{S_d} \cdot \frac{c/(c + jw\sqrt{S(0)})}{1 - c/(c + jw\sqrt{S(0)})} = \frac{\sqrt{a^2}}{jw}.$$

Поскольку в данном примере помеха аппроксимируется белым шумом, для определения $\Phi(jw)$ можно воспользоваться формулой (4.5) без разложения $S_l(w)/y(-jw)$ на простые дроби:

$$\Phi(jw) = 1 - \frac{\sqrt{S(0)}}{\sqrt{S_d^2}} \bigg/ \frac{c + jw\sqrt{S(0)}}{jwS_d} = \frac{c}{c + jw\sqrt{S(0)}}.$$

2. Для условий предыдущего примера найти минимальную дисперсию ошибки сложения.

Решение. Для определения $h_0(0)$ воспользуемся теоремой о начальном значении оригинала:

$$h_0(0) = \lim_{s \rightarrow \infty} s \cdot \Phi(s),$$

$$h_0(0) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{sc}{c + s\sqrt{S(0)}} = \frac{c}{\sqrt{S(0)}}.$$

Следовательно,

$$S_{x \min}^2 = \frac{a \cdot S(0)}{S_d \sqrt{S(0)}} = \sqrt{\frac{a^2 S(0)}{S_d^2}}.$$

4.1.3. Задачи

1. Найти частотную передаточную функцию оптимального линейного фильтра, выделяющего в установившемся режиме с минимальной среднеквадратической ошибкой процесс $l(t)$ из аддитивной смеси с помехой $n(t)$, если $l(t)$ и $n(t)$ не коррелированы и

- а) $S_l(w) = a^2 / w^2$, $S_n(w) = c^2$;
- б) $S_l(w) = a^2 / w^2$, $S_n(w) = c^2 / (w^2 + b^2)$;
- в) $R_l(t) = S_l^2 \exp(-a|t|)$, $S_n(w) = l^2 / w^2$.

Длительность переходного процесса в фильтре не ограничена.

2. Для следящей системы найти частотную передаточную функцию $W(jw)$ фильтра в контуре, при которой минимизируется дисперсия ошибки в установившемся режиме. Крутизна S_d дискриминатора известна, шум $x(t)$ и воздействие $l(t)$ не коррелированы и имеют следующие характеристики:

$$S_l(w) = a^2 / w^2 (w^2 + b^2), \quad S_x(w) = S_x(0).$$

3. Для условий задачи 2 найти минимальную дисперсию ошибки слежения при использовании в контуре следящей системы оптимального фильтра.

4. Имеется аддитивная смесь

$$r(t) = l(t) + n(t),$$

где $n(t)$ – стационарный нормальный белый шум со спектральной плотностью $S_n(w) = S(0)$;

$l(t)$ – статистически независимый от $n(t)$ стационарный случайный процесс со спектральной плотностью:

$$S_l(w) = \frac{1}{1 + w^2}, \quad -\infty < w < \infty.$$

Требуется определить частотную передаточную функцию физически реализуемого фильтра $\Phi(jw)$, минимизирующего дисперсию ошибки.

5. На вход линейной системы с частотной передаточной функцией

$$\Phi(j\omega) = \frac{b}{b + j\omega}, \quad b = \frac{1}{T}$$

поступает аддитивная смесь

$$r(t) = I(t) + n(t),$$

где $I(t)$ – стационарный нормальный процесс со спектральной плотностью

$$S_I(\omega) = \frac{a^2}{b^2 + \omega^2}, \quad -\infty < \omega < \infty,$$

$n(t)$ – статистически независимый от $I(t)$ стационарный белый шум со спектральной плотностью $S_n(\omega) = S(0)$.

Найти оптимальное значение T , минимизирующее дисперсию ошибки.

6. Для условий задачи 5 найти минимальную дисперсию ошибки.

7. На вход системы поступает аддитивная смесь статически независимых случайного процесса $I(t)$ со спектральной плотностью

$$S_I(\omega) = \frac{1}{1 + \omega^2}, \quad -\infty < \omega < \infty$$

и стационарного нормального шума с энергетическим спектром

$$S_n(\omega) = S_n(0).$$

Определить передаточную функцию $W(j\omega)$ фильтра в контуре следящей системы, если крутизна дискриминационной характеристики равна S_d , и минимальную дисперсию ошибки.

8. Вычислить частотную передаточную функцию оптимального физически реализуемого линейного фильтра при поступлении на вход аддитивной смеси взаимно некоррелированных процесса $I(t)$ и помехи $n(t)$, спектральные плотности которых соответственно равны

$$S_I(\omega) = \frac{a^2}{a^2 + \omega^2}, \quad S_n(\omega) = \frac{b^2}{b^2 + \omega^2}.$$

9. На вход линейной системы с

$$\Phi(j\omega) = \frac{b}{b + j\omega}, \quad b = \frac{1}{T}$$

поступает аддитивная смесь взаимно некоррелированных процессов $I(t)$ и $n(t)$. Спектральные плотности процессов равны

$$S_I(\omega) = \frac{16}{9 + \omega^2}, \quad S_n(\omega) = \frac{25}{19 + \omega^2}.$$

Определить значение T , минимизирующее среднеквадратическую ошибку.

10. На вход следящей системы с частотной передаточной функцией

$$\Phi(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega T}$$

поступает аддитивная смесь взаимно некоррелированных процессов $I(t)$ и $n(t)$, спектральные плотности которых соответственно равны

$$S_I(\omega) = \frac{25}{(1 + \omega^2)^2}, \quad S_n(\omega) = 0,4;$$

$y(t)$ – процесс на входе фильтра.

Как следует выбрать параметр T , чтобы дисперсия разности

$$x(t) = y(t) - \frac{dI(t)}{dt}$$

была бы минимальной?

11. На вход системы поступает аддитивная смесь

$$r(t) = I(t) + n(t),$$

где $n(t)$ – стационарный нормальный белый шум со спектральной плотностью

$$S_n(\omega) = S(0),$$

$I(t)$ – взаимно некоррелированный с $n(t)$ стационарный нормальный случайный процесс со спектральной плотностью

$$S_\lambda(\omega) = \begin{cases} A \frac{\omega + \omega_c}{\omega_c}, & -\omega_c \leq \omega \leq 0, \\ A \frac{\omega_c - \omega}{\omega_c}, & 0 \leq \omega \leq \omega_c, \\ 0 & \text{при других } \omega. \end{cases}$$

Найти частотную передаточную функцию оптимального физически нереализуемого фильтра, минимизирующего среднеквадратическую ошибку фильтрации.

4.2. Фильтры Калмана

4.2.1. Краткие теоретические сведения

В отличие от фильтров Винера, обеспечивающих минимум среднеквадратической ошибки лишь при бесконечном времени наблюдения (в установившемся режиме), фильтры Калмана минимизируют ошибку и в переходном режиме при нестационарных случайных воздействиях.

Случайное задающее воздействие $I(t)$ в методе Калмана, как и помеха $n(t)$, характеризуются уравнениями состояния. Рассмотрим методику составления уравнения состояния.

Модель формирования процесса $I(t)$ может быть описана стохастическим линейным дифференциальным уравнением

$$A(p)I(t) = k_1 B(p)c(t), \quad (4.8)$$

где $A(p) = p^n + a_{n-1}p^{n-1} + \dots + a_0$;

$B(p) = b_m p^m + b_{m-1}p^{m-1} + \dots + b_1 p + 1$;

$c(t)$ – белый шум со спектральной плотностью $S_c(0)$; $m \leq n-1$.

Таким образом, процесс $I(t)$ может быть получен на выходе формирующего фильтра, имеющего частотную передаточную функцию

$$y(j\omega) = \frac{k_1 B(j\omega)}{A(j\omega)}$$

при подаче на его вход белого шума $c(t)$.

Частотная передаточная функция формирующего фильтра определяется из условия

$$S_I(\omega) = |y(j\omega)|^2 S_c(0).$$

Переход от процесса $I(t)$ к марковскому процессу $x(t)$ производится путем замены переменных и представления уравнения (4.8) в виде системы дифференциальных уравнений первого порядка (уравнения состояния). При $B(p) = 1$:

$$\begin{aligned} dx_1 / dt &= x_2; \\ dx_2 / dt &= x_3; \\ &\dots\dots\dots \\ dx_{n-1} / dt &= x_n; \\ dx_n / dt &= -a_{n-1}x_n - \dots - a_0 x_1 + k_1 c(t), \end{aligned} \quad (4.9)$$

где $x_1(t) = I(t)$.

Систему уравнений (4.9) можно записать в векторной форме:

$$dX / dt = FX(t) + Hc(t),$$

где $X(t)$ – n -мерный вектор-столбец с компонентами $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$;

F – квадратная матрица размером $n \times n$;

H – матрица-столбец размером $n \times 1$.

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_0 & -a_1 & \dots & \dots & -a_{k-1} \end{bmatrix}; \quad H = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \mathbf{M} \\ k_1 \end{bmatrix}. \quad (4.10)$$

Задающее воздействие $I(t)$ связано с векторным процессом соотношением

$$I(t) = x_1(t) = C_I X(t),$$

где $C_I = [1 \ 0 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0]$ – матрица размером $1 \times n$.

Уравнения являются исходными соотношениями для оптимального синтеза.

Задача синтеза формируется следующим образом.

Векторный процесс $X(t)$, описывающий фильтруемый процесс $I(t)$ в n -мерном пространстве состояний, удовлетворяет векторному дифференциальному уравнению

$$dX/dt = F(t)X(t) + H(t)c(t), \quad (4.11)$$

где $X(t)$ – вектор-функция, содержащая n компонент;

$F(t)$ – матрица размером $n \times n$;

$c(t)$ – вектор формирующих белых шумов, состоящий из l компонент;

$H(t)$ – матрица размером $n \times l$.

Корреляционная матрица шумов $c(t)$ имеет вид

$$R_c(t, \tau) = M\{c(t)c^T(\tau)\} = Q(t)\delta(t-\tau), \quad (4.12)$$

где $Q(t)$ – квадратная матрица размером $l \times l$.

Процесс $I(t)$ связан с $X(t)$ соотношением

$$I(t) = C_I X(t),$$

где C_I – вектор-строка, содержащая n элементов.

Векторный наблюдаемый процесс $r(t)$ на m входах фильтра:

$$r(t) = C(t)X(t) + n(t), \quad (4.13)$$

где $r(t)$ – вектор-функция, содержащая m элементов;

$C(t)$ – матрица размером $m \times n$;

$n(t)$ – m -мерный вектор белых шумов с корреляционной матрицей

$$R(t, q) = R(t)\delta(t-q). \quad (4.14)$$

Здесь $R(t)$ – положительно определенная квадратная матрица размером $m \times m$, характеризующая интенсивность и взаимную корреляцию помех на входах фильтра.

В ряде случаев $r(t)$ – скалярный процесс; $C(t)$ – матрица размером $1 \times n$, т.е. вектор-строка, совпадающая с C_1 . Скалярный процесс $r(t)$ поступает на вход фильтра в момент $t=0$, $x(t)$ и помеха независимы. При этом фильтр должен обеспечивать выделение процесса $I(t)$ с минимальной среднеквадратической ошибкой при $t \geq 0$.

Структура оптимального фильтра описывается векторным дифференциальным уравнением

$$dX_0/dt = F(t)X_0(t) + K_0(t)[r(t) - C(t)X_0(t)], \quad (4.15)$$

где $X_0(t)$ – векторный процесс на выходе оптимального фильтра, воспроизводящий с некоторой ошибкой процесс $x(t)$, $x_0(0) = 0$;

$K_0(t)$ – матрица переменных коэффициентов:

$$K_0(t) = D(t)C^T R^{-1}(t). \quad (4.16)$$

Здесь $R^{-1}(t)$ – матрица, обратная $R(t)$;

$D(t)$ – матрица дисперсий ошибок фильтрации размером $n \times n$:

$$D(t) = M\{[X(t) - X_0(t)][X(t) - X_0(t)]^T\}. \quad (4.17)$$

Дисперсионная матрица ошибок $D(t)$ определяется решением дисперсионного уравнения (уравнение Риккати):

$$dD/dt = F(t)D(t) + D(t)F^T(t) + H(t)Q(t)H^T(t) - D(t)C^T(t)R^{-1}(t)C(t)D(t). \quad (4.18)$$

Уравнение (4.18) является нелинейным. В момент $t=0$ матрица $D(0)$ равна матрице дисперсий компонент фильтруемого процесса $x(t)$ в момент $t=0$, т.е.

$$D(0) = M\{X(0)X^T(0)\}.$$

Совокупность уравнений (4.15), (4.16), (4.18) определяет структуру и характеристики фильтра Калмана (рис. 4.1).

Решение уравнения Риккати, как правило, производится численными методами. Один из возможных способов аналитического решения основан на замене его системой линейных дифференциальных уравнений, эквивалентных линейному матричному дифференциальному уравнению с матрицей размером $2n \times 2n$.

Для определения $K_0(t)$ в установившемся режиме достаточно найти установившееся значение $D(t)$. Если фильтруемый процесс и помехи стационарны, то следует в (4.18) положить $dD/dt = 0$ и решить полученное матричное алгебраическое уравнение.

4.2.2. Примеры

1. Пусть $I(t)$ – стационарный случайный процесс со спектральной плотностью $S_I(\omega) = a^2 / \omega^2$, $x(t)$ – белый шум на выходе дискриминатора со спектральной

плотностью $S_x(0)$. Необходимо определить структуру оптимального фильтра в контуре, полагая, что S_∂ – крутизна дискриминационной характеристики.

Решение. Найдем уравнение состояния для задающего воздействия. С этой целью определим передаточную функцию формирующего фильтра исходя из условия

$$S_I(w) = |y(jw)|^2 S_c(0).$$

Таким образом,

$$|y(jw)|^2 = \frac{S_I(w)}{S_c(0)} = \frac{1}{S_c(0)} \frac{a^2}{w^2}.$$

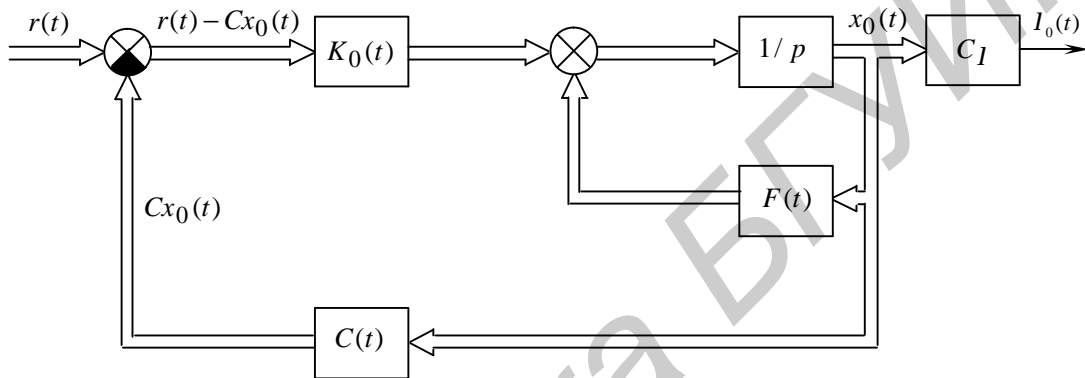


Рис. 4.1

Тогда

$$y(jw) = \sqrt{\frac{a^2}{S_c(0)}} \frac{1}{jw} = \frac{k_u}{jw}; \quad I(t) = y(jw) \cdot c(t).$$

Или $dI/dt = k_u \cdot c(t)$,

где $k_u = \sqrt{\frac{a^2}{S_c(0)}}$.

Уравнение состояния

$$dx/dt = k_0 \cdot c(t).$$

Пересчитав шум $x(t)$ ко входу дискриминатора, получим

$$r(t) = I(t) + x(t)/S_d = I(t) + n(t),$$

где $n(t)$ – стационарный белый шум со спектральной плотностью $S_x(0)/S_d^2$ и функцией корреляции

$$R(t) = S_x(0) \cdot d(t)/S_d^2.$$

Как следует из выражений (4.11) – (4.14), матрицы F, H, C, Q, R являются постоянными скалярными и равны:

$$F = 0; C = 1; H = k_u; Q = S_c(0); R = S_x(0) / S_d^2.$$

Таким образом, уравнение, определяющее структуру оптимального фильтра, имеет вид

$$dx_0 / dt = k_0(t)[r(t) - x_0(t)].$$

Для отыскания оптимального фильтра в контуре следящей системы введем звено с коэффициентом передачи S_∂ и заменим шум $n(t)$ эквивалентным шумом $x(t)$ на входе дискриминатора (рис. 4.2). Искомый фильтр имеет передаточную функцию

$$y'(jw) = \frac{k_0(t)}{S_d} \frac{k_0}{jw},$$

где $k_0(t) = \frac{DS_d^2}{S_x(0)}$.

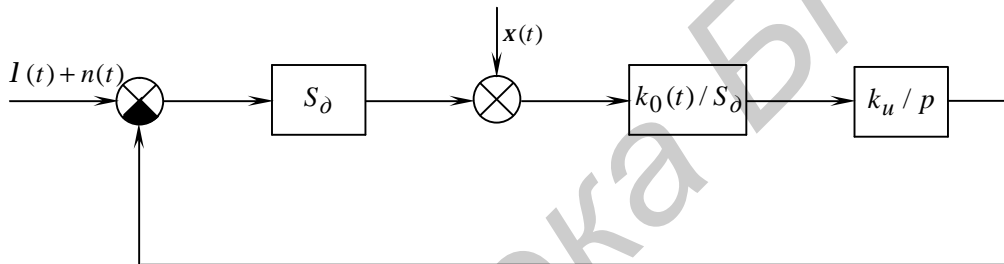


Рис. 4.2

Дисперсия ошибок фильтрации может быть определена по формуле

$$dD / dt = k_u^2 - D^2(t) S_d^2 / S_x(0).$$

В стационарном режиме $dD / dt = 0$, следовательно,

$$D = \sqrt{k_u^2 \frac{S_x(0)}{S_d^2}}; \quad k_0 = \sqrt{\frac{k_u^2 S_d^2}{S_x(0)}}.$$

Таким образом, передаточная функция фильтра в контуре равна

$$y'(jw) = \sqrt{\frac{a^2}{S_x(0)}} \cdot \frac{1}{jw} \quad \text{при } S_c(0) = 1.$$

Полученный результат совпадает с результатом примера 1 в п. 4.1.2.

2. Определить структуру оптимального фильтра, полагая, что стационарный случайный процесс со спектральной плотностью $S_1(w) = a^2 / w^4$. Наблюдаемый процесс

$$r(t) = I(t) + n(t),$$

где $n(t)$ – белый шум со спектральной плотностью $S_n(0)$.

Решение. Определим частотную передаточную функцию формирующего фильтра $Y(j\omega)$ из условия $S_I(\omega) = |Y(j\omega)|^2 S_c(0)$.

Получим

$$Y(j\omega) = k_u / (j\omega)^2,$$

где $k_u = \sqrt{\frac{a^2}{S_c(0)}}$;

$S_c(0)$ – спектральная плотность формирующего белого шума $c(t)$, поступающего на вход фильтра.

Поскольку $I(t) = Y(j\omega)c(t)$, то $d^2 I(t) / dt^2 = k_u c(t)$. (4.19)

Обозначим

$$I(t) = x_1(t).$$

Представим уравнение (4.19) в виде системы:

$$\left. \begin{aligned} dx_1 / dt &= x_2(t); \\ dx_2 / dt &= k_u c(t). \end{aligned} \right\}$$

Или в матричной форме $\frac{dX}{dt} = FX(t) + H c(t)$.

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad H = \begin{bmatrix} 0 \\ k_4 \end{bmatrix},$$

где $X(t)$ – вектор-столбец с компонентами $[x_1, x_2]$.

Векторный наблюдаемый процесс имеет вид

$$r(t) = C(t)X(t) + n(t),$$

где $C = [1, 0]$ – матрица-строка.

Матрицы Q и R являются скалярными:

$$R = S_n(0); \quad Q = S_c(0).$$

Определим матрицы коэффициентов $K_0(t)$ в уравнении $K_0(t) = D(t)C^T R^{-1}$:

$$K_0(t) = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot R^{-1} = \begin{bmatrix} D_{11} \\ D_{21} \end{bmatrix} \cdot R^{-1} = \begin{bmatrix} k_{10}(t) \\ k_{20}(t) \end{bmatrix}.$$

В соответствии с уравнением (4.15) структурная схема оптимального фильтра определяется выражением

$$\frac{dX_0}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{10}(t) \\ k_{20}(t) \end{bmatrix} r(t) - \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{bmatrix}.$$

Или

$$\begin{aligned} dx_{10} / dt &= x_{20} + k_{10}(t)[r(t) - x_{10}(t)]; \\ dx_{20} / dt &= k_{20}(t)[r(t) - x_{10}(t)]. \end{aligned} \quad (4.20)$$

Уравнениям (4.20) соответствует схема, изображенная на рис. 4.3.

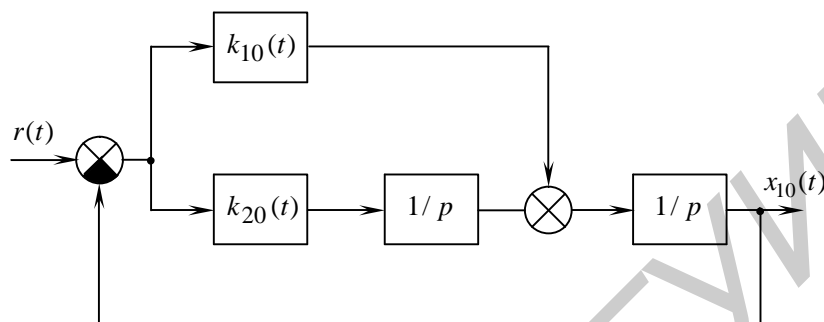


Рис. 4.3

Для определения коэффициентов k_{10} и k_{20} необходимо найти величины D_{11} и D_{21} . Воспользуемся выражением (4.18), полагая, что $D(t) = const, dD/dt = 0$. Определим слагаемые уравнения (4.18):

$$FD = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{21} & D_{22} \\ 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$DF^T = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{12} & 0 \\ D_{22} & 0 \end{bmatrix};$$

$$HQH^T = \begin{bmatrix} 0 \\ k_u \end{bmatrix} \cdot [Q] \cdot [0 \quad k_u] = Q \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & k_u^2 \end{bmatrix};$$

$$DC^T R^{-1} CD = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot [R^{-1}] \cdot [1 \quad 0] \cdot \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11}^2 & D_{11}D_{12} \\ D_{21}D_{11} & D_{21}D_{12} \end{bmatrix} \cdot [R^{-1}].$$

Просуммировав слагаемые, получим систему:

$$2D_{21} - D_{11}^2 / S_n(0) = 0;$$

$$D_{22} - D_{21} \cdot D_{11} / S_n(0) = 0;$$

$$-D_{21}^2 / S_n(0) + k_u^2 S_c(0) = 0.$$

Поскольку матрица $D(t)$ симметрическая, то $D_{12} = D_{21}$.

Определим величины D_{21} и D_{11} .

$$D_{21} = \sqrt{k_u^2 S_n(0) S_c(0)}; \quad D_{11} = \sqrt[4]{4k_u^2 S_n^3(0) S_c(0)}.$$

4.2.3. Задачи

1. Найти структуру оптимального фильтра в контуре следящей системы, полагая, что крутизна дискриминатора S_d , шум на выходе дискриминатора $x(t)$ белый со спектральной плотностью $S_x(0)$ и

а) $S_I(\omega) = a^2 / \omega^2$;

б) $S_I(\omega) = a^2 / \omega^2(\omega^2 + b^2)$.

2. Решить задачу 1, приняв, что формирование задающего воздействия $I(t)$ может быть представлено как результат воздействия белого шума $c(t)$ на формирующий фильтр с коэффициентом передачи:

а) $Y(p) = \frac{k}{(1 + pT_1)(1 + pT_2)}$;

б) $Y(p) = \frac{k_u}{p^2(1 + pT)}$.

3. Решить задачу 1, полагая, что задающее воздействие описывается степенным полиномом

$$I(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2.$$

Коэффициенты a_0, a_1, a_2 случайны, независимы и имеют дисперсии s_0^2, s_1^2, s_2^2 соответственно.

4. Найдите структуру оптимального фильтра, полагая, что задающее воздействие синтезируемой системы $I(t)$ — стационарный случайный процесс со спектральной плотностью

$$S_I(\omega) = \frac{S(0)}{1 + T^2 \omega^2}.$$

Задающее воздействие поступает на вход системы в аддитивной смеси с помехой $n(t)$, представляющей собой белый шум со спектральной плотностью $S_n(\omega) = S_n(0)$ и корреляционной функцией

$$R_n(t) = S_n(0) \cdot d(t).$$

Определить дисперсию ошибки в установившемся режиме.

5. Определить структуру оптимального фильтра, если фильтруемый процесс описывается уравнением

$$dI / dt = a_1(t)I(t) + c(t).$$

ПРИЛОЖЕНИЕ

Нормированный интеграл плотности вероятности
нормального закона распределения

Значения функции $\Phi(U) = (1/\sqrt{2\pi}) \int_0^U \exp(-z^2/2) dz$.

Таблица

U	$\Phi(U)$	U	$\Phi(U)$	U	$\Phi(U)$	U	$\Phi(U)$
0,00	0,000	0,76	0,276	1,52	0,436	2,56	0,495
0,02	0,008	0,78	0,282	1,54	0,438	2,60	0,495
0,04	0,016	0,80	0,288	1,56	0,441	2,64	0,496
0,06	0,024	0,82	0,294	1,58	0,443	2,68	0,496
0,08	0,032	0,84	0,300	1,60	0,445	2,72	0,497
0,10	0,040	0,86	0,305	1,62	0,447	2,76	0,497
0,12	0,048	0,88	0,311	1,64	0,450	2,80	0,497
0,14	0,056	0,90	0,316	1,66	0,452	2,84	0,498
0,16	0,064	0,92	0,321	1,68	0,454	2,88	0,498
0,18	0,071	0,94	0,326	1,70	0,455	2,92	0,498
0,20	0,079	0,96	0,332	1,72	0,457	2,96	0,499
0,22	0,087	0,98	0,337	1,74	0,459	3,00	0,499
0,24	0,095	1,00	0,341	1,76	0,461	3,20	0,4993
0,26	0,103	1,02	0,346	1,78	0,463	3,40	0,4997
0,28	0,110	1,04	0,351	1,80	0,464	3,60	0,49984
0,30	0,118	1,06	0,355	1,82	0,466	3,80	0,49993
0,32	0,126	1,08	0,360	1,84	0,467	4,00	0,49997
0,34	0,133	1,10	0,364	1,86	0,469	4,50	0,499997
0,36	0,141	1,12	0,369	1,88	0,470	5,00	0,49999997
0,38	0,148	1,14	0,373	1,90	0,471		
0,40	0,155	1,16	0,377	1,92	0,473		
0,42	0,163	1,18	0,381	1,94	0,474		
0,44	0,170	1,20	0,385	1,96	0,475		
0,46	0,177	1,22	0,389	1,98	0,476		
0,48	0,184	1,24	0,393	2,00	0,477		
0,50	0,192	1,26	0,396	2,04	0,479		
0,52	0,199	1,28	0,400	2,08	0,481		
0,54	0,205	1,30	0,403	2,12	0,483		
0,56	0,212	1,32	0,407	2,16	0,485		
0,58	0,219	1,34	0,410	2,20	0,486		
0,60	0,226	1,36	0,413	2,24	0,488		
0,62	0,232	1,38	0,416	2,28	0,489		
0,64	0,239	1,40	0,419	2,32	0,490		
0,66	0,245	1,42	0,422	2,36	0,491		
0,68	0,252	1,44	0,425	2,40	0,492		
0,70	0,258	1,46	0,428	2,44	0,493		

ЛИТЕРАТУРА

1. Радиоавтоматика / В. А. Бесекерский [и др.]; под ред. В. А. Бесекерского. – М. : Высш. шк., 1985. – 271 с.
2. Артемьев, В. М. Локационные системы роботов : справ. пособие / В. М. Артемьев. – Минск : Выш. шк., 1988. – 222 с.
3. Сборник задач по теории автоматического регулирования и управления / под ред. В. А. Бесекерского. – М. : Наука, 1978. – 512 с.
4. Казаков, И. Е. Статистическая динамика нелинейных автоматических систем / И. Е. Казаков, Б. Г. Доступов. – М. : Физматгиз, 1962. – 351 с.
5. Первачев, С. В. Радиоавтоматика / С. В. Первачев. – М. : Радио и связь, 1982. – 296 с.
6. Ганкевич, С. А. Методические указания к практическим занятиям по дисциплине «Радиоавтоматика» для студентов радиотехнических специальностей : В 2 ч. Ч. 2 / С. А. Ганкевич, С. Б. Саломатин. – Минск : БГУИР, 1994. – 80 с.
7. Коновалов, Г. Ф. Радиоавтоматика : учебник для вузов по спец. «Радиотехника» / Г. Ф. Коновалов. – М. : ИПРЖР, 2003. – 288 с.
8. Гитис, З. И. Техническая кибернетика : учебник для радиотех. вузов / З. И. Гитис, Г. А. Данилович, В. И. Самойленко. – М. : Сов. радио, 1969. – 488 с.
9. Горяинов, В. Т. Примеры и задачи по статистической радиотехнике / В. Т. Горяинов, А. Г. Журавлев, В. И. Тихонов. – М. : Сов. радио, 1977. – 600 с.

Учебное издание

Ганкевич Сергей Антонович

РАДИОАВТОМАТИКА

Практикум

для студентов специальностей 1-39 01 02 «Радиоэлектронные системы»,
1-39 01 04 «Радиоэлектронная защита информации »
дневной формы обучения

В 2-х частях

Часть 2

**Нелинейные и дискретные системы радиоавтоматики.
Проектирование систем**

Редактор Н. В. Гриневич
Корректор Е. Н. Батурчик

Подписано в печать 14.01.2010.
Гарнитура «Таймс».
Уч.-изд. л. 4,3.

Формат 60x84 1/16.
Печать ризографическая.
Тираж 150 экз.

Бумага офсетная.
Усл. печ. л. 4,65.
Заказ 271.

Издатель и полиграфическое исполнение: Учреждение образования
«Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники»
ЛИ №02330/0494371 от 16.03.2009. ЛП №02330/0494175 от 03.04.2009.
220013, Минск, П. Бровки, 6