Министерство образования Республики Беларусь
Учреждение образования
«Белорусский государственный университет
информатики и радиоэлектроники»

Факультет компьютерных систем и сетей

Кафедра высшей математики

МАТЕМАТИКА.
ПРИМЕНЕНИЕ ПАКЕТА MATHEMATICA

В двух частях

Часть 2

ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ. ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ И НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ. РЯДЫ. ОПЕРАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

Рекомендовано УМО по образованию в области информатики
и радиоэлектроники в качестве пособия
для специальностей I ступени высшего образования,
закрепленных за УМО

Минск БГУИР 2021

УДК 517:004.42(076)
ББК 22.1я73+22.19я73
М34

А в т о р ы:
Л. А. Фомичёва, Н. В. Спичекова, О. Н. Малышева, О. А. Вагнер

Р е ц е н з е н т ы:

кафедра математической кибернетики
Белорусского государственного университета
(протокол №6 от 30.01.2020);

профессор кафедры информационных систем
и автоматизации производства учреждения образования
«Витебский государственный технологический университет»
доктор физико-математических наук, профессор А. А. Корниенко

М34 **Математика.** Применение пакета Mathematica. В 2 ч. Ч. 2 : Дифференцирование функций нескольких переменных. Интегральное исчисление функций одной и нескольких переменных. Дифференциальные уравнения. Ряды. Операционное исчисление : пособие / Л. А. Фомичёва [и др.]. – Минск : БГУИР, 2021. – 147 с. : ил.
ISBN 978-985-543-597-7 (ч. 2).

Материал сопровождается подробно разобранными примерами. В нем рассматриваются основные принципы работы в пакете Mathematica и вопросы оформления расчетов с использованием стилей пакета. В пособие включены задания для самостоятельной работы с целью обучения студентов методам решения задач на базе пакета Mathematica.

Предназначено для студентов первого и второго курсов всех специальностей и форм обучения БГУИР при изучении дисциплины «Математика», а также всех желающих научиться использовать пакет Mathematica при решении математических задач. Пособие также может использоваться для проведения практических занятий по дисциплине «Математика».

Во вторую часть пособия вошли следующие разделы: «Интегральное исчисление функций одной переменной», «Функции нескольких переменных», «Интегральное исчисление функций нескольких переменных», «Дифференциальные уравнения», «Ряды», «Элементы теории поля», «Операционное исчисление».

Часть 1 издана в БГУИР в 2019 году.

УДК 517:004.42(076)
ББК 22.1я73+22.19я73

ISBN 978-985-543-597-7 (ч. 2)
ISBN 978-985-543-468-0

Содержание

ВВЕДЕНИЕ

Развитие фундаментальных и прикладных наук не обходится без применения современных достижений компьютерных технологий. В настоящее время существует достаточно много различных программных средств, предназначенных для изучения разделов высшей математики: справочники и компьютерные курсы; электронные учебники, оснащенные стереоконструкторами, позволяющими строить пространственные геометрические конструкции и рассматривать их в движении; системы символьных вычислений (**MatLab**, **Maple**, **MathCad**, **Mathematica** и др.).

Данное пособие по математике составлено для студентов всех специальностей и форм обучения. Последовательно, в соответствии с учебной программой по дисциплине «Математика», предлагается на практике освоить необходимые теоретические понятия дисциплины, научиться решать задачи и обеспечивать проверку выполнения практических заданий с использованием современной системы **Mathematica**.

Цель предлагаемого пособия – помочь студентам самостоятельно овладеть основными навыками работы в системе **Mathematica**, научиться решать задачи по разделам «Интегральное исчисление функций одной переменной», «Функции нескольких переменных», «Интегральное исчисление функций нескольких переменной», «Дифференциальные уравнения», «Ряды», «Элементы теории поля», «Операционное исчисление» с использованием системы **Mathematica**.

Пособие построено так, чтобы оно было понятно студентам первого и второго курсов дневной, заочной и дистанционной форм получения образования и чтобы они могли усвоить основы работы в системе **Mathematica**, не прибегая к другим учебникам. Вначале рассматривается решение примеров «вручную», а затем с помощью системы символьной математики **Mathematica**. Это помогает и освоить излагаемый метод, и понять, как избежать трудоемкой работы при решении конкретной задачи. Для закрепления изученного материала приведены задачи для самостоятельной работы. Основные операции и функции системы **Mathematica** содержатся в приложении пособия. Особенностью пособия является то, что предлагаемые задания ориентированы на использование возможностей системы **Mathematica 11.0**. В более ранних версиях часть приведенных примеров может не работать.

Применение системы **Mathematica** систематизирует математические знания студентов, повышает наглядность математических закономерностей и производительность при выполнении сложных математических преобразований.

Система **Mathematica** обеспечивает не только возможности выполнения сложных численных расчетов с выводом их результатов в графическом виде, но и проведение особо трудоемких вычислений. Она позволяет быстро и эффективно проводить вычисления, решать многие задачи линейной алгебры, математического анализа, задачи теории чисел и статистики, дискретной математики. Использование системы **Mathematica** позволит сделать обучение студентов геометрическим разделам дисциплины более наглядным, а также ознакомит студентов с основами геометрического компьютерного моделирования. **Mathematica** эффективно выполняет как числовые, так и символьные вычисления, имеет развитую двумерную и трехмерную графику, а также встроенный язык программирования высокого уровня. Наличие языка программирования в системе **Mathematica** позволяет составлять программы для широкого класса задач, в которых можно свободно варьировать исходные данные, экспериментировать с ними, подтверждая или опровергая выдвинутые гипотезы.

1. ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

1.1. Неопределенный интеграл

Пример 1.1.1

Вычислить неопределенный интеграл $\int \operatorname{tg}^2 x dx$.

Решение

Неопределенным интегралом от функции $f(x)$ называется множество всех первообразных функций $F(x)+C$ для $f(x)$: $\int f(x)dx = F(x)+C$, где $F'(x)=f(x)$.

Воспользовавшись тригонометрическим тождеством $1+\operatorname{tg}^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$ и свойством аддитивности, вычислим интеграл:

$$\int \operatorname{tg}^2 x dx = \int\left(\frac{1}{\cos^2 x}-1\right)dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} - \int dx = \operatorname{tg} x - x + C.$$

Вычисления в Mathematica

В системе **Mathematica** вычисление неопределенного интеграла осуществляется с помощью функции **Integrate[f,x]**, где **f** – некоторая подынтегральная функция, **x** – переменная интегрирования. Данная функция может возвращать результат как в виде композиции элементарных функций, так и в виде особых функций. **Integrate[f,x]** может быть введено как $\int f dx$ (знак интеграла вводится последовательно нажатием клавиши **ESC**, набором символов Int и завершается нажатием клавиши **ESC**; дифференциал аргумента dx вводится последовательно нажатием клавиши **ESC**, набором символов dx и завершается нажатием клавиши **ESC**). Пример решения задачи приведен на рис. 1.1.

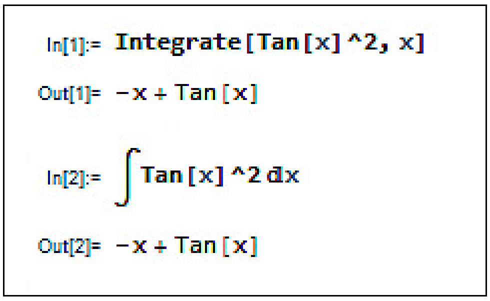


Рис. 1.1

Как можно заметить, в системе **Mathematica** произвольная константа интегрирования C не прибавляется.

Пример 1.1.2

Вычислить неопределенный интеграл от рациональной дроби $\int \frac{1+x^2}{2x(1+x)^2}dx$.

Решение

Используя представление рациональной дроби в виде суммы дробей, вычислим интеграл

$$\int \frac{1+x^2}{2x(1+x)^2}dx = \int \frac{(1+x)^2-2x}{2x(1+x)^2}dx = \int \frac{(1+x)^2}{2x(1+x)^2}dx - \int \frac{2x}{2x(1+x)^2}dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int dx - \int \frac{d(x+1)}{(x+1)^2} = \frac{1}{2}x - \frac{1}{x+1} + C.$$

Вычисления в Mathematica

Решение примера в **Mathematica** приведено на рис. 1.2.

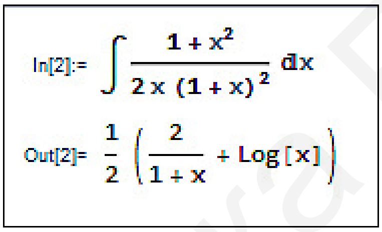


Рис. 1.2

Набор подынтегральной функции в **Mathematica** удобно производить, используя панель математических символов **Basic Math Assistant**, которую можно открыть на панели инструментов **Pallets**.

Пример 1.1.3

Вычислить неопределенный интеграл от рациональной функции $\int \frac{dx}{4x-x^2}$.

Решение

Выделив полный квадрат в квадратном трехчлене $4x-x^2 = -(x^2-4x) = -(x^2-4x+4)+4 = 4-(x-2)^2$, найдем интеграл:

$$\int \frac{dx}{4x-x^2} = \int \frac{d(x-2)}{4-(x-2)^2} = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{2+(x-2)}{2-(x-2)}\right| + C = \frac{1}{4}\ln|x| - \frac{1}{4}\ln|4-x| + C.$$

Вычисления в Mathematica

Решение примера 1.1.3 приведено на рис. 1.3.

```
In[1]:= ∫ 1/(4 x - x^2) dx

Out[1]= -1/4 Log[4 - x] + Log[x]/4
```

Рис. 1.3

Пример 1.1.4

Вычислить неопределенный интеграл $\int\left(7^{1-3x}-\dfrac{5}{\sin^2\dfrac{x}{2}}\right)dx$.

Решение

Воспользовавшись свойством инвариантности формы интеграла $\int f(U)dU=F(U)+C$, где $U=U(x)$ – функция независимой переменной x, и преобразованием дифференциала $dx=\dfrac{1}{a}d(ax+b)$, где $a\neq 0$, b – постоянные, найдем интеграл:

$$\int\left(7^{1-3x}-\frac{5}{\sin^2\frac{x}{2}}\right)dx=\int 7^{1-3x}dx-5\int\frac{dx}{\sin^2\frac{x}{2}}=-\frac{1}{3}\int 7^{1-3x}d(1-3x)-10\int\frac{d\left(\frac{x}{2}\right)}{\sin^2\frac{x}{2}}=$$

$$=-\frac{1}{3}\int\frac{7^{1-3x}}{\ln 7}+10\,\mathrm{ctg}\frac{x}{2}+C.$$

Вычисления в Mathematica

Решение примера 1.1.4 приведено на рис. 1.4.

```
In[18]:= ∫ 7^(1-3 x) dx - ∫ 5/Sin[x/2]^2 dx

Out[18]= 10 Cot[x/2] - 7^(1-3 x)/(3 Log[7])
```

Рис. 1.4

Пример 1.1.5

Вычислить неопределенный интеграл $\int\dfrac{\sqrt{1+x^2}-3x+\sqrt{1+x^2}\,\mathrm{arctg}\,x}{\left(1+x^2\right)\sqrt{1+x^2}}dx$.

Решение

Возьмем данный интеграл в два этапа: представим интеграл в виде суммы трех интегралов (почленно разделив числитель на знаменатель) и сведем каждый из них к табличному:

$$I=\int\frac{\sqrt{1+x^2}-3x+\sqrt{1+x^2}\operatorname{arctg}x}{\left(1+x^2\right)\sqrt{1+x^2}}dx=I_1-I_2+I_3,$$

где $I_1=\int\frac{\sqrt{1+x^2}}{\left(1+x^2\right)\sqrt{1+x^2}}dx=\int\frac{dx}{1+x^2}=\operatorname{arctg}x+C_1$;

$$I_2=\int\frac{3x}{\left(1+x^2\right)^{\frac{3}{2}}}dx=\frac{3}{2}\int\left(1+x^2\right)^{-\frac{3}{2}}d\left(1+x^2\right)=-\frac{3}{\sqrt{1+x^2}}+C_2;$$

$$I_3=\int\frac{\sqrt{1+x^2}\operatorname{arctg}x}{\left(1+x^2\right)\sqrt{1+x^2}}dx=\frac{3}{2}\int\operatorname{arctg}x\,d(\operatorname{arctg}x)=\frac{\operatorname{arctg}^2x}{2}+C_3.$$

Тогда исходный интеграл $I=\operatorname{arctg}x+\frac{3}{\sqrt{1+x^2}}+\frac{\operatorname{arctg}^2x}{2}+C.$

Вычисления в Mathematica

Решение примера 1.1.5 приведено на рис. 1.5.

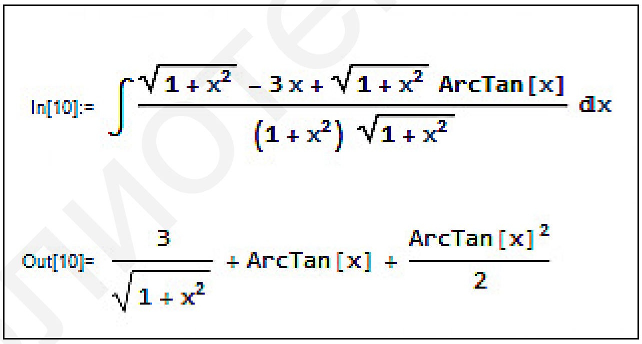


Рис. 1.5

Пример 1.1.6

Вычислить неопределенный интеграл $\int\sqrt{16-x^2}dx$.

Решение

Для решения задачи воспользуемся методом интегрирования подстановкой (заменой переменной). Формула интегрирования подстановкой имеет вид $\int f(x)dx=\int f\left(\varphi(t)\right)\varphi'(t)dt$, где $x=\varphi(t)$ – функция, имеющая непрерывную производную. Данную формулу можно использовать также справа налево.

Для нахождения данного интеграла используем тригонометрическую подстановку $x = 4\sin t$, тогда $dx = d\left(4\sin t\right) = \left(4\sin t\right)' dt = 4\cos t dt$:

$$\int\sqrt{16-x^2}dx = \int\sqrt{16-\left(4\sin t\right)^2}\cdot 4\cos t dt = 16\int\cos^2 t dt = 8\int\left(1+\cos 2t\right)dt =$$
$$= 8\int dt + 4\int\cos 2t\, d\left(2t\right) = 8t - 4\sin 2t + C.$$

Учитывая, что $t = \arcsin\frac{x}{4}$, будем иметь

$$\int\sqrt{16-x^2}dx = 8\arcsin\frac{x}{4} - 4\sin\left(2\arcsin\frac{x}{4}\right) + C.$$

Тогда, упростив $\sin\left(2\arcsin\frac{x}{4}\right) = 2\sin\left(\arcsin\frac{x}{4}\right)\cos\left(\arcsin\frac{x}{4}\right) =$ $= 2\frac{x}{4}\sqrt{1-\left(\frac{x}{4}\right)^2} = \frac{1}{8}x\sqrt{16-x^2}$, окончательно будем иметь $\int\sqrt{16-x^2}dx = 8\arcsin\frac{x}{4} -$ $-4\sin\left(2\arcsin\frac{x}{4}\right) + C = 8\arcsin\frac{x}{4} - \frac{1}{2}x\sqrt{16-x^2} + C$.

Вычисления в Mathematica

В программе **Mathematica** получаем ответ сразу, без указания подстановок (рис. 1.6).

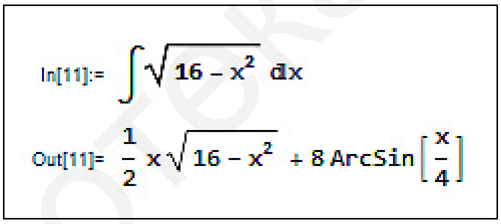


Рис. 1.6

Пример 1.1.7

Вычислить неопределенный интеграл $\int\sqrt{x+1}\ln 5x dx$.

Решение

Возьмем данный интеграл методом интегрирования по частям. Формула интегрирования по частям $\int UdV = UV = \int VdU$, где $U = U(x)$, $V = V(x)$ – функции, имеющие непрерывные производные.

Выберем части следующим образом: пусть $U = \ln 5x$, тогда $dU = \frac{1}{x}dx$. В свою очередь, $dV = \sqrt{x+1}\,dx$, откуда $V = \int\sqrt{x+1}\,dx = \frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}$. Далее, используя формулу интегрирования по частям, будем иметь

$$\int \sqrt{x+1}\ln 5x dx = \frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}\ln 5x - \frac{2}{3}\int (x+1)^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{1}{x} dx.$$

Для вычисления интеграла $\int \frac{(x+1)^{\frac{3}{2}}}{x} dx$ от иррациональной функции используем рационализирующую подстановку:

$$t = \sqrt{x+1} \;\Rightarrow\; x = t^2 - 1 \;\Rightarrow\; dx = 2tdt.$$

Тогда $\int \frac{(x+1)^{\frac{3}{2}}}{x} dx = 2\int \frac{t^4}{t^2-1} dt$.

Рациональная дробь $R(t) = \frac{t^4}{t^2-1}$ является неправильной, поэтому выделим целую часть, разделив многочлен из числителя на многочлен из знаменателя с остатком:

$$R(t) = \frac{t^4}{t^2-1} = \frac{t^4-1+1}{t^2-1} = t^2 + 1 + \frac{1}{t^2-1},$$

после чего разложим правильную дробь $\frac{1}{(t-1)(t+1)}$ в сумму простых:

$$\frac{1}{(t-1)(t+1)} = \frac{A}{t-1} + \frac{B}{t+1}.$$

На основании теоремы о разложении правильной дроби в сумму простых

$$\frac{1}{(t-1)(t+1)} = \frac{A}{t-1} + \frac{B}{t+1} = \frac{A(t+1) + B(t-1)}{(t-1)(t+1)}.$$

Неопределенные коэффициенты A, B найдем из равенства $1 = A(t+1) + B(t-1)$ методом частных значений, подставляя в данное равенство некоторые значения t. Так, при

$t = 1$: $1 = 2A \Rightarrow A = \frac{1}{2}$;

$t = -1$: $1 = -2B \Rightarrow B = -\frac{1}{2}$.

Таким образом,

$R(t) = t^2 + 1 + \frac{1}{2(t-1)} - \frac{1}{2(t+1)}$, тогда значение исходного интеграла будет равно

$$\int \frac{(x+1)^{\frac{3}{2}}}{x} dx = 2\int \frac{t^4}{t^2-1} dt = 2\int \left(t^2 + 1 + \frac{1}{2(t-1)} - \frac{1}{2(t+1)} \right) dt =$$

$$= 2\int t^2 dt + 2\int dt + \int \frac{d(t-1)}{t-1} - \int \frac{d(t+1)}{t+1} = \frac{2t^3}{3} + 2t + \ln|t-1| + \ln|t+1| + C,$$

где $t=\sqrt{x+1}$.

Окончательно имеем

$$\int\sqrt{x+1}\ln 5x dx=\frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}\ln 5x-\frac{4}{9}\left(\sqrt{x+1}\right)^{3}-\frac{4}{3}\sqrt{x+1}-$$

$$-\frac{2}{3}\ln\left|\sqrt{x+1}-1\right|+\frac{2}{3}\ln\left|\sqrt{x+1}+1\right|+C.$$

Проверим правильность интегрирования с помощью дифференцирования:

$$\left(\frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}\ln 5x-\frac{4}{9}\left(\sqrt{x+1}\right)^{\frac{3}{2}}-\frac{4}{3}\sqrt{x+1}-\frac{2}{3}\ln\left|\sqrt{x+1}-1\right|+\frac{2}{3}\ln\left|\sqrt{x+1}+1\right|+C\right)'=$$

$$=\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{2}(x+1)^{\frac{1}{2}}\ln 5x+\frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}\cdot\frac{1}{x}-\frac{4}{9}\cdot\frac{3}{2}(x+1)^{\frac{1}{2}}-\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x+1}}-$$

$$-\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x+1}\left(\sqrt{x+1}-1\right)}+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x+1}\left(\sqrt{x+1}+1\right)}=$$

$$=\sqrt{x+1}\ln 5x+\frac{2(x+1)\sqrt{x+1}}{3x}-\frac{2}{3}\sqrt{x+1}-\frac{2}{3\sqrt{x+1}}+$$

$$+\frac{1}{3\sqrt{x+1}}\cdot\frac{-\sqrt{x+1}-1+\sqrt{x+1}-1}{\left(\sqrt{x+1}-1\right)\left(\sqrt{x+1}+1\right)}=$$

$$=\sqrt{x+1}\ln 5x+\frac{2\sqrt{x+1}}{3x}-\frac{2}{3\sqrt{x+1}}-\frac{2}{3x\sqrt{x+1}}=$$

$$=\sqrt{x+1}\ln 5x+\frac{2\left(\sqrt{x+1}\right)^{2}-2x-2}{3x\sqrt{x+1}}=\sqrt{x+1}\ln 5x.$$

В результате мы получили подынтегральную функцию, значит, интегрирование выполнено верно.

В примере 1.1.7 наглядно продемонстрировано, что в некоторых случаях интегрирование удобно проводить, комбинируя различные методы.

Вычисления в Mathematica

Решение примера 1.1.7 приведено на рис. 1.7.

```
In[17]:= ∫√(x + 1) Log[5 x] dx

Out[17]= 2/9 (6 ArcTanh[√(1 + x)] + √(1 + x) (-2 (4 + x) + 3 (1 + x) Log[5 x]))
```

Рис. 1.7

Заметим, что результат, полученный в системе **Mathematica**, отличен от полученного нами ранее. Однако тождественность результатов очевидна, поскольку $\operatorname{arth}x = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}, |x| < 1$.

Пример 1.1.8

Вычислить неопределенный интеграл $\int \frac{\sqrt[4]{1+\sqrt[5]{x}}}{\sqrt[15]{x^{19}}}dx$.

Решение

Данный интеграл $\int x^{-\frac{19}{15}}\left(x^{\frac{1}{5}}+1\right)^{\frac{1}{4}}dx$ является дифференциальным биномом. Как было показано П. Л. Чебышевым, интегралы типа $\int x^m\left(a+bx^n\right)^p dx$, где $a,b \in R,\ m,n,p \in Q$, берутся лишь в случае, когда хотя бы одно из чисел $p, \frac{m+1}{n}$ или $\frac{m+1}{n}+p$ является целым.

В данной задаче:

1) $p = \frac{1}{4}$ – не является целым числом;

2) $\frac{m+1}{n} = \frac{-\frac{19}{15}+1}{\frac{1}{5}} = -\frac{4}{3}$ – не является целым числом;

3) $\frac{m+1}{n} + p = -\frac{4}{3}+\frac{1}{4} = -\frac{13}{12}$ – не является целым числом.

Следовательно, данный интеграл не выражается через элементарные функции («не берется»).

Особые интегралы, которые не могут быть выражены через элементарные функции, являются специальными математическими функциями и находятся в справочной базе данных **Mathematica**. К ним относятся:

– **SinIntegral**$[x]$ – интегральный косинус $Si(x)$;

– **CoshIntegral**$[x]$ – интегральный гиперболический косинус;

– **SinhIntegral**$[x]$ – интегральный гиперболический синус;

– **ExpIntegral**$[x]$ – интегральная показательная функция $Ei(x)$;

– **CosIntegral**$[x]$ – интегральный косинус $C_i(x)$.

Для таких функций в **Mathematica** можно получить численные значения, построить график.

Вычисления в Mathematica

Аналитическое решение примера 1.1.8 приведено на рис. 1.8.

In[1]:= $$\int \frac{\sqrt[4]{1+\sqrt[5]{x}}}{\sqrt[15]{x^{19}}}\,dx$$

Out[1]= $$-\frac{1}{128\left(x^{19}\right)^{1/15}}\,15\left(8\left(1+x^{1/5}\right)^{1/4}\left(4+3x^{1/5}\right)x+3x^{7/5}\,\mathrm{Hypergeometric2F1}\left[\frac{2}{3},\frac{3}{4},\frac{5}{3},-x^{1/5}\right]\right)$$

Рис. 1.8

Как видим, первообразная не представима через элементарные функции. Зададим построение первообразной данного интеграла с помощью функции **Plot** (рис. 1.9).

In[3]:=

$$\mathrm{Plot}\left[-\frac{1}{128\left(x^{19}\right)^{1/15}}\,15\left(8\left(1+x^{1/5}\right)^{1/4}\left(4+3x^{1/5}\right)x+3x^{7/5}\,\mathrm{Hypergeometric2F1}\left[\frac{2}{3},\frac{3}{4},\frac{5}{3},-x^{1/5}\right]\right),\ \{x,-8,8\}\right]$$

Рис. 1.9

График первообразной изображен на рис. 1.10.

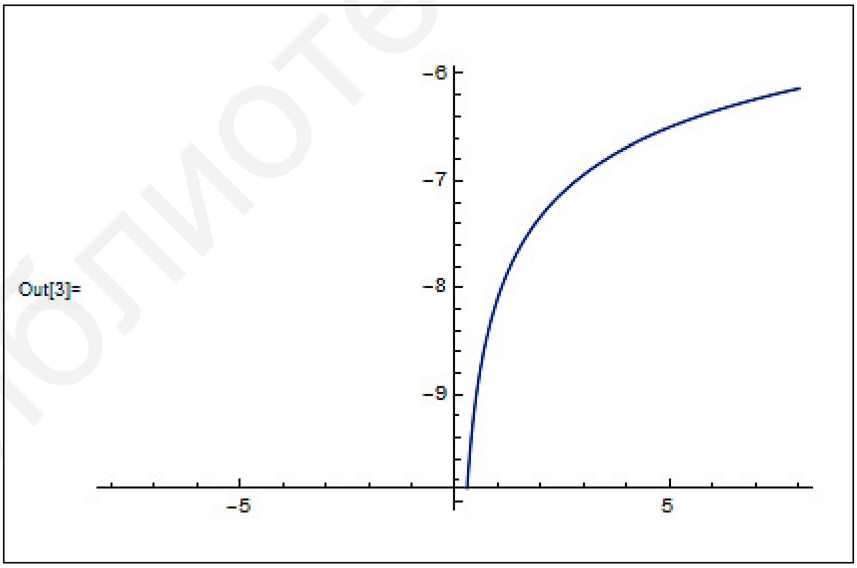


Рис. 1.10

Задание для самостоятельной работы

Найти неопределенные интегралы, используя подходящие методы интегрирования. Результат интегрирования проверить в системе **Mathematica**.

1) $\int\left(\frac{24}{\sqrt{4x^2+1}}-\frac{1}{12^x}+16\cos\frac{x}{3}-2\right)dx;$

2) $\int(2x-1)^2(3x+5)dx;$

3) $\int\frac{x^4-5x^3+6x+1}{x^2-4x+5}dx;$

4) $\int\frac{\cos 2x}{\sin x+\cos x}dx;$

5) $\int\left(\frac{1-t}{t}\right)^4 dt;$

6) $\int\left(5^x-3^x\right)^3 dx;$

7) $\int\frac{e^x\sqrt{\operatorname{arctg} e^x}}{1+e^x}dx;$

8) $\int\frac{x^2dx}{x^6+4};$

9) $\int\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)dx;$

10) $\int\frac{x\sin x}{\cos^3 x}dx;$

11) $\int e^{2x}\cos\frac{x}{2}dx;$

12) $\int\frac{5x-7}{2x+4x-37}dx;$

13) $\int\frac{1-\cos x}{1+\cos x}dx;$

14) $\int\frac{dx}{\operatorname{tg}^7 x};$

15) $\int 2^2\sin^2\frac{7x}{2}\cos^2\frac{7x}{2}dx;$

16) $\int\frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}-1}dx;$

17) $\int\frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+9}}.$

1.2. Определенный интеграл

Пример 1.2.1

Вычислить определенный интеграл $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\operatorname{tg} x dx$.

Решение

Для интегрируемой на отрезке $[a;b]$ функции $y=f(x)$ имеет место формула Ньютона – Лейбница для вычисления определенного интеграла $\int\limits_a^b f(x)dx=F(x)\Big|_a^b=F(b)-F(a)$, где $F'(x)=f(x)$, a – нижний предел интегрирования, b – верхний предел интегрирования.

Нахождение первообразной осуществляется либо непосредственным интегрированием, либо подстановкой:

$\int\limits_a^b f(x)dx=\int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)dt$, где $\varphi(\alpha)=a$ и $\varphi(\beta)=b$.

В данной задаче замену переменной не выполняли, поэтому пределы интегрирования остались прежними:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg} x dx = -\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{d(\cos x)}{\cos x} = \int_{\frac{\pi}{4}}^{0} \frac{d(\cos x)}{\cos x} = \ln|\cos x| \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{0} = \ln|\cos 0| - \ln\left|\cos\frac{\pi}{4}\right| =$$

$$= \ln 1 - \ln\frac{\sqrt{2}}{2} = -\ln 2^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\ln 2 .$$

Заметим, что при решении мы воспользовались свойством определенного интеграла: $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$.

Вычисления в Mathematica

В системе **Mathematica** вычисление определенного интеграла осуществляется с помощью функции **Integrate[f,{x,a,b}]**, где **f** – некоторая подынтегральная функция, **x** – переменная интегрирования, **a** – нижний предел интегрирования, **b** – верхний предел интегрирования. Запись определенного интеграла можно производить и в привычной форме, используя палитру математических символов **Basic Math Assistant**, которую можно открыть на панели инструментов **Pallets**. Решение примера 1.2.1 приведено на рис. 1.11.

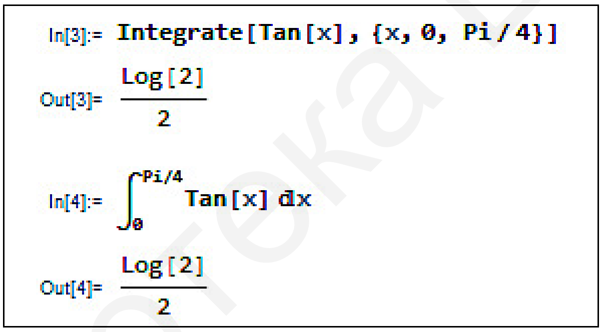


Рис. 1.11

Пример 1.2.2

Вычислить определенный интеграл $\int_{-2}^{2} \frac{e^{2x}}{e^{2x}+1} dx$.

Решение

Вычисление определенного интеграла $\int_{-2}^{2} \frac{e^{2x}}{e^{2x}+1} dx$ проведем с помощью подстановки $x = \frac{1}{2}\ln t$, тогда $dx = \frac{dt}{2t}$. После введения указанной подстановки пределы интегрирования изменятся согласно формуле $t = e^{2x}$ и станут соответственно $t = e^{2\cdot 0} = 1$ – нижний предел интегрирования, $t = e^{2\cdot 2} = e^4$ – верхний предел интегрирования. Тогда

$$\int\limits_0^2 \frac{e^{2x}}{e^{2x}+1}dx = \frac{1}{2}\int\limits_1^{e^4} \frac{tdt}{(t+1)t} = \frac{1}{2}\int\limits_1^{e^4} \frac{d(t+1)}{t+1} = \frac{1}{2}\ln|t+1|\Big|_1^{e^4} = \frac{1}{2}\left(\ln\left|e^4+1\right| - \ln 1\right) =$$
$$= \frac{1}{2}\ln\left(e^4+1\right).$$

Вычисления в Mathematica

Решение примера 1.2.2 приведено на рис. 1.12.

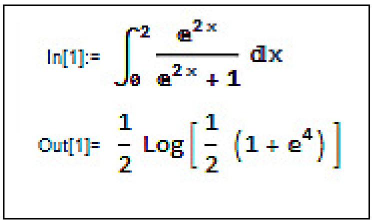


Рис. 1.12

Пример 1.2.3

Вычислить определенный интеграл $\int\limits_{-1}^{1} \text{arctg}x dx$.

Решение

Для определенного интеграла также имеет место формула интегрирования по частям:

$$\int\limits_a^b UdV = UV\Big|_a^b - \int\limits_a^b VdU .$$

Вычислим данный определенный интеграл, используя метод интегрирования по частям, выбрав $U = \text{arctg}\, x$, $dV = dx$. Тогда $dU = d(\text{arctg}\, x) = (\text{arctg}\, x)'dx = \dfrac{dx}{1+x^2}$, $V = x$. Воспользовавшись формулой, будем иметь

$$\int\limits_{-1}^{1} \text{arctg} dx = x\,\text{arctg}\, x\Big|_{-1}^{1} - \int\limits_{-1}^{1}\frac{xdx}{1+x^2} = \text{arctg}1 - (-1)\text{arctg}(-1) - \frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{1}\frac{d\left(1+x^2\right)}{1+x^2} =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{1}\frac{d\left(1+x^2\right)}{1+x^2} = \frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)\Big|_1^{-1} = \frac{1}{2}\ln\left|1+(-1)^2\right| - \frac{1}{2}\ln\left|1+1^2\right| = 0 .$$

Следует отметить, что аналогичный результат может быть получен без нахождения первообразной, а лишь на основании свойства определенного интеграла $\int\limits_a^b f(x)dx = 0$, если $f(x)$ – нечетная функция, т. к. $f(-x) = -f(x)$.

Действительно, подынтегральная функция обладает свойством нечетности: $\operatorname{arctg}(-x) = -\operatorname{arctg} x$.

Вычисления в Mathematica

Решение примера 1.2.3 приведено на рис. 1.13.

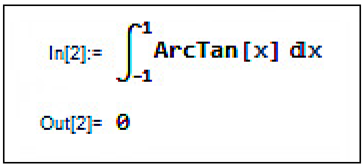


Рис. 1.13

В системе **Mathematica** реализовано вычисление определенного интеграла и в случае, когда первообразная не является элементарной функцией (применены формулы приближенного вычисления определенного интеграла). Численное значение определенного интеграла находится с использованием как простых приближенных методов (прямоугольников и трапеций), так и сложных, автоматически адаптирующихся к характеру изменения подынтегральной функции $f(x)$.

Пример 1.2.4

Вычислить определенный интеграл $\int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x} dx$.

Решение

Подынтегральная функция не имеет первообразной, которая выражается через элементарные функции, и данный интеграл является неберущимся. Однако определенный интеграл может быть вычислен приближенно, если в подынтегральной функции числитель, т. е. функцию $\sin x$ разложить по формуле Тейлора.

Для нахождения численных значений определенных интегралов, в том числе неберущихся, в системе **Mathematica** используется функция **NIntegrate[f,{x,xmin,xmax}]**. Численное приближенное значение интеграла от функции **f** по переменной **x** в пределах от **xmin** до **xmax** можно найти, используя ряд опций, исполнив команду **Options[NIntegrate]**. Описание указанных опций находится в меню **Help→Wolfram Documentation→tutorial/NIntegrateOverview**.

Вычисления в Mathematica

Решение примера 1.2.4 в программе **Mathematica** приведено на рис. 1.14.

```
In[20]:= S = NIntegrate[Sin[x]/x, {x, Pi/3, Pi/2}]

Out[20]= 0.385303
```

Рис. 1.14

На рис. 1.15 показаны разные форматы вывода ответа.

```
In[21]:= NumberForm[S, 16]

Out[21]//NumberForm=
        0.3853033243581669

In[22]:= ScientificForm[S]

Out[22]//ScientificForm=
        3.85303×10^-1

In[23]:= NumberForm[S]

Out[23]//NumberForm=
        0.385303

In[24]:= S1 = RealDigits[S]

Out[24]= {{3, 8, 5, 3, 0, 3, 3, 2, 4, 3, 5, 8, 1, 6, 6, 9}, 0}

In[25]:= FromDigits[S1]

Out[25]= 3853033243581669/10000000000000000
```

Рис. 1.15

Задание для самостоятельной работы

Найти определенные интегралы. Результат проверить в системе **Mathematica**.

1) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2-2\sin x}{3\cos x(1+\cos x)}dx$; 2) $\int\limits_1^2 \frac{\sqrt{x}-6-\sqrt[4]{x}}{\sqrt{x^3-1}}dx$;

3) $\int\limits_2^4 \sqrt{\frac{2-x}{x-6}}dx$; 4) $\int\limits_2^3 \frac{1+x^2}{1+x^4}dx$;

5) $\int\limits_1^2 \frac{\sqrt{x}-6-\sqrt[4]{x}}{\sqrt{x^3-1}}dx$; 6) $\int\limits_0^{\frac{1}{2}} \frac{\arcsin 2x}{\sqrt{1+x}}dx$;

7) $\int\limits_{-\pi}^{\pi} x^2\cos^2(-x)dx$; 8) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^6 3x dx$;

9) $\int_{0}^{1} x\,\mathrm{ctg}^2\, x dx$;   10) $\int_{1}^{2} \sqrt{x}\ln\left(1+x^2\right)dx$;

11) $\int_{0}^{\ln 3} \sqrt{e^{-x}-1}dx$.

1.3. Несобственные интегралы

Пример 1.3.1

Исследовать несобственный интеграл $\int_{0}^{+\infty} e^{-x}dx$ на сходимость.

Решение

Несобственный интеграл I рода – это определенный интеграл от

$$\int_{a}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty}\int_{a}^{b} f(x)dx,$$

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{b} f(x)dx,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{+\infty} f(x)dx,$$

где c – произвольное число.

Несобственный интеграл I рода является сходящимся, если предел, которому он равен, – конечен, в противном случае (предел не существует или бесконечен) – интеграл расходится.

Вычислим данный интеграл по определению:

$$\int_{0}^{+\infty} e^{-x}dx = \lim_{b\to+\infty}\int_{0}^{b} e^{-x}dx = \lim_{b\to+\infty}(-e^{-x})\Big|_{0}^{b} = \lim_{b\to+\infty}(-e^{-b}+e^{0}) = 1.$$

Значит, данный интеграл сходится.

Вычисления в Mathematica

Решение примера 1.3.1 в программе **Mathematica** приведено на рис. 1.16.

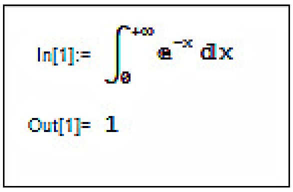


Рис. 1.16

Пример 1.3.2

Исследовать несобственный интеграл $\int\limits_{-\infty}^{1} \frac{dx}{x}$ на сходимость.

Решение

$$\int\limits_{-\infty}^{1} \frac{dx}{x} = \lim_{b\to-\infty} \int\limits_{b}^{1} \frac{dx}{x} = \lim_{b\to-\infty} \ln|x|\Big|_{b}^{1} = \lim_{b\to-\infty} \left(\ln 1 - \ln|b|\right) = \lim_{b\to-\infty} \ln|b| = -\infty.$$

Значит, данный интеграл расходится.

Вычисления в Mathematica

Решение примера 1.3.2 в программе **Mathematica** приведено на рис. 1.17.

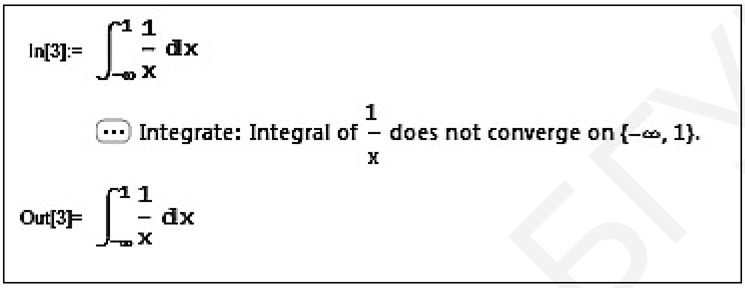


Рис. 1.17

Пример 1.3.3

Исследовать несобственный интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{2xdx}{1+x^2}$ на сходимость.

Решение

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{2xdx}{1+x^2} = \int\limits_{-\infty}^{0} \frac{2xdx}{1+8x^2} + \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{2xdx}{1+8x^2}, \text{ учитывая, что}$$

$$\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{2xdx}{1+8x^2} = \lim_{b\to+\infty} \int\limits_{0}^{b} \frac{2xdx}{1+8x^2} = \frac{1}{8} \lim_{b\to+\infty} \int\limits_{0}^{b} \frac{d\left(1+8x^2\right)}{1+8x^2} = \frac{1}{8} \lim_{b\to+\infty} \ln\left|1+8x^2\right|\Big|_{0}^{b} =$$

$$= \frac{1}{8} \lim_{b\to+\infty} \left(\ln\left|1+8b^2\right| - \ln 1\right) = \infty.$$

Поскольку $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{2xdx}{1+x^2}$ расходится, расходящимся будет и интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{2xdx}{1+x^2}$.

Вычисления в Mathematica

Решение примера 1.3.3 в программе **Mathematica** приведено на рис. 1.18.

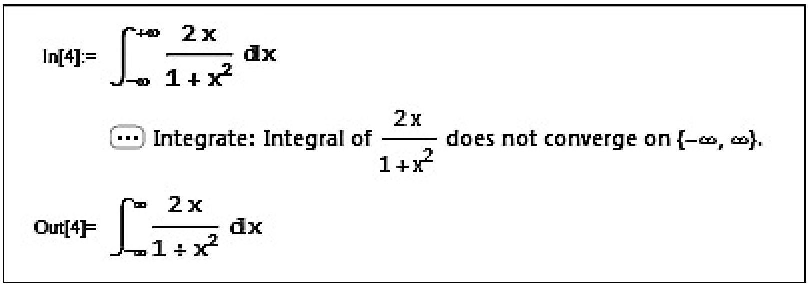


Рис. 1.18

Задание для самостоятельной работы

Исследовать несобственные интегралы на сходимость. Результат проверить в системе **Mathematica**.

1) $\int\limits_{-\infty}^{0} \frac{1+x}{1+x^2}dx$; 2) $\int\limits_{2}^{+\infty}\left(x^2+1\right)dx$;

3) $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{4x^2+5}}$; 4) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{xdx}{x^4+1}$;

5) $\int\limits_{1}^{\infty} \frac{dx}{e^x+e^{-x}}$; 6) $\int\limits_{e^2}^{\infty} \frac{dx}{x\ln(\ln x)}$;

7) $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{2x^2dx}{x^4+2x+1}$; 8) $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{xdx}{\sqrt{x^5+1}}$.

1.4. Приложения определенного интеграла

1.4.1. Вычисление площадей плоских фигур

Пример 1.4.1

Найти площадь фигуры, ограниченной графиками функций $y_1 = -x^2+1$ и $y_2 = 2x-2$.

Решение

Площадь фигуры (области), расположенной между кривыми $y = f(x),\ y = g(x),\ x = a,\ x = b,\ f(x) \ge 0,\ g(x) \ge 0\ \forall x \in [a;b]$ и прямыми $x = a,\ x = b,$ можно найти по формуле $S = \int\limits_a^b \left(f(x) - g(x)\right)dx$.

Построим область, ограниченную графиком функции $y_1 = -x^2+1$, в виде параболы, ветви которой направлены вниз, с вершиной в точке $(0;1)$, пересекающей ось Ox в точках с абсциссами $x_1 = -1$ и $x_2 = 1$, и прямой $y_2 = 2x-2$ (рис. 1.19).

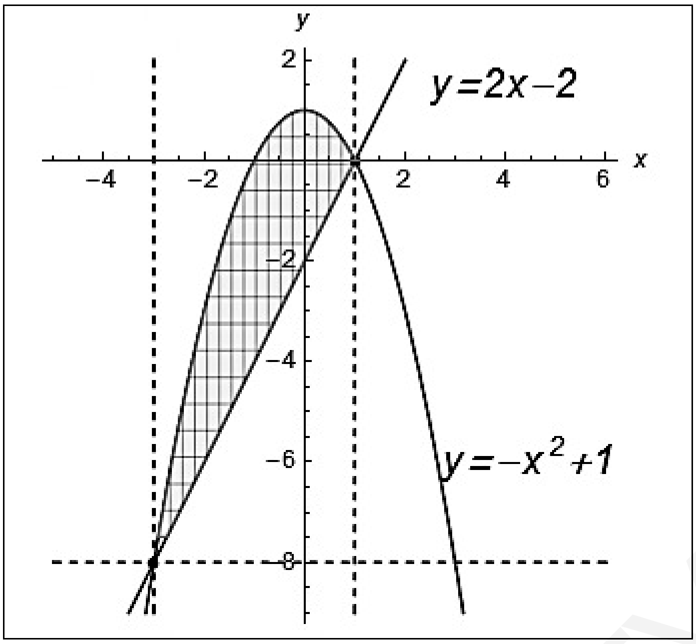


Рис. 1.19

Точки пересечения указанных линий найдем, решив систему $\begin{cases} y_1 = -x^2+1, \\ y_2 = 2x-2. \end{cases}$ Откуда получим точки $M_1(-3;-8)$, $M_2(1;0)$.

Тогда площадь области D можно найти как определенный интеграл с пределами $a=-3$, $b=1$ от разности функций $y_1(x)-y_2(x)$ по переменной x:

$$S_D = \int_{-3}^{1}\left(-x^2+1-(2x-2)\right)dx = \int_{-3}^{1}\left(-x^2-2x-1\right)dx = \left(-\frac{x^3}{3}-x^2-x\right)\Bigg|_{-3}^{1} =$$

$$= -\frac{1^3}{3}-1^2-1-\left(-\frac{3^3}{3}-(-3)^2-(-3)\right) = 3\frac{2}{3} \text{ кв. ед.}$$

Если плоская фигура имеет «сложную» форму, то ее следует разбить на более простые части (криволинейные трапеции) прямыми параллельными осями координат и найти ее площадь как сумму площадей простых частей, из которых она составлена.

Вычисления в Mathematica

Найдем точки пересечения графиков (рис. 1.20).

```
k = Solve[-x^2 + 1 = y && y = 2 x - 2, {x, y}, Reals];
x1 = x /. k[[1]];
y1 = y /. k[[1]];
x2 = x /. k[[2]];
y2 = y /. k[[2]];
Print["Координаты точек пересечения:"]
Print["(x₁,y₁)=(", x1, ",", y1, ")"]
Print["(x₂,y₂)=(", x2, ",", y2, ")"]

Координаты точек пересечения:
(x₁,y₁)=(-3,-8)
(x₂,y₂)=(1,0)
```

Рис. 1.20

Область, ограниченная графиками функций $y_1 = -x^2 + 1$ и $y_2 = 2x - 2$, изображена на рис. 1.19. Приведем описание построения данной области в Mathematica (рис. 1.21).

```
g1 := ContourPlot[{-x^2 + 1 = y, y = 2 x - 2}, {x, -5, 6}, {y, -9, 2},
   Axes → True, Frame → False, AxesLabel → {x, y},
   LabelStyle → Directive[Black, Medium], ContourStyle → {Blue, {Blue}}]
g2 := RegionPlot[(1 - x^2) ≥ y && y ≥ 2 x - 2, {x, -5, 6}, {y, -9, 2},
   PlotStyle → LightBlue, Mesh → 15]
g3 := Graphics[{PointSize[0.02], Point[{{x1, y1}, {x2, y2}}]},
   Frame → True, AspectRatio → 3]
g4 := ContourPlot[{y = y1, x = x1, x = x2}, {x, -5, 6}, {y, -9, 2},
   Axes → True, Frame → False, ContourStyle → Directive[Black, Dashed]]
gy1 = Graphics[Inset[Text[Style["y=-x^2+1", Black, Italic, 20]], {4.5, -6}]];
gy2 = Graphics[Inset[Text[Style["y=2x-2", Black, Italic, 20]], {4, 1.5}]];
Show[g1, g2, g3, g4, gy1, gy2]
```

Рис. 1.21

Вычислим площадь (рис. 1.22).

```
In[19]:= (*Найдем площадь области D с помощью опреленного интеграла*)
         S = ∫_{-3}^{1} (-x^2 + 1 - (2 x - 2)) dx;
         Print["S=", S]

         S=32/3
```

Рис. 1.22

Пример 1.4.2

Вычислить площадь фигуры, ограниченной кардиоидой $r = 2(1 - \cos\varphi)$.

Решение

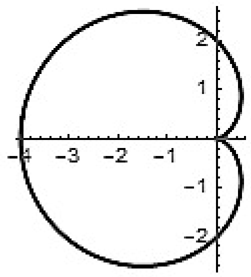
Первый способ

Построим кардиоиду $r = 2(1 - \cos\varphi)$ в полярной системе координат (рис. 1.23).

```
(*1 способ*)
Print["График кардиоиды r= 2(1-cosx) в полярной системе координат:"]
PolarPlot[2 (1 - Cos[x]), {x, 0, 2 Pi}, PlotStyle → {Black, Thick}]
(*Найдем площадь верхней половины области, ограниченной кардиоидой,
с помощью определенного интеграла и вычислим площадь всей кардиоиды*)
S1 = 1/2 ∫_0^Pi 4 (1 - Cos[x])^2 dx;
Print["Площадь области, ограниченной кардиоидой, S=", 2 S1]

График кардиоиды r= 2(1-cosx) в полярной системе координат:
```

Out[2]=




```
Площадь области, ограниченной кардиоидой, S=6 π
```

Рис. 1.23

Площадь криволинейного сектора в полярной системе координат вычисляется по формуле $S = \frac{1}{2}\int\limits_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi)d\varphi$.

Заметим, что область, ограниченная кардиоидой, состоит из двух равновеликих криволинейных секторов, на которые она делится прямой, проходящей через полярный луч. Верхний криволинейный сектор ограничен лучами $\varphi = 0$, $\varphi = \pi$ и линией $r = 2(1 - \cos\varphi)$. Площадь S_1 верхнего криволинейного сектора будет равна

$$S_1 = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi} 2^2(1-\cos\varphi)^2\,d\varphi = 2\int\limits_0^{\pi}\left(1 - 2\cos\varphi + \cos^2\varphi\right)d\varphi =$$

$$= 2\int\limits_0^{\pi}\left(1 - 2\cos\varphi + \frac{1}{2}(1+\cos 2\varphi)\right)d\varphi = 2\int\limits_0^{\pi}\left(\frac{3}{2} - 2\cos\varphi + \frac{1}{2}\cos 2\varphi\right)d\varphi =$$

$$= 2\left(\frac{3}{2}\varphi - 2\sin\varphi + \frac{1}{4}\sin 2\varphi\right)\Bigg|_0^{\pi} = 3\pi.$$

Тогда площадь, ограниченная кардиоидой, равна $S = 2S_1 = 6\pi$ кв. ед.

Второй способ

Заметим, что данная кардиоида может быть задана параметрически с помощью уравнений $\begin{cases} x = 2\cos t - \cos 2t - 1, \\ y = 2\sin t - \sin 2t, \end{cases}$ $t \in [0; 2\pi]$ в декартовой системе координат.

Площадь криволинейной трапеции, ограниченной кривой, заданной параметрически $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases}$ $t \in [\alpha; \beta]$, прямыми $x = x(\alpha) = a$, $x = x(\beta) = b$ и осью Ox, находят по формуле $S_D = \left| \int\limits_{\alpha}^{\beta} y(t) \cdot x(t) dt \right|$.

Построение кардиоиды, заданной параметрически, приведено на рис. 1.24.

```
In[11]:= (*2 способ*)
         (*Параметрические уравнения кардиоиды*)
         x[t_] := 2 Cos[t] - Cos[2 t] - 1
         y[t_] := 2 Sin[t] - Sin[2 t]
         Print["График кардиоиды в декартовой системе координат:"]
         ParametricPlot[{x[t], y[t]}, {t, 0, 2 Pi}, PlotStyle → {Black, Thick}]
         (*Найдем площадь верхней половины области, ограниченной кардиоидой,
         с помощью определенного интеграла*)
         S2 = ∫_π^0 y[t] x'[t] dt;
         Print["Площадь области, ограниченной кардиоидой, S=", 2 S2]
```

Out[14]=

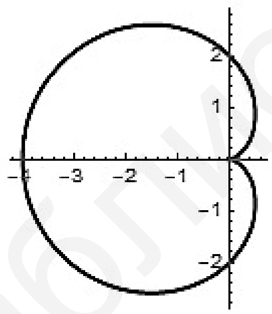


Рис. 1.24

Тогда область, расположенная в первой и второй координатных плоскостях, будет криволинейной трапецией, ограниченной прямыми $x(\pi) = -2$ – слева, $x(0) = 0$ – справа, $y = 0$ – снизу и сверху графиком функции, и ее площадь S_1 будет равна

$$S_1 = \int\limits_{\pi}^{0} (2\sin t - \sin 2t)(2\cos t - \cos 2t - 1)' dt =$$

$$= \int\limits_{\pi}^{0} (2\sin t - \sin 2t)(-2\sin t + 2\sin 2t) dt =$$

$$= \int_{\pi}^{0} (-4\sin^2 t + 6\sin t \sin 2t - 2\sin^2 2t)dt =$$

$$= \int_{0}^{\pi} (4\sin^2 t - 6\sin t \sin 2t + 2\sin^2 2t)dt =$$

$$= \int_{0}^{\pi} (3 - 2\cos 2t - 124\sin^2 t \cos t - \cos 4t)dt =$$

$$= \left.(3t - \sin 2t - 4\sin^3 t - \frac{1}{4}\sin 4t)\right|_{0}^{\pi} = 3\pi.$$

Тогда площадь, ограниченная кардиоидой, равна $S = 2S_1 = 6\pi$ кв. ед.

Вычисления в Mathematica

Решение примера 1.4.2 в программе **Mathematica** первым способом приведено на рис. 1.23. Решение задачи в случае, когда кардиоида задана параметрически, приведено на рис. 1.24.

Задание для самостоятельной работы

Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривыми:

1) $y = 4x^2,\ y = \dfrac{x^2}{9},\ y = 2$;

2) область между параболой $y = -x^2 - 2x + 3$, касательной к ней в точке $M(2;-5)$ и осью ординат;

3) $y = x + 1,\ y = \cos x,\ y = 0$;

4) область, лежащая вне круга $r = 1$, ограниченная кривой $r = 2\cos 3\varphi$;

5) $\begin{cases} x = 5\cos^3 t, \\ y = 5\sin^3 t; \end{cases}$

6) петля, образованная кривой $x = 2t - t^2,\ y = 2t^2 - t^3$.

1.4.2. Вычисление длины дуги плоской кривой

Пример 1.4.3

Вычислить длину арки циклоиды $\begin{cases} x = t - \sin t, \\ y = 1 - \cos t, \end{cases}$ $t \in [0;2\pi]$.

Решение

В случае, когда кривая AB задана параметрически $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases}$ $t \in [\alpha; \beta]$, где $x(t), y(t)$ – непрерывные функции с непрерывными производными и $x(a) = a$, $x(b) = b$, длина кривой AB вычисляется по формуле $l = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(x))^2}\,dt$.

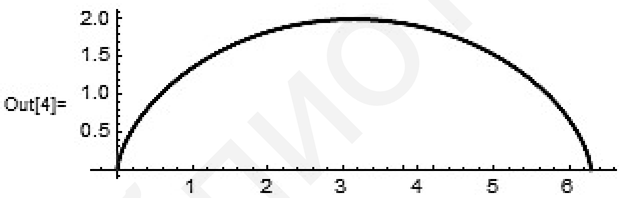
Вычислим значения функции в ключевых точках.

t	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
x	0	$\frac{\pi}{2}-1$	π	$\frac{3\pi}{2}+1$	2π
y	0	1	2	1	0

Построим арку циклоиды в прямоугольной системе координат (рис. 1.25).

```
(*Построим арку циклоиды *)
x[t_] := t - Sin[t]
y[t_] := 1 - Cos[t]
Print["Первая арка циклоиды:"]
ParametricPlot[{x[t], y[t]}, {t, 0, 2 Pi} , PlotStyle → {Black, Thick}]
(*Находим длину арки, используя определенный интеграл*)
Print["Длина арки l=", ∫_0^(2π) √((x'[t])^2 + (y'[t])^2) dt]
```

Первая арка циклоиды:



Длина арки l=8

Рис. 1.25

Вычислим производные функций $x(t), y(t)$:

$x' = (t - \sin t)' = 1 - \cos t$, $y' = (1 - \cos t)' = \sin t$.

Для вычисления длины арки циклоиды составим и вычислим определенный интеграл:

$$l = \int\limits_0^{2\pi} \sqrt{(1-\cos t)^2 + (\sin t)^2}\,dt = \int\limits_0^{2\pi} \sqrt{1 - 2\cos t + (\cos t)^2 + (\sin t)^2}\,dt =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} \sqrt{2 - 2\cos t}\,dt = \int\limits_0^{2\pi} \sqrt{4\sin^2 \frac{t}{2}}\,dt = 2\int\limits_0^{2\pi} \left|\sin \frac{t}{2}\right| dt = -4\cos\frac{t}{2}\Big|_0^{2\pi} = 8.$$

Замечание. Для пространственной кривой AB, заданной параметрически, $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t), \end{cases}$ $t \in [\alpha;\beta]$, длина кривой AB вычисляется по формуле

$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\left(x'(t)\right)^2 + \left(y'(x)\right)^2 + \left(z'(x)\right)^2}\, dt.$$

Вычисления в Mathematica

Решение примера 1.4.3 в программе **Mathematica** приведено на рис. 1.25.

Пример 1.4.4

Найти длину части логарифмической спирали $r = e^{3\varphi}$, лежащей внутри круга $R = 1$.

Решение

График логарифмической спирали $r = e^{3\varphi}$ изображен на рис. 1.26.

Рис. 1.26

Длина дуги AB, заданной уравнением $r = r(\varphi)$ в полярных координатах $\alpha \le \varphi \le \beta$, где $r(\varphi)$, $r'(\varphi)$ – непрерывные функции на отрезке $[\alpha;\beta]$, вычисляется по формуле $l = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r^2 + (r')^2}\,d\varphi$.

Исходя из условия задачи, $|r| \le 1$. Следовательно, $e^{3\varphi} \le 1$, откуда $\varphi \in (-\infty;0]$. Тогда длина искомой дуги будет равна несобственному интегралу I рода $l = \int\limits_{-\infty}^{0} \sqrt{\left(e^{\frac{\varphi}{3}}\right)^2 + \left(\left(e^{\frac{\varphi}{3}}\right)'\right)^2}\,d\varphi = \frac{\sqrt{10}}{3} \lim\limits_{b\to-\infty} \int\limits_{b}^{0} e^{\frac{\varphi}{3}} d\varphi = \sqrt{10} \lim\limits_{b\to-\infty} e^{\frac{\varphi}{3}}\Big|_0^b = \sqrt{10}$.

Вычисления в Mathematica

Решение примера 1.4.4 в программе **Mathematica** приведено на рис. 1.26.

Задание для самостоятельной работы

Вычислить длину дуги кривой:

1) $r = a(1 + \cos 2\varphi)$;

2) $r = 3\sin\left(\frac{\varphi}{4}\right)$;

3) астроиды $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$;

4) $x = \frac{t^6}{6}$, $y = 2 - \frac{t^4}{4}$ между точками пересечения с осями координат;

5) $x = at^2$, $y = a\left(t + \frac{t^3}{3}\right)$, $z = a\left(t - \frac{t^3}{3}\right)$, $t_1 = 0$, $t_2 = \sqrt{3}$;

6) $y = \ln(1 - x^2)$, $x \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$;

7) $x = \frac{y^2}{4} - \frac{\ln y}{2}$ между точками с ординатами $y = 1$, $y = 2$.

1.4.3. Вычисление объемов пространственных тел

Пример 1.4.5

Найти объем тела, полученного вращением криволинейной трапеции T: $0 \le y \le x^3$, $0 \le x \le 1$ вокруг оси Ox и вокруг оси Oy.

Решение

Если криволинейная трапеция T, заданная неравенствами $a \le x \le b$ $0 \le y \le f(x)$, вращается вокруг оси Ox или Oy, то объемы тел вращения вычисляются, соответственно, по формулам $V_x = \pi\int_a^b f^2(x)dx$ и $V_y = 2\pi\int_a^b x\left|f(x)\right|dx$.

Изобразим криволинейную трапецию T (рис. 1.27).

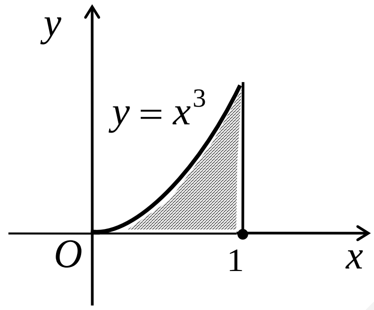


Рис. 1.27

В результате вращения криволинейной трапеции T вокруг оси Ox образуется тело (рис. 1.28).

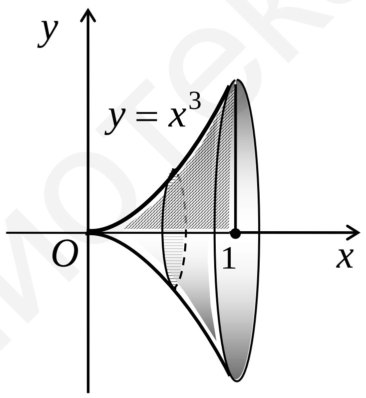


Рис. 1.28

Тогда объем тела будет равен

$V_x = \pi\int_0^1 f^2(x)dx = \pi\int_0^1 x^6 dx = \dfrac{\pi}{7}$ куб. ед.

Если осью вращения будет ось Oy, то тело будет иметь следующий вид (рис. 1.29).

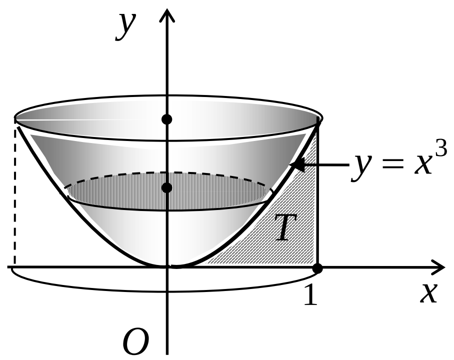


Рис. 1.29

Тогда объем получившегося тела будет равен разности объемов V_1 тела, $x = 1$, $0 \le y \le 1$ вокруг оси Oy и V_2 тела, полученного в результате вращения графика функции $y \le x^3$, $0 \le x \le 1$ вокруг оси Oy.

Поскольку

$$V_1 = 2\pi \int_0^1 1^2\, dy = 2\pi,$$

$$V_2 = V_y = 2\pi \int_0^1 x\,|f(x)|\,dx = 2\pi \int_0^1 x x^3 dx = 2\pi \int_0^1 x^4 dx = \frac{2\pi}{5}.$$

Объем искомого тела будет равен

$$V = V_1 - V_2 = \frac{8\pi}{5} \text{ куб. ед.}$$

Вычисления в Mathematica

Решение примера 1.4.5 в программе **Mathematica** приведено на рис. 1.30.

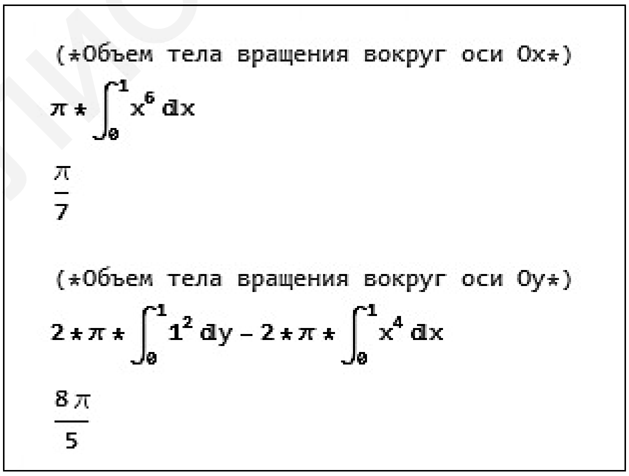


Рис. 1.30

Задание для самостоятельной работы

Найти объем тела:

1) полученного при вращении вокруг оси абсцисс криволинейной трапеции, ограниченной кривой $y = a\,\mathrm{ch}\left(\frac{x}{a}\right)$, прямыми $x = -a,\ x = a$ и осью Ox;

2) полученного вращением вокруг оси Oy криволинейной трапеции, ограниченной линией $y^2 = 4 - x,\ x = 0$.

2. ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

2.1. Область определения и линии уровня функции двух переменных

Пример 2.1.1

Найти область определения следующих функций и изобразить графически:

1) $z(x,y)=\ln\left(1-\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{25}\right)$; 2) $z(x,y)=\dfrac{1}{\sqrt{4-x^2-y^2}}+\arcsin\left(\dfrac{x}{y^2}\right)$.

Решение

1) $z(x,y)=\ln\left(1-\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{25}\right)$.

Логарифмическая функция определена только для положительных значений аргумента, поэтому $1-\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{25}>0$ или $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{25}<1$. Это неравенство описывает внутреннюю часть эллипса $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{25}=1$.

Область определения функции $z(x,y)=\ln\left(1-\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{25}\right)$ в системе **Mathematica** изображена на рис. 2.1.

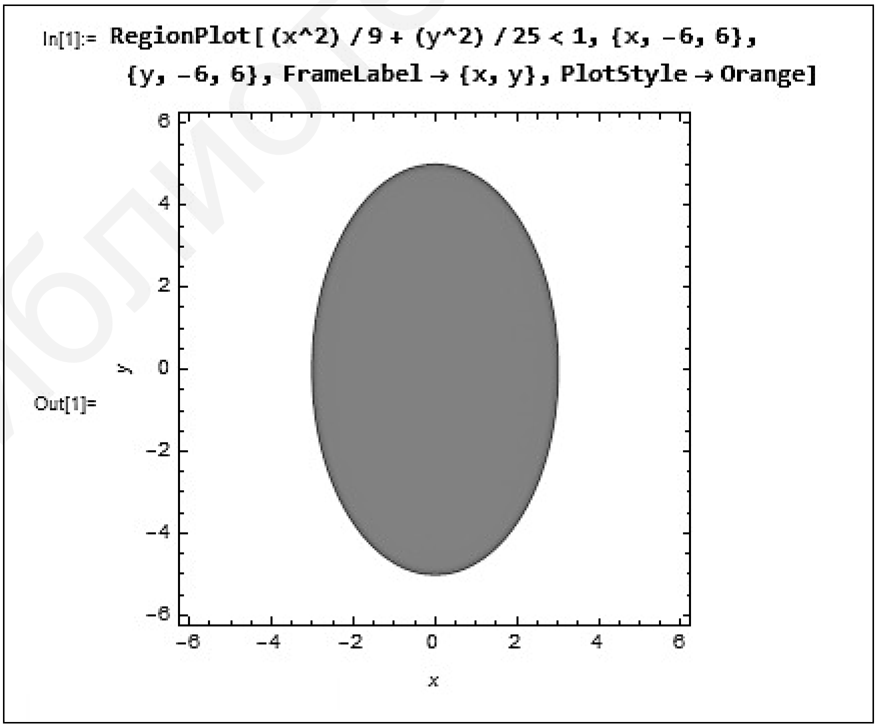


Рис. 2.1

2) $z(x,y)=\dfrac{1}{\sqrt{4-x^2-y^2}}+\arcsin\left(\dfrac{x}{y^2}\right).$

Функция $\dfrac{1}{\sqrt{4-x^2-y^2}}$ существует лишь для тех пар значений x и y, которые удовлетворяют неравенству $4-x^2-y^2>0$.

Функция $\arcsin\left(\dfrac{x}{y^2}\right)$ определена на интервале $[-1,1]$, т. е. $-1\le\dfrac{x}{y^2}\le 1$.

Поэтому областью определения функции $z(x,y)$ является множество точек плоскости *Oxy*, значения координат которых удовлетворяют следующей системе неравенств:

$$\begin{cases}4-x^2-y^2>0,\\ -1\le\dfrac{x}{y^2}\le 1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+y^2<4,\\ -y^2\le x\le y^2,\\ y\ne 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+y^2<4,\\ y^2\ge x,\\ y^2\ge -x,\\ y\ne 0.\end{cases}$$

Неравенство $x^2+y^2<4$ описывает внутреннюю часть круга радиусом 2 с центром в начале координат (рис. 2.2).

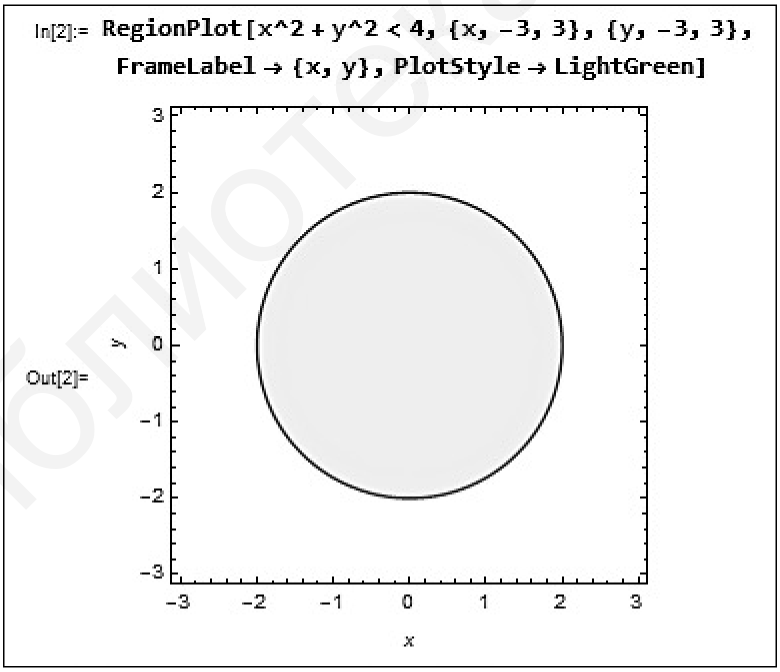


Рис. 2.2

Неравенства $y^2\ge x$ и $y^2\ge -x$ задают часть плоскости, расположенную вне обеих парабол одновременно (рис. 2.3).

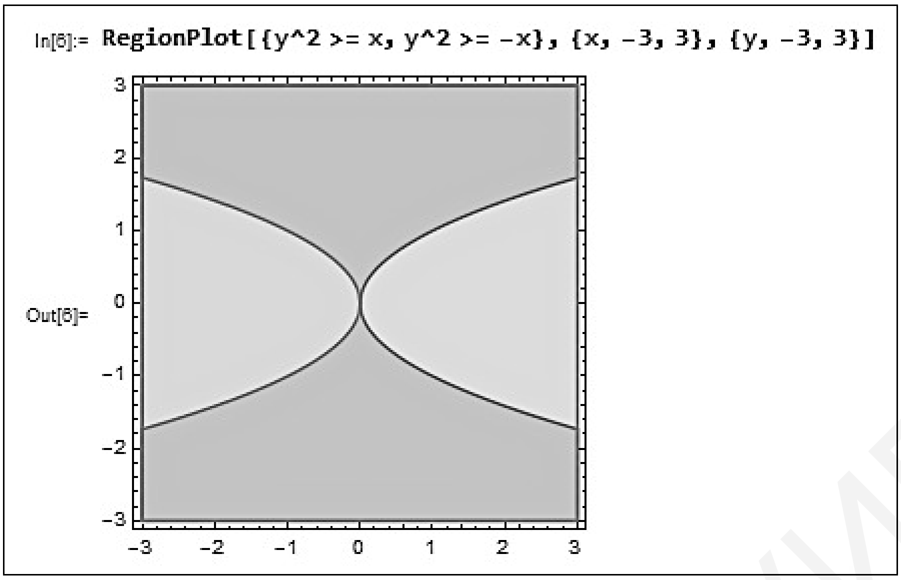


Рис. 2.3

Отметим, что точка $(0;0)$ не входит в искомую область определения.

Область определения функции $z(x,y)=\dfrac{1}{\sqrt{4-x^2-y^2}}+\arcsin\left(\dfrac{x}{y^2}\right)$ можно изобразить сразу в системе **Mathematica**, задав соответствующие неравенства (рис. 2.4).

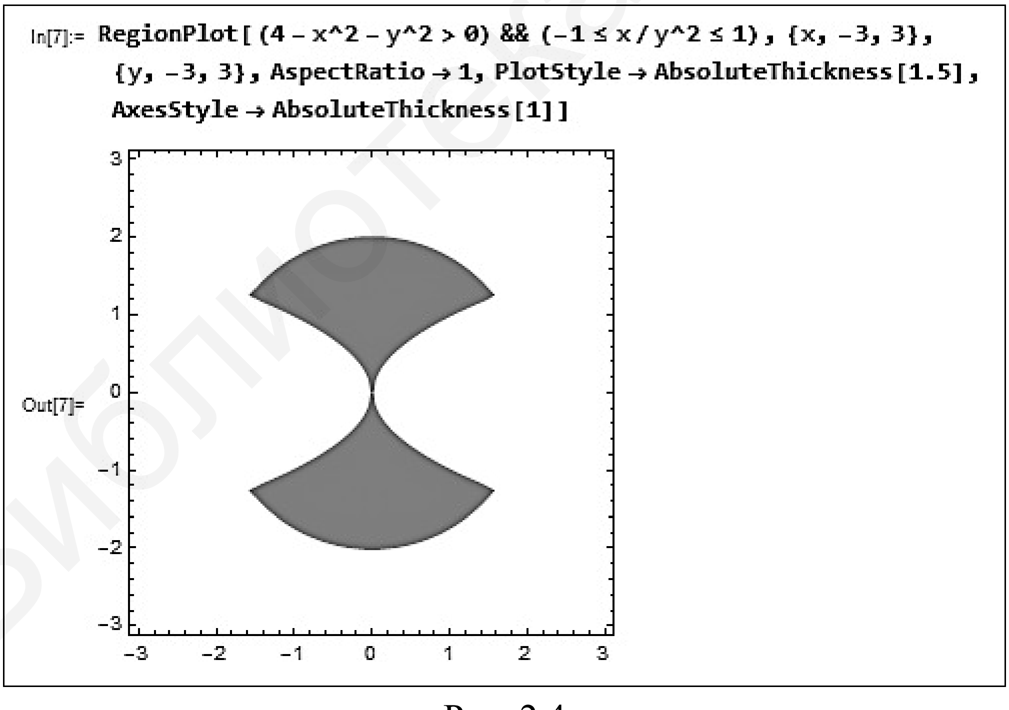


Рис. 2.4

При увеличении масштаба заметно, что точка $(0;0)$ не входит в область определения (рис. 2.5).

```
In[8]:= RegionPlot[(4 - x^2 - y^2 > 0) && (-1 ≤ x/y^2 ≤ 1), {x, -2, 2},
        {y, -2, 2}, AspectRatio → 1, PlotStyle → AbsoluteThickness[1.5],
        AxesStyle → AbsoluteThickness[1]]
```

Out[8]=

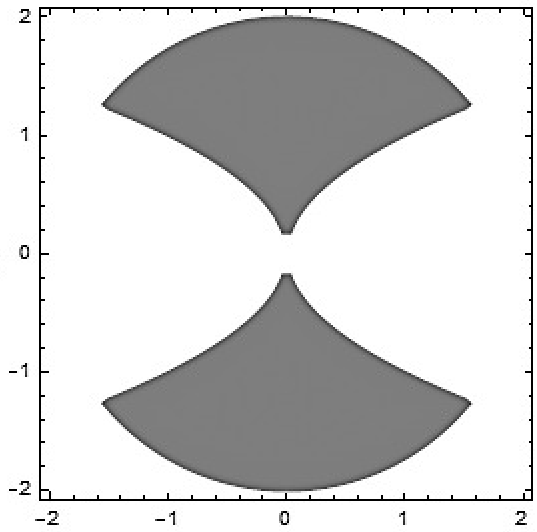


Рис. 2.5

Пример 2.1.2

Найти линии уровня функции $z(x,y)=\dfrac{1}{2x^2+y^2}$.

Решение

Уравнение линий уровня данной функции z можно записать в виде $\dfrac{1}{2x^2+y^2}=c \Rightarrow c\left(2x^2+y^2\right)=1 \ (c>0)$ или $\dfrac{x^2}{\frac{1}{2c}}+\dfrac{y^2}{\frac{1}{c}}=1 \ (c>0)$.

Итак, линии уровня функции $z(x,y)=\dfrac{1}{2x^2+y^2}$ – это эллипсы.

Построение линий уровня выполнено в системе **Mathematica** (рис. 2.6).

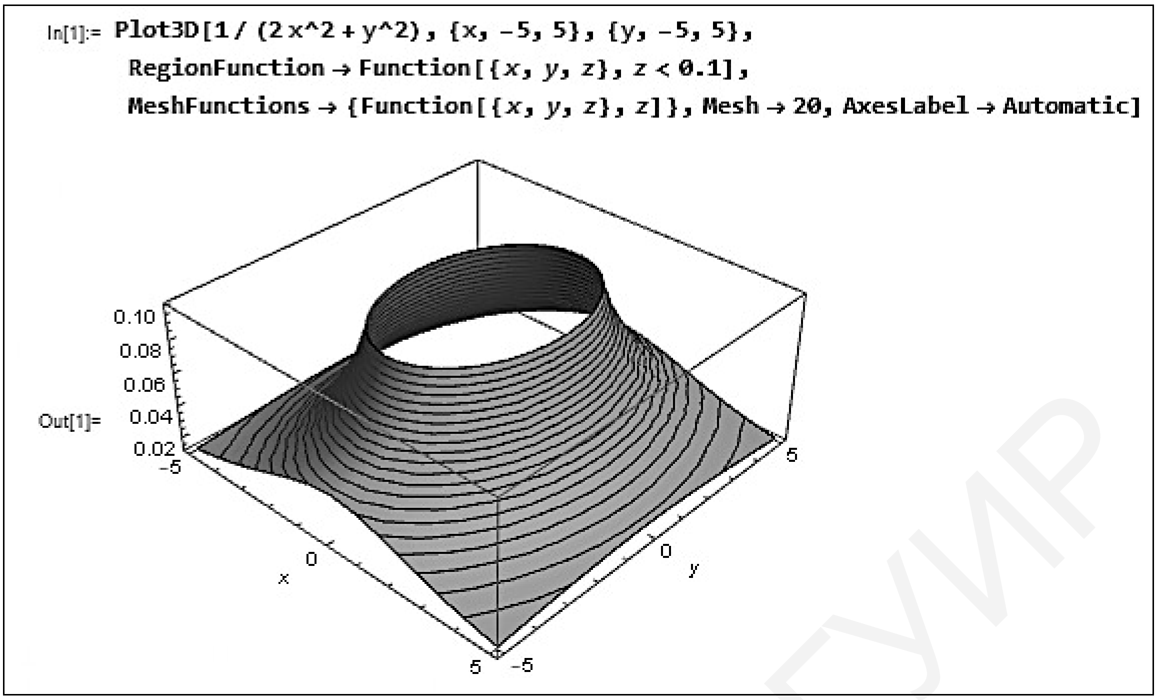


Рис. 2.6

Задания для самостоятельной работы

1. Найти область определения функции и изобразить ее на координатной плоскости:

1) $z(x,y)=\dfrac{7}{\sqrt{9-x^2}}+\sqrt{1-y^2}$; 2) $z(x,y)=x-\arcsin y$;

3) $z(x,y)=\sqrt{4+y-x^2}+\ln\left(x^2-1\right)$; 4) $z(x,y)=\arccos(1-y)+\sqrt{xy}$.

2. Найти линии уровня следующих функций:

1) $z(x,y)=3x+y$; 2) $z(x,y)=e^{x+y}$;

3) $z(x,y)=\dfrac{x}{y}$; 4) $z(x,y)=\sqrt{y-x^2}$.

2.2. Предел и непрерывность функции нескольких переменных

Пример 2.2.1

Вычислить пределы:

1) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{-2+\sqrt{xy+4}}{3xy}$; 2) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to -3}}\dfrac{5\sin(xy)}{3x^2-5xy}$; 3) $\lim\limits_{\substack{x\to +\infty\\ y\to 5}}\left(\dfrac{x+2y}{x}\right)^{2x}$;

4) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{2\sqrt{x^2+y^2}}{\ln\left(1-x^2-y^2\right)}$; 5) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x^3-y^3}{x^2+y^2}$; 6) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{3x-2y}{x+5y}$.

Решение

1) Подстановка значений $x=0,\ y=0$ приводит к неопределенности вида $\left[\frac{0}{0}\right]$. Для раскрытия неопределенности избавимся от иррациональности в числителе:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{-2+\sqrt{xy+4}}{3xy}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{\left(-2+\sqrt{xy+4}\right)\left(-2-\sqrt{xy+4}\right)}{3xy\left(-2-\sqrt{xy+4}\right)}=$$

$$=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{(-2)^2-\left(\sqrt{xy+4}\right)^2}{3xy\left(-2-\sqrt{xy+4}\right)}=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{4-xy-4}{3xy\left(-2-\sqrt{xy+4}\right)}=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{-1}{3\left(-2-\sqrt{xy+4}\right)}=$$

$$=-\frac{1}{3\left(-2-\sqrt{0+4}\right)}=\frac{1}{12}.$$

2) Здесь $xy\to 0$ при $x\to 0,\ y\to -3$. Имеем неопределенность $\left[\frac{0}{0}\right]$. Для решения используем первый замечательный предел $\left(\lim\limits_{\alpha\to 0}\frac{\sin\alpha}{\alpha}=1\right)$:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to -3}}\frac{5\sin(xy)}{3x^2-5xy}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to -3}}\frac{5\sin(xy)\cdot xy}{xy\cdot\left(3x^2-5xy\right)}=$$

$$=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to -3}}\frac{\sin(xy)}{xy}\cdot\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to -3}}\frac{5xy}{x\cdot(3x-5y)}=1\cdot\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to -3}}\frac{5y}{3x-5y}=1\cdot\frac{5\cdot(-3)}{3\cdot 0-5\cdot(-3)}=\frac{-15}{15}=-1.$$

3) Непосредственная подстановка приводит к неопределенности $\left[1^{\infty}\right]$. Выражение, стоящее под знаком предела, преобразуем к такому виду, чтобы можно было воспользоваться вторым замечательным пределом $\left(\lim\limits_{\alpha\to\infty}\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)^{\alpha}=e\right)$:

$$\lim_{\substack{x\to +\infty\\ y\to 5}}\left(\frac{x+2y}{x}\right)^{2x}=\left[1^{\infty}\right]=\lim_{\substack{x\to +\infty\\ y\to 5}}\left(1+\frac{2y}{x}\right)^{2x}=\lim_{\substack{x\to +\infty\\ y\to 5}}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{x}{2y}}\right)^{\frac{x}{2y}\cdot}\right]^{\frac{2y}{x}\cdot 2x}=$$

$$=e^{\lim\limits_{\substack{x\to +\infty\\ y\to 5}}4y}=e^{20}.$$

4) Здесь получаем неопределенность $\left[\frac{0}{0}\right]$. Перейдем к полярным координатам по формулам $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$.

Тогда $x^2 + y^2 = r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi = r^2 \Rightarrow r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

При $x \to 0$, $y \to 0$ получаем, что $r \to 0$. Тогда

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{2\sqrt{x^2+y^2}}{\ln\left(1-x^2-y^2\right)} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{r\to 0} \frac{2r}{\ln\left(1-r^2\right)} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{r\to 0} \frac{(2r)'}{\left(\ln\left(1-r^2\right)\right)'} =$$

$$= \lim_{r\to 0} \frac{2}{\frac{1}{1-r^2}\cdot(-2r)} = \lim_{r\to 0} \frac{1-r^2}{-r} = -\infty.$$

5) При непосредственной подстановке получаем неопределенность вида $\left[\frac{0}{0}\right]$. Заметим, что если этот предел существует, то он не должен зависеть от того, как точка $M(x;y)$ стремится к точке $O(0;0)$.

Вычислим этот предел при условии, что точка $M(x;y)$ стремится к $O(0;0)$ вдоль оси Ox, т. е. при $y = 0$:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^3-y^3}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^3}{x^2} = \lim_{x\to 0} x = 0.$$

Теперь вычислим этот предел при условии, что точка $M(x;y)$ стремится к $O(0;0)$ вдоль оси Oy, т. е. при $x = 0$:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^3-y^3}{x^2+y^2} = \lim_{y\to 0} \frac{-y^3}{y^2} = -\lim_{y\to 0} y = 0.$$

Стремление $x \to 0$, $y \to 0$ по осям координат Ox и Oy приводит к одному и тому же значению предела – нулю. Это не гарантирует существования предела, т. к. необходимо учесть все возможные направления стремления точки $M(x;y)$ к $O(0;0)$.

Вычислим данный предел при условии, что точка $M(x;y)$ стремится к $O(0;0)$ по любой прямой, проходящей через точку $O(0;0)$, т. е. вдоль линии $y = kx$ $(k \neq 0)$:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0\\ y=kx}} \frac{x^3-y^3}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^3-(kx)^3}{x^2+(kx)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^3(1-k^3)}{x^2(1+k^2)} = \lim_{x\to 0} x\cdot\frac{1-k^3}{1+k^2} = 0$$ при любом значении k.

6) При непосредственной подстановке $x=0,\ y=0$ получим неопределенность вида $\left[\dfrac{0}{0}\right]$.

Вычислим предел при стремлении точки $M(x;y)$ к $O(0;0)$ вдоль оси Ox и вдоль оси Oy:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{3x-2y}{x+5y}=\lim_{x\to 0}\frac{3x}{x}=3 \text{ и } \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{3x-2y}{x+5y}=\lim_{y\to 0}\frac{-2y}{5y}=-\frac{2}{5}.$$

Итак, стремление $x\to 0,\ y\to 0$ по осям координат Ox и Oy приводит к различным значениям предела, т. е. результат зависит от направления подхода точки $M(x;y)$ к $O(0;0)$. Это означает, что не существует предела данной функции при $x\to 0$ и $y\to 0$.

Вычисления в Mathematica

1) Предварительно упростим функцию и выполним вычисление предела (рис. 2.7).

```
In[1]:= Limit[FullSimplify[((-2 + Sqrt[x*y + 4]) / (3 x*y))] /. x → 0, y → 0]
Out[1]= 1/12
```

Рис. 2.7

2) При вычислении важно правильно указать порядок подстановки переменных в повторном пределе (рис. 2.8).

```
In[2]:= Limit[((5 Sin[x*y]) / (3 x^2 - 5 x*y)) /. x → 0, y → -3]
        Power: Infinite expression 1/0 encountered.
        Infinity: Indeterminate expression 0 ComplexInfinity encountered.
Out[2]= Indeterminate

In[3]:= Limit[((5 Sin[x*y]) / (3 x^2 - 5 x*y)) /. y → -3, x → 0]
Out[3]= -1
```

Рис. 2.8

3) Решение примера приведено на рис. 2.9.

```
In[4]:= Limit[((x + 2 y) / x)^(2*x) /. x → Infinity, y → 5]
        Infinity: Indeterminate expression 0 ∞ encountered.
Out[4]= Indeterminate

In[5]:= Limit[((x + 2 y) / x)^(2*x) /. y → 5, x → Infinity]
Out[5]= e^20
```

Рис. 2.9

4) При вычислении данного примера в системе **Mathematica** нет необходимости переходить к полярным координатам (рис. 2.10).

```
In[6]:= Limit[((2 - Sqrt[x^2 + y^2]) / Log[1 - x^2 - y^2]) /. x → 0, y → 0]

Out[6]= -∞
```

Рис. 2.10

5) Решение примера приведено на рис. 2.11.

```
In[7]:= Limit[((x^3 - y^3) / (x^2 + y^2)) /. y → 0, x → 0]

Out[7]= 0

In[8]:= Limit[((x^3 - y^3) / (x^2 + y^2)) /. x → 0, y → 0]

Out[8]= 0

In[9]:= Limit[((x^3 - y^3) / (x^2 + y^2)) /. y → k*x, x → 0]

Out[9]= 0
```

Рис. 2.11

6) При вычислении повторных пределов получились разные результаты (рис. 2.12), что говорит о том, что предел не существует.

```
In[10]:= Limit[((3 x - 2 y) / (x + 5 y)) /. y → 0, x → 0]

Out[10]= 3

In[11]:= Limit[((3 x - 2 y) / (x + 5 y)) /. x → 0, y → 0]

Out[11]= -2/5
```

Рис. 2.12

Пример 2.2.2

Найти точки разрыва функций:

1) $z(x,y)=\dfrac{1}{2x-y}$; 2) $z(x,y)=\dfrac{1}{(x-5)^2+(y-2)^2}$;

3) $z(x,y)=\dfrac{x}{(x^2+y^2-4)(x^2-y^2-1)}$; 4) $u(x,y,z)=\dfrac{3}{x^2+2y^2+4z^2-4}$.

Решение

1) Функция $z(x,y)=\dfrac{1}{2x-y}$ определена на любых x и y, таких, что $2x-y\neq 0$, т. е. $2x\neq y$. Следовательно, прямая $y=2x$ является линией разрыва функции.

2) Данная функция определена всюду, кроме точки $A(5;2)$, которая и является точкой разрыва функции $z(x,y)=\dfrac{1}{(x-5)^2+(y-2)^2}$.

3) Точками разрыва функции являются точки, в которых знаменатель равен нулю. Следовательно, точками разрыва функции $z(x,y)$ являются точки окружности $x^2+y^2=4$ и гиперболы $x^2-y^2=1$.

4) Функция $u(x,y,z)$ определена для любых $x, y, z,$ таких, что $x^2+2y^2+4z^2-4\neq 0$ или $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{2}+z^2\neq 1$. Эллипсоид $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{2}+\dfrac{z^2}{1}=1$ и есть поверхность разрыва функции.

Вычисления в Mathematica

1) Для функции $z(x,y)=\dfrac{1}{2x-y}$ прямая $y=2x$ является линией разрыва функции (рис. 2.13).

```
In[1]:= Reduce[(2*x - y) == 0, {x, y}, Reals]
Out[1]= y == 2 x
In[2]:= Plot[2 x, {x, -8, 8}, AxesLabel → {x, y}]
Out[2]=
```

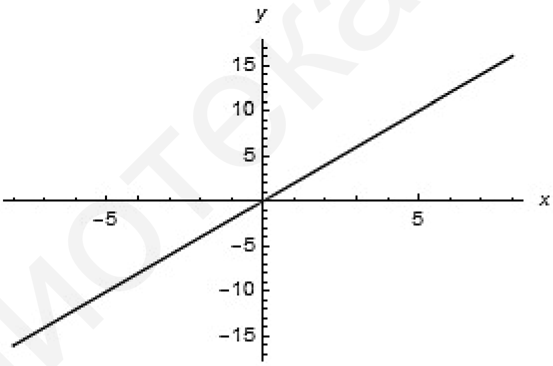


Рис. 2.13

2) Найдем точку разрыва функции (рис. 2.14).

```
In[3]:= Reduce[((x - 5)^2 + (y - 2)^2 == 0), {x, y}, Reals]
Out[3]= x == 5 && y == 2
```

Рис. 2.14

3) Изобразим точки разрыва на плоскости (рис. 2.15).

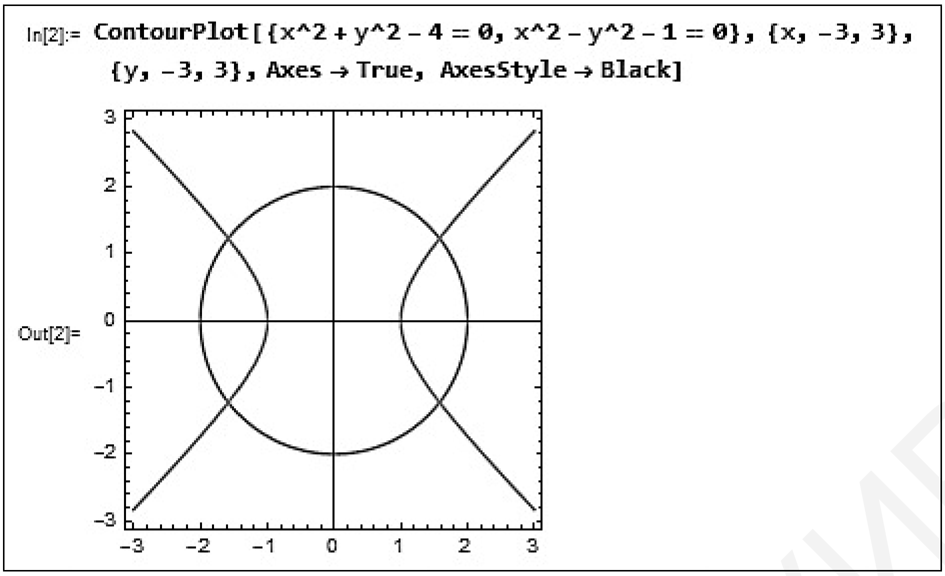


Рис. 2.15

4) Поверхностью разрыва является эллипсоид (рис. 2.16).

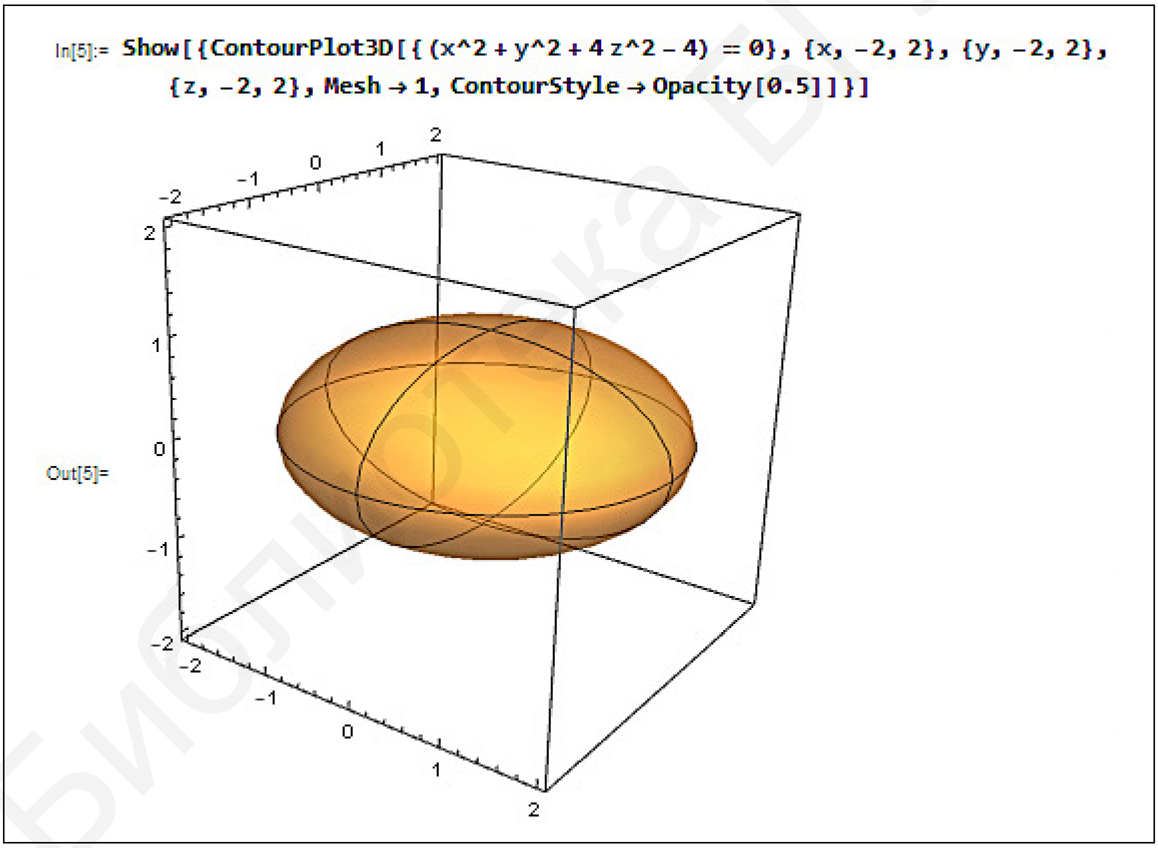


Рис. 2.16

Задания для самостоятельной работы

1. Вычислить предел функции или доказать, что он не существует:

1) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to -2}} \left(1+xy^2\right)^{\frac{-2y}{x^4y-6xy}}$; 2) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{-3(x-2y)}{\sqrt{16-x+2y}-4}$; 3) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x^2+y^4}{x^4+y^2}$;

4) $\lim\limits_{\substack{x\to -3\\ y\to 0}} \dfrac{2y^2+xy}{\sin\dfrac{y}{x}}$; 5) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 2}} \dfrac{e^{(x+y-2)}-1}{3(x+y-2)}$; 6) $\lim\limits_{\substack{x\to -2\\ y\to 3}} \dfrac{x^2+y^2-13}{4-\sqrt{3+x^2+y^2}}$.

2. Найти и построить точки разрыва функции:

1) $z(x,y)=\dfrac{3}{x^2-y^2}$; 2) $z(x,y)=\dfrac{1}{\cos^2\pi\left(x+\dfrac{1}{2}\right)+\cos^2\pi\left(y+\dfrac{1}{2}\right)}$;

3) $u(x,y,z)=\dfrac{7}{x^2+y^2+z^2-16}$; 4) $z(x,y)=\dfrac{x^2+y^2}{(y+x)\cdot(y^2-x)}$.

2.3. Дифференцирование функций нескольких переменных

Пример 2.3.1

Найти частные производные первого порядка от функции $z(x,y)=x^2y^3-5\cos\left(\sqrt{x+y^2}\right)$.

Решение

Чтобы найти z'_x, считаем y постоянной величиной и дифференцируем z как функцию одной переменной x:

$$z'_x=\left(x^2y^3-5\cos\left(\sqrt{x+y^2}\right)\right)'=2xy^3+5\sin\left(\sqrt{x+y^2}\right)\cdot\frac{1}{2\sqrt{x+y^2}}=$$

$$=2xy^3+\frac{5\sin\left(\sqrt{x+y^2}\right)}{2\sqrt{x+y^2}}.$$

Находим z'_y, считая x постоянной величиной:

$$z'_y=\left(x^2y^3-5\cos\left(\sqrt{x+y^2}\right)\right)'=3y^2x^2+5\sin\left(\sqrt{x+y^2}\right)\cdot\frac{1}{2\sqrt{x+y^2}}\cdot 2y=$$

$$=3y^2x^2+\frac{5y\sin\left(\sqrt{x+y^2}\right)}{\sqrt{x+y^2}}.$$

Вычисления в Mathematica

Для вычисления частных производных воспользуемся функциями **D[f,x]** и **D[f,y]** (рис. 2.17).

```
In[1]:= f[x_, y_] := x^2 * y^3 - 5 Cos[Sqrt[x + y^2]]
        D[f[x, y], x]
        D[f[x, y], y]
```

Out[2]= $2\,x\,y^3 + \dfrac{5\,\mathrm{Sin}\left[\sqrt{x+y^2}\,\right]}{2\,\sqrt{x+y^2}}$

Out[3]= $3\,x^2\,y^2 + \dfrac{5\,y\,\mathrm{Sin}\left[\sqrt{x+y^2}\,\right]}{\sqrt{x+y^2}}$

Рис. 2.17

Отметим, что вычислить частные производные можно и с помощью функции **Derivative** (рис. 2.18).

```
In[4]:= Derivative[1, 0][f][x, y]
```

Out[4]= $2\,x\,y^3 + \dfrac{5\,\mathrm{Sin}\left[\sqrt{x+y^2}\,\right]}{2\,\sqrt{x+y^2}}$

Рис. 2.18

Данная функция позволяет вычислить частные производные высших порядков, например, частную производную второго порядка $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ (рис. 2.19) и смешанную производную, например, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ (рис. 2.20).

```
In[5]:= Derivative[2, 0][f][x, y]
```

Out[5]= $2\,y^3 + \dfrac{5\,\mathrm{Cos}\left[\sqrt{x+y^2}\,\right]}{4\,\left(x+y^2\right)} - \dfrac{5\,\mathrm{Sin}\left[\sqrt{x+y^2}\,\right]}{4\,\left(x+y^2\right)^{3/2}}$

Рис. 2.19

```
In[6]:= Derivative[1, 1][f][x, y]
```

Out[6]= $6\,x\,y^2 + \dfrac{5\,y\,\mathrm{Cos}\left[\sqrt{x+y^2}\,\right]}{2\,\left(x+y^2\right)} - \dfrac{5\,y\,\mathrm{Sin}\left[\sqrt{x+y^2}\,\right]}{2\,\left(x+y^2\right)^{3/2}}$

Рис. 2.20

Пример 2.3.2

Найти полный дифференциал функции $u(x, y, z) = 10x^{y^2} + \ln\left(z^2 y\right)$ в точке $A(1; 1; 2)$.

Решение

Полный дифференциал функции $u(x,y,z)$ находится по формуле $du = u'_x dx + u'_y dy + u'_z dz$.

Находим частные производные:

$$u'_x = \left(10x^{y^2} + \ln\left(z^2 y\right)\right)'_x = 10y^2 x^{y^2-1};$$

$$u'_y = \left(10x^{y^2} + \ln\left(z^2 y\right)\right)'_y = 10x^{y^2} \ln x \cdot 2y + \frac{z^2}{z^2 y} = 20yx^{y^2} \ln x + \frac{1}{y};$$

$$u'_z = \left(10x^{y^2} + \ln\left(z^2 y\right)\right)'_z = \frac{1}{z^2 y} \cdot 2zy = \frac{2}{z}.$$

Итак,

$$du = 10y^2 x^{y^2-1} dx + \left(20yx^{y^2} \ln x + \frac{1}{y}\right) dy + \frac{2}{z} dz,$$

$$du\Big|_{(1;1;2)} = 10 \cdot 1^2 \cdot 1^{1-1} dx + \left(20 \cdot 1 \cdot 1^{1^2} \ln 1 + \frac{1}{1}\right) dy + \frac{2}{2} dz = 10dx + dy + dz.$$

Вычисления в Mathematica

Полный дифференциал функции находится с помощью функции **Dt[f]** (рис. 2.21).

```
In[7]:= f[x_, y_, z_] := 10 * x^(y^2) + Log[z^2 y]
        Dt[f[x, y, z]]

Out[8]= (z^2 Dt[y] + 2 y z Dt[z]) / (y z^2) + 10 x^(y^2) (y^2 Dt[x] / x + 2 y Dt[y] Log[x])
```

Рис. 2.21

Найдем полный дифференциал в точке $A(1;1;2)$ (рис. 2.22).

```
In[9]:= Simplify[Dt[f[x, y, z]] /.
          {Dt[x] → dx, Dt[y] → dy, Dt[z] → dz, x → 1, y → 1, z → 2}]

Out[9]= 10 dx + dy + dz
```

Рис. 2.22

Пример 2.3.3

Найти приращение функции $z(x,y) = \sqrt{x + 2y^2}$ и ее дифференциал при переходе от точки $M(1;2)$ к точке $N(-2;3)$.

Решение

Приращение функции $z(x,y)$ при переходе от точки M к точке N находится по формуле $\Delta z = z(N) - z(M)$.

Так как $z(N)=\sqrt{-2+2\cdot 3^2}=4$, $z(M)=\sqrt{1+2\cdot 2^2}=3$, то $\Delta z=4-3=1$.

Дифференциал функции $z(x,y)$ в точке $M(x_0;y_0)$ находится по формуле $d\,z=z'_x(x_0;y_0)dx+z'_y(x_0;y_0)dy$.

Поскольку $z'_x=\left(\sqrt{x+2y^2}\right)'_x=\dfrac{1}{2\sqrt{x+2y^2}}$,

$z'_x(M)=z'_x(1;2)=\dfrac{1}{2\sqrt{1+2\cdot 2^2}}=\dfrac{1}{6}$,

$z'_y=\left(\sqrt{x+2y^2}\right)'_y=\dfrac{1}{2\sqrt{x+2y^2}}\cdot\left(x+2y^2\right)'_y=\dfrac{2y}{\sqrt{x+2y^2}}$,

$z'_y(M)=z'_y(1;2)=\dfrac{2\cdot 2}{\sqrt{1+2\cdot 2^2}}=\dfrac{4}{3}$,

а $dx=x-x_0=-2-1=-3$, $dy=y-y_0=3-2=1$,

то $dz==\dfrac{1}{6}\cdot(-3)+\dfrac{4}{3}\cdot 1=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{4}{3}=\dfrac{5}{6}$.

Вычисления в Mathematica

Введем начальные данные и зададим алгоритм выполнения задания (рис. 2.23).

```
In[10]:= Print["z(x)=", f[x_, y_] = Sqrt[x + 2 y^2]]
         x1 := 1
         y1 := 2
         x2 := -2
         y2 := 3
         Print["M(", x1, ";", y1, ")"]
         Print["N(", x2, ";", y2, ")"]
         Print["Δz=", f[x2, y2] - f[x1, y1]]
         Print["dz=", Dt[f[x, y]] /. {Dt[x] → (x2 - x1), Dt[y] → (y2 - y1), x → x1, y → y1}]
```

Рис. 2.23

В результате получим следующее (рис. 2.24).

$z(x)=\sqrt{x+2y^2}$

M(1;2)

N(-2;3)

Δz=1

$dz=\dfrac{5}{6}$

Рис. 2.24

Пример 2.3.4

С помощью дифференциала функции двух переменных вычислить приближенно $\sqrt[3]{(1{,}02)^2+(0{,}05)^2}$.

Решение

Полный дифференциал часто используется для приближенных вычислений значений функций:

$$f(x_0+\Delta x; y_0+\Delta y)\approx f(x_0;y_0)+f'_x(x_0;y_0)\Delta x+f'_y(x_0;y_0)\Delta y.$$

Рассмотрим функцию $z=f(x,y)=\sqrt[3]{x^2+y^2}$.

Необходимо найти приближенное значение этой функции при $x=1{,}02$ и $y=0{,}05$. Положим $x_0=1$, $y_0=0$. Тогда $\Delta x=x-x_0=1{,}02-1=0{,}02$; $\Delta y=y-y_0=0{,}05-0=0{,}05$; $f(1;0)=\sqrt[3]{1^2+0^2}=1$.

Найдем частные производные функции $z=f(x,y)$ при $x_0=1$ и $y_0=0$:

$$f'_x=\left(\sqrt[3]{x^2+y^2}\right)'_x=\left(\left(x^2+y^2\right)^{\frac{1}{3}}\right)'_x=\frac{1}{3}\left(x^2+y^2\right)^{-\frac{2}{3}}\cdot 2x=\frac{2x}{3\sqrt[3]{\left(x^2+y^2\right)^2}};$$

$$f'_y=\left(\sqrt[3]{x^2+y^2}\right)'_y=\frac{2y}{3\sqrt[3]{\left(x^2+y^2\right)^2}};$$

$$f'_x(x_0;y_0)=f'_x(1;0)=\frac{2\cdot 1}{3\sqrt[3]{(1+0)^2}}=\frac{2}{3};$$

$$f'_y(x_0;y_0)=f'_y(1;0)=\frac{2\cdot 0}{3\sqrt[3]{(1+0)^2}}=0.$$

Итак,

$$\sqrt[3]{(1{,}02)^2+(0{,}05)^2}\approx f(1;0)+f'_x(1;0)\Delta x+f'_y(1;0)\Delta y=$$

$$=1+\frac{2}{3}\cdot 0{,}02+0\cdot 0{,}05\approx 1{,}013.$$

Вычисления в Mathematica

Зададим начальные условия (рис. 2.25).

```
In[1]:= f[x_, y_] := ∛(x² + y²)
        x1 := 1
        y1 := 0
        x2 := 1.02
        y2 := 0.05
```

Рис. 2.25

Введем формулу для приближенных вычислений и найдем значение функции (рис. 2.26).

```
In[6]:= f[x1, y1] + (x2 - x1) * D[f[x, y], x] +
         (y2 - y1) * D[f[x, y], y] /. {x → x1, y → y1}

Out[6]= 1.01333
```

Рис. 2.26

Пример 2.3.5

Найти $\frac{dz}{dt}$ для функции $z = x^2 + y^2 + xy$, если $x = \sin t,\ y = e^t$.

Решение

Воспользуемся формулой $\frac{dz}{dt} = z'_x \frac{dx}{dt} + z'_y \frac{dy}{dt}$.

Так как $z'_x = \left(x^2 + y^2 + xy\right)'_x = 2x + y$, $z'_y = \left(x^2 + y^2 + xy\right)'_y = 2y + x$ и $\frac{dx}{dt} = (\sin t)'_t = \cos t$, $\frac{dy}{dt} = \left(e^t\right)'_t = e^t$, то $\frac{dz}{dt} = (2x + y)\cos t + (2y + x)e^t =$

$$= \left(2\sin t + e^t\right)\cos t + \left(2e^t + \sin t\right)e^t = 2\sin t \cos t + e^t \cos t + 2e^t + \sin t e^t =$$

$$= \sin 2t + 2e^{2t} + e^t(\cos t + \sin t).$$

Вычисления в Mathematica

Для решения данной задачи можно воспользоваться формулой $\frac{dz}{dt} = z'_x \frac{dx}{dt} + z'_y \frac{dy}{dt}$, но удобнее применить функцию **Dt[f(x,y), t]**, указав зависимость переменных **x** и **y** от переменной **t** (рис. 2.27).

```
In[7]:= Dt[x^2 + y^2 + x*y, t] /. {x → Sin[t], y → e^t}
Out[7]= 2 e^(2t) + e^t Cos[t] + e^t Sin[t] + 2 Cos[t] Sin[t]
```

Рис. 2.27

Пример 2.3.6

Найти $y'(x)$ функции, заданной неявно уравнением $\ln\sqrt{x^2 + y^2} = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$.

Решение

Запишем заданное уравнение в виде $\ln\sqrt{x^2 + y^2} - \operatorname{arctg}\frac{y}{x} = 0$ или $\frac{1}{2}\ln\left(x^2 + y^2\right) - \operatorname{arctg}\frac{y}{x} = 0$.

Пусть $F(x, y) = \frac{1}{2}\ln\left(x^2 + y^2\right) - \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$.

Найдем частные производные:

$$F_x' = \left(\frac{1}{2} \ln\left(x^2 + y^2\right) - \operatorname{arctg} \frac{y}{x} \right)_x' = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^2 + y^2} \cdot 2x - \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x} \right)^2} \cdot \left(- \frac{y}{x^2} \right) =$$

$$= \frac{x}{x^2 + y^2} + \frac{x^2}{x^2 + y^2} \cdot \frac{y}{x^2} = \frac{x}{x^2 + y^2} + \frac{y}{x^2 + y^2} = \frac{x + y}{x^2 + y^2};$$

$$F_y' = \left(\frac{1}{2} \ln\left(x^2 + y^2\right) - \operatorname{arctg} \frac{y}{x} \right)_y' = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^2 + y^2} \cdot 2y - \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x} \right)^2} \cdot \frac{1}{x} =$$

$$= \frac{y}{x^2 + y^2} - \frac{x^2}{x^2 + y^2} \cdot \frac{1}{x} = \frac{y - x}{x^2 + y^2}.$$

Подставляя F_x' и F_y' в формулу $y'(x) = -\frac{F_x'(x, y)}{F_y'(x, y)}$, получим

$$y'(x) = -\frac{\dfrac{x + y}{x^2 + y^2}}{\dfrac{y - x}{x^2 + y^2}} = -\frac{x + y}{y - x} = \frac{x + y}{x - y}.$$

Вычисления в Mathematica

Данную задачу можно решить, непосредственно применив формулу $y'(x) = -\frac{F_x'(x, y)}{F_y'(x, y)}$ (рис. 2.28).

```
In[8]:= Simplify[-D[Log[Sqrt[x^2 + y^2]] - ArcTan[y/x], x]/D[Log[Sqrt[x^2 + y^2]] - ArcTan[y/x], y]]
Out[8]= (x + y)/(x - y)
```

Рис. 2.28

Mathematica позволяет непосредственно вычислить производную неявной функции (рис. 2.29).

```
In[9]:= D[Log[Sqrt[x^2 + y[x]^2]] == ArcTan[y[x]/x], x];
        Simplify[Solve[%, y'[x]]]
Out[10]= {{y'[x] -> (x + y[x])/(x - y[x])}}
```

Рис. 2.29

Пример 2.3.7

Найти полный дифференциал второго порядка функции $z=\dfrac{x^2+y^2}{xy}$.

Решение

Полный дифференциал второго порядка $d^2z=d(dz)$ функции $z=f(x,y)$ выражается формулой

$$d^2z=\left(\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy\right)^2 z=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\cdot dx^2+2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\cdot dxdy+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\cdot dy^2.$$

Сначала найдем частные производные первого порядка для данной функции z:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=z'_x=\left(\frac{x^2+y^2}{xy}\right)'_x=\frac{\left(x^2+y^2\right)'_x\cdot xy-\left(x^2+y^2\right)(xy)'_x}{(xy)^2}=$$

$$=\frac{2x\cdot xy-\left(x^2+y^2\right)y}{x^2y^2}=\frac{2x^2y-yx^2-y^3}{x^2y^2}=\frac{y\left(x^2-y^2\right)}{x^2y^2}=\frac{x^2-y^2}{x^2y};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=z'_y=\left(\frac{x^2+y^2}{xy}\right)'_y=\frac{\left(x^2+y^2\right)'_y\cdot xy-\left(x^2+y^2\right)(xy)'_y}{(xy)^2}=$$

$$=\frac{2y^2x-x^3-y^2x}{x^2y^2}=\frac{x\left(y^2-x^2\right)}{x^2y^2}=\frac{y^2-x^2}{xy^2}.$$

Продифференцировав их еще раз, найдем частные производные второго порядка:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=z''_{xx}=\left(z'_x\right)'_x=\left(\frac{x^2-y^2}{x^2y}\right)'_x=\frac{\left(x^2-y^2\right)'_x\cdot x^2y-\left(x^2-y^2\right)\cdot\left(x^2y\right)'_x}{\left(x^2y\right)^2}=$$

$$=\frac{2x\cdot x^2y-\left(x^2-y^2\right)\cdot 2xy}{x^4y^2}=\frac{2xy^3}{x^4y^2}=\frac{2y}{x^3};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=z''_{yy}=\left(\frac{y^2-x^2}{xy^2}\right)'_y=\frac{\left(y^2-x^2\right)'_y\cdot xy^2-\left(y^2-x^2\right)\cdot\left(xy^2\right)'_y}{\left(xy^2\right)^2}=$$

$$=\frac{2y\cdot xy^2-\left(y^2-x^2\right)\cdot 2yx}{x^2y^4}=\frac{2yx^3}{x^2y^4}=\frac{2x}{y^3};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=z''_{xy}=\left(z'_x\right)'_y=\left(\frac{x^2-y^2}{x^2y}\right)'_y=\frac{\left(x^2-y^2\right)'_y\cdot x^2y-\left(x^2-y^2\right)\cdot\left(x^2y\right)'_y}{\left(x^2y\right)^2}=$$

$$=\frac{-2y\cdot x^2y-\left(x^2-y^2\right)\cdot x^2}{x^4y^2}=\frac{-x^2\left(y^2+x^2\right)}{x^4y^2}=-\frac{y^2+x^2}{x^2y^2};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=z''_{yx}=\left(z'_y\right)'_x=\left(\frac{y^2-x^2}{xy^2}\right)'_x=\frac{\left(y^2-x^2\right)'_x\cdot xy^2-\left(y^2-x^2\right)\cdot\left(xy^2\right)'_x}{x^2y^4}=$$

$$=\frac{-2x\cdot xy^2-\left(y^2-x^2\right)\cdot y^2}{x^2y^4}=\frac{-y^2\left(x^2+y^2\right)}{x^2y^4}=-\frac{x^2+y^2}{x^2y^2}.$$

Сравнивая последние два выражения, видим, что $z_{xy}{}''=z_{yx}{}''$.

Итак, $d^2z=\frac{2y}{x^3}\cdot dx^2+2\cdot\left(-\frac{y^2+x^2}{x^2y^2}\right)\cdot dxdy+\frac{2x}{y^3}\cdot dy^2$.

Вычисления в Mathematica

Дифференциал второго порядка определим как дифференциал от дифференциала первого порядка заданной функции. Учтем, что **x** и **y** являются независимыми переменными (рис. 2.30).

In[11]:= $\texttt{Simplify}\left[\texttt{Dt}\left[\texttt{Dt}\left[\frac{x^2+y^2}{x*y}\right]\right]\right]$ `/. {Dt[Dt[x]] → 0, Dt[Dt[y]] → 0}`

Out[11]= $\frac{2y^4\,\texttt{Dt}[x]^2-2xy\left(x^2+y^2\right)\texttt{Dt}[x]\,\texttt{Dt}[y]+2x^4\,\texttt{Dt}[y]^2}{x^3y^3}$

Рис. 2.30

Ответ можно представить в более наглядном виде. Выделим соответствующую ячейку правой кнопкой мыши (рис. 2.31).

Out[11]= $\frac{2x^4\,\texttt{Dt}[y]^2-2xy\left(x^2+y^2\right)\texttt{Dt}[x]\,\texttt{Dt}[y]+2y^4\,\texttt{Dt}[x]^2}{x^3y^3}$

Рис. 2.31

Перейдем по ссылке **Convert To**, выберем **TraditionalForm** (рис. 2.32).

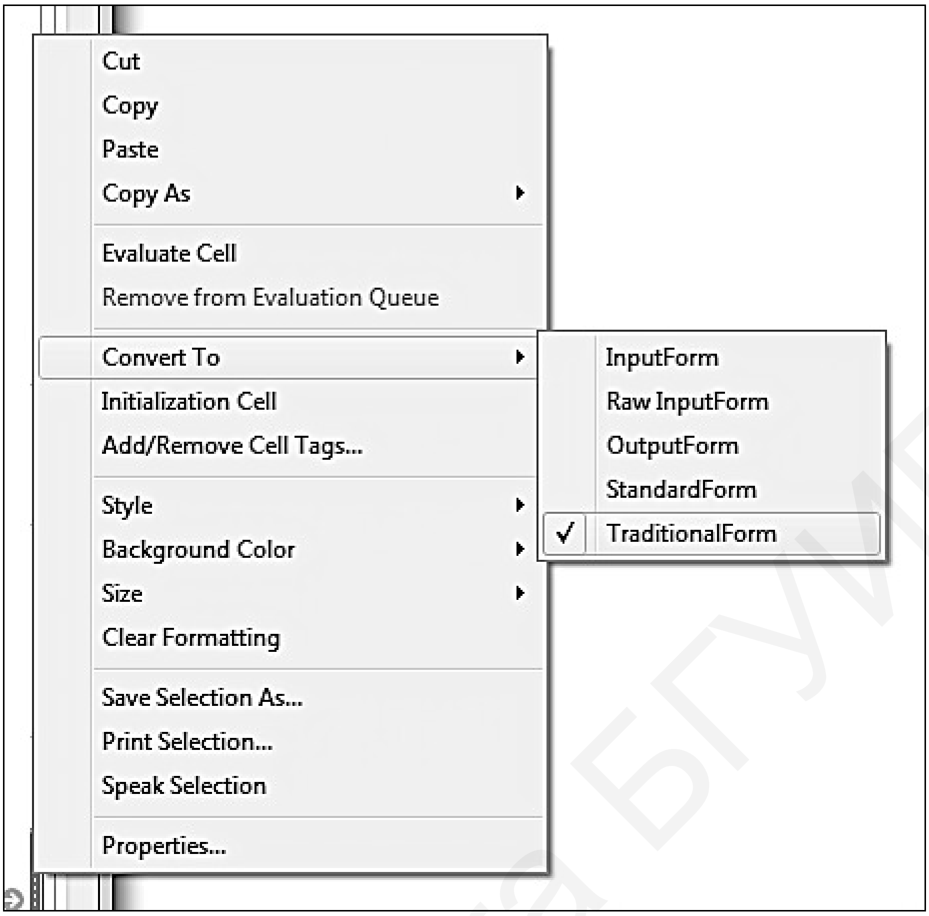


Рис. 2.32

Результат будет выглядеть следующим образом (рис. 2.33).

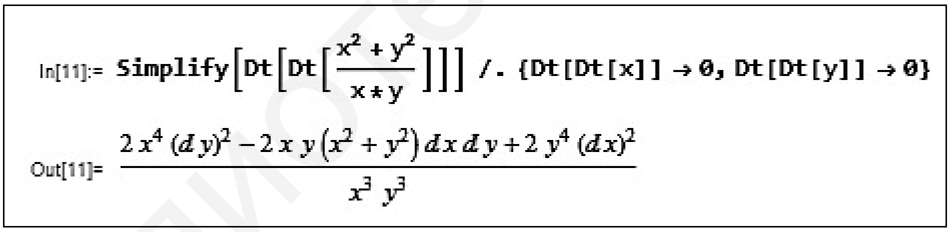


Рис. 2.33

Задания для самостоятельной работы

1. Вычислить значения частных производных первого порядка функции $u(x,y,z)=4xy^2\sin z$ в точке $A\left(-1;\ 1;\ \dfrac{\pi}{2}\right)$.

2. Найти частные производные второго порядка:

1) $z(x,y)=x\sin xy+y\cos xy$; 2) $z(x,y)=\ln(\operatorname{tg}(x+y))$;

3) $z(x,y)=7^x(\cos y+2x\sin y)$; 4) $z(x,y)=\cos\left(x-e^y\right)$.

3. Найти дифференциал третьего порядка функции $z=\sin(2x+y)$ в точках $(0;\ \pi)$ и $\left(-\dfrac{\pi}{2};\ \dfrac{\pi}{2}\right)$.

4. Показать, что данные функции удовлетворяют указанным соотношениям:

1) $z(x,y) = y\ln\left(x^2 - y^2\right)$, $\dfrac{z_x'}{x} + \dfrac{z_y'}{y} = \dfrac{z}{y^2}$;

2) $z(x,y) = e^x(x\cos y - y\sin y)$, $z_{xx}'' + z_{yy}'' = 0$;

3) $z(x,y) = \ln\left(e^x + e^y\right)$, $z_x' + z_y' = 1$ и $z_{xx}'' \cdot z_{yy}'' - \left(z_{xy}''\right)^2 = 0$;

4) $z(x,y) = y \cdot \sqrt{\dfrac{y}{x}}$, $x^2 \cdot z_{xx}'' - y^2 \cdot z_{yy}'' = 0$.

5. Найти $\dfrac{dz}{dt}$, если $z = \arcsin\left(\dfrac{x}{y}\right)$, $y = \sqrt{x^2 + 1}$.

6. Найти производную $\dfrac{dy}{dx}$ от функции $y = y(x)$, заданной неявно:

1) $\operatorname{arctg}\dfrac{x+y}{2} - \dfrac{y}{2} = 0$; 2) $x^2 - x \cdot 2^{y+1} + 4^y - x + 2^y + 2 = 0$.

7. Найти приращение функции $z(x,y) = \ln(1 - x + 3y)$ и ее дифференциал при переходе от точки $A(3;1)$ к точке $B(-e-2;-1)$.

8. Заменяя приращение функции дифференциалом, вычислить приближенно: 1) $1{,}02^{3{,}01}$; 2) $\ln\left((0{,}09)^3 + (0{,}99)^3\right)$.

2.4. Приложения дифференцирования функции нескольких переменных

2.4.1. Касательная плоскость и нормаль к поверхности

Пример 2.4.1

Составить уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности эллиптического параболоида $z = x^2 + 3y^2$ в точке $A(-2;\ 1;\ 7)$.

Решение

Уравнение касательной плоскости:

$$F_x'(x_0;y_0;z_0)\cdot(x - x_0) + F_y'(x_0;y_0;z_0)\cdot(y - y_0) + F_z'(x_0;y_0;z_0)\cdot(z - z_0) = 0.$$

Уравнение нормали:

$$\frac{x - x_0}{F_x'(x_0;y_0;z_0)} = \frac{y - y_0}{F_y'(x_0;y_0;z_0)} = \frac{z - z_0}{F_z'(x_0;y_0;z_0)}.$$

Запишем уравнение поверхности в неявном виде: $x^2 + 3y^2 - z = 0$. Таким образом, функция $F(x,y,z) = x^2 + 3y^2 - z$.

Находим частные производные и вычисляем их значения в точке A:

$F_x' = \left(x^2 + 3y^2 - z\right)_x' = 2x$, $F_x'(-2;1;7) = -4$;

$$F_y{}' = \left(x^2 + 3y^2 - z\right)_y{}' = 6y, \; F_y{}'(-2;\, 1;\, 7) = 6;$$

$$F_z{}' = \left(x^2 + 3y^2 - z\right)_z{}' = -1, \; F_z{}'(-2;\, 1;\, 7) = -1.$$

Составляем уравнение касательной плоскости: $-4(x+2) + 6(y-1) - (z-7) = 0$ или $-4x + 6y - z - 7 = 0$ и уравнение нормали к поверхности: $\dfrac{x+2}{-4} = \dfrac{y-1}{6} = \dfrac{z-7}{-1}$.

Вычисления в Mathematica

Введем начальные данные и вычислим значения частных производных в заданной точке (рис. 2.34).

```
In[1]:= F[x_, y_, z_] = x^2 + 3 y^2 - z;
        x1 = -2;
        y1 = 1;
        z1 = 7;
        A1 = D[F[x, y, z], x] /. x → x1;
        B1 = D[F[x, y, z], y] /. y → y1;
        C1 = D[F[x, y, z], z] /. x → z1;
```

Рис. 2.34

Найдем уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности (рис. 2.35).

```
In[8]:= Expand[A1 (x - x1) + B1 (y - y1) + C1 (z - z1) == 0]

Out[8]= -7 - 4 x + 6 y - z == 0

                 (x - x1) // TraditionalForm      ""
In[9]:= Print[           "__"                    "=" // TableForm,
                         A1                       ""
           (y - y1) // TraditionalForm      ""
                   "__"                    "=" // TableForm,
                   B1                       ""
           (z - z1) // TraditionalForm
                   "__"                    // TableForm]
                   C1

        x + 2      y - 1      z - 7
        ___       =___       =___
        -4         6          -1
```

Рис. 2.35

Рисунок поверхности и касательной плоскости (рис. 2.36).

```
In[10]:= Show[ContourPlot3D[
           {x^2 + 3 * y^2 - z = 0, -7 - 4 x + 6 y - z = 0},
           {x, -8, 4}, {y, -5, 7}, {z, 0, 14}, AxesLabel → {x, y, z},
           Mesh → None, PlotPoints → 30]]
```

Out[10]=

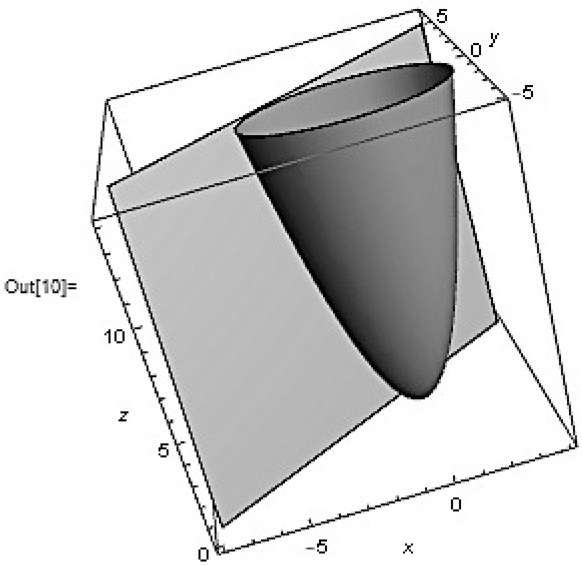


Рис. 2.36

2.4.2. Производная в данном направлении и градиент функции

Пример 2.4.2

Вычислить производную функции $u = x^2 + y^2 + \frac{x}{y} + \frac{1}{z}$ в точке $M(1;1;1)$ в направлении:

1) идущем из точки M в точку $K(5;1;4)$;

2) составляющим с осями координат углы $\alpha = \frac{\pi}{3}$, $\beta > \frac{\pi}{2}$, $\gamma = \frac{\pi}{4}$.

Решение

Производная от функции $u = f(x, y, z)$ в точке $M(x_0, y_0, z_0)$ по любому направлению $\vec{l}$ вычисляется по следующей формуле:

$$u_l'(x_0, y_0, z_0) = u_x'(x_0, y_0, z_0)\cos\alpha + u_y'(x_0, y_0, z_0)\cos\beta + u_z'(x_0, y_0, z_0)\cos\gamma,$$

где $\cos\alpha = \frac{l_x}{|\vec{l}|}$, $\cos\beta = \frac{l_y}{|\vec{l}|}$, $\cos\gamma = \frac{l_z}{|\vec{l}|}$ – направляющие косинусы вектора $\vec{l}$ и $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$.

1) Найдем частные производные функции $u = x^2 + y^2 + \frac{x}{y} + \frac{1}{z}$ и вычислим их значения в точке M:

$$u_x{}' = \left(x^2 + y^2 + \frac{x}{y} + \frac{1}{z}\right)_x{}' = 2x + \frac{1}{y},\ u_y{}' = \left(x^2 + y^2 + \frac{x}{y} + \frac{1}{z}\right)_y{}' = 2y - \frac{x}{y^2},$$

$$u_z{}' = \left(x^2 + y^2 + \frac{x}{y} + \frac{1}{z}\right)_z{}' = -\frac{1}{z^2};$$

$$u_x{}'(M) = u_x{}'(1;1;1) = 2\cdot 1 + \frac{1}{1} = 3,\ u_y{}'(M) = u_y{}'(1;1;1) = 2\cdot 1 - \frac{1}{1^2} = 1;$$

$$u_z{}'(M) = u_z{}'(1;1;1) = -\frac{1}{1^2} = -1.$$

Для нахождения направляющих косинусов находим координаты и длину вектора $\overrightarrow{MK}$:

$$\vec{l} = \overrightarrow{MK} = (5-1; 1-1; 4-1) = (4;\ 0;\ 3);\ \left|\vec{l}\right| = \sqrt{4^2 + 0^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5.$$

Тогда $\cos\alpha = \frac{4}{5}$, $\cos\beta = 0$, $\cos\gamma = \frac{3}{5}$.

Итак, $u_l{}'(M) = 3\cdot\frac{4}{5} + 1\cdot 0 + (-1)\cdot\frac{3}{5} = \frac{9}{5}$.

2) По условию $\alpha = \frac{\pi}{3}$, $\gamma = \frac{\pi}{4}$, следовательно, $\cos\alpha = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$, $\cos\gamma = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Так как угол $\beta > \frac{\pi}{2}$, то из равенства $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$ получим

$$\cos\beta = -\sqrt{1 - \cos^2\alpha - \cos^2\gamma} = -\sqrt{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = -\sqrt{1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{2}} = -\frac{1}{2}.$$

Тогда $u_l{}'(M) = 3\cdot\frac{1}{2} + 1\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) - 1\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{2-\sqrt{2}}{2} \approx 0{,}29$.

Вычисления в Mathematica

1) Для решения данной задачи можно последовательно выполнить с помощью **Mathematica** действия, описанные выше. Но рациональнее воспользоваться встроенными функциями. Кроме того, уместно вспомнить, что производная по направлению равна скалярному произведению градиента функции на единичный вектор направления.

Введем начальные данные и найдем производную по направлению (рис. 2.37).

```
In[1]:= u[x_, y_, z_] = x^2 + y^2 + x/y + 1/z;
        M = {1, 1, 1};
        K = {5, 1, 4};
        g = Grad[u[x, y, z], {x, y, z}] /.
            {x → M[[1]], y → M[[2]], z → M[[3]]};
        l = K – M;
        g. Normalize[l];
        Print["Решение:"]
        Print["gradu⃗|M=", g]
        Print["l⃗0=", Normalize[l]]
        Print["∂u/∂l (M) =", g. Normalize[l]]
```

Рис. 2.37

В результате получим (рис. 2.38).

```
Решение:
gradu⃗|M={3, 1, -1}
l⃗0={4/5, 0, 3/5}
∂u/∂l (M) = 9/5
```

Рис. 2.38

2) Найдем производную по направлению (рис. 2.39).

```
α = π/3;
γ = π/4;
l1 = {Cos[α], –Sqrt[1 – Cos[α]^2 – Cos[γ]^2], Cos[γ]};
Print["Решение:"]
Print["l⃗0=", l1]
Print["∂u/∂l (M) =", g.l1]
```

Рис. 2.39

Результат работы программы (рис. 2.40).

```
Решение:
l⃗0={1/2, -1/2, 1/√2}
∂u/∂l (M) =1 - 1/√2
```

Рис. 2.40

Пример 2.4.3

Найти наибольшее значение производной по направлению для функции $z=\ln\left(x^2+4y^2\right)$ в точке $M(6;4)$.

Решение

Производная в данной точке по направлению вектора $\vec{l}$ имеет наибольшее значение, если направление вектора $\vec{l}$ совпадает с направлением градиента. Это наибольшее значение производной равно $\left|\overrightarrow{\mathrm{grad} z}\right|$.

Найдем градиент функции z: $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, z=\left\{z_x', z_y'\right\}$ в данной точке $M(6;4)$. Координаты вектора $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, z$ можно найти, если вычислить значения частных производных z_x' и z_y' в точке M:

$$z_x'=\left(\ln\left(x^2+4y^2\right)\right)_x'=\frac{2x}{x^2+4y^2},\ z_x'(6;4)=\frac{2\cdot 6}{6^2+4\cdot 4^2}=\frac{12}{100}=\frac{3}{25};$$

$$z_y'=\left(\ln\left(x^2+4y^2\right)\right)_y'=\frac{8y}{x^2+4y^2},\ z_y'(6;4)=\frac{8\cdot 4}{6^2+4\cdot 4^2}=\frac{32}{100}=\frac{8}{25}.$$

Тогда $\left.\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, z\right|_M=\frac{3}{25}\vec{i}+\frac{8}{25}\vec{j}$.

Наибольшее значение производной в точке $M(6;4)$:

$$\max z_l'=\left.\left|\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, z\right|\right|_M=\left.\sqrt{\left(z_x'\right)^2+\left(z_y'\right)^2}\right|_M=\sqrt{\left(\frac{3}{25}\right)^2+\left(\frac{8}{25}\right)^2}=\frac{\sqrt{73}}{25}.$$

Вычисления в Mathematica

Решение сводится к вычислению градиента и его абсолютного значения (рис. 2.41).

```
In[24]:= u[x_, y_] = Log[x^2 + 4 y^2];
         Print["grad⃗u|M= ", Grad[u[x, y], {x, y}] /. {x → 6, y → 4}]
         Print["max ∂u/∂l (M) = ",
           Norm[Grad[u[x, y], {x, y}] /. {x → 6, y → 4}]]

grad⃗u|M= {3/25, 8/25}

max ∂u/∂l (M) = √73/25
```

Рис. 2.41

Задания для самостоятельной работы

1. Составить уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности S в заданной точке M:

1) S: $4y^2 - z^2 + 4xy - xz + 3z = 9, \quad M(1;-2;1)$;

2) S: $u(x, y, z) = y + \ln\dfrac{x}{z}, \quad M(1;1;1)$;

3) S: $z(x, y) = \sin x \cos y, \quad M\left(\dfrac{\pi}{4};\dfrac{\pi}{4};\dfrac{1}{2}\right)$.

2. Найти величину и направление градиента функции $u(x, y, z) = \operatorname{tg} x - x + 3\sin y - 3\sin^3 y + z + \operatorname{ctg} z$ в точке $N\left(\dfrac{\pi}{4};\dfrac{\pi}{3};\dfrac{\pi}{2}\right)$.

3. Найти производную функции $z(x, y) = \dfrac{y}{y - x}$ по направлению, составляющему угол в 60° с осью Ox, в точке $(1;3)$.

4. Найти точку, в которой градиент функции $z(x, y) = \ln\left(x + \dfrac{1}{y}\right)$ равен $\vec{i} - \dfrac{16}{9}\vec{j}$.

5. Найти наибольшую скорость возрастания функции $z(x, y) = \arcsin\dfrac{x}{x + y}$ в точке $P(1;1)$.

2.5. Экстремум функции двух переменных

Пример 2.5.1

Исследовать на экстремум функцию $z(x, y) = xy - y^2x - x^2y$.

Решение

1. Найдем частные производные первого порядка:

$$z'_x = \left(xy - y^2x - x^2y\right)'_x = y - y^2 - 2xy = y(1 - y - 2x);$$

$$z'_y = \left(xy - y^2x - x^2y\right)'_y = x - 2yx - x^2 = x(1 - 2y - x).$$

2. Решим систему уравнений $\begin{cases} z'_x = 0, \\ z'_y = 0 \end{cases}$ и найдем стационарные точки:

$$\begin{cases} y(1 - y - 2x) = 0, \\ x(1 - 2y - x) = 0. \end{cases}$$

Из первого уравнения: $y(1 - y - 2x) = 0 \;\Rightarrow\; y = 0$ или $y = 1 - 2x$.

При $y=0$ из второго уравнения находим, что $x(1-x)=0$, т. е. $x=0$ или $x=1$.

При $y=1-2x$ из второго уравнения получаем

$x(1-2(1-2x)-x)=0$, или $x(1-2+4x-x)=0$, или $x(3x-1)=0$, т. е. $x=0$ или $x=\frac{1}{3} \Rightarrow y=1$ или $y=\frac{1}{3}$.

Таким образом, функция $z(x,y)$ имеет четыре стационарные точки:

$$M_1(0;0),\quad M_2(1;0),\quad M_3(0;1),\quad M_4\left(\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right).$$

3. Проверим выполнение достаточного условия экстремума для каждой стационарной точки:

1) Найдем частные производные второго порядка:

$$z''_{xx}=(z'_x)'_x=\left(y-y^2-2xy\right)'_x=-2y,\ z''_{yy}=\left(z'_y\right)'_y=\left(x-2yx-x^2\right)'_y=-2x;$$

$$z''_{xy}=z''_{yx}=(z'_x)'_y=\left(y-y^2-2xy\right)'_y=1-2y-2x.$$

2) Вычислим значения частных производных z''_{xx}, z''_{yy}, z''_{xy} в каждой стационарной точке и, используя достаточные условия, сделаем вывод о наличии экстремума.

Для точки $M_1(0;0)$:

$A=z''_{xx}(0;0)=-2\cdot 0=0$; $\qquad B=z''_{xy}(0;0)=1-2\cdot 0-2\cdot 0=1$;
$C=z''_{yy}(0;0)=-2\cdot 0=0$.

Так как $\Delta=\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}=AC-B^2=0\cdot 0-1^2=-1<0,$ то в точке $M_1(0;0)$ экстремума нет.

Для точки $M_2(1;0)$:

$A=z''_{xx}(1;0)=-2\cdot 0=0$; $\qquad B=z''_{xy}(1;0)=1-2\cdot 0-2\cdot 1=-1$;
$C=z''_{yy}(1;0)=-2\cdot 1=-2$.

Следовательно, $\Delta=\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}=AC-B^2=0\cdot(-2)-(-1)^2=-1<0$ и функция $z(x,y)$ в точке M_2 экстремума не имеет.

Для точки $M_3(0;1)$:

$A=z''_{xx}(0;1)=(-2)\cdot 1=-2$, $B=z''_{xy}(0;1)=1-2\cdot 1-2\cdot 0=-1$,
$C=z''_{yy}(0;1)=-2\cdot 0=0$.

Значит, $\Delta=AC-B^2=(-2)\cdot 0-(-1)^2=-1<0$ и экстремума нет.

Для точки $M_4\left(\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right)$:

$$A = z''_{xx}\left(\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right) = -2\cdot\frac{1}{3} = -\frac{2}{3};\ B = z''_{xy}\left(\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right) = 1 - 2\cdot\frac{1}{3} - 2\cdot\frac{1}{3} = -\frac{1}{3};$$

$$C = z''_{yy}\left(\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right) = -2\cdot\frac{1}{3} = -\frac{2}{3}.$$

Следовательно, $\Delta = AC - B^2 = \left(-\frac{2}{3}\right)\cdot\left(-\frac{2}{3}\right) - \left(-\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{4}{9} - \frac{1}{9} = \frac{1}{3} > 0$.

В силу достаточного условия экстремума в точке M_4 функция имеет максимум, т. к. в этой точке $\Delta > 0$ и $A < 0$.

Итак, $M_4\left(\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right)$ – точка локального максимума.

3) Найдем значение функции в точке M_4:

$$z_{\max}\left(\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3} - \left(\frac{1}{3}\right)^2\cdot\frac{1}{3} - \left(\frac{1}{3}\right)^2\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{9} - \frac{1}{27} - \frac{1}{27} = \frac{1}{27}.$$

Вычисления в Mathematica

Составим программу для определения экстремумов функции.

Введем функцию, найдем стационарные точки и вычислим определитель от частных производных второго порядка (рис. 2.42).

```
In[1]:= z1[x_, y_] = x*y - y^2*x - x^2*y;
        (*Находим стационарные точки:*)
        k = Solve[{D[z1[x, y], x] = 0, D[z1[x, y], y] = 0}, {x, y}, Reals];
        (*Определяем количество стационарных точек:*)
        l := Dimensions[k]
        (*Вычисляем определители:*)
        hh = (Derivative[2, 0][z1][x, y]) (Derivative[0, 2][z1][x, y]) -
             (Derivative[1, 1][z1][x, y])^2 /. k;
```

Рис. 2.42

Исследуем функцию на экстремум в стационарных точках (рис. 2.43).

```
Print["Решение:"]
(*Исследуем на экстремум функцию:*)
If[l[[1]] = 0, Print["Функция не имеет экстремумов"]]
For[i = 0, i ≤ l[[1]], i++,
 Which[hh[[i]] < 0, Print["При", k[[i]], " Δ", i, "=", hh[[i]],
    " ⇒экстремума нет"], hh[[i]] > 0,
   Print["При", k[[i]], " Δ", i, "=", hh[[i]],
     " ⇒экстремум есть и равен:"] &&
    If[(Derivative[2, 0][z1][x, y] /. k[[i]]) > 0,
     Print["Zmin=", z1[x, y] /. k[[i]]],
     Print["Zmax=", z1[x, y] /. k[[i]]]], hh[[i]] == 0,
   Print["При", k[[i]], " Δ", i, "=", hh[[i]],
    " ⇒нужны дополнительные исследования"]]]
```

Рис. 2.43

В результате получим (рис. 2.44).

Решение:

При$\{x \to 0,\ y \to 0\}$ Δ1=-1 ⇒экстремума нет

При$\{x \to 0,\ y \to 1\}$ Δ2=-1 ⇒экстремума нет

При$\left\{x \to \frac{1}{3},\ y \to \frac{1}{3}\right\}$ Δ3=$\frac{1}{3}$ ⇒экстремум есть и равен:

Zmax=$\frac{1}{27}$

При$\{x \to 1,\ y \to 0\}$ Δ4=-1 ⇒экстремума нет

Рис. 2.44

Зададим в **Mathematica** изображение графика функции и стационарных точек (рис. 2.45).

```
In[10]:= Show[Graphics3D[{PointSize[0.05], Black, Point[{{1/3, 1/3, 1/27}}]},
           PlotRange → 1],
          Graphics3D[{PointSize[0.03], Black,
            Point[{{0, 0, 0}, {1, 0, 0}, {0, 1, 0}}]}, PlotRange → 1],
          Plot3D[{z1[x, y]}, {x, -1, 1}, {y, -1, 1}, PlotStyle -> Opacity[1]]]
```

Рис. 2.45

На рис. 2.46 изображен график функции. Более крупно изображена точка экстремума.

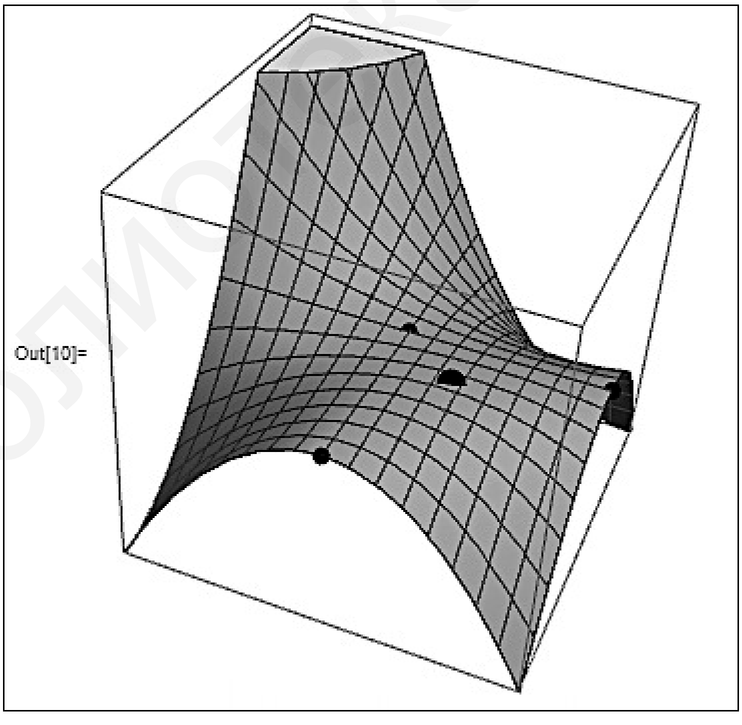


Рис. 2.46

Пример 2.5.2

Найти экстремум функции $z = 5 - 3x + 4y$ при условии $x^2 + y^2 = 1$.

Решение

Геометрически задача сводится к нахождению наибольшего и наименьшего значений z плоскости $z(x, y) = 5 - 3x + 4y$ для точек пересечения ее с цилиндром $x^2 + y^2 = 1$.

Задачу выполняем в следующем порядке:

1) Составляем функцию Лагранжа:

$F(x, y, \lambda) = z(x, y) + \lambda \cdot \varphi(x, y)$, где $\varphi(x, y)$ – уравнение связи.

Уравнение связи запишем в виде $x^2 + y^2 - 1 = 0$. Тогда функция Лагранжа имеет вид

$$F(x, y, \lambda) = 5 - 3x + 4y + \lambda \cdot (x^2 + y^2 - 1).$$

2) Находим точки, где возможен условный экстремум этой функции, решая соответствующую систему: $\begin{cases} F'_x = 0, \\ F'_y = 0, \\ F'_\lambda = 0. \end{cases}$

Найдем частные производные:

$$F'_x = \left((5 - 3x + 4y) + \lambda \cdot (x^2 + y^2 - 1)\right)'_x = -3 + 2x\lambda,$$

$$F'_y = \left((5 - 3x + 4y) + \lambda \cdot (x^2 + y^2 - 1)\right)'_y = 4 + 2y\lambda,$$

$$F'_\lambda = \left((5 - 3x + 4y) + \lambda \cdot (x^2 + y^2 - 1)\right)'_\lambda = x^2 + y^2 - 1.$$

Составим систему уравнений: $\begin{cases} -3 + 2x\lambda = 0, \\ 4 + 2y\lambda = 0, \\ x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{cases}$ или $\begin{cases} x = \dfrac{3}{2\lambda}, \\ y = -\dfrac{4}{2\lambda} = -\dfrac{2}{\lambda}, \\ x^2 + y^2 - 1 = 0. \end{cases}$

Подставляя найденные значения x и y в третье уравнение, получим $\left(\dfrac{3}{2\lambda}\right)^2 + \left(-\dfrac{2}{\lambda}\right)^2 - 1 = 0$, $\dfrac{9}{4\lambda^2} + \dfrac{4}{\lambda^2} - 1 = 0$,

$$\frac{9 + 16 - 4\lambda^2}{4\lambda^2} = 0 \Rightarrow \begin{cases} 25 - 4\lambda^2 = 0, \\ 4\lambda^2 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -\dfrac{5}{2}, \\ \lambda_2 = \dfrac{5}{2}. \end{cases}$$

Подставляя значения λ_1 и λ_2 в уравнения $x = \dfrac{3}{2\lambda}$ и $y = -\dfrac{2}{\lambda}$, получим

$$\lambda_1 = -\frac{5}{2},\ x_1 = \frac{3}{2\cdot\left(-\frac{5}{2}\right)} = -\frac{3}{5},\ \ y_1 = -\frac{2}{-\frac{5}{2}} = \frac{4}{5};$$

$$\lambda_2 = \frac{5}{2},\ \ x_2 = \frac{3}{5},\ \ y_2 = -\frac{4}{5}.$$

Таким образом, имеем две стационарные точки: $M_1\left(-\frac{3}{5};\frac{4}{5}\right)$ и $M_2\left(\frac{3}{5};-\frac{4}{5}\right)$.

3) Исследуем существование экстремума в точках M_1 и M_2. Для этого находим частные производные второго порядка функции Лагранжа и используем достаточное условие:

$$\begin{cases} \text{если } \Delta = AC - B^2 > 0 \Rightarrow \begin{cases} A > 0 - \text{условный минимум,} \\ A < 0 - \text{условный максимум;} \end{cases} \\ \text{если } \Delta \le 0 - \text{требуются дополнительные исследования.} \end{cases}$$

Частные производные равны:

$$A = F''_{xx} = \left(F'_x\right)'_x = \left(-3 + 2x\lambda\right)'_x = 2\lambda;\ B = F''_{xy} = \left(F'_x\right)'_y = \left(-3 + 2x\lambda\right)'_y = 0;$$

$$C = F''_{yy} = \left(F'_y\right)'_y = \left(4 + 2y\lambda\right)'_y = 2\lambda.$$

Тогда $\Delta = AC - B^2 = 2\lambda\cdot 2\lambda - 0^2 = 4\lambda^2 > 0$. Так как $\Delta > 0$, то в обеих точках M_1 и M_2 имеется условный экстремум.

Для точки $M_1\left(-\frac{3}{5};\frac{4}{5}\right)$: $A = 2\lambda_1 = 2\cdot\left(-\frac{5}{2}\right) = -5 < 0 \Rightarrow$ M_1 – точка условного максимума.

В точке $M_2\left(\frac{3}{5};-\frac{4}{5}\right)$: $A = 2\lambda_2 = 2\cdot\frac{5}{2} = 5 > 0 \Rightarrow$ M_2 – точка условного минимума.

4) Находим значения функции в точках M_1 и M_2:

$$z_{\max}\left(-\frac{3}{5};\frac{4}{5}\right) = 5 - 3\cdot\left(-\frac{3}{5}\right) + 4\cdot\frac{4}{5} = 10,$$

$$z_{\min}\left(\frac{3}{5};-\frac{4}{5}\right) = 5 - 3\cdot\frac{3}{5} + 4\cdot\left(-\frac{4}{5}\right) = 0.$$

Вычисления в Mathematica

Используем функции **Minimize** и **Maximize** (рис. 2.47).

```
In[1]:= z1 = 5 - 3 x + 4 y;
        Print["Минимальное значение функции:"]
        Print[Minimize[{z1, x^2 + y^2 == 1}, {x, y}, Reals]]
        Print["Максимальное значение функции:"]
        Maximize[{z1, x^2 + y^2 == 1}, {x, y}, Reals]
```

Рис. 2.47

Получим следующий результат (рис. 2.48).

Минимальное значение функции:

$\left\{0, \left\{x \to \frac{3}{5}, y \to -\frac{4}{5}\right\}\right\}$

Максимальное значение функции:

$\left\{10, \left\{x \to -\frac{3}{5}, y \to \frac{4}{5}\right\}\right\}$

Рис. 2.48

Опишем в **Mathematica** построение цилиндрической поверхности и плоскости (рис. 2.49).

```
In[6]:= Show[ParametricPlot3D[{Sin[t], Cos[t], u}, {t, 0, 2 Pi}, {u, -1, 11},
          ExclusionsStyle → {None, Red}, Mesh → None,
          PlotStyle → Directive[Green, Opacity[0.3]]],
        Plot3D[{5 - 3 x + 4 y}, {x, -17, 17}, {y, -17, 17},
          PlotStyle → Directive[Yellow]], AxesLabel → {x, y, z}]
```

Рис. 2.49

На рис. 2.50 изображена цилиндрическая поверхность и плоскость, на пересечении которых получается эллипс.

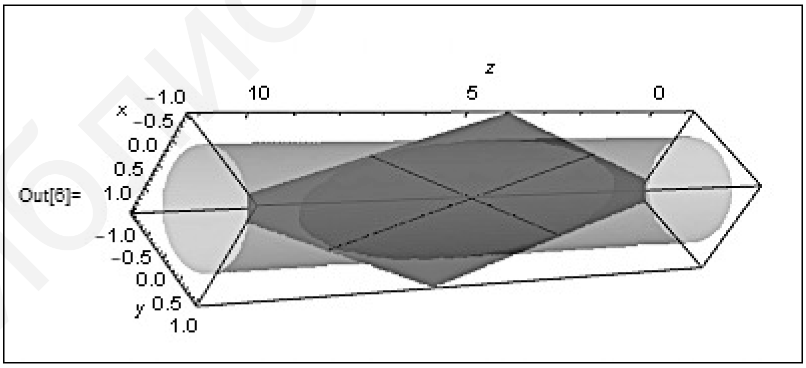


Рис. 2.50

Пример 2.5.3

Определить наибольшее и наименьшее значения функции $z(x, y) = x^3 - 2xy + 3y^2$ в замкнутой области $\overline{D}$: $x = 0$, $y = 2$, $y = \frac{x^2}{2}$ $(x \geq 0)$.

Решение

1) Построим $\overline{D}$ (рис. 2.51).

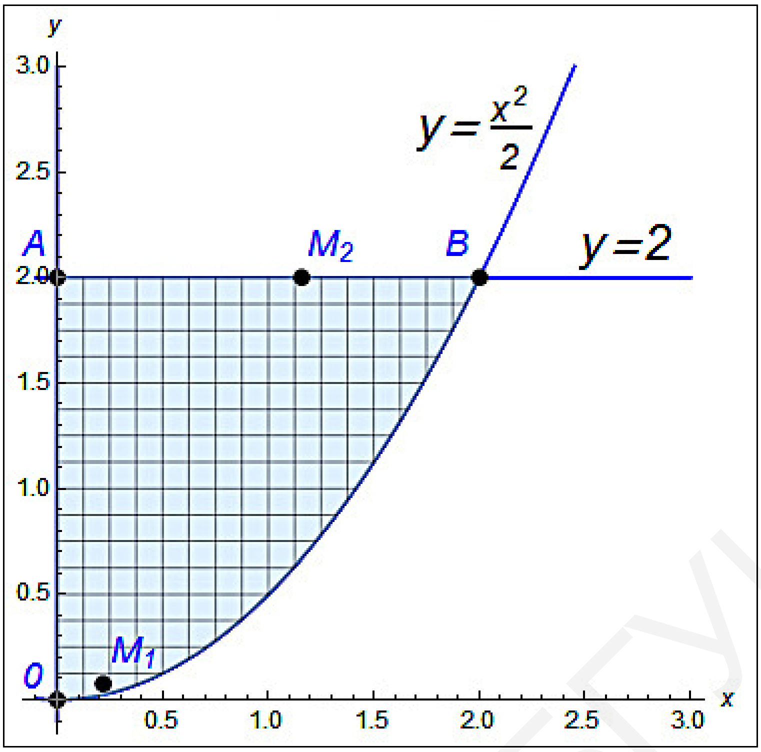


Рис. 2.51

2) Найдем стационарные точки из системы уравнений:

$$\begin{cases} z'_x = 3x^2 - 2y = 0, \\ z'_y = -2x + 6y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0, \\ y = 0 \end{cases} \text{или} \begin{cases} x = \dfrac{2}{9}, \\ y = \dfrac{2}{27}. \end{cases}$$

Получили две стационарные точки $O(0;0)$ и $M_1\left(\frac{2}{9};\frac{2}{27}\right)$. Точка O лежит на границе области, точка M_1 – внутри области $\overline{D}$.

Вычислим значения функции в точках O и M_1:

$z_1 = z(O) = z(0;0) = 0$,

$$z_2 = z(M_1) = z\left(\frac{2}{9};\frac{2}{27}\right) = \left(\frac{2}{9}\right)^3 - 2\cdot\frac{2}{9}\cdot\frac{2}{27} + 3\cdot\left(\frac{2}{27}\right)^2 = \frac{8}{729} - \frac{8}{243} + \frac{12}{729} =$$

$$= \frac{-4}{729} \approx -0{,}005.$$

3) Исследуем функцию $z(x,y)$ на границе области $\overline{D}$, состоящей из отрезков OA, AB и дуги OB. Кроме того, необходимо учесть и концы отрезков, и дуги, т. е. точки O, A, B:

а) На отрезке OA $x = 0$.

Подставим $x = 0$ в z: $z = 0^3 - 2\cdot 0\cdot y + 3y^2 = 3y^2$, $0 \le y \le 2$. Получили функцию одной переменной.

Попробуем найти стационарную точку на этом отрезке. Для этого найдем z'_y и приравняем к нулю: $z'_y = 6y = 0 \;\Rightarrow\; y = 0$. Следовательно, получили точку $(0;0)$.

На концах отрезка OA $z_3 = z(A) = z(0;2) = 0^3 - 2\cdot 0\cdot 2 + 3\cdot 2^2 = 12$.

Значение функции в точке $O(0;0)$ уже найдено: $z_1 = 0$.

б) На отрезке AB $y = 2$ и $0 \le x \le 2$.

Тогда $z = x^3 - 2x\cdot 2 + 3\cdot 2^2 = x^3 - 4x + 12$. Исследуем эту функцию одной переменной на наибольшее и наименьшее значения на отрезке $[0;2]$:

$$z'_x = \left(x^3 - 4x + 12\right)'_x = 3x^2 - 4 = 0 \;\Rightarrow\; x = \pm\frac{2}{\sqrt{3}} \text{ и только } x = \pm\frac{2}{\sqrt{3}} \in [0;2].$$

Итак, $M_2\left(\frac{2}{\sqrt{3}};2\right)$ – стационарная точка и $z_4 = z(M_2) = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^3 -$

$$-2\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}\cdot 2 + 3\cdot 2^2 = \frac{8}{3\sqrt{3}} - \frac{8}{\sqrt{3}} + 12 = = 12 - \frac{16}{3\sqrt{3}} = 12 - \frac{16\sqrt{3}}{9}.$$

В точке B $z_5 = z(B) = z(2;2) = 2^3 - 2\cdot 2\cdot 2 + 3\cdot 2^2 = 8 - 8 + 12 = 12$.

в) На дуге OB $y = \frac{x^2}{2}$, $0 \le x \le 2$.

Получим функцию одной переменной x:

$$z = x^3 - 2\cdot x\cdot\frac{x^2}{2} + 3\left(\frac{x^2}{2}\right)^2 = x^3 - x^3 + 3\frac{x^4}{4} = \frac{3}{4}x^4.$$

Найдем стационарную точку на этой дуге:

$$z'_x = \left(\frac{3}{4}x^4\right)'_x = 3x^3 \;\Rightarrow\; x = 0 \in [0;2].$$

Следовательно, $y = 0$. Точка $(0;0)$ совпадает с точкой $O(0;0)$ и значение функции равно нулю. Значения функции на концах дуги OB (в точках O и B) вычислены ранее.

4) Сравнивая все найденные значения функции z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, делаем вывод, что в заданной области $\overline{D}$ функция $z(x,y)$ принимает наименьшее значение $\frac{-4}{729}$ в точке $M_1\left(\frac{2}{9};\frac{2}{27}\right)$. Наибольшее значение, равное 12, функция принимает в точках $A(0;2)$ и $B(2;2)$.

Вычисления в Mathematica

Зададим функцию и укажем область. Для определения наибольшего и наименьшего значения функции в указанной области воспользуемся функциями **Minimize** и **Maximize** (рис. 2.52).

```
In[1]:= z1 = x^3 - 2 x * y + 3 y^2;
        Print["Наименьшее значение функции в области D:"]
        Print[Minimize[{z1, 0 ≤ x ≤ 2 && 2 ≥ y ≥ (x^2) / 2},
          {x, y}, Reals]]
        Print["Наибольшее значение функции в области D:"]
        Maximize[{z1, 0 ≤ x ≤ 2 && 2 ≥ y ≥ (x^2) / 2}, {x, y},
         Reals]

        Наименьшее значение функции в области D:
        {-4/729, {x → 2/9, y → 2/27}}
        Наибольшее значение функции в области D:
Out[5]= {12, {x → 0, y → 2}}
```

Рис. 2.52

Вычислим значения функции $z(x, y) = x^3 - 2xy + 3y^2$ в точках пересечения графиков функций, ограничивающих область D (рис. 2.53).

```
In[6]:= Print["Значения функции в узловых точках:"]
        Print["z(0;0)=", z1 /. {x → 0, y → 0}]
        Print["z(2;2)=", z1 /. {x → 2, y → 2}]
        Print["z(0;2)=", z1 /. {x → 0, y → 2}]

        Значения функции в узловых точках:
        z(0;0)=0
        z(2;2)=12
        z(0;2)=12
```

Рис. 2.53

Изобразим часть поверхности, описываемой функцией $z(x, y) = x^3 - 2xy + 3y^2$, в указанной области (рис. 2.54).

```
Show[Plot3D[z1, {x, -0.1, 2.1}, {y, -0.1, 2.1},
  RegionFunction → Function[{x, y, z}, 0 ≤ x ≤ 2 && 2 ≥ y ≥ (x^2) / 2],
  AxesLabel → {x, y, z}],
 Graphics3D[{PointSize[0.04], Black,
   Point[{{0, 2, 12}, {2, 2, 12}, {2/9, 2/27, -4/729}}]}], PlotRange → 1]]
```

Рис. 2.54

На поверхности также видны точки, соответствующие наибольшему и наименьшему значению функции (рис. 2.55).

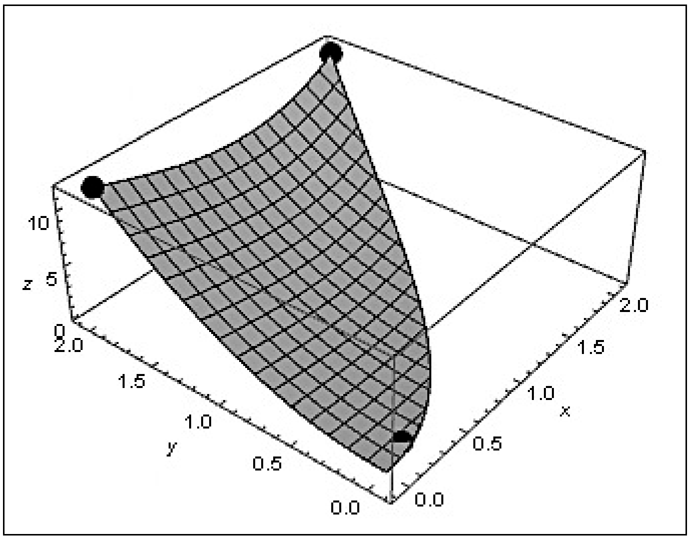


Рис. 2.55

Задания для самостоятельной работы

1. Исследовать функции на экстремум:

1) $z(x,y)=e^{-\left(x^2+y^2\right)}$; 2) $z(x,y)=5(x-y)-x^2-y^2$;

3) $z(x,y)=xy\ln\left(x^2+y^2\right)$; 4) $z(x,y)=x^2-4x\sqrt{y}-2x+5y$.

2. Убедиться, что функция $z(x,y)=x^4-4xy+y^4-2x^2-2y^2$ имеет минимум в точках $\left(\sqrt{2};\sqrt{2}\right)$ и $\left(-\sqrt{2};-\sqrt{2}\right)$.

3. Исследовать функции $z(x,y)$ на условный экстремум при указанных условиях связи $\varphi(x,y)=0$:

1) $z(x,y)=4x^2-10y^2,\ x+5y-16=0$;

2) $z(x,y)=x+2y,\ x^2+y^2=5$;

3) $z(x,y)=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y},\ x+y=2$;

4) $z(x,y)=2x^2+3y^2+xy-6x+4y-20,\ 2x+y=7$.

4. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z=z(x,y)$ в области $\overline{D}$, ограниченной заданными линиями:

1) $z(x,y)=x^2+2xy-y^2-4x,\ \overline{D}:\ x-y+1=0,\ x=3,\ y=0$;

2) $z(x,y)=xy+x+y,\ \overline{D}:\ x\ge 1,\ x\le 2,\ y\ge 2,\ y\le 3$;

3) $z(x,y)=e^{-x^2}-y^2\cdot\left(2x^2+3y^2\right),\ \overline{D}:\ x^2+y^2\le 4$;

4) $z(x,y)=\dfrac{xy}{2}-\dfrac{x^2y}{6}-\dfrac{xy^2}{8},\ \overline{D}:\ x\ge 0,\ y\ge 0,\ \dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{4}\le 1$.

3. ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

3.1. Кратные интегралы

Пример 3.1.1

Вычислить двойной интеграл $\iint\limits_D \frac{1}{8}(1+x)ydxdy$, где область D ограничена параболой $y^2 = 2x$ и прямой $y = x - 4$.

Решение

Построим область D: $y^2 = 2x$, $y = x - 4$ (рис. 3.1).

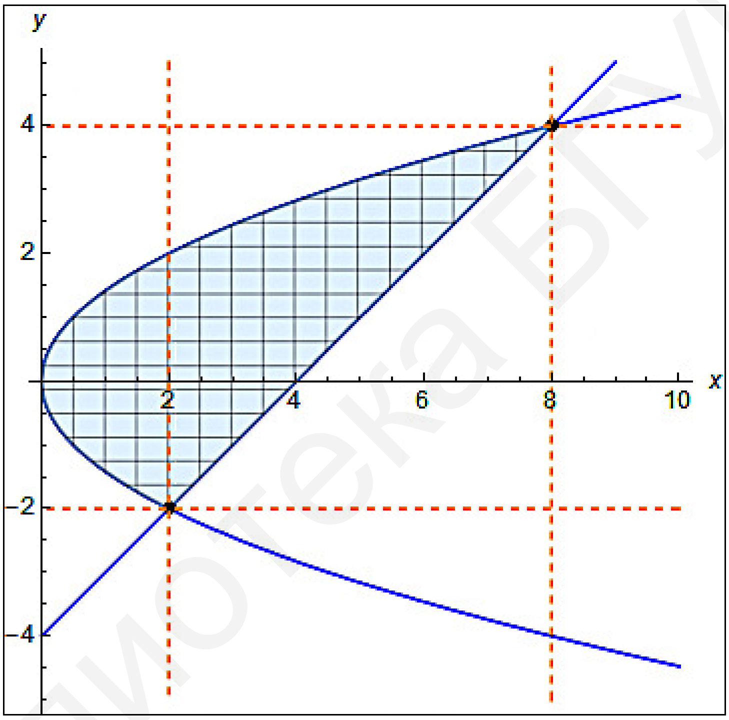


Рис. 3.1

Область D является правильной в направлении оси Ox и оси Oy.

Рассмотрим сначала область D как правильную в направлении оси Oy (рис. 3.2).

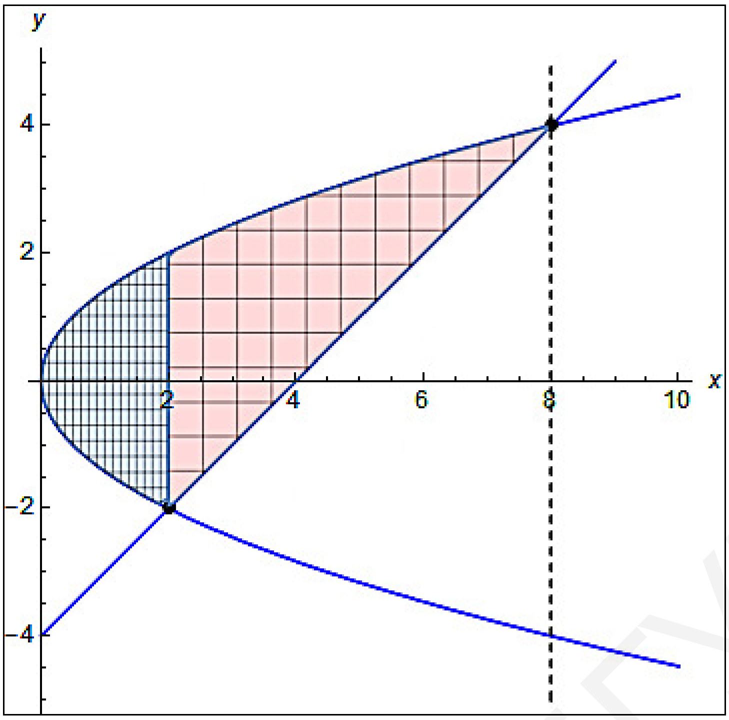


Рис. 3.2

От двойного интеграла перейдем к повторному интегралу и вычисление начинается с вычисления внутреннего интеграла по переменной y:

$$\iint\limits_D \frac{1}{8}(1+x)ydxdy = \frac{1}{8}\cdot\int\limits_0^2 (1+x)dx \int\limits_{-\sqrt{2x}}^{\sqrt{2x}} ydy + \frac{1}{8}\cdot\int\limits_2^8 (1+x)dx \int\limits_{x-4}^{\sqrt{2x}} ydy .$$

Так как $\int\limits_0^2 dx \int\limits_{-\sqrt{2x}}^{\sqrt{2x}} \frac{1}{8}(1+x)ydy = \frac{1}{8}\int\limits_0^2 (1+x)\left(\frac{y^2}{2}\Bigg|_{-\sqrt{2x}}^{\sqrt{2x}}\right)dx =$

$$= \frac{1}{8}\int\limits_0^2 (1+x)(2x-2x)dx = 0,$$

то $\iint\limits_D \frac{1}{8}(1+x)ydxdy = \frac{1}{8}\cdot\int\limits_2^8 (1+x)dx \int\limits_{x-4}^{\sqrt{2x}} ydy = \frac{1}{8}\cdot\int\limits_2^8 \left(\int\limits_{x-4}^{\sqrt{2x}} ydy\right)(1+x)dx =$

$$= \frac{1}{8}\cdot\int\limits_2^8 \left(\frac{y^2}{2}\Bigg|_{x-4}^{\sqrt{2x}}\right)(1+x)dx = \frac{1}{8}\cdot\int\limits_2^8 \left(\frac{\left(\sqrt{2x}\right)^2}{2} - \frac{(x-4)^2}{2}\right)(1+x)dx =$$

$$= \frac{1}{8}\cdot\int\limits_2^8 \left(\frac{2x}{2} - \frac{x^2-8x+16}{2}\right)(1+x)dx = \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{2}\cdot\int\limits_2^8 \left(-x^2+10x-16\right)(1+x)dx =$$

$$= \frac{1}{16}\cdot\int\limits_2^8 \left(-x^2-x^3+10x+10x^2-16-16x\right)dx = \frac{1}{16}\cdot\int\limits_2^8 \left(-x^3+9x^2-6x-16\right)dx =$$

$$= \frac{1}{16}\cdot\left(-\frac{x^4}{4}\Bigg|_2^8 + \frac{9x^3}{3}\Bigg|_2^8 - 6\cdot\frac{x^2}{2}\Bigg|_2^8 - 16x\Bigg|_2^8\right) =$$

$$= \frac{1}{16} \cdot \left(-\frac{1}{4}\left(8^4 - 2^4\right) + 3\left(8^3 - 2^3\right) - 3\left(8^2 - 2^2\right) - 16(8-2) \right) =$$

$$= \frac{1}{16} \cdot \left(-\frac{1}{4} \cdot 4080 + 3 \cdot 504 - 3 \cdot 60 - 16 \cdot 6 \right) = \frac{1}{16} \cdot (-1020 + 1512 - 180 - 96) =$$

$$= \frac{1}{16} \cdot 216 = \frac{27}{2} = 13\frac{1}{2}.$$

Рассмотрим область D как правильную в направлении оси Ox (рис. 3.3).

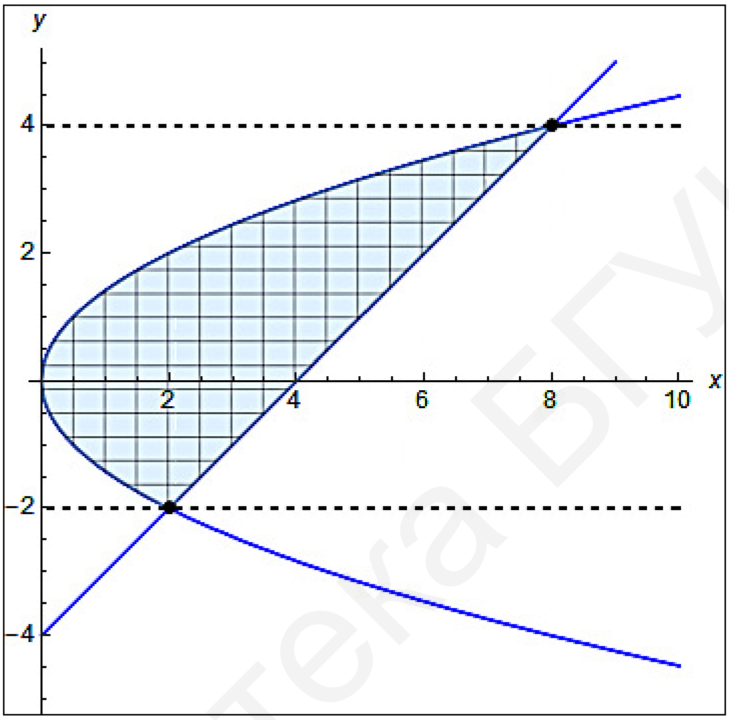


Рис. 3.3

$$\iint\limits_D \frac{1}{8}(1+x)ydxdy = \frac{1}{8} \cdot \int_{-2}^{4} ydydx \int_{\frac{1}{2}y^2}^{y+4} (1+x)dx = \frac{1}{8} \cdot \int_{-2}^{4} \left(\int_{\frac{1}{2}y^2}^{y+4} (1+x)dx \right) ydy =$$

$$= \frac{1}{8} \cdot \int_{-2}^{4} \left(\left. \frac{(1+x)^2}{2} \right|_{\frac{1}{2}y^2}^{y+4} \right) ydy = \frac{1}{8} \cdot \int_{-2}^{4} \left(\frac{1}{2} \cdot \left((1+y+4)^2 - \left(1 + \frac{1}{2}y^2\right)^2 \right) \right) ydy =$$

$$= \frac{1}{16} \cdot \int_{-2}^{4} \left(y^2 + 10y + 25 - 1 - y^2 - \frac{1}{4}y^4 \right) ydy =$$

$$= \frac{1}{16} \cdot \int_{-2}^{4} \left(-\frac{1}{4}y^5 + 10y^2 + 24y \right) ydy = \frac{1}{16} \cdot \left(-\left. \frac{y^6}{4 \cdot 6} \right|_{-2}^{4} + 10 \cdot \left. \frac{y^3}{3} \right|_{-2}^{4} + 24 \cdot \left. \frac{y^2}{2} \right|_{-2}^{4} \right) =$$

$$= \frac{1}{16} \cdot \left(-\frac{1}{24}\left(4^6 - (-2)^6\right) + \frac{10}{3}\left(4^3 - (-2)^3\right) + 12\left(4^2 - (-2)^2\right) \right) =$$

$$= \frac{1}{16} \cdot \left(-\frac{1}{24} \cdot 4032 + \frac{10}{3} \cdot 72 + 12 \cdot 12 \right) = \frac{1}{16} \cdot 216 = \frac{27}{2} = 13\frac{1}{2}.$$

Вычисления в Mathematica

Вычисление данного интеграла можно выполнить несколькими способами. Можно воспользоваться функцией **Integrate[f,{x,x_{min},x_{max}},{y,y_{min},y_{max}},...]**, указав пределы интегрирования для обеих переменных.

Если область правильная в направлении оси *Ox*, то решение имеет следующий вид (рис. 3.4).

```
In[1]:= Integrate[(1 + x)/8 * y, {y, -2, 4}, {x, y^2/2, y + 4}]
Out[1]= 27/2
```

Рис. 3.4

Если область *D* правильная в направлении оси *Oy*, то решение будет следующим (рис. 3.5).

```
In[2]:= Integrate[(1 + x)/8 * y, {x, 0, 2}, {y, -Sqrt[2 x], Sqrt[2 x]}] +
         Integrate[(1 + x)/8 * y, {x, 2, 8}, {y, x - 4, Sqrt[2 x]}]
Out[2]= 27/2
```

Рис. 3.5

Если задать предварительно область интегрирования, то можно вычислить двойной интеграл без перехода к повторному (рис. 3.6).

```
In[3]:= Reg = ImplicitRegion[-2 ≤ y ≤ 4 && (y^2/2) ≤ x ≤ y + 4, {x, y}];
        Integrate[(1 + x)/8 y, {x, y} ∈ Reg]
Out[4]= 27/2
```

Рис. 3.6

Повторный интеграл можно записать с помощью палитры инструментов (рис. 3.7).

In[5]:= $\int_{-2}^{4}\int_{\frac{y^2}{2}}^{y+4}\frac{1+x}{8}*y\,dx\,dy$

Out[5]= $\frac{27}{2}$

In[6]:= $\int_{0}^{2}\int_{-\sqrt{2x}}^{\sqrt{2x}}\frac{1+x}{8}*y\,dy\,dx+\int_{2}^{8}\int_{x-4}^{\sqrt{2x}}\frac{1+x}{8}*y\,dy\,dx$

Out[6]= $\frac{27}{2}$

Рис. 3.7

Пример 3.1.2

Вычислить двойной интеграл $\iint\limits_D \frac{1}{3}dxdy$ по области D: $y^2-4y+x^2=0$, $y^2-8y+x^2=0$, $y=\frac{x}{\sqrt{3}}$, $y=0$ с помощью перехода к полярным координатам.

Решение

Уравнение $y^2-4y+x^2=0 \Rightarrow x^2+(y-2)^2=2^2$ определяет окружность с центром в точке $O(0;2)$ и радиусом $R=2$.

Второе уравнение $y^2-8y+x^2=0$ также определяет окружность $x^2+(y-4)^2=4^2$, центр в точке $O(0;4)$ и $R=4$.

Область D ограничена двумя окружностями $x^2+(y-2)^2=2^2$, $x^2+(y-4)^2=4^2$ и двумя прямыми $y=\frac{x}{\sqrt{3}}$, $y=0$ (рис. 3.8).

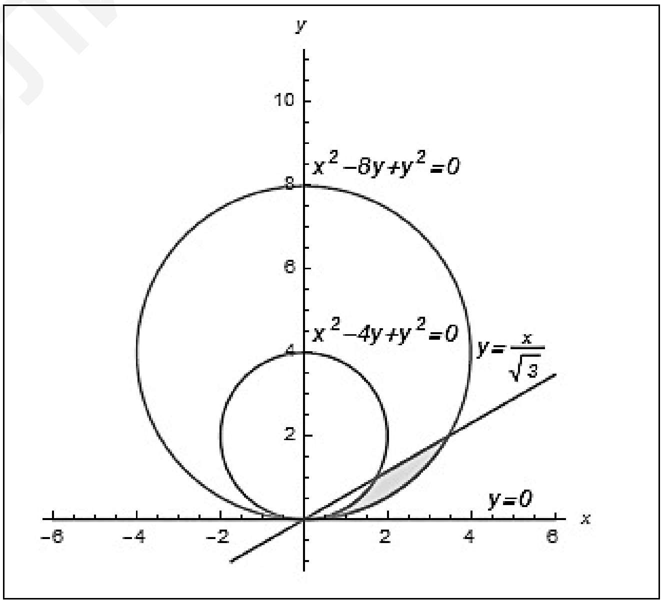


Рис. 3.8

Запишем уравнение линий, ограничивающих область D, в полярных координатах.

Воспользуемся формулами перехода от декартовых координат к полярным координатам $x = r\cos\varphi,\ \ y = r\sin\varphi\ \ (r \ge 0,\ \ 0 \le \varphi \le 2\pi)$:

1) $x^2 - 4y + y^2 = 0 \Rightarrow\ r^2\cos^2\varphi - 4r\sin\varphi + r^2\sin^2\varphi = 0\ \Rightarrow$

$\Rightarrow\ r^2(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) - 4r\sin\varphi = 0\ \Rightarrow\ r = 4\sin\varphi$;

2) $x^2 - 8y + y^2 = 0 \Rightarrow\ r^2\cos^2\varphi - 8r\sin\varphi + r^2\sin^2\varphi = 0\ \Rightarrow$

$\Rightarrow\ \ r^2 - 8r\sin\varphi = 0\ \ \Rightarrow\ \ r = 8\sin\varphi$;

3) $y = 0\ \Rightarrow\ r\sin\varphi = 0\ \ \Rightarrow\ \sin\varphi = 0\ \Rightarrow\ \varphi = 0$;

4) $y = \dfrac{x}{\sqrt{3}}\ \Rightarrow\ r\sin\varphi = \dfrac{r\cos\varphi}{\sqrt{3}}\ \ \Rightarrow\ \operatorname{tg}\varphi = \dfrac{1}{\sqrt{3}}\ \Rightarrow\ \varphi = \dfrac{\pi}{6}$.

Формула вычисления двойного интеграла в полярной системе координат имеет следующий вид:

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int\limits_{r_1}^{r_2} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,rdr\,.$$

В нашем случае $\varphi_1 = 0,\ \ \varphi_2 = \dfrac{\pi}{6},\ \ r_1 = 4\sin\varphi,\ \ r_2 = 8\sin\varphi$.

Итак,

$$\iint\limits_D \frac{1}{3}dxdy = \frac{1}{3}\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}} d\varphi \int\limits_{4\sin\varphi}^{8\sin\varphi} rdr = \frac{1}{3}\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}} \left(\frac{r^2}{2}\Bigg|_{4\sin\varphi}^{8\sin\varphi}\right) d\varphi = \frac{1}{3}\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}} \left(32\sin^2\varphi - 8\sin^2\varphi\right) d\varphi =$$

$$= \frac{1}{3}\cdot 24\cdot \int\limits_0^{\frac{\pi}{6}} \sin^2\varphi\, d\varphi = 8\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}} 1 - \cos 2\varphi\, d\varphi\right) = 4\cdot\left(4\Bigg|_0^{\frac{\pi}{6}} - \frac{1}{2}\sin 2\varphi\Bigg|_0^{\frac{\pi}{6}}\right) = \frac{2}{3}\pi - \sqrt{3}\,.$$

Вычисления в Mathematica

Проанализировав рис. 3.8 и воспользовавшись предварительными преобразованиями, выполненными выше, можем записать вычисление данного интеграла следующим образом (рис. 3.9).

```
In[7]:= Integrate[1/3 r, {ϕ, 0, π/6}, {r, 4 Sin[ϕ], 8 Sin[ϕ]}]

Out[7]= -√3 + 2π/3
```

Рис. 3.9

Пример 3.1.3

Вычислить объем тела, ограниченного:

1) поверхностями $x + y + z = 4,\ \ z = 0,\ \ x = 3,\ \ x = 0,\ \ y = 2,\ \ y = 0$;

2) двумя параболоидами $z = x^2 + y^2$ и $z = 1 - x^2 - y^2$.

Решение

1) Объем тела, ограниченного заданными поверхностями, вычисляется по формуле

$V = \iiint\limits_T dxdydz$, где T – ограниченная трехмерная область.

В нашем случае T – шестигранник (рис. 3.10).

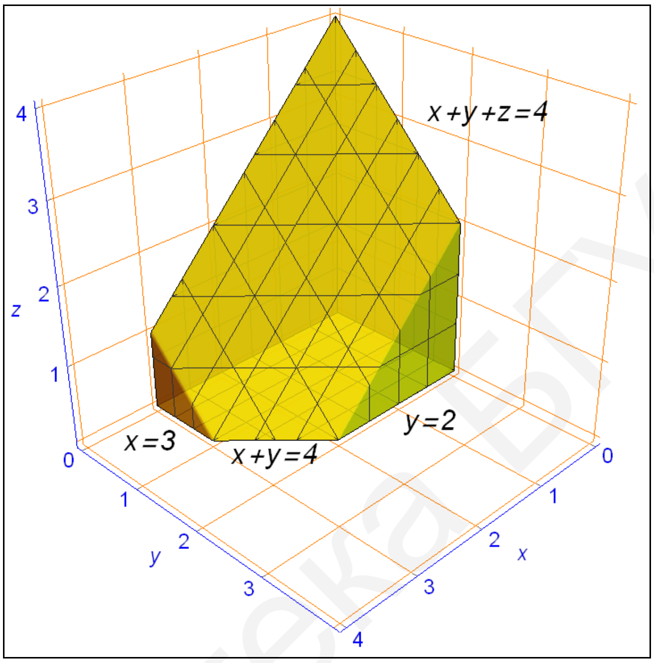


Рис. 3.10

При вычислении двойного интеграла по области $OABCD$ необходимо разбить ее прямой BE, параллельной оси Ox, на две части (рис. 3.11).

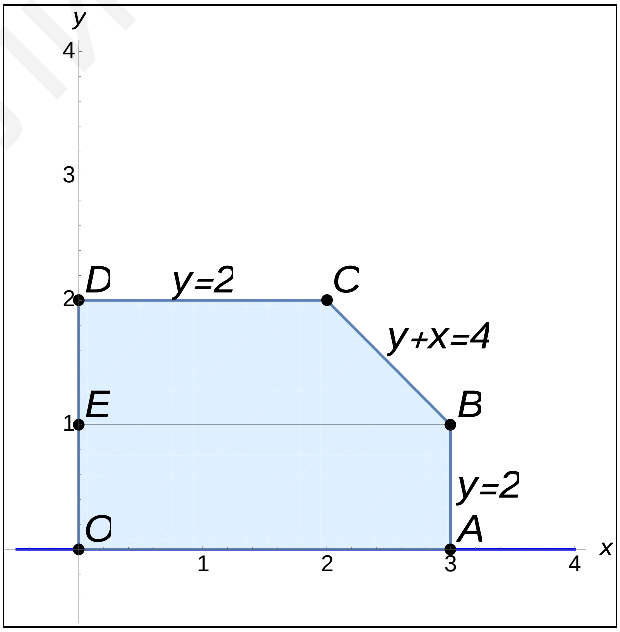


Рис. 3.11

Итак,

$$V=\iiint\limits_T dxdydz=\iint\limits_D dxdy\int\limits_0^{4-x-y}dz=\iint\limits_D(4-x-y)dxdy=\int\limits_0^1 dy\int\limits_0^3(4-x-y)dx+$$

$$+\int\limits_1^2 dy\int\limits_0^{4-y}(4-x-y)dx=\int\limits_0^1\left(4x\Big|_0^3-\frac{x^2}{2}\Big|_0^3-yx\Big|_0^3\right)dy+\int\limits_1^2\left(4x\Big|_0^{4-y}-\frac{x^2}{2}\Big|_0^{4-y}-yx\Big|_0^{4-y}\right)dy=$$

$$=\int\limits_0^1\left(12-\frac{9}{2}-3y\right)dy+\int\limits_1^2\left(4(4-y)-\frac{(4-y)^2}{2}-y(4-y)\right)dy=$$

$$=\int\limits_0^1(15-3y)dy+\int\limits_1^2\left(16-4y-\frac{16-8y+y^2}{2}-4y+y^2\right)dy=$$

$$=\frac{15}{2}y\Big|_0^1-3\cdot\frac{y^2}{2}\Big|_0^1+\int\limits_1^2\left(\frac{y^2}{2}-4y+8\right)dy=\frac{15}{2}-3\cdot\frac{1}{2}+\frac{y^3}{6}\Big|_1^2-4\cdot\frac{y^2}{2}\Big|_1^2+8y\Big|_1^2=$$

$$=6+\left(\left(\frac{2^3}{6}-\frac{1^3}{6}\right)-2\cdot\left(2^2-1^2\right)+8(2-1)\right)=6+\frac{7}{6}-6+8=\frac{55}{6}=9\frac{1}{6}.$$

2) Рассмотрим область, ограниченную параболоидами $z=x^2+y^2$ и $z=1-x^2-y^2$ (рис. 3.12).

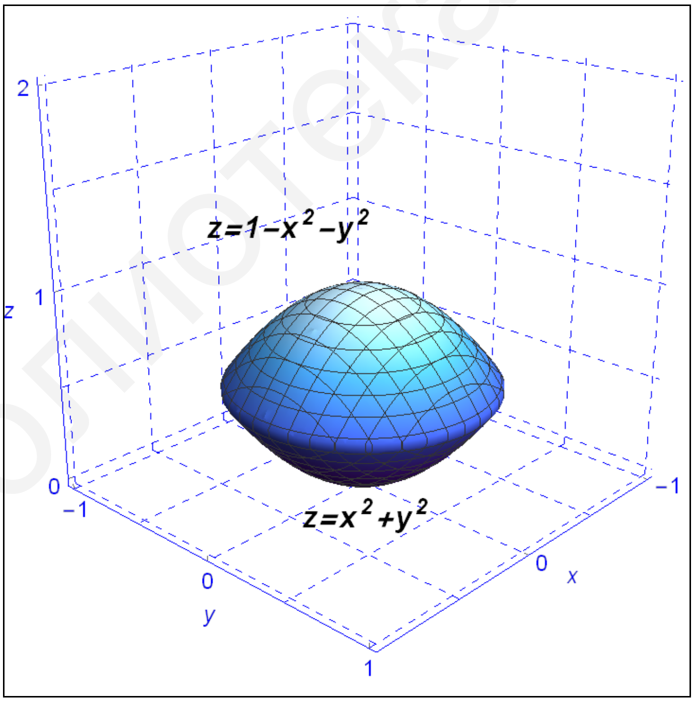


Рис. 3.12

Проекцией области на плоскость Oxy является круг (рис. 3.13).

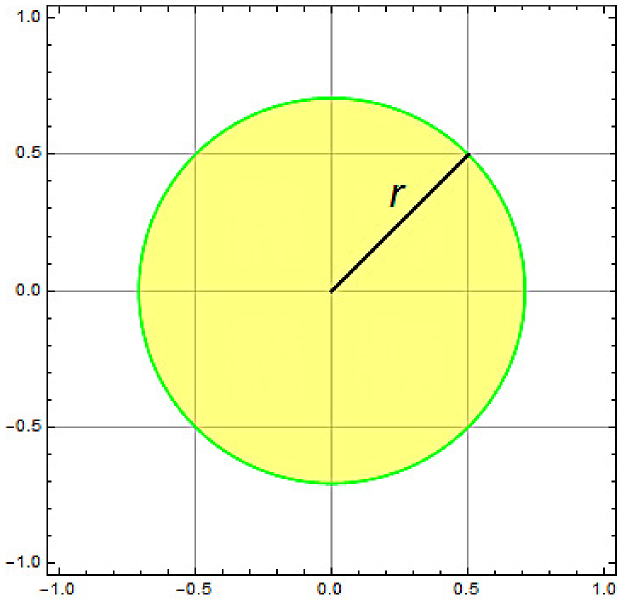


Рис. 3.13

Найдем радиус этого круга.

Исследуем пересечение двух параболоидов. Так как $x^2 + y^2 = r^2$, то параболоид $z = x^2 + y^2$ запишем в виде $z = r^2$, а параболоид $z = 1 - x^2 - y^2$ – $z = 1 - r^2$.

Для линии пересечения

$$r^2 = 1 - r^2 \Rightarrow 2r^2 = 1 \Rightarrow r^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow r = \frac{\sqrt{2}}{2}\ (r > 0).$$

Вычислим объем данной области с помощью тройного интеграла в цилиндрических координатах $(0 \le \varphi < 2\pi)$:

$$V = \iiint\limits_T dxdydz = \iiint\limits_T rdrd\varphi dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} rdr \int_{r^2}^{1-r^2} dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} r\left(z\Big|_{r^2}^{1-r^2} \right) dr =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} r\left(1 - r^2 - r^2\right)dr = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \left(r - 2r^3\right)dr = \int_0^{2\pi} \left(\frac{r^2}{2}\Bigg|_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} - \frac{r^4}{2}\Bigg|_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \right) d\varphi =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(\frac{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}{2} - \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^4 \right) d\varphi = \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{8}\right) d\varphi = \frac{1}{8} \cdot \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{1}{8}\varphi\Big|_0^{2\pi} = \frac{\pi}{4}.$$

Вычисления в Mathematica

1) Опишем построение области, изображенной на рис. 3.10. Зададим область, ограниченную указанными плоскостями (рис. 3.14).

```
Vol = RegionPlot3D[z ≤ 4 - x - y && z ≥ 0 && x ≤ 3 && x ≥ 0 &&
    y ≤ 2 && y ≥ 0, {x, 0, 4}, {y, 0, 4}, {z, 0, 4},
   PlotStyle → Directive[Yellow, Opacity[0.8]], Mesh → 5,
   AxesLabel → {x, y, z},
   Ticks → {{0, 1, 2, 3, 4}, {0, 1, 2, 3}, {1, 2, 3, 4}},
   AxesStyle → Directive[Blue, 12], PlotPoints → 155,
   FaceGrids → {{0, 0, -1}, {0, -1, 0}, {-1, 0, 0}},
   FaceGridsStyle → Directive[Orange], Boxed → False];
```

Рис. 3.14

Добавим к рисунку поясняющие надписи (рис. 3.15).

```
g1 = Graphics3D[Inset[Text[Style["x+y+z=4", Black, Italic, 16]],
    {0.5, 2.7, 3.7}]];
g2 = Graphics3D[Inset[Text[Style["x=3", Black, Italic, 16]],
    {3.5, 0.5, 0}]];
g3 = Graphics3D[Inset[Text[Style["y=2", Black, Italic, 16]],
    {1, 2.5, 0}]];
g4 = Graphics3D[Inset[Text[Style["x+y=4", Black, Italic, 16]],
    {2.7, 1.7, 0}]];
Show[Vol, g1, g2, g3, g4]
```

Рис. 3.15

Результат работы программы изображен на рис. 3.10.

Вычисление тройного интеграла в системе **Mathematica** приведено на рис. 3.16.

$$\int_0^1\int_0^3\int_0^{4-x-y} dz\,dx\,dy + \int_1^2\int_0^{4-y}\int_0^{4-x-y} dz\,dx\,dy$$

$$\frac{55}{6}$$

Рис. 3.16

2) Приведем описание построения области, изображенной на рис. 3.12. Зададим область (рис. 3.17).

```
In[21]:= Vol = RegionPlot3D[z ≤ 1 - x^2 - y^2 && z ≥ x^2 + y^2, {x, -1, 1}, {y, -1, 1},
     {z, 0, 2}, PlotStyle → Directive[Opacity[1.8]], Mesh → 12,
     AxesLabel → {x, y, z}, Ticks → {{-1, 0}, {-1, 0, 1}, {0, 1, 2}},
     FaceGrids → {{0, 0, -1}, {0, -1, 0}, {-1, 0, 0}},
     FaceGridsStyle → Directive[Blue, Dashed],
     AxesStyle → Directive[Blue, 12], PlotPoints → 55, Boxed → False,
     ColorFunction → "DeepSeaColors"];
```

Рис. 3.17

Добавим надписи (рис. 3.18).

```
g1 = Graphics3D[Inset[Text[Style["z=x^2+y^2", Black, Bold, Italic, 16]],
     {0.3, 0.3, 0}]];
g2 = Graphics3D[Inset[Text[Style["z=1-x^2-y^2", Black, Bold, Italic, 16]],
     {0, -0.5, 1.2}]];
Show[Vol, g1, g2]
```

Рис. 3.18

Итог работы программы изображен на рис. 3.12.

Найдем радиус линии пересечения параболоидов, предварительно перейдя к полярной системе координат (рис. 3.19).

```
Print["z1 = ", z1 = Simplify[1 - x^2 - y^2 /. {x → r*Cos[ϕ], y → r*Sin[ϕ]}]]
Print["z2 = ", z2 = Simplify[x^2 + y^2 /. {x → r*Cos[ϕ], y → r*Sin[ϕ]}]]
Sol = Solve[z1 == z2 && r > 0, r, Reals];
Print["r = ", r /. Sol[[1]]]
```

$z_1 = 1 - r^2$

$z_2 = r^2$

$r = \frac{1}{\sqrt{2}}$

Рис. 3.19

Вычислим тройной интеграл в **Mathematica**. В одном случае просто подставим значения, во втором – воспользуемся раннее полученными данными (рис. 3.20).

Print["V = ", $\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\int_{r^2}^{1-r^2} r\,dz\,dr\,d\phi$]

$V = \frac{\pi}{4}$

или

Print["V = ", $\int_0^{2\pi}\int_0^{r/.Sol[[1]]}\int_{z2}^{z1} r\,dz\,dr\,d\phi$]

$V = \frac{\pi}{4}$

Рис. 3.20

Задания для самостоятельной работы

1. Вычислить повторный интеграл:

1) $\int\limits_1^3 dx \int\limits_{\frac{1}{x}}^{x} \frac{2x^2}{y^2} dy$; 2) $\int\limits_0^{2\pi} \cos^2 x dx \int\limits_0^1 y dy$;

3) $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^1 \frac{3y dy}{(1+x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$; 4) $\int\limits_0^3 dx \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} y\cos(xy^2)dy$.

2. Вычислить двойной интеграл $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$, где D – область, ограниченная линиями:

1) $f(x,y)=x^2+2xy,\ D:\ y\ge 0,\ y\le 1,\ y\le x,\ y\ge x-1$;

2) $f(x,y)=x^2+4y^2+9,\ D:\ x^2+y^2\le 4$;

3) $f(x,y)=\cos 2x+\sin y,\ D:\ x\ge 0,\ y\ge 0,\ 4x+4y-\pi\le 0$.

3. Переходя к полярным координатам, вычислить двойной интеграл:

1) $\iint\limits_D \frac{y-4x}{x^2+y^2}dxdy,\ D:\ x^2+y^2\le 9,\ x^2+y^2\ge 4,\ x\le 0,\ y\ge 0$;

2) $\iint\limits_D \frac{dxdy}{x^2+y^2+1},\ D:\ y\le\sqrt{1-x^2},\ y\ge 0$.

4. Вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной линиями:

1) $y^2=4+x,\ x+3y=0$;

2) $y^2+2y-3x+1=0,\ 3x-3y-7=0$.

5. Вычислить тройной интеграл $\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz$ по области V:

1) $f(x,y,z)=2x+y+3z, V:\ 0\le x\le 4,\ 0\le y\le 2,\ 0\le z\le 1$

2) $f(x,y,z)=x^2\sin(\pi xy),\ V:\ x=1,\ y=2x,\ y=0,\ z=0,\ z=4\pi$.

6. Найти объем тела, ограниченного поверхностями:

1) $x=2\sqrt{2y},\ x=15\sqrt{2y},\ z=0,\ z=\frac{1}{2}-y$;

2) $7x+y+z-7=0,\ x=0,\ y=0,\ z=0$;

3) $z=4+9x^2+5y^2,\ y=5x^2-2,\ y=-4x^2+7,\ z=-1+9x^2+5y^2$;

4) $x^2=2z,\ x=2y,\ y=2x,\ x=2\sqrt{2},\ z=0$.

3.2. Криволинейные и поверхностные интегралы

Пример 3.2.1

Вычислить криволинейный интеграл I рода $\int\limits_L x(1+2y)dl$, где L – часть кривой $x=t,\ y=\frac{t^2}{2},\ 0\le t\le 1$.

Решение

Формула для вычисления криволинейного интеграла I рода по кривой L, заданной параметрическими уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$, имеет следующий вид: $\int\limits_L f(x,y)dl = \int\limits_\alpha^\beta f(x(t), y(t))\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}dt$.

Найдем: $x'(t) = t' = 1$, $y'(t) = \left(\dfrac{t^2}{2}\right)' = \dfrac{2t}{2} = t$,

$dl = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}dt = \sqrt{1+t^2}dt$,

$f(x(t), y(t)) = t(1+t^2)$.

Подставляем эти результаты в формулу:

$$\int\limits_L x(1+2y)\,dl = \int\limits_0^1 t\left(1+2\cdot\frac{t^2}{2}\right)\sqrt{1+t^2}dt = \int\limits_0^1 t\left(1+t^2\right)^{\frac{3}{2}}dt = \frac{1}{2}\int\limits_0^1 \left(1+t^2\right)^{\frac{3}{2}}d\left(1+t^2\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\left(1+t^2\right)^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}}\Bigg|_0^1 = \frac{1}{5}\left(\left(1+1^2\right)^{\frac{5}{2}} - (1+0)^{\frac{5}{2}}\right) = \frac{1}{5}\left(4\sqrt{2}-1\right).$$

Вычисления в Mathematica

Изобразим кривую на графике (рис. 3.21).

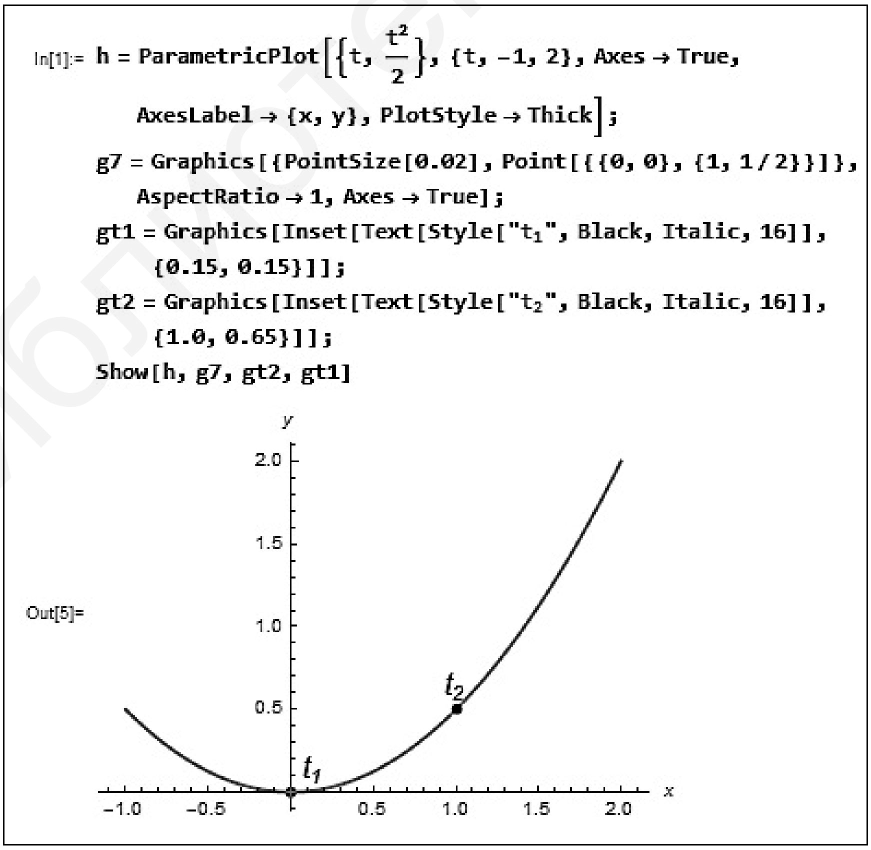


Рис. 3.21

Зададим начальные условия и вычислим криволинейный интеграл (рис. 3.22).

```
In[12]:= f[x_, y_] := x * (1 + 2 y)
         t1 := 0
         t2 := 1
         x[t_] := t
         y[t_] := t^2/2
         Print["Ответ:"]
         Print["∫_L f(x,y) dl = ", ∫_{t1}^{t2} f[x[t], y[t]] √((∂_t x[t])^2 + (∂_t y[t])^2) dt]

         Ответ:
         ∫_L f(x,y) dl = 1/5 (-1 + 4 √2)
```

Рис. 3.22

Пример 3.2.2

Вычислить криволинейный интеграл II рода $\int\limits_L \left(2y + xy^3\right)dx + \left(2x - x^2y^2\right)dy$ по дуге кривой $x = \dfrac{y^2}{2}$ от точки $A(0;0)$ до точки $B(2;2)$.

Решение

Кривая L представляет собой параболу (рис. 3.23) и задана непрерывно дифференцируемой функцией $x = x(y) = y \in [0,2]$, $dx = \left(\dfrac{y^2}{2}\right)dy = ydy$.

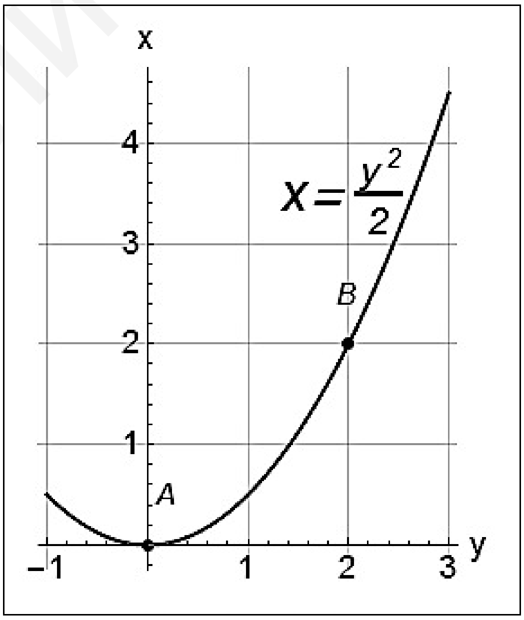


Рис. 3.23

$$\int_L \left(2y + xy^3\right)dx + \left(2x - x^2y^2\right)dy = \int_0^2 \left(2y + \frac{y^2}{2}\cdot y^3\right)ydy + \left(2\cdot\frac{y^2}{2} - \left(\frac{y^2}{2}\right)^2 y^2\right)dy =$$

$$= \int_0^2 \left(2y^2 + \frac{1}{2}\cdot y^6\right)ydy + \left(y^2 - \frac{y^6}{4}\right)dy = \int_0^2 \left(3y^2 + \frac{y^6}{4}\right)dy = \left(3\frac{y^3}{3} + \frac{y^7}{7\cdot 4}\right)\Bigg|_0^2 = \frac{88}{7}.$$

Вычисления в Mathematica

Преобразования, выполненные выше, можно оформить следующим образом (рис. 3.24).

```
In[1]:= P[x_, y_] = 2 y + x * y^3;
        Q[x_, y_] = 2 x - x^2 * y^2;
        x = y^2/2;
        x1 = 0;
        x2 = 2;
        y1 = 0;
        y2 = 2;
        Print["Ответ: ", ∫_{y1}^{y2} (P[x, y] Dt[x, y] + Q[x, y]) dy]

        Ответ: 88/7
```

Рис. 3.24

На рис. 3.25 приведено описание построения графика функции, изображенного на рис. 3.23.

```
h = Plot[y^2/2, {y, -1, 3}, Axes → True, PlotStyle → {Black, Thick},
   AxesLabel → {"y", "x"}, AxesStyle → Directive[Black, 18],
   GridLines → Automatic, AspectRatio → Automatic];
g1 = Graphics[{PointSize[0.03], Point[{{0, 0}, {2, 2}}]},
   AspectRatio → 1, Axes → True];
gt1 = Graphics[Inset[Text[Style["A", Black, Italic, 16]],
    {0.2, 0.5}]];
gt2 = Graphics[Inset[Text[Style["B", Black, Italic, 16]],
    {2.0, 2.5}]];
gy = Graphics[Inset[Text[Style["x= y^2/2 ", Black, Italic, 30]],
    {2, 3.5}]];
Show[h, g1, gt2, gt1, gy]
```

Рис. 3.25

Пример 3.2.3

Вычислить поверхностный интеграл I рода $\iint\limits_S (x^2+y)ds,$ где S – полусфера, задаваемая уравнением $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$.

Решение

Рассматриваемая поверхность S задана в явном виде (рис. 3.26): $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$, где $(x,y)\in D$, где D – круг радиусом $R=1$.

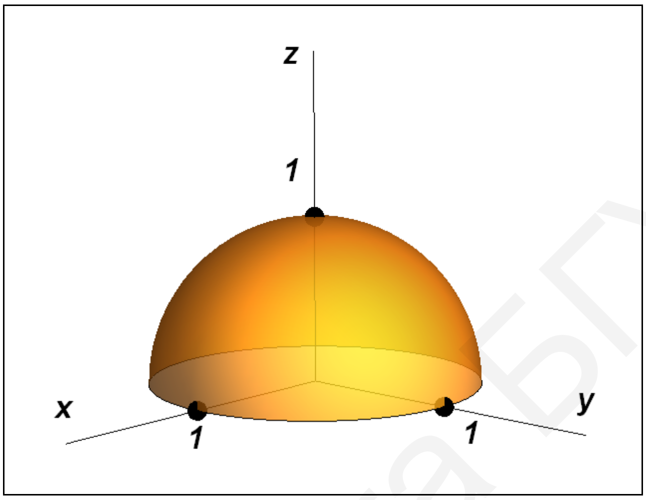


Рис. 3.26

Так как поверхность S задана уравнением $z=z(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}$, то

$$\iint\limits_S f(x,y,z)ds=\iint\limits_D f(x,y,z(x,y))\sqrt{1+(z'_x(x,y))^2+(z'_y(x,y))^2}\,dxdy=$$

$$=\iint\limits_D (x^2+y)\cdot\sqrt{1+\left(\left(\sqrt{1-x^2-y^2}\right)'_x\right)^2+\left(\left(\sqrt{1-x^2-y^2}\right)'_y\right)^2}\,dxdy=$$

$$=\iint\limits_D \left(x^2+y\right)\sqrt{1+\frac{x^2}{1-x^2-y^2}+\frac{y^2}{1-x^2-y^2}}dxdy=\iint\limits_D\frac{x^2+y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}dxd\,.$$

В полученном двойном интеграле перейдем к полярной системе координат: $x=r\cos\varphi,\;\; y=r\sin\varphi,\;\; 0\le r\le 1,\;\; 0\le\varphi\le 2\pi,\;\; dxdy=rdrd\varphi$.

Формула вычисления двойного интеграла в полярной системе координат имеет следующий вид:

$$\iint\limits_D\left(x^2+y\right)\frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}dxdy=\iint\limits_D\left(r^2\cos^2\varphi+r\sin\varphi\right)\cdot\frac{r}{\sqrt{1-r^2}}drd\varphi=$$

$$=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^1\left(\frac{r^3\cos^2\varphi}{\sqrt{1-r^2}}+\frac{r^2\sin\varphi}{\sqrt{1-r^2}}\right)dr=\int\limits_0^{2\pi}\left(\int\limits_0^1\frac{r^3\cos^2\varphi}{\sqrt{1-r^2}}dr+\int\limits_0^1\frac{r^2\sin\varphi}{\sqrt{1-r^2}}dr\right)d\varphi=$$

$$
=\int\limits_0^{2\pi}\left(\left[\begin{array}{l}\sqrt{1-r^2}=t,\\ 1-r^2=t^2,\\ r^2=1-t^2,\\ 2rdr=-2tdt,\\ rdr=-tdt,\\ r=0,\ t=1,\\ r=1,\ t=0\end{array}\right]-\sin\int\limits_0^1\frac{1-r^2-1}{\sqrt{1-r^2}}dr\right)d\varphi=
$$

$$
=\int\limits_0^{2\pi}\left(-\cos^2\varphi\int\limits_0^1\frac{\left(1-t^2\right)\left(-tdt\right)}{t}-\sin\varphi\left(\int\limits_0^1\frac{1-r^2}{\sqrt{1-r^2}}dr-\int\limits_0^1\frac{dr}{\sqrt{1-r^2}}\right)\right)d\varphi=
$$

$$
=\int\limits_0^{2\pi}\left(\cos^2\varphi\int\limits_0^1\left(1-t^2\right)dt-\sin\varphi\left(\int\limits_0^1\sqrt{1-r^2}dr-\int\limits_0^1\frac{dr}{\sqrt{1-r^2}}\right)\right)d\varphi=
$$

$$
=\int\limits_0^{2\pi}\left(\cos^2\varphi\left(t\Big|_0^1-\frac{t^3}{3}\Big|_0^1\right)-\sin\varphi\left(\frac{r}{2}\sqrt{1+t^2}\Big|_0^1-\frac{1}{2}\arcsin r\Big|_0^1\right)\right)d\varphi=
$$

$$
=\int\limits_0^{2\pi}\left(\cos^2\varphi\left(1-\frac{1}{3}\right)-\int\limits_0^{2\pi}\sin\varphi\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)d\varphi=\frac{3}{2}\int\limits_0^{2\pi}\frac{1+\cos^2\varphi}{2}d\varphi+\frac{\pi}{4}\int\limits_0^{2\pi}\sin\varphi d\varphi=
$$

$$
=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\int\limits_0^{2\pi}d\varphi+\int\limits_0^{2\pi}\cos 2\varphi d\varphi+\frac{\pi}{4}\int\limits_0^{2\pi}\sin\varphi d\varphi=\frac{1}{3}\left(\varphi\Big|_0^{2\pi}+\frac{1}{2}\sin 2\varphi\Big|_0^{2\pi}\right)+\frac{\pi}{4}\left(-\cos\varphi\right)\Big|_0^{2\pi}=
$$

$$
=\frac{1}{3}\left(2\pi+0\right)+\frac{\pi}{4}\left(-1+1\right)=\frac{2\pi}{3}.
$$

Вычисления в Mathematica

Решение в декартовой системе координат (рис. 3.27).

```
In[1]:= f[x_, y_] := x^2 + y
        z[x_, y_] := Sqrt[1 - x^2 - y^2]
        x1 := -1
        x2 := 1
        y1[x_] := -Sqrt[1 - x^2]
        y2[x_] := Sqrt[1 - x^2]
        ∫_x1^x2 ∫_y1[x]^y2[x] f[x, y] Sqrt[1 + (∂_x z[x, y])^2 + (∂_y z[x, y])^2] dy dx
Out[7]= 2π/3
```

Рис. 3.27

Решение в полярной системе координат (рис. 3.28).

```
In[8]:= f[x_, y_] := x^2 + y
        z[x_, y_] := Sqrt[1 - x^2 - y^2]
        zx := ∂_x z[x, y]
        zy := ∂_y z[x, y]
        polar = {x -> r Cos[ϕ], y -> r Sin[ϕ]};
        zxp = zx /. polar;
        zyp = zy /. polar;
        ∫_0^(2π) ∫_0^1 r (f[x, y] /. polar) Sqrt[1 + (zxp)^2 + (zyp)^2] dr dϕ
Out[15]= 2π/3
```

Рис. 3.28

Задания для самостоятельной работы

1. Вычислить криволинейный интеграл I рода $\int\limits_L x^2 y dl,$ где L – отрезок прямой между точками $A(1;1)$ и $B(2;3)$.

2. Вычислить криволинейный интеграл I рода $\int\limits_L (x^2 + y^2)dl,$ где L – дуга кривой $x = 2(\cos t + t\sin t),\ y = 2(\sin t - t\cos t),\ 0 \le t \le 2\pi$.

3. Вычислить криволинейный интеграл II рода $\int\limits_L xydx + y^2 dy,$ где L – дуга кривой $x = t^2,\ y = t,\ 1 \le t \le 2$.

4. Вычислить криволинейный интеграл II рода $\int\limits_L zdx + x^2 dy + y^3 dz,$ где L – дуга кривой $x = t^2,\ y = t,\ z = t^3,\ 0 \le t \le 1$.

5. Вычислить поверхностный интеграл I рода $\iint\limits_S (7y^2 - 3x^2 - 3z^2)ds,$ где S – часть поверхности $y = \sqrt{x^2 + z^2}$, вырезанная цилиндром $x^2 + z^2 = 2x$.

4. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

4.1. Дифференциальные уравнения первого порядка

Пример 4.1.1

Выяснить, являются ли указанные функции, где C – произвольная константа, решением дифференциального уравнения первого порядка $y' = \ln(2x+5)$, и проинтегрировать его:

а) $y = x\ln(2x+5) - x + \dfrac{5}{2}\ln(2x+5) + C$;

б) $y = C - (5+2x)(\ln(2x+5) - 1)$.

Решение

Поскольку решение дифференциального уравнения есть функция, которая при подстановке в уравнение обращает его в тождество, выполним проверку непосредственной подстановкой.

а) Находим производную: $\left(x\ln(2x+5) - x + \dfrac{5}{2}\ln(2x+5) + C\right)' = \ln(2x+5)$,

тогда $\ln(2x+5) + \dfrac{2x}{2x+5} - 1 + \dfrac{5}{2x+5} = \ln(2x+5)$.

Окончательно имеем $\ln(2x+5) = \ln(2x+5)$. Следовательно, функция $y = x\ln(2x+5) - x + \dfrac{5}{2}\ln(2x+5) + C$ есть решение дифференциального уравнения $y' = \ln(2x+5)$.

б) При подстановке функции $y = C - (5+2x)(\ln(2x+5) - 1)$ в уравнение $y' = \ln(2x+5)$, получим $(C - (5+2x)(\ln(2x+5) - 1))' = \ln(2x+5)$, откуда $-2(\ln(2x+5) - 1) - (5+2x)\dfrac{2}{2x+5} = \ln(2x+5)$.

Окончательно имеем равенство $-2\ln(2x+5) = \ln(2x+5)$, которое не является тождеством. Следовательно, функция $y = C - (5+2x)(\ln(2x+5) - 1)$ не является решением дифференциального уравнения $y' = \ln(2x+5)$.

Найдем решение данного дифференциального уравнения путем его интегрирования. Уравнение имеет вид $y' = f(x)$ и является дифференциальным уравнением первого порядка, разрешенным относительно производной. Его решением будет функция $y = \int \ln(2x+5)dx$.

Для вычисления интеграла применим метод интегрирования по частям: $U = \ln(2x+5) \Rightarrow dU = (\ln(2x+5))' dx = \dfrac{2dx}{2x+5}$, $dV = dx \Rightarrow V = x$.

Тогда $y = \int \ln(2x+5)dx = x\ln(2x+5) - \int \dfrac{2x}{2x+5}dx = x\ln(2x+5) -$

$$-\int\left(1-\frac{5}{2x+5}\right)dx = x\ln(2x+5)-x+\frac{5}{2}\ln(2x+5)+C.$$

Полученная нами функция есть общее решение данного дифференциального уравнения первого порядка, содержащая одну произвольную постоянную C.

Вычисления в Mathematica

Решение заданий «а» и «б» примера 4.1.1 приведено на рис. 4.1 и 4.2 соответственно.

```
In[1]:= y'[x] - Log[2 x + 5] /.
          {y → Function[{x}, x * Log[2 x + 5] - x + C[1] + 5/2 Log[5 + 2 x]]}

Out[1]= -1 + 5/(5 + 2 x) + (2 x)/(5 + 2 x)

In[2]:= Simplify[%]

Out[2]= 0
```

Рис. 4.1

```
In[3]:= y'[x] - Log[2 x + 5] /.
          {y → Function[{x}, C[1] - (5 + 2 x) (-1 + Log[5 + 2 x])]}

Out[3]= -2 - 2 (-1 + Log[5 + 2 x]) - Log[5 + 2 x]

In[4]:= Simplify[%]

Out[4]= -3 Log[5 + 2 x]
```

Рис. 4.2

Для решения дифференциальных уравнений в **Mathematica** используется функция **DSolve[]**. Функция **DSolve[eqn,y[x],x]** решает дифференциальное уравнение **eqn** относительно функции **y[x]** с независимой переменной **x**. Также может использоваться формат функции **DSolve[eqn,y,x]** для отыскания неизвестной функции **y**, при этом найденное решение **y** можно применять в расчетах, подвергать преобразованиям как функцию от независимой переменной **x**.

Результат выполнения **DSolve**[] представляет собой список, где неизвестной функции ставится в соответствие ее аналитическое представление. Постоянные интегрирования в решениях дифференциальных уравнений обозначаются **C[i]**.

Возможности функции **DSolve[]** представлены в Меню **Help→Wolfram Documentation→tutorial/DSolveOverview**.

Функция **DSolve** позволяет решать различные типы ОДУ первого и второго порядка, ОДУ высших порядков, линейные и нелинейные системы ОДУ, в том числе: уравнения с разделяющимися переменными, однородные уравнения, линейные уравнения первого порядка, уравнения Бернулли, уравнения Риккати, уравнения Клеро, линейные уравнения с постоянными коэффициентами, уравнения в полных дифференциалах и др.

Результат интегрирования дифференциального уравнения $y' = \ln(2x+5)$ приведен на рис. 4.3.

```
In[5]:= DSolve[y'[x] == Log[2 x + 5], y, x]

Out[5]= {{y → Function[{x}, C[1] + 1/2 (5 + 2 x) (-1 + Log[5 + 2 x])]}}
```

Рис. 4.3

Заметим, что решение данного дифференциального уравнения, полученное в **Mathematica**, совпадает с найденным ранее с точностью до константы.

Пример 4.1.2

Найти однопараметрическое семейство интегральных кривых дифференциального уравнения $y' = \dfrac{xy}{\sqrt{5-x^2}}$ на интервале $(-2{,}8;2{,}8)$. Указать частное решение, соответствующее значению параметра $C = 1$.

Решение

Данное уравнение имеет вид $y' = M(x)N(y)$ и относится к классу дифференциальных уравнений первого порядка с разделяющимися переменными.

Учитывая, что $y' = \dfrac{dy}{dx}$, можно записать уравнение в дифференциальной форме, после чего проинтегрировать. Тогда $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{xy}{\sqrt{5-x^2}}$, а дифференциальная форма уравнения $\dfrac{dy}{y} = \dfrac{xdx}{\sqrt{5-x^2}}$.

Проинтегрировав обе части уравнения, будем иметь $\displaystyle\int \frac{dy}{y} = \int \frac{xdx}{\sqrt{5-x^2}}$.

Откуда $\ln|y| = -\dfrac{1}{2}\displaystyle\int \left(5-x^2\right)^{-\frac{1}{2}} d\left(5-x^2\right)$ или $\ln|y| = -\sqrt{5-x^2} + \ln C$. Следовательно, однопараметрическое семейство интегральных кривых уравнения $y' = \dfrac{xy}{\sqrt{5-x^2}}$ имеет вид $y = Ce^{-\sqrt{5-x^2}}$, где параметр C есть некоторое действительное положительное число.

Вычисления в Mathematica

Аналитическое решение примера 4.1.2 представлено на рис. 4.4.

```
In[1]:= sol = DSolve[y'[x] == x y[x]/Sqrt[5 - x^2], y, x]

Out[1]= {{y → Function[{x}, e^(-Sqrt[5-x^2]) C[1]]}}
```

Рис. 4.4

Для визуализации некоторые интегральные кривые данного дифференциального уравнения были построены в **Mathematica** при помощи функции **Plot** (рис. 4.5).

```
In[2]:= (*Графики некоторых интегральных кривых уравнения*)
        tab = Table[y[x] /. sol[[1]] /. {C[1] → i}, {i, 4}]
        Plot[Evaluate[tab], {x, -2.8, 2.8}]

Out[2]= {e^(-Sqrt[5-x^2]), 2 e^(-Sqrt[5-x^2]), 3 e^(-Sqrt[5-x^2]), 4 e^(-Sqrt[5-x^2])}
```

Out[3]=

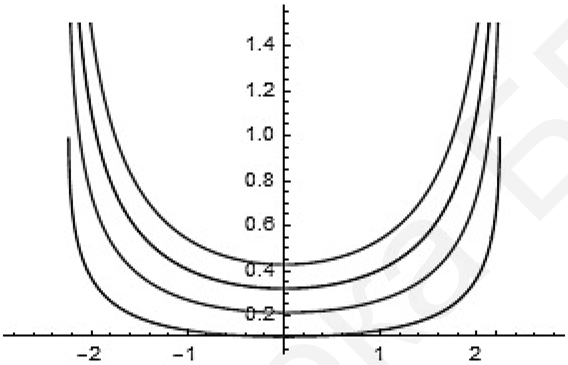


Рис. 4.5

При $C = 1$ получим функцию $y = e^{-\sqrt{5-x^2}}$, являющуюся частным решением данного дифференциального уравнения (рис. 4.6).

```
In[4]:= (*График частного решения уравнения при C[1]=1*)
        Plot[e^(-Sqrt[5-x^2]), {x, -2.8, 2.8}]
```

Out[4]=

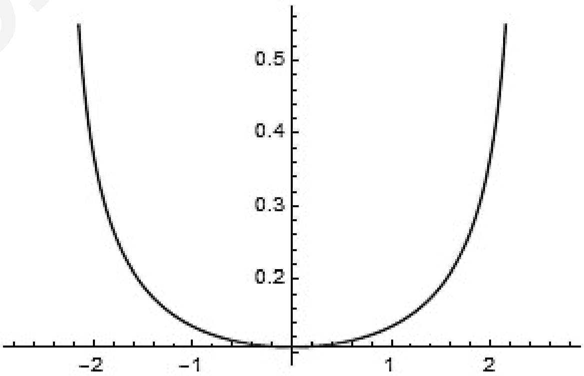


Рис. 4.6

Пример 4.1.3

Решить задачу Коши $y' = \dfrac{x^2 + y^2}{3xy}$, $y(8) = 6$.

Решение

Данное дифференциальное уравнение после преобразования правой части принимает вид $y' = f\left(\dfrac{y}{x}\right)$ и является однородным дифференциальным уравнением первого порядка. Действительно, $y' = \dfrac{x^2}{3xy} + \dfrac{y^2}{3xy}$, а значит, $y' = \dfrac{x}{3y} + \dfrac{y}{3x}$. Для его интегрирования выполним подстановку $U(x) = \dfrac{y}{x}$, тогда $y = xU$, $y' = (xU)' = U + xU'$. После чего получим уравнение с разделяющимися переменными $U + xU' = \dfrac{1}{3U} + \dfrac{1}{3}U$, которое эквивалентно уравнению $\dfrac{3U}{1-2U^2}dU = \dfrac{dx}{x}$.

Проинтегрируем полученное уравнение: $\int \dfrac{3U}{1-2U^2}dU = \int \dfrac{dx}{x}$, $-\dfrac{3}{4}\int \dfrac{d\left(1-2U^2\right)}{1-2U^2} = \int \dfrac{dx}{x}$, $-\dfrac{3}{4}\ln\left|1-2U^2\right| = \ln|x| + \ln C$, $\ln\left|1-2U^2\right| = -\dfrac{4}{3}\ln|x| - \dfrac{4}{3}\ln C$, $\ln\left|1-2U^2\right| = \ln\left|x^{-\frac{4}{3}}\right| + \ln C_1$, $1-2U^2 = C_1 x^{-\frac{4}{3}}$. Откуда $1 - 2\dfrac{y^2}{x^2} = C_1 x^{-\frac{4}{3}}$, тогда общий интеграл данного уравнения будет равен $x^2 - 2y^2 - C_1 x^{\frac{2}{3}} = 0$, а общее решение $y = \pm\sqrt{\dfrac{x^2}{2} - C_1 x^{\frac{2}{3}}}$.

Для нахождения частного решения используем начальное условие $y(8) = 6$ и найдем соответствующее ему значение константы C_1: $6 = \sqrt{\dfrac{8^2}{2} - C_1 8^{\frac{2}{3}}}$, тогда $C_1 = -1$. Таким образом, $y = \sqrt{\dfrac{x^2}{2} + x^{\frac{2}{3}}}$.

Вычисления в Mathematica

Найдем общее решение дифференциального уравнения с помощью функции **DSolve** (рис. 4.7).

```
In[1]:= (*Нахождение общего решения однородного дифференциального уравнения*)
        eqn = y'[x] == (x^2 + y[x]^2) / (3*x *y[x])
        sol = DSolve[eqn, y[x], x]
```

Out[1]= $y'[x] == \frac{x^2 + y[x]^2}{3\, x\, y[x]}$

Out[2]= $\left\{\left\{y[x] \to -\sqrt{\frac{x^2}{2} + x^{2/3}\, C[1]}\right\}, \left\{y[x] \to \sqrt{\frac{x^2}{2} + x^{2/3}\, C[1]}\right\}\right\}$

```
        (*Построение графика общего решения*)

In[3]:= tab1 = Table[y[x] /. sol[[1]] /. C[1] → k, {k, 0, 3}];
        tab2 = Table[y[x] /. sol[[2]] /. C[1] → k, {k, 0, 3}];
        Plot[Evaluate[Join[tab1, tab2]], {x, 0, 9}]
```

Out[5]=

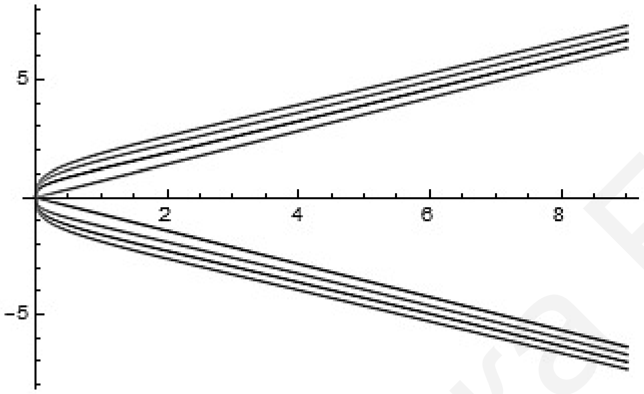


Рис. 4.7

Для решения задачи Коши воспользуемся функцией **DSolve[{eqn,y[a]= =b},y[x],x]**, где **y[a] = b** есть начальное (граничное) условие (рис. 4.8).

```
        (*Нахождение решения задачи Коши*)

In[6]:= DSolve[{eqn, y[8] == 6}, y[x], x]
        DSolve: For some branches of the general solution, the given boundary conditions lead to an
          empty solution.
```

Out[6]= $\left\{\left\{y[x] \to \frac{\sqrt{x^{2/3}\left(2 + x^{4/3}\right)}}{\sqrt{2}}\right\}\right\}$

Рис. 4.8

Задания для самостоятельной работы

1. Решить дифференциальное уравнение первого порядка относительно функции y с переменной x:

1) $y' = \arcsin x - \dfrac{x+1}{x^2+4}$;   2) $4y' - y\cos 5x = 0$;

3) $\left(e^x + e^{-x}\right)dy - \left(\sqrt{y+1} + \sqrt{y-1}\right)dx = 0$.

2. Решить задачу Коши $y' = \dfrac{xy^2 - y^3}{3x^2 y}$, $y(2) = -2$. Построить график частного решения в системе **Mathematica**.

3. Найти общее решение вида $x = x(y, C)$ дифференциального уравнения $x' + 2x = e^y x^2$.

4. Найти семейство интегральных кривых дифференциального уравнения $(2y - 4x + 6)dy + (y + x - 3)dx = 0$.

5. В **Mathematica** найти численное решение дифференциального уравнения $x' = \cos(yx - 4)$ с начальным условием $x(0) = 10$ на отрезке $[0;30]$.

4.2. Дифференциальные уравнения высших порядков

Пример 4.2.1

Найти общее решение дифференциального уравнения третьего порядка $y''' = -12x + e^{5x} - \dfrac{7}{x^3}$.

Решение

Данное дифференциальное уравнение разрешено относительно старшей производной, поэтому найдем его решение последовательным интегрированием:

$$y'' = \int(-12x + e^{5x} - \frac{7}{x^3})dx = -6x^2 + \frac{1}{5}e^{5x} + \frac{14}{x^2} + C_1,$$

$$y' = \int(-6x^2 + \frac{1}{5}e^{5x} + \frac{14}{x^2} + C_1)dx = -2x^3 + \frac{1}{25}e^{5x} - \frac{14}{x} + C_1 x + C_2,$$

$$y = \int(-2x^3 + \frac{1}{25}e^{5x} - \frac{14}{x} + C_1 x + C_2)dx = -\frac{x^4}{2} + \frac{e^{5x}}{125} - 14\ln|x| + C_1\frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3.$$

Таким образом, общее решение данного уравнения есть функция $y = -\dfrac{x^4}{2} + \dfrac{e^{5x}}{125} - 14\ln|x| + C_1\dfrac{x^2}{2} + C_2 x + C_3$, где C_1, C_2, C_3 – некоторые произвольные константы.

Вычисления в Mathematica

Решение примера 4.2.1 приведено на рис. 4.9.

```
In[1]:= DSolve[y''' [x] == -12*x + e^(5*x) - 7/x^3, y, x]

Out[1]= {{y → Function[{x}, e^(5 x)/125 - x^4/2 + C[1] + x C[2] + x^2 C[3] - 7 Log[x]/2]}}
```

Рис. 4.9

Пример 4.2.2

Проинтегрировать дифференциальное уравнение $y'' + xy' = e^{-3x}(x-3)$ с начальными условиями $y'(0)=1, y(0)=1$.

Решение

Данное дифференциальное уравнение является дифференциальным уравнением второго порядка и не содержит искомую функцию *y*. После введения замены $y' = z(x)$ оно преобразуется в линейное дифференциальное уравнение первого порядка $z' + xz = e^{-3x}(x-3)$ с начальным условием $z(0)=1$. Будем искать его решение методом Бернулли в виде произведения двух неизвестных функций: $z = U(x)\cdot V(x)$, тогда $z = U'\cdot V + U\cdot V'$. Найдем функцию V, такую, чтобы $V' + x\cdot V = 0$, тогда функция U будет найдена в результате интегрирования уравнения $U'\cdot V = e^{-3x}(x-3)$. Итак, $\dfrac{dV}{dx} = -x\cdot V$, откуда

$$\frac{dV}{V} = -xdx,\ \int\frac{dV}{V} = -\int xdx,\ \ln|V| = -\frac{x^2}{2},\ V = e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

В свою очередь, $U'e^{-\frac{x^2}{2}} = e^{-3x}(x-3)$, $\dfrac{dU}{dx} = e^{\frac{x^2}{2}-3x}(x-3)$,

$$\int dU = \int (x-3)e^{\frac{x^2}{2}-3x}dx, \text{ значит, } U = \int e^{\frac{x^2}{2}-3x}d\left(\frac{x^2}{2}-3x\right) = e^{\frac{x^2}{2}-3x} + C_1.$$

Тогда $z = U\cdot V = \left(e^{\frac{x^2}{2}-3x} + C_1\right)\cdot e^{-\frac{x^2}{2}} = e^{-3x} + C_1 e^{-\frac{x^2}{2}}$.

С учетом начального условия найдем константу C_1: $\begin{cases} x=0, \\ z=1 \end{cases} \Rightarrow\ 1 = C_1 + 1 \Rightarrow C_1 = 0$. Таким образом, $z = e^{-3x}$, тогда $y' = e^{-3x}$,

$y = \int e^{-3x}dx = -\frac{1}{3}e^{-3x} + C_2$. Исходя из условия $\begin{cases} x=0, \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow\ 0 = -\frac{1}{3} + C_2 \Rightarrow C_2 = 0$.

Тогда искомая функция (частное решение) $y = \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{3}e^{-3x}$.

Вычисления в Mathematica

Решение примера 4.2.2 приведено на рис. 4.10.

```
In[1]:= DSolve[{y''[x] + x*y'[x] - (x - 3) e^(-3*x) == 0, y'[0] == 1, y[0] == 0}, y, x]

Out[1]= {{y -> Function[{x}, 1/3 e^(-3 x) (-1 + e^(3 x))]}}
```

Рис. 4.10

Пример 4.2.3

Проинтегрировать нелинейное дифференциальное уравнение $y'' + y\sin y - \cos x = 0$.

Решение

Заметим, что данное дифференциальное уравнение относится к нелинейным дифференциальным уравнениям второго порядка и не имеет аналитического решения.

Однако с заданной точностью его можно решить с помощью численных методов. Для численного решения дифференциальных уравнений используется функция **NDSolve**:

– **NDSolve [eqns, y, {x, xmin, xmax}]** – ищет численное решение дифференциальных уравнений **eqns** относительно функции **y** независимой переменной **x** в интервале от **xmin** до **xmax**;

– **NDSolve [eqns, {yl, y2, ...}, {x, xmin, xmax}]** – ищет численные решения относительно функций **yi**.

Вычисления в Mathematica

Пример 4.2.3 решим численно в **Mathematica** и построим график полученного решения (рис. 4.11).

```
In[2]:= s = NDSolve[{y''[x] + Sin[y[x]] * y[x] - Cos[x] == 0, y[0] == 1,
          y'[0] == 0}, y, {x, 0, 30}]

Out[2]= {{y → InterpolatingFunction[ Domain: {{0., 30.}}
                                     Output: scalar ]}}

In[3]:= Plot[Evaluate[y[x] /. s], {x, 0, 30}, PlotStyle -> Automatic]

Out[3]=
```

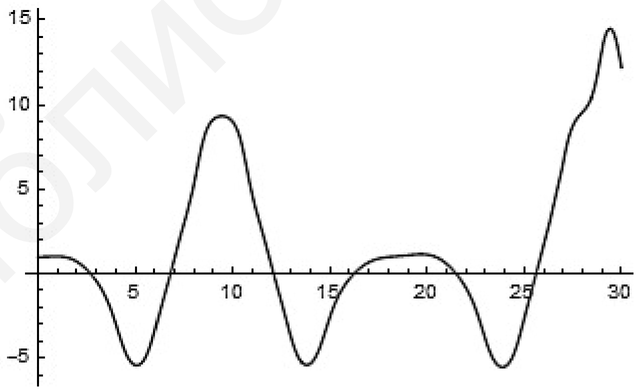


Рис. 4.11

Задания для самостоятельной работы

1. Найти общее решение дифференциального уравнения:

1) $y'' + y' = \dfrac{\sin x}{\cos^2 x}$;

2) $y'' - y' \operatorname{tg} x + 2y = 0$;

3) $x^2(x+1)y'' - 2y' = 0$;

4) $y'' + 10y' + 3y = \left(2xe^{-1,5x}\right)^2 + \dfrac{x}{2}\sin 3x + 5\cos 3x$;

5) $y'' - y' = \dfrac{e^x}{e^x + 1} + 2\sin x - 4\cos x$;

6) $y'' + 2y' + y = \dfrac{e^x}{x} + 6e^{-x}$;

7) $4y'' + 7y' - 2y = \dfrac{3}{e^{2x-1}} + (x-1)\left(1 + \dfrac{\cos 2x}{5}\right)$.

2. Найти частное решение дифференциального уравнения:

1) $y''' - y' = 0,\ \ y(0) = 0,\ \ y'(0) = 2,\ \ y''(0) = 4$;

2) $y''' = \dfrac{3\ln x}{x^2},\ \ y(1) = 0,\ \ y'(1) = 1,\ \ y''(1) = 2$;

3) $\sin^4 x \cdot y''' = \sin 2x,\ \ y\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = 0,\ \ y'\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3} - \dfrac{4\pi}{3},\ \ y''\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = 0$.

3. В **Mathematica** численно решить дифференциальное уравнение $x''(y) = \ln(xy), x(1) = 9, x'(1) = 4$ на отрезке $[0;6]$. Построить график полученного решения.

4.3. Системы дифференциальных уравнений

Пример 4.3.1

Найти общее решение линейной однородной системы двух дифференциальных уравнений первого порядка.

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x. \end{cases}$$

Указать частное решение системы, удовлетворяющее начальным условиям $x(0) = 0, y(0) = 1$.

Решение

Общим решением линейной системы двух дифференциальных уравнений первого порядка будет совокупность двух функций $x = x(t, C_1, C_2)$, $y = y(t, C_1, C_2)$, которые определены в некоторой области изменения переменных t, C_1, C_2 (C_1, C_2 – произвольные константы) и обращают каждое из данных дифференциальных уравнений в тождество.

Обозначим $\dfrac{dx}{dt} = x'$, $\dfrac{dy}{dt} = y'$. Будем решать данную однороднуют систему двух дифференциальных уравнений первого порядка методом исключения. Для чего продифференцируем по t первое уравнение системы и подставим вместо y' его выражение из второго уравнения:

$$x'' = -y' = -x .$$

Получим линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами: $x'' + x = 0$.

Его характеристическое уравнение имеет вид $\lambda^2 + 1 = 0$. Откуда $\lambda_1 = i$, $\lambda_2 = -i$.

Общим решением уравнения $x'' + x = 0$ будет функция $x = C_1 \cos t + C_2 \sin t$.

Для того чтобы найти функцию y, продифференцируем функцию $x(t)$ по t и подставим $\dfrac{dx}{dt}$ в первое уравнение системы:

$$y = -(C_1 \cos t + C_2 \sin t)' = C_1 \sin t - C_2 \cos t.$$

Таким образом, общее решение данной системы

$$x = C_1 \cos t + C_2 \sin t,\ y = C_1 \sin t - C_2 \cos t.$$

Подставим начальные условия $x(0) = 0, y(0) = 1$ в общее решение и найдем константы C_1, C_2, соответствующие частному решению: $C_1 = 1, C_2 = 0.$ Тогда частное решение имеет вид $x = \cos t, y = \sin t.$

Вычисления в Mathematica

Для решения системы дифференциальных уравнений в **Mathematica** используется функция **DSolve[{egn1,egn2,…},{y1[t],y2[t],…},t]**, которая решает систему дифференциальных уравнений **{egn1,egn2,…}** относительно неизвестных функций **{y1[t],y2[t],…}** с независимой переменной **t** (рис. 4.12).

```
In[1]:= (*Общее решение системы*)
        DSolve[{x'[t] = -y[t] , y'[t] = x[t]}, {x[t], y[t]}, t]

Out[1]= {{x[t] → C[1] Cos[t] - C[2] Sin[t],
          y[t] → C[2] Cos[t] + C[1] Sin[t]}}

In[2]:= (*Частное решение системы*)
        DSolve[{x'[t] = -y[t] , y'[t] = x[t], x[0] = 1, y[0] = 0},
         {x[t], y[t]}, t]

Out[2]= {{x[t] → Cos[t], y[t] → Sin[t]}}
```

Рис. 4.12

Функция **DSolve[]** позволяет решать системы обыкновенных дифференциальных уравнений, матрица коэффициентов которых имеет как вещественные, так и комплексные корни, а также однородные системы дифференциальных уравнений любого порядка.

Задания для самостоятельной работы

1. Решить систему дифференциальных уравнений:

1) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y + \cos t, \\ \dfrac{dy}{dt} = 1 - x; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} + 5x + y = e^t, \\ \dfrac{dy}{dt} + 3y = x + e^{2t}; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} + y = \cos t, \\ \dfrac{dy}{dt} = \sin t - x. \end{cases}$

2. Найти решения системы дифференциальных уравнений, удовлетворяющих заданным начальным условиям:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 5x - 3y + e^t, \\ \dfrac{dy}{dt} = y + x + 5e^{-t}, \end{cases} \quad x(0) = 1, y(0) = -1.$$

5. РЯДЫ

5.1. Числовые ряды

Пример 5.1.1

Найти сумму ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n.$

Решение

Частичная сумма ряда $S_n = 1 + 2 + ... + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$. Так как $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$, то ряд расходится.

Вычисления в Mathematica

Для вычисления суммы ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f$ используется функция **Sum[f, {n, 1, Infinity}]** (рис. 5.1).

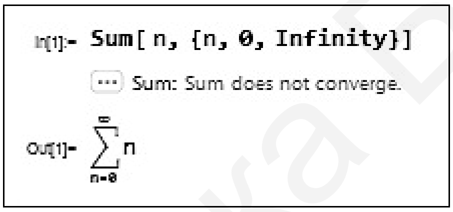


Рис. 5.1

Сообщение Sum does not converge свидетельствует о том, что данный ряд расходится.

Пример 5.1.2

Найти сумму ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{4}{n^2 + 5n + 6}.$

Решение

Частичная сумма ряда $S_n = \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{5} + \dfrac{2}{15} + ... + \dfrac{4}{n^2 + 5n + 6}$. Общий член ряда $u_n = \dfrac{4}{n^2 + 5n + 6}$ разложим на сумму простейших дробей:

$$u_n = \frac{4}{n^2 + 5n + 6} = \frac{4}{(n+3)(n+2)} = \frac{A}{n+2} + \frac{B}{n+3} = \frac{A(n+3) + B(n+2)}{(n+2)(n+3)};$$

$$f'''(-2) = \left(48x + 30\right)\Big|_{-2} = -66;$$

Полагая, что $n = -3$, найдем $B = -4$. Считая, что $n = -2$, получим $A = 4$. Следовательно, $u_n = 4\left(\dfrac{1}{n+2} - \dfrac{1}{n+3}\right)$.

Тогда частичная сумма будет равна

$$S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n =$$

$$= 4\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3}\right) = 4\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{n+3}\right).$$

Так как $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \frac{4}{3}$, то ряд сходится и его сумма равна $\frac{4}{3}$.

Вычисления в Mathematica

Для вычисления суммы ряда воспользуемся функцией **Sum** (рис. 5.2).

```
In[2]:= Sum[4 / (n^2 + 5 n + 6), {n, 1, Infinity}]
Out[2]= 4
        3
```

Рис. 5.2

Пример 5.1.3

Исследовать ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2(n\alpha)}{3^n}$ на сходимость.

Решение

Имеет место неравенство $0 \le \frac{\sin^2(n\alpha)}{3^n} \le \frac{1}{3^n}$. Исследуем ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}$ на сходимость. Так как $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{3^n}} = \frac{1}{3} < 1$, то по признаку Коши ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}$ сходится. Следовательно, по признаку сравнения ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2(n\alpha)}{3^n}$ будет сходиться при любом вещественном α.

Вычисления в Mathematica

Для исследования ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f$ на сходимость используется функция **SumConverge[f,n]** (рис. 5.3). Данная функция возвращает условия, при которых ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f$ сходится.

```
In[3]:= SumConvergence[Sin[n α]^2 / 2^n, n]
Out[3]= α = Re[α]
```

Рис. 5.3

Условие $\alpha = \mathrm{Re}(\alpha)$ выполняется при любом вещественном α.

Пример 5.1.4

Исследовать ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n+1}\right)$ на сходимость.

Решение

Имеет место неравенство $\ln\left(1+\frac{1}{n+1}\right) > \frac{1}{n+1}$. Так как при $n \to \infty$ выполняется $\frac{1}{n+1} \sim \frac{1}{n}$ и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ расходится, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1}$ также расходится. Тогда в соответствии с признаком сравнения, $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n+1}\right)$ ряд также будет расходиться.

Вычисления в Mathematica

Функция **SumConvergence** для рассматриваемого ряда возвращает значение **False** (рис. 5.4). Значит, данный ряд является расходящимся.

```
In[4]:= SumConvergence[Log[1 + 1 / (n + 1)], n]
Out[4]= False
```

Рис. 5.4

Пример 5.1.5

Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n}{4^n(3n-1)}$.

Решение

Пусть $a_n = \frac{3n}{4^n(3n-1)}$.

Так как $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{3(n+1)4^n(3n-1)}{4^{n+1}(3(n+1)-1)3n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{3n^2+2n-1}{4(4n^2+2n)} = \frac{3}{4} < 1,$ то исходный ряд сходится по признаку Д'Аламбера.

Вычисления в Mathematica

Функция **SumConvergence** для рассматриваемого ряда возвращает значение **True** (рис. 5.5). Значит, данный ряд является сходящимся.

```
In[5]:= SumConvergence[3 n / (4^n (3 n - 1)), n]
Out[5]= True
```

Рис. 5.5

Пример 5.1.6

Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$.

Решение

Ряд является знакочередующимся. Поэтому необходимо исследовать его на абсолютную и условную сходимости.

Так как $\lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}=0$ и члены ряда монотонно убывают по абсолютной величине, то по признаку Лейбница ряд сходится. Так как ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$, являясь обобщенно-гармоническим рядом, расходится, то исходный ряд сходится условно.

Вычисления в Mathematica

Исследуем на сходимость ряд, составленный из модулей (рис. 5.6).

```
In[6]:= SumConvergence[Abs[(-1)^n / Sqrt[n]], n]
Out[6]= False
```

Рис. 5.6

Так как функция **SumConvergence** для ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right|$ возвращает значение **False** (рис. 5.7), то абсолютной сходимости нет.

```
In[7]:= SumConvergence[(-1)^n / Sqrt[n], n]
Out[7]= True
```

Рис. 5.7

Так как функция **SumConvergence** для ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ возвращает значение **True**, то исходный ряд сходится условно.

Пример 5.1.7

Найти $S=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^3+1}$ с точностью до 0,01.

Решение

Очевидно, ряд сходится по признаку Лейбница и $|a_5|=\frac{1}{126}<0{,}01$. Тогда $S\approx-\frac{1}{2}+\frac{1}{9}-\frac{1}{28}+\frac{1}{65}\approx-0{,}41$.

Вычисления в Mathematica

Для вычисления приближенной суммы ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f$ используется функция **NSum[f,{n, 1, Infinity}]** (рис. 5.8).

```
In[8]:= NSum[(-1)^n / (n^3 + 1), {n, 1, Infinity}]
Out[8]= -0.414301
```

Рис. 5.8

Задания для самостоятельной работы

1. Найти сумму ряда:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{5^n-3^n}{15^n}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n+1)(3n+4)}$.

2. Исследовать ряд на сходимость:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n(n+2)!}{n^5}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{7n-1}{5^n(n+1)!}$; 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{2n-1}$; 4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{(3n-2)!}$.

5.2. Степенные ряды

Пример 5.2.1

Найти радиус сходимости, интервал сходимости и область сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-3)^n}{5^n\sqrt{n+1}}$.

Решение

Пусть $a_n=\frac{(x-3)^n}{5^n\sqrt{n+1}}$. Тогда

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(x-3)^{n+1}}{5^{n+1}\sqrt{n+2}}:\frac{(x-3)^n}{5^n\sqrt{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(x-3)\sqrt{n+1}}{5\sqrt{n+2}}\right|=\left|\frac{x-3}{5}\right|.$$

Применяя признак Д’Аламбера, получаем, что при $\left|\frac{x-3}{5}\right|<1$, т. е. при $|x-3|<5$ ряд сходится. Значит, радиус сходимости равен 5. Решая неравенство $|x-3|<5$ относительно x, найдем, что $x\in(-2;8)$ – интервал сходимости. Исследуем сходимость в точках $x=-2$ и $x=8$.

При $x=8$ исходный ряд перепишется в виде $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}}$. Так как $\frac{1}{\sqrt{n+1}}\sim\frac{1}{\sqrt{n}}$ при $n\to\infty$ и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ расходится, являясь обобщенно гармоническим рядом, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}}$ также расходится.

При $x=-2$ исходный ряд перепишется в виде $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$. Это знакочередующийся ряд, который будет сходиться условно по признаку Лейбница.

Таким образом, $[-2;8)$ – область сходимости исходного ряда.

Вычисления в Mathematica

Функция **SumConvergence[f,n]** возвращает условия, которым должна удовлетворять переменная x для того, чтобы исходный ряд сходился (рис. 5.9).

```
In[1]:= SumConvergence[(x - 3)^n / (5^n Sqrt[n + 1]), n]
Out[1]= Abs[-3 + x] < 5 || x == -2
```

Рис. 5.9

Из условия $|x-3|<5$ следует, что радиус сходимости равен 5, $(-2;8)$ – интервал сходимости. Так как при $x=-2$ ряд также сходится, то $[-2;8)$ – область сходимости.

Пример 5.2.2

Найти сумму ряда $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$.

Решение

Рассмотрим ряд $1-x^2+x^4-x^6+\ldots+(-1)^n x^{2n}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}$, составленный из производных членов исходного ряда. Так как это геометрическая прогрессия, то его сумма $S=\frac{1}{1+x^2}, |x|<1$. Так как члены ряда $|x^{2n}|\le q^{2n}$, а числовой ряд $\sum_{n=0}^{\infty}q^{2n}$, его мажорирующий, сходится при $0<q<1$, то ряд $1-x^2+x^4-\ldots$ можно почленно проинтегрировать. В результате получим

$$\operatorname{arctg} x=\int_0^x\frac{dt}{1+t^2}=\int_0^x(1-t^2+t^4-t^6+\ldots)dt=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\ldots+\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1},$$ причем $|x|<1$.

Вычисления в Mathematica

Для решения воспользуемся функцией **Sum** (рис. 5.10).

```
In[3]:= Sum[(-1)^n x^(2 n + 1) / (2 n + 1), {n, 0, Infinity}]
Out[3]= ArcTan[x]
```

Рис. 5.10

Задание для самостоятельной работы

Найти область сходимости ряда:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{2^n}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x+8)^n}{n^2}$; 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{x^{n+3}}$.

5.3. Ряды Тейлора

Пример 5.3.1

Разложить по степеням разности $x+2$ функцию $f(x)=2x^4+5x^3-2x+1$.

Решение

Рядом Тейлора для функции $f(x)$ называется ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$. В нашем случае $x_0=-2$. Вычислим значения производных функции $f(x)$:

$$f(-2)=-3;\ f'(-2)=\left(8x^3+15x^2-2\right)\Big|_{-2}=-6;$$

$$f''(-2)=\left(24x^2+30x\right)\Big|_{-2}=36;\ f'''(-2)=\left(48x+30\right)\Big|_{-2}=-66;\ f^{(4)}(-2)=48.$$

Производные функции $f(x)$ более высоких порядков равны нулю. Следовательно, $f(x)=-3-6(x+2)+18(x+2)^2-11(x+2)^3+2(x+4)^4$.

Вычисления в Mathematica

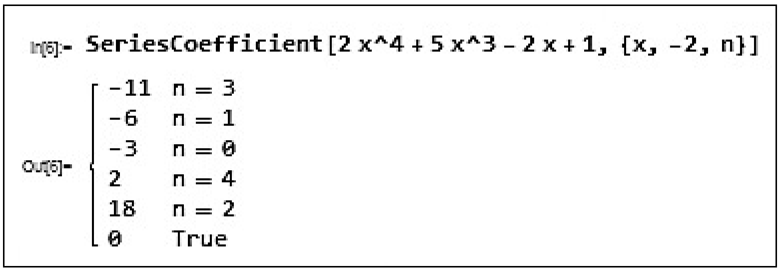
Функция **Series[f,{x,x0,n}]** возвращает разложение функции $f(x)$ в степенной ряд в окрестности точки x_0 до слагаемых, содержащих $(x-x_0)^n$ включительно. Отброшенные слагаемые обозначены символом $(x-x_0)^{n+1}$. Для записи разложения в нормальной форме используется функция **Normal[]** (рис. 5.11).

```
In[4]:= Series[2 x^4 + 5 x^3 - 2 x + 1, {x, -2, 5}]
Out[4]= -3 - 6 (x + 2) + 18 (x + 2)^2 - 11 (x + 2)^3 + 2 (x + 2)^4 + O[x + 2]^6

In[5]:= Normal[%]
Out[5]= -3 - 6 (2 + x) + 18 (2 + x)^2 - 11 (2 + x)^3 + 2 (2 + x)^4
```

Рис. 5.11

Коэффициенты разложения $f(x)$ в ряд Тейлора в окрестности точки x_0 можно получить при помощи функции **SeriesCoefficient[f,{x,x0,n}]** (рис. 5.12).



```
In[6]:= SeriesCoefficient[2 x^4 + 5 x^3 - 2 x + 1, {x, -2, n}]
Out[6]= { -11  n = 3
          -6   n = 1
          -3   n = 0
          2    n = 4
          18   n = 2
          0    True
```

Рис. 5.12

Пример 5.3.2

Разложить функцию e^{-2x} в ряд Маклорена.

Решение

Воспользуемся разложением в ряд Маклорена функции $f(t) = e^t$:

$$e^t = 1 + \frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!} + \ldots + \frac{t^n}{n!} + \ldots .$$

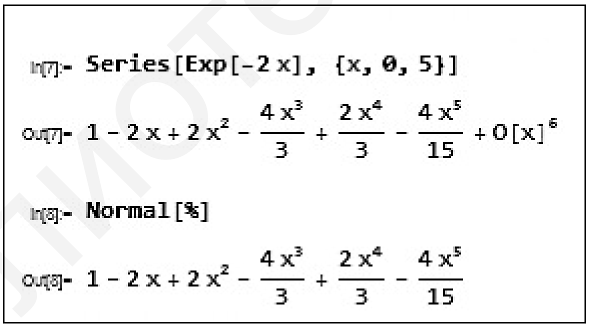
Это разложение справедливо при любом вещественном *t*.

Подставляя вместо t выражение $-2x$, получим

$$e^{-2x} = 1 - \frac{2x}{1!} + \frac{4x^2}{2!} + \ldots + (-1)^n \frac{2^n x^n}{n!} + \ldots .$$

Вычисления в Mathematica

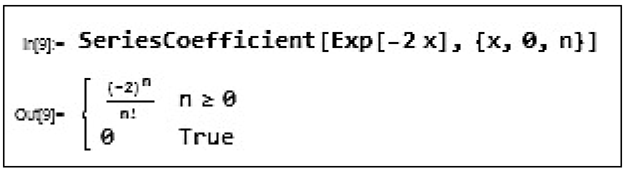
Для решения задачи используем те же функции, что и в предыдущем примере. Разложение проведем до слагаемых, содержащих x^5 (рис. 5.13).



```
In[7]:= Series[Exp[-2 x], {x, 0, 5}]
Out[7]= 1 - 2 x + 2 x^2 - 4 x^3/3 + 2 x^4/3 - 4 x^5/15 + O[x]^6
In[8]:= Normal[%]
Out[8]= 1 - 2 x + 2 x^2 - 4 x^3/3 + 2 x^4/3 - 4 x^5/15
```

Рис. 5.13

Найдем коэффициенты разложения (рис. 5.14).



```
In[9]:= SeriesCoefficient[Exp[-2 x], {x, 0, n}]
Out[9]= { (-2)^n/n!  n ≥ 0
          0          True
```

Рис. 5.14

Пример 5.3.3

Вычислить $\sqrt[3]{130}$ с точностью до 0,001.

Решение

Преобразуем:

$$\sqrt[3]{130}=\sqrt[3]{5^3+5}=5\sqrt[3]{1+\frac{1}{25}}=5(1+0,04)^{\frac{1}{3}}.$$

Воспользуемся разложением в ряд Маклорена функции $(1+x)^{\alpha}$:

$$(1+x)^{\alpha}=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\ldots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+\ldots.$$

Тогда $\sqrt[3]{130}=5\left(1+\frac{1}{3}0,04+\frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)}{2!}0,0016+\frac{\frac{1}{3}\left(-\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{5}{3}\right)}{3!}0,000064+\ldots\right)=$

$$=5+\frac{1}{3}\cdot 0,2-\frac{1}{9}0,008+\frac{5}{81}0,00032-\ldots\approx 5+0,0667-0,0009+$$
$$+0,000019753\ldots\approx 5+0,0667-0,0009=5,066.$$

Так как полученный ряд является знакочередующимся и его четвертый член $0,000019753<0,001$, то для нахождения приближенного значения с заданной точностью в выписанном разложении можно отбросить все слагаемые, начиная с четвертого.

Вычисления в Mathematica

Для нахождения приближенного значения выражения **expr** используется функция **N[expr]**. Для получения значения выражения **expr** с точностью до **n** цифр после запятой используется функция **N[expr, n]** (рис. 5.15).

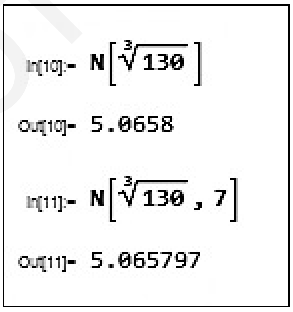


Рис. 5.15

Пример 5.3.4

Вычислить $\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{1-\cos x}{x^2}dx$ с точностью до 0,0001.

Решение

Заменим в подынтегральном выражении $\cos x$ его рядом. Получим

$$\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{1-\cos x}{x^2}dx=\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{1-1+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^4}{4!}+\frac{x^6}{6!}-\ldots}{x^2}dx=\int_0^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2!}-\frac{x^2}{4!}+\frac{x^4}{6!}-\ldots\right)dx=$$

$$=\left[\frac{1}{2!}x-\frac{x^3}{4!\cdot 3}+\frac{x^5}{6!\cdot 5}-\ldots\right]_0^{1/2}=\frac{1}{2!\cdot 2}-\frac{1}{4!\cdot 3\cdot 2^3}+\frac{1}{6!\cdot 5\cdot 2^5}-\ldots\approx 0,25-0,0017=0,2483.$$

Так как $\frac{1}{6!\cdot 5\cdot 2^5}\approx 8,680\cdot 10^{-6}<0,0001$, то все слагаемые, начиная с третьего, можно отбросить.

Вычисления в Mathematica

Решение примера 5.3.4 приведено на рис. 5.16.

In[12]:= $N\left[\int_0^{1/2}\frac{1-\mathrm{Cos}[x]}{x^2}dx\right]$

Out[12]= 0.248273

Рис. 5.16

Пример 5.3.5

Найти четыре первых (отличных от нуля) члена разложения решения дифференциального уравнения $z''=x+z^2$, $z(0)=0$, $z'(0)=1$.

Решение

Будем искать решение в виде ряда Тейлора. Дифференцируя уравнение, имеем

$$z'''=1+2zz',\quad z^{\mathrm{IV}}=2zz''+2z'^2,\quad z^{\mathrm{V}}=2zz'''+6z'z'',\quad z^{\mathrm{VI}}=2zz^{\mathrm{IV}}+8z'z'''+6z''^2$$

и т. д.

При $x=0$ получаем

$$z(0)=0,\ z'(0)=1,\ z''(0)=0,\ z'''(0)=1,\ z^{\mathrm{IV}}(0)=2,\ z^{\mathrm{V}}(0)=0,\ z^{\mathrm{VI}}(0)=8.$$

Тогда решение имеет вид

$$z=\frac{x}{1!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{2x^4}{4!}+\frac{8x^6}{6!}+\ldots=x+\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{12}+\frac{x^6}{90}+\ldots.$$

Вычисления в Mathematica

Определим представление для искомой функции в виде ряда Маклорена до слагаемых, содержащих x^6 включительно (рис. 5.17).

In[1]:= zf = Series[z[x], {x, 0, 6}]

Out[1]= $z[0]+z'[0]\,x+\frac{1}{2}z''[0]\,x^2+\frac{1}{6}z^{(3)}[0]\,x^3+\frac{1}{24}z^{(4)}[0]\,x^4+\frac{1}{120}z^{(5)}[0]\,x^5+\frac{1}{720}z^{(6)}[0]\,x^6+O[x]^7$

Рис. 5.17

Перенесем все слагаемые в исходном уравнении в левую часть: $z''-x-z^2=0$. Для представления этого уравнения зададим чистую функцию (pure function) (рис. 5.18).

```
In[2]:= oper = D[#, {x, 2}] - x - #^2 &
Out[2]= ∂{x,2} #1 - x - #1² &
```

Рис. 5.18

Символ & означает конец чистой функции. Знак # означает позицию аргумента. В случае когда аргументов несколько, их позиции обозначаются #1, #2 и т. д. При вычислении значения чистой функции вместо # (или #1, #2) подставляются ее аргументы.

В нашем случае при вызове **oper[zf]** вместо # будет подставлено выражение для **zf**, а затем будут произведены вычисления. В результате будет получена левая часть заданного дифференциального уравнения, в котором функция z заменена ее представлением в виде ряда (рис. 5.19).

```
In[3]:= oper[zf]
```

$$\left(-z[0]^2+z''[0]\right)+\left(-1-2\,z[0]\,z'[0]+z^{(3)}[0]\right)x+\left(-z'[0]^2-z[0]\,z''[0]+\frac{1}{2}z^{(4)}[0]\right)x^2+\left(-z'[0]\,z''[0]-\frac{1}{3}z[0]\,z^{(3)}[0]+\frac{1}{6}z^{(5)}[0]\right)x^3+\left(-\frac{1}{4}z''[0]^2-\frac{1}{3}z'[0]\,z^{(3)}[0]-\frac{1}{12}z[0]\,z^{(4)}[0]+\frac{1}{24}z^{(6)}[0]\right)x^4+O[x]^5$$

Рис. 5.19

Также определим начальные условия. Для вычисления значения функции в точке 0 используем оператор /. (рис. 5.20).

```
In[4]:= initConditions = {(zf /. {x → 0}) == 0, (D[zf, x] /. {x → 0}) == 1}
Out[4]= {z[0] == 0, z'[0] == 1}
```

Рис. 5.20

Для объединения исходного уравнения и начальных условий в один список используем функцию **Join**. Функция **SolveAlways[eqns, vars]** используется для подбора таких параметров, чтобы уравнения **eqns** были верными тождествами при любых значениях переменных **vars**. В нашем случае величины $z[0]$, $z'[0]$, $z''[0]$, $z'''[0]$, $z^{(4)}[0]$, $z^{(5)}[0]$ нужно подобрать так, чтобы система уравнений, составленная из исходного уравнения и начальных условий, была верным тождеством при любых значениях переменной x (рис. 5.21).

```
In[5]:= sol = SolveAlways[Join[{oper[zf] == 0}, initConditions], x]
Out[5]= {{z⁽⁵⁾[0] → 0, z⁽⁶⁾[0] → 8, z⁽⁴⁾[0] → 2,
          z⁽³⁾[0] → 1, z''[0] → 0, z'[0] → 1, z[0] → 0}}
```

Рис. 5.21

Для того чтобы записать решение, нужно в переменнную **zf** подставить найденные значения для $z[0], z'[0], z''[0], z'''[0], z^{(4)}[0], z^{(5)}[0]$ (рис. 5.22).

```
In[6]:= zf /. sol[[1]]
```

$$\text{Out[6]=}\ x+\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{12}+\frac{x^6}{90}+O[x]^7$$

Рис. 5.22

Можно записать найденное решение в нормальной форме (рис. 5.23).

```
In[7]:= Normal[zf] /. sol[[1]]
```

$$\text{Out[7]=}\ x+\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{12}+\frac{x^6}{90}$$

Рис. 5.23

Задания для самостоятельной работы

1. Разложить функцию в ряд Маклорена:

1) $f(x)=x\cos\sqrt{x}$; 2) $f(x)=e^{-x^4}$.

2. Разложить функцию в ряд Тейлора в окрестности заданной точки x_0:

1) $f(x)=\dfrac{1}{x^2-5x+4}, x_0=-2$; 2) $f(x)=\ln(6x+5), x_0=1$.

3. Найти разложение в степенной ряд по степеням x решения дифференциального уравнения (записать четыре первых, отличных от нуля, члена этого разложения):

1) $y'=x^2+y, y(0)=2$; 2) $y'=4\sin x+xy, y(0)=0$.

5.4. Ряды Фурье

Пример 5.4.1

Доказать, что система функций 1, $\cos x$, $\sin x$, $\cos 2x$, $\sin 2x$, …, $\cos nx$, $\sin nx$, … ортогональна на отрезке $[-\pi,\pi]$.

Решение

Для доказательства нужно проверить, что скалярное произведение любых двух функций из этого набора равно нулю.

Напомним, что скалярным произведением функций $f(x)$ и $g(x)$, заданных на отрезке $[a,b]$, называется величина, обозначаемая $(f(x), g(x))$ и равная $\int\limits_a^b f(x)g(x)dx$.

Последовательно находим:

$$(1,\sin nx)=\int\limits_{-\pi}^{\pi}1\cdot\sin nx\,dx=-\frac{1}{n}\cos nx\,|_{-\pi}^{\pi}=0,\ \int\limits_{-\pi}^{\pi}1\cdot\cos nx\,dx=\frac{1}{n}\sin nx\,|_{-\pi}^{\pi}=0;$$

$$(\cos mx,\cos nx)=\int\limits_{-\pi}^{\pi}\cos mx\cdot\cos nx\,dx=\frac{1}{2}\int\limits_{-\pi}^{\pi}[\cos(m-n)x+\cos(m+n)x]dx=\begin{cases}0, m\neq n,\\ \pi, m=n;\end{cases}$$

$$(\cos mx,\sin nx)=\int\limits_{-\pi}^{\pi}\cos mx\cdot\sin nx\,dx=\frac{1}{2}\int\limits_{-\pi}^{\pi}[\sin(m+n)x-\sin(m-n)x]dx=0,\forall m,n;$$

$$(\sin mx,\sin nx)=\int\limits_{-\pi}^{\pi}\sin mx\cdot\sin nx\,dx=\frac{1}{2}\int\limits_{-\pi}^{\pi}[\cos(m-n)x-\cos(m+n)x]dx=\begin{cases}0, m\neq n,\\ \pi, m=n.\end{cases}$$

Вычисления в Mathematica

Функция **Integrate[f,{x,x$_{\min}$, x$_{\max}$}]** используется для вычисления значения $\int\limits_{x_{\min}}^{x_{\max}} f(x)dx$. Функция **Assuming[assump, expr]** позволяет пользователю определить ограничения **assump** на параметры, входящие в **expr**. Данная функция используется с функциями **Simplify**, **Refine**, **Integrate**. В данном примере **Assuming** позволяет задать ограничения на параметры m и n (рис. 5.24).

```
In[1]:= Integrate[Sin[n x], {x, -Pi, Pi}]

Out[1]= 0

In[2]:= Assuming[{m ∈ Integers, n ∈ Integers, m ≠ n},
          Integrate[Cos[m x] Cos[n x], {x, -Pi, Pi}]]

Out[2]= 0

In[3]:= Assuming[{m ∈ Integers, n ∈ Integers, m == n},
          Integrate[Cos[m x] Cos[n x], {x, -Pi, Pi}]]

Out[3]= π

In[4]:= Integrate[Cos[m x] Sin[n x], {x, -Pi, Pi}]

Out[4]= 0

In[5]:= Assuming[{m ∈ Integers, n ∈ Integers, m ≠ n},
          Integrate[Sin[m x] Sin[n x], {x, -Pi, Pi}]]

Out[5]= 0

In[6]:= Assuming[{m ∈ Integers, n ∈ Integers, m == n},
          Integrate[Sin[m x] Sin[n x], {x, -Pi, Pi}]]

Out[6]= π
```

Рис. 5.24

Пример 5.4.2

Разложить в ряд Фурье 4-периодическую функцию $f(x)=\begin{cases}0, -2\le x\le 0,\\ x, 0<x\le 1,\\ 1, 1<x<2.\end{cases}$

Решение

Находим коэффициенты ряда Фурье:

$$a_0=\frac{1}{2}\int\limits_{-2}^{2}f(x)dx=\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{1}xdx+\frac{1}{2}\int\limits_{1}^{2}1dx=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{3}{4};$$

$$a_n=\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{1}x\cos\frac{n\pi x}{2}dx+\frac{1}{2}\int\limits_{1}^{2}1\cdot\cos\frac{n\pi x}{2}dx=\left|\begin{matrix}u=x, du=dx\\ dv=\cos\dfrac{n\pi x}{2}dx\\ v=\dfrac{2}{n\pi}\sin\dfrac{n\pi x}{2}\end{matrix}\right|=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{2x}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{2}\Big|_0^1-\frac{2}{n\pi}\int\limits_{0}^{1}\sin\frac{n\pi x}{2}dx+\frac{1}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{2}\Big|_1^2\right)=\frac{1}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}+\frac{2}{n^2\pi^2}\cos\frac{n\pi x}{2}\Big|_0^1+$$

$$+\frac{1}{n\pi}\sin 2\frac{n\pi}{2}-\frac{1}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}=\frac{2}{n^2\pi^2}\left(\cos\frac{n\pi}{2}-1\right);$$

$$b_n=\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{1}x\sin\frac{n\pi x}{2}dx+\frac{1}{2}\int\limits_{1}^{2}1\cdot\sin\frac{n\pi x}{2}dx=\left|\begin{matrix}u=x, du=dx\\ v=-\dfrac{2}{n\pi}\cos\dfrac{n\pi x}{2}\end{matrix}\right|=$$

$$=\frac{1}{2}\left(-\frac{2x}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{2}\Big|_0^1+\frac{4}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi x}{2}\Big|_0^1-\frac{1}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{2}\Big|_1^2\right)=$$

$$=-\frac{1}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{2}+\frac{2}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{2}-\frac{1}{n\pi}\cos n\pi+\frac{1}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{2}=\frac{2}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{2}-\frac{1}{n\pi}(-1)^n.$$

Полагая последовательно $n=1,2,3,\ldots$, получаем

$$f(x)\sim\frac{3}{8}+\left(-\frac{2}{\pi^2}\cos\frac{\pi x}{2}+\frac{2+\pi}{\pi^2}\sin\frac{\pi x}{2}\right)+$$

$$+\left(-\frac{1}{\pi^2}\cos\pi x-\frac{1}{2\pi}\sin\pi x\right)+\left(-\frac{2}{9\pi^2}\cos\frac{3\pi x}{2}+\frac{-2+3\pi}{9\pi^2}\sin\frac{3\pi x}{2}\right)-\frac{1}{4\pi}\sin 2\pi x\ldots\Bigg]=$$

$$=\frac{3}{8}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{n^2\pi^2}\left(\cos\frac{n\pi}{2}-1\right)\cos\frac{\pi nx}{2}+\left(\frac{2}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{2}-\frac{1}{n\pi}(-1)^n\right)\sin\frac{\pi nx}{2}\right).$$

Вычисления в Mathematica

Первый способ

Для задания кусочной функции $f(x)$ в **Mathematica** используем функцию **Piecewise** (рис. 5.25).

```
In[1]:= f[x_] := Piecewise[{{0, -2 ≤ x ≤ 0}, {x, 0 < x ≤ 1}, {1, 1 < x < 2}}]
In[2]:= f[x]
```

$$\text{Out[2]=}\begin{cases} 0 & -2 \le x \le 0 \\ x & 0 < x \le 1 \\ 1 & 1 < x < 2 \\ 0 & \text{True} \end{cases}$$

Рис. 5.25

Затем используем функцию **Integrate** для нахождения коэффициентов ряда Фурье (рис. 5.26).

```
In[4]:= 1/2 Integrate[f[x], {x, -2, 2}]
```

$$\text{Out[4]=}\ \frac{3}{4}$$

```
In[5]:= 1/2 Assuming[{n ∈ Integers}, Integrate[f[x] Cos[Pi n x/2], {x, -2, 2}]]
```

$$\text{Out[5]=}\ \frac{2\left(-1+\mathrm{Cos}\left[\frac{n\pi}{2}\right]\right)}{n^2\pi^2}$$

```
In[6]:= 1/2 Assuming[{n ∈ Integers}, Integrate[f[x] Sin[Pi n x/2], {x, -2, 2}]]
```

$$\text{Out[6]=}\ -\frac{(-1)^n n\pi - 2\,\mathrm{Sin}\left[\frac{n\pi}{2}\right]}{n^2\pi^2}$$

Рис. 5.26

Второй способ

Функция **FourierTrigSeries[f,x,n]** возвращает разложение до порядка **n** в тригонометрический ряд Фурье функции **f**, зависящее от переменной **x**. По умолчанию функция **f** считается заданной на интервале $(-\pi;\pi]$. Для получения разложения в ряд Фурье функции, заданной на отрезке $(-l;l]$, нужно параметры **FourierParameters** функции **FourierTrigSeries** положить равными $\left\{1, \dfrac{\pi}{l}\right\}$.

Выпишем первые четыре элемента разложения в тригонометрический ряд Фурье функции $f(x)$. В нашем случае $l = 2$ (рис. 5.27).

```
In[6]:= f[x_] := Piecewise[{{0, -2 ≤ x ≤ 0}, {x, 0 < x ≤ 1}, {1, 1 < x < 2}}]
In[7]:= FourierTrigSeries[f[x], x, 4, FourierParameters → {1, π/2}]
```

$$\text{Out[7]=}\ \frac{3}{8} - \frac{2\,\mathrm{Cos}\left[\frac{\pi x}{2}\right]}{\pi^2} - \frac{\mathrm{Cos}[\pi x]}{\pi^2} - \frac{2\,\mathrm{Cos}\left[\frac{3\pi x}{2}\right]}{9\pi^2} + \frac{(2+\pi)\,\mathrm{Sin}\left[\frac{\pi x}{2}\right]}{\pi^2} - \frac{\mathrm{Sin}[\pi x]}{2\pi} + \frac{(-2+3\pi)\,\mathrm{Sin}\left[\frac{3\pi x}{2}\right]}{9\pi^2} - \frac{\mathrm{Sin}[2\pi x]}{4\pi}$$

Рис. 5.27

Пример 5.4.3

Разложить в ряд Фурье функцию, заданную в сегменте $[0,\pi]$ уравнением $f(x)=\pi-2x$.

Решение

1) Доопределим $f(x)$ четным образом на $[-\pi,0]$ и разложим в ряд Фурье полученную функцию. Будем иметь

$$b_n=0, a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi(\pi-2x)dx=\frac{2}{\pi}(\pi x-x^2)\big|_0^\pi=0,$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi(\pi-2x)\cos nx\,dx=\frac{2}{n}\sin nx\big|_0^\pi-\frac{4}{\pi}\int_0^\pi x\cos nx\,dx=-\frac{4}{\pi}\int_0^\pi x\cos nx\,dx=$$

$$=\left|\begin{matrix}u=x,du=dx\\ \cos nx\,dx=dv\\ v=\dfrac{1}{n}\sin nx\end{matrix}\right|=-\frac{4}{\pi n}x\sin nx\big|_0^\pi+\frac{4}{\pi n}\int_0^\pi\sin nx\,dx=-\frac{4}{\pi n^2}\cos nx\big|_0^\pi=$$

$$=-\frac{4}{\pi n^2}(-1)^n+\frac{4}{\pi n^2}=\frac{4}{\pi n^2}\Big[(-1)^{n+1}+1\Big]=\begin{cases}\dfrac{8}{\pi n^2}, n=2k-1,\ k=1,2,...,\\ 0,\ n=2k,\ k=1,\ 2,\ ... .\end{cases}$$

Окончательно $f(x)\sim\dfrac{8}{\pi}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}=\dfrac{8}{\pi}(\cos x+\dfrac{\cos 3x}{3^2}+\dfrac{\cos 5x}{5^2}+...)$.

2) Доопределим $f(x)$ нечетным образом на $[-\pi,0]$ и вычислим коэффициенты ряда Фурье полученной функции. Будем иметь

$a_n=0, n=0,1,2,...4;$

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi(\pi-2x)\sin nx\,dx=-\frac{2}{n}\cos nx\big|_0^\pi-\frac{4}{\pi}\int_0^\pi x\sin nx\,dx=$$

$$=-\frac{2}{n}(-1)^n+\frac{2}{n}-\frac{4}{\pi}\int_0^\pi x\sin nx\,dx=\left|\begin{matrix}u=x,du=dx\\ \sin nx\,dx=dv\\ v=-\dfrac{1}{n}\cos nx\end{matrix}\right|=$$

$$=\frac{2}{n}((-1)^{n+1}+1)+\frac{4}{\pi n}x\cos nx\big|_0^\pi-\frac{4}{\pi n}\int_0^\pi\cos nx\,dx=\frac{2}{n}((-1)^{n+1}+1)+\frac{4}{n}(-1)^n=$$

$$=\frac{2}{n}\Big[(-1)^{n+1}+1+2(-1)^n\Big]=\begin{cases}\dfrac{4}{n}, n=2k,\ k=1,\ 2,\ ...,\\ 0,\ n=2k-1,\ k=1,\ 2,\ ... .\end{cases}$$

Окончательно $f(x) \sim 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin 2nx}{n} = 2\sin 2x + \sin 4x + \frac{2}{3}\sin 6x \ldots$.

Вычисления в Mathematica

Функции **FourierSinSeries[f,x,n]** и **FourierCosSeries[f,x,n]** возвращают соответственно разложение до порядка **n** в тригонометрический ряд Фурье по синусам или по косинусам функции **f**, зависящее от переменной **x**. По умолчанию функция **f** считается заданной на интервале $(-\pi;\pi]$. Для получения разложения в ряд Фурье функции, заданной на отрезке $(-l;l]$, нужно в параметрах **FourierParameters** функций **FourierSinSeries** и **FourierCosSeries** указать $\left\{1,\frac{\pi}{l}\right\}$. Для вычисления *n*-го коэффициента ряда Фурье по синусам или косинусам функции **f**, зависящее от переменной **x**, можно использовать функции **FourierSinCoefficient[f,x,n]** и **FourierCosCoefficient[f,x,n]**.

1) Используя функцию **FourierCosSeries**, получим первые шесть слагаемых разложения функции $f(x) = \pi - 2x$ по косинусам (рис. 5.28).

```
In[8]:= f[x_] := π - 2 x

In[9]:= FourierCosSeries[f[x], x, 6]

Out[9]= 8 Cos[x]/π + 8 Cos[3 x]/(9 π) + 8 Cos[5 x]/(25 π)
```

Рис. 5.28

Находим коэффициент разложения при $\cos 5x$ (рис. 5.29).

```
In[10]:= FourierCosCoefficient[f[x], x, 5]

Out[10]= 8/(25 π)
```

Рис. 5.29

2) Используя функцию **FourierSinSeries**, получим первые шесть слагаемых разложения функции $f(x) = \pi - 2x$ по косинусам и найдем коэффициент при $\sin 6x$ (рис. 5.30).

```
In[11]:= f[x_] := π - 2 x

In[12]:= FourierSinSeries[f[x], x, 6]

Out[12]= 2 Sin[2 x] + Sin[4 x] + 2/3 Sin[6 x]

In[13]:= FourierSinCoefficient[f[x], x, 6]

Out[13]= 2/3
```

Рис. 5.30

Пример 5.4.4

Разложить в ряд Фурье $f(x)=e^{-x}$, $(-\pi,\pi)$.

Решение

Воспользуемся комплексной формой ряда Фурье:

$$C_n=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{-x}e^{-inx}dx=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{-(1+in)x}dx=\frac{e^{-(1+in)x}}{2\pi(1+in)}\Big|_{-\pi}^{\pi}=\frac{e^{(1+in)\pi}-e^{-(1+in)\pi}}{2\pi(1+in)}=$$

$$=\frac{e^{\pi}e^{in\pi}-e^{-\pi}e^{-in\pi}}{2\pi(1+in)}=\frac{e^{\pi}(\cos n\pi+i\sin n\pi)-e^{-\pi}\cos n\pi+e^{-\pi}i\sin n\pi}{2\pi(1+in)}=$$

$$=\frac{(-1)^n(e^{\pi}-e^{-\pi})}{2\pi(1+in)}=\frac{(-1)^n sh(\pi)}{\pi(1+in)}.$$

Здесь $sh(\pi)$ – значение функции гиперболического синуса в точке π.

Следовательно, $f(x)=\sum\limits_{-\infty}^{\infty}C_n e^{inx}=\frac{sh(\pi)}{\pi}\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^n e^{inx}}{1+in}$.

Вычисления в Mathematica

Функция **FourierSeries[f,x,n]** возвращает разложение до порядка **n** в комплексный ряд Фурье функции **f**, зависящее от переменной **x**. По умолчанию функция **f** считается заданной на интервале $(-\pi;\pi]$. Для получения разложения в ряд Фурье функции, заданной на отрезке $(-l;l]$, нужно параметрам **FourierParameters** функции **FourierSeries** присвоить значения $\left\{1,\frac{\pi}{l}\right\}$. n-й коэффициент ряда Фурье находится с помощью функции **FourierCoefficient[f,x,n]**.

Выпишем первые несколько первых слагаемых разложения заданной функции (рис. 5.31).

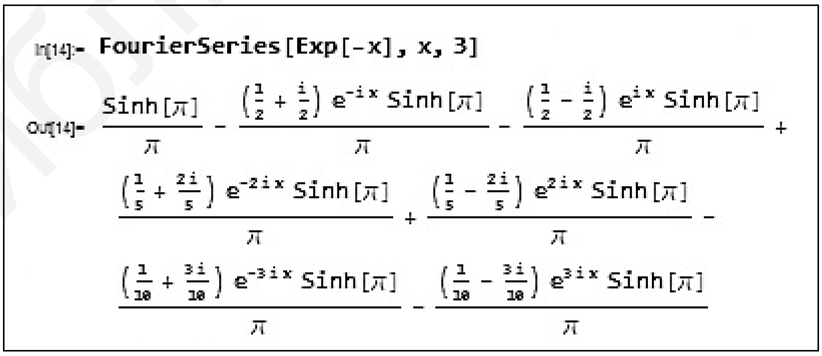


Рис. 5.31

Здесь **Sinh[a]** – это значение функции гиперболического синуса в точке a.

Коэффициент разложения при $e^{i\pi x}$ будет равен (рис. 5.32).

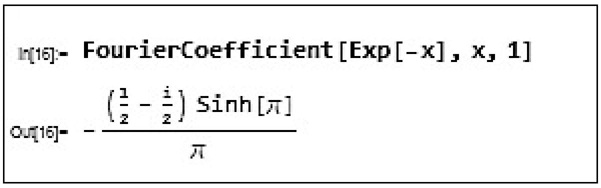


Рис. 5.32

Задания для самостоятельной работы

1. Разложить в ряд Фурье периодическую (с периодом $\omega = 2T$) функцию $f(x)$, заданную на отрезке $[-T, T]$:

1) $f(x) = \begin{cases} 2x, \; x \in (-\pi, 0), \\ -2, \; x \in [0, \pi], \end{cases}$ $T = \pi$; 2) $f(x) = \begin{cases} x, \; x \in (-3, 0), \\ x^3 + 4x, \; x \in [0, 3], \end{cases}$ $T = 3$.

2. Разложить в ряд Фурье функцию $f(x)$, заданную в интервале $(0; l)$, продолжив ее четным и нечетным образом:

1) $f(x) = 4^{x+1}$, $l = 3$; 2) $f(x) = (2x-5)^2$, $l = 1$.

6. Элементы теории поля

Пример 6.1

Найти величину и направление градиента скалярного поля $u=\dfrac{x^3}{2}+6y^3+3\sqrt{6}z^3$ в точке $A\left(\sqrt{2};\dfrac{1}{\sqrt{2}};\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

Решение

Величиной градиента называют скалярное поле $\left|\overrightarrow{\mathrm{grad}}u\right|=\sqrt{\left(u'_x\right)^2+\left(u'_y\right)^2+\left(u'_z\right)^2}$.

Найдем частные производные первого порядка функции u:

$$u'_x=\left(\frac{x^3}{2}+6y^3+3\sqrt{6}z^3\right)'_x=\frac{3x^2}{2};\qquad u'_y=\left(\frac{x^3}{2}+6y^3+3\sqrt{6}z^3\right)'_y=18y^2;$$

$$u'_z=\left(\frac{x^3}{2}+6y^3+3\sqrt{6}z^3\right)'_z=9\sqrt{6}z^2.$$

Тогда $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,u=\dfrac{3x^2}{2}\vec{i}+18y^2\vec{j}+9\sqrt{6}z^2\vec{k}$.

При $x=\sqrt{2},\ y=\dfrac{1}{\sqrt{2}},\ z=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ получаем

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,u(A)=\frac{3\left(\sqrt{2}\right)^2}{2}\vec{i}+18\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2\vec{j}+9\sqrt{6}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2\vec{k}=\left(3;9;3\sqrt{6}\right).$$

Величина градиента

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{grad}}u\right|=\sqrt{3^2+9^2+\left(3\sqrt{6}\right)^2}=\sqrt{9+81+54}=\sqrt{144}=12.$$

Вычисления в Mathematica

Решение данной задачи в системе **Mathematica** представлено на рис. 6.1.

```
In[1]:= u[x_, y_, z_] = x^3/2 + 6 y^3 + 3 √6 z^3;
        Gr = Grad[u[x, y, z], {x, y, z}] /. {x -> √2, y -> 1/√2, z -> 1/√3};
        Print["gradu|A= ", Gr]
        Print["|gradu|A|= ", Norm[Gr]]

        gradu|A= {3, 9, 3 √6}
        |gradu|A|= 12
```

Рис. 6.1

Пример 6.2

Найти угол между градиентами скалярных полей $u=\dfrac{1}{x^2yz}$, $v=-\dfrac{4\sqrt{2}}{x}+\dfrac{\sqrt{2}}{9y}+\dfrac{1}{\sqrt{3}z}$ в точке $N\left(2;\dfrac{1}{3};\dfrac{1}{\sqrt{6}}\right)$.

Решение

Находим частные производные функций u и v.

Найдем частные производные первого порядка функции u и v:

$$u'_x=\left(\frac{1}{x^2yz}\right)'_x=\frac{1}{yz}\left(x^{-2}\right)'_x=\frac{1}{yz}\left(-2x^{-3}\right)=-\frac{2}{x^3yz};$$

$$u'_y=\left(\frac{1}{x^2yz}\right)'_y=\frac{1}{x^2z}\left(\frac{1}{y}\right)'_y=\frac{1}{x^2z}\left(-\frac{1}{y^2}\right)=-\frac{1}{x^2zy^2};$$

$$u'_z=\left(\frac{1}{x^2yz}\right)'_z=\frac{1}{x^2y}\left(\frac{1}{z}\right)'_z=\frac{1}{x^2y}\left(-\frac{1}{z^2}\right)=-\frac{1}{x^2yz^2};$$

$$v'_x=\left(-\frac{4\sqrt{2}}{x}+\frac{\sqrt{2}}{9y}+\frac{1}{\sqrt{3}z}\right)'_x=\frac{4\sqrt{2}}{x^2};$$

$$v'_y=\left(-\frac{4\sqrt{2}}{x}+\frac{\sqrt{2}}{9y}+\frac{1}{\sqrt{3}z}\right)'_y=-\frac{\sqrt{2}}{9y^2};$$

$$v'_z=\left(-\frac{4\sqrt{2}}{x}+\frac{\sqrt{2}}{9y}+\frac{1}{\sqrt{3}z}\right)'_z=-\frac{1}{\sqrt{3}z^2}.$$

Таким образом,

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,u=\left(-\frac{2}{x^3yz},-\frac{1}{x^2zy^2},-\frac{1}{x^2yz^2}\right),$$

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,v=\left(\frac{4\sqrt{2}}{x^2},-\frac{\sqrt{2}}{9y^2},-\frac{1}{\sqrt{3}z^2}\right).$$

Значение градиента в точке $N\left(2;\dfrac{1}{3};\dfrac{1}{\sqrt{6}}\right)$:

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,u\Big|_N=\left(-\frac{2}{2^3\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{6}}},-\frac{1}{2^2\cdot\frac{1}{\sqrt{6}}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2},-\frac{1}{2^2\cdot\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right)^2}\right)=$$

$$=\left(-\frac{3\sqrt{6}}{4},-\frac{9\sqrt{6}}{4},-\frac{9}{2}\right),$$

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,v\Big|_N=\left(\frac{4\sqrt{2}}{2^2},-\frac{\sqrt{2}}{9\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2},-\frac{1}{\sqrt{3}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right)^2}\right)=\left(\sqrt{2},-\sqrt{2},-\frac{6}{\sqrt{3}}\right).$$

Теперь находим угол α между градиентами скалярных полей u и v:

$$\cos\alpha=\frac{\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,u,\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,v}{\left|\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,u\right|\cdot\left|\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,v\right|}=$$

$$=\frac{\left(-\frac{3\sqrt{6}}{4}\right)\cdot\sqrt{2}+\left(-\frac{9\sqrt{6}}{4}\right)\cdot\left(-\sqrt{2}\right)+\left(-\frac{9}{2}\right)\cdot\left(-\frac{6}{\sqrt{3}}\right)}{\sqrt{\left(-\frac{3\sqrt{6}}{4}\right)^2+\left(-\frac{9\sqrt{6}}{4}\right)^2+\left(-\frac{9}{2}\right)^2}\cdot\sqrt{\left(\sqrt{2}\right)^2+\left(-\sqrt{2}\right)^2+\left(\frac{6}{\sqrt{3}}\right)^2}}=$$

$$=\frac{-\frac{3\sqrt{3}}{2}+\frac{9\sqrt{3}}{2}+\frac{27}{\sqrt{3}}}{\sqrt{\frac{27}{8}+\frac{243}{8}+\frac{81}{4}}\cdot\sqrt{2+2+12}}=\frac{\frac{72}{2\sqrt{3}}}{3\sqrt{6}\cdot 4}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow\ \alpha=45^\circ$$

Вычисления в Mathematica

Найдем с помощью встроенных функций **Grad** и **VectorAngle** градиенты скалярных полей и угол между ними (рис. 6.2).

```
In[5]:= U[x_, y_, z_] = 1/(x^2 * y * z); V[x_, y_, z_] = -(4 √2)/x + √2/(9 y) + 1/(√3 z);
        a := Grad[U[x, y, z], {x, y, z}] /. {x → 2, y -> 1/3, z -> 1/√6}
        b := Grad[V[x, y, z], {x, y, z}] /. {x → 2, y -> 1/3, z -> 1/√6}
        Print["grad→U|N= ", a]
        Print["grad→V|N= ", b]
        Print["α = ", VectorAngle[a, b]]
```

Рис. 6.2

Результат вычислений представлен на рис. 6.3.

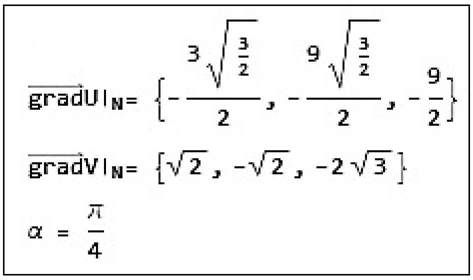


Рис. 6.3

Пример 6.3

Определить вид (соленоидальное, потенциальное, гармоническое) векторного поля $\vec{a}(M) = y^2z^3\vec{i} + \left(z^2 + 2xyz^3\right)\vec{j} + \left(3xy^2z^2 + 2yz + 1\right)\vec{k}$.

Решение

Если $\operatorname{div}\vec{a}(M) = 0$, то поле $\vec{a}(M)$ называется соленоидальным.

Если $\operatorname{rot}\vec{a}(M) = \vec{0}$, то поле $\vec{a}(M)$ называется потенциальным.

Если $\begin{cases} \operatorname{rot}\vec{a}(M) = \vec{0}, \\ \operatorname{div}\vec{a}(M) = 0, \end{cases}$ то поле $\vec{a}(M)$ называется гармоническим.

Вычислим дивергенцию и ротор данного векторного поля.

По условию $P = y^2z^3,\ Q = z^2 + 2xyz^3,\ R = 3xy^2z^2 + 2yz + 1$. Тогда

$$\operatorname{div}\vec{a}(M) = 0 = P'_x + Q'_y + R'_z = \left(y^2z^3\right)'_x + \left(z^2 + 2xyz^3\right)'_y + \left(3xy^2z^2 + 2yz + 1\right)'_z =$$

$$= 0 + 2xz^3 + 6xy^2z + 2y = 2xz^3 + 6xy^2z + 2y,$$

$$\operatorname{rot}\vec{a}(M) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \left(R'_y - Q'_z\right)\vec{i} + \left(P'_z - R'_x\right)\vec{j} + \left(Q'_x + P'_y\right)\vec{k} =$$

$$= \left(\left(3xy^2z^2 + 2yz + 1\right)'_y - \left(z^2 + 2xyz^3\right)'_z\right)\vec{i} - \left(\left(y^2z^3\right)'_z - \left(3xy^2z^2 + 2yz + 1\right)'_x\right)\vec{j} +$$

$$+ \left(\left(z^2 + 2xyz^3\right)'_x - \left(y^2z^3\right)'_y\right)\vec{k} = \left(6xy^2z^2 + 2z - 2z - 6xy^2z^2\right)\vec{i} +$$

$$+ \left(3y^2z^2 - 3y^2z^2\right)\vec{j} + \left(2yz^3 - 2yz^3\right)\vec{k} = \vec{0}.$$

Итак, данное векторное поле $\vec{a}(M)$:

а) не является соленоидальным, т. к. $\operatorname{div}\vec{a}(M) \neq 0$;

б) является потенциальным, т. к. $\operatorname{rot}\vec{a}(M) = \vec{0}$;

в) не является гармоническим, т. к. $\begin{cases} \operatorname{rot}\vec{a}(M)=\vec{0}, \\ \operatorname{div}\vec{a}(M)\neq 0. \end{cases}$

Вычисления в Mathematica

С помощью встроенных функций **Div** и **Curl** найдем дивергенцию и ротор векторного поля (рис. 6.4).

```
In[6]:= P[x_, y_, z_] := y^2 * z^3
        Q[x_, y_, z_] := z^2 + 2 x * y * z^3
        R[x_, y_, z_] := 3 x * y^2 * z^2 + 2 y * z + 1
        Print["div a⃗(M)=", Div[{P[x, y, z], Q[x, y, z], R[x, y, z]}, {x, y, z}]]
        Print["rot a⃗(M)=", Curl[{P[x, y, z], Q[x, y, z], R[x, y, z]}, {x, y, z}]]

        div a⃗(M)=2 y + 6 x y^2 z + 2 x z^3

        rot a⃗(M)={0, 0, 0}
```

Рис. 6.4

Из полученных результатов делаем вывод, что данное поле является потенциальным.

Пример 6.4

Проверить, является ли векторное поле $\vec{a}(M)=\operatorname{arctg} yz\cdot\vec{i}+\dfrac{xz\cdot\vec{j}+xy\cdot\vec{k}}{1+y^2z^2}$ потенциальным, и в случае потенциальности поля найти его потенциал.

Решение

$$\operatorname{rot}\vec{a}(M)=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ \operatorname{arctg} yz & \dfrac{xz}{1+y^2z^2} & \dfrac{xy}{1+y^2z^2} \end{vmatrix}=\left(\left(\frac{xy}{1+y^2z^2}\right)'_y-\left(\frac{xz}{1+y^2z^2}\right)'_z\right)\vec{i}-$$

$$-\left(\left(\operatorname{arctg} yz\right)'_z-\left(\frac{xy}{1+y^2z^2}\right)'_x\right)\vec{j}+\left(\left(\frac{xz}{1+y^2z^2}\right)'_x-\left(\operatorname{arctg} yz\right)'_y\right)\vec{k}=$$

$$=\left(\frac{(xy)'_y\left(1+y^2z^2\right)-(xy)\left(1+y^2z^2\right)'_y}{\left(1+y^2z^2\right)^2}-\frac{(xy)'_z\left(1+y^2z^2\right)-(xz)\left(1+y^2z^2\right)'_z}{\left(1+y^2z^2\right)^2}\right)\vec{i}+$$

$$+\left(\frac{y}{1+y^2z^2}-\frac{y}{1+y^2z^2}\right)\vec{j}+\left(\frac{z}{1+y^2z^2}-\frac{z}{1+y^2z^2}\right)\vec{k}=0\cdot\vec{i}+0\cdot\vec{j}+0\cdot\vec{k}=\vec{0}.$$

Итак, векторное поле $\vec{a}(M)$ потенциально. Его потенциал найдем по формуле

$$u(x,y,z)=\int\limits_{(x_0;y_0;z_0)}^{(x;y;z)} Pdx+Qdy+Rdz=\int\limits_{x_0}^{x} P(x,y_0,z_0)dx+$$

$$+\int\limits_{y_0}^{y} Q(x,y,z_0)dy+\int\limits_{z_0}^{z} R(x,y,z)dz$$

при условии, что $(x_0;y_0;z_0)=(0;0;0)$:

$$u(x,y,z)=\int\limits_0^x 0\cdot dx+\int\limits_0^y 0\cdot dy+\int\limits_0^z\frac{xy}{1+y^2z^2}\cdot dz=xy\cdot\frac{1}{y}\int\limits_0^z\frac{d(xy)}{1+(yz)^2}=$$

$$=x\cdot\operatorname{arctg} yz\Big|_0^z=x\cdot\operatorname{arctg} yz-x\cdot\operatorname{arctg}0=x\cdot\operatorname{arctg} yz+C.$$

Для проверки решения найдем градиент полученной функции:

$$\overrightarrow{\operatorname{grad}}u=u'_x\cdot\vec{i}+u'_y\cdot\vec{j}+u'_z\cdot\vec{k}=\left(x\operatorname{arctg} yz\right)'_x\cdot\vec{i}+\left(x\operatorname{arctg} yz\right)'_y\cdot\vec{j}+$$

$$+\left(x\operatorname{arctg} yz\right)'_z\cdot\vec{k}=\operatorname{arctg} yz\cdot\vec{i}+\frac{xz}{1+y^2z^2}\cdot\vec{j}+\frac{xy}{1+y^2z^2}\cdot\vec{k}=\vec{a}(M).$$

Проверка подтвердила полученный результат.

Вычисления в Mathematica

Зададим начальные условия (рис. 6.5).

```
In[11]:= x0 := 0
         y0 := 0
         z0 := 0
         P[x_, y_, z_] := ArcTan[y*z]
         Q[x_, y_, z_] := x*z / (1 + y^2 z^2)
         R[x_, y_, z_] := x*y / (1 + y^2 z^2)
```

Рис. 6.5

Найдем потенциал векторного поля по формуле, приведенной выше (рис. 6.6).

```
P1 := P[x, y0, z0]
Q1 := Q[x, y, z0]
R1 := R[x, y, z]
U[x_, y_, z_] := (∫P1 ⅆx + ∫Q1 ⅆy + ∫R1 ⅆz) -
   ((∫P1 ⅆx + ∫Q1 ⅆy + ∫R1 ⅆz) /. {x → x0, y → y0, z → z0})
Print["U(x,y,z) = ", U[x, y, z], "+C"]
U(x,y,z) = x ArcTan[y z]+C
```

Рис. 6.6

Выполним проверку (рис. 6.7).

```
In[22]:= Print["gradU = ", Grad[U[x, y, z], {x, y, z}]]
         gradU = {ArcTan[y z], x z/(1 + y^2 z^2), x y/(1 + y^2 z^2)}
```

Рис. 6.7

Задания для самостоятельной работы

1. Найти угол между градиентами скалярных полей $u(x,y,z)$ и $v(x,y,z)$ в точке M:

1) $u(x,y,z)=\dfrac{z^3}{xy^2},\ v(x,y,z)=9\sqrt{2}x^3-\dfrac{y^3}{2\sqrt{2}}-\dfrac{4z^3}{\sqrt{3}},\ M\left(\dfrac{1}{3};2;\sqrt{\dfrac{3}{2}}\right)$;

2) $u(x,y,z)=\dfrac{yz^2}{x},\ v(x,y,z)=\dfrac{\sqrt{6}}{2x}-\dfrac{\sqrt{6}}{2y}+\dfrac{2}{3z},\ M\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}};\dfrac{1}{\sqrt{2}};\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

2. Найти дивергенцию и ротор векторного поля $\vec{a}=\left[\vec{c},\overrightarrow{\operatorname{grad}}\,u\right]$, если:

1) $\vec{c}=\vec{i}-2\vec{j}+\vec{k},\ u=xy+y+z$; 2) $\vec{c}=5\vec{i}+\vec{j}-2\vec{k},\ u=2y+\dfrac{1}{2}z^2+xy$.

3. Определить вид (соленоидальное, потенциальное, гармоническое) векторного поля:

1) $\vec{a}(M)=y(1-z\sin xy)\cdot\vec{i}+x(1-z\sin xy)\cdot\vec{j}+\cos y\cdot\vec{k}$;

2) $\vec{a}(M)=\left(-2x^2+3y\right)\cdot\vec{i}+\left(2x^2-y^3\right)\cdot\vec{j}+2z\cdot\vec{k}$.

4. Проверить, является ли векторное поле потенциальным. В случае положительного ответа найти его потенциал, предполагая, что в начале координат $u=0$:

1) $\vec{a}(M)=\dfrac{\left(1+z(1+x+y)\right)\cdot\vec{i}+\left(1+2y(1+x+y)\right)\cdot\vec{j}}{1+x+y}+x\cdot\vec{k}$;

2) $\vec{a}(M)=\left(3x^2y+x\right)\cdot\vec{i}+\left(x^3+\ln\left(1+z^2\right)\right)\cdot\vec{j}+\dfrac{2yz}{1+z^2}\cdot\vec{k}$.

7. ОПЕРАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

7.1. Преобразование Лапласа

Пример 7.1.1

Пользуясь определением, найти изображение оригинала $e^{\alpha t}$.

Решение

Изображение есть функция, равная преобразованию Лапласа оригинала:

$$L\{e^{\alpha t}\} = \int_0^{+\infty} e^{\alpha t} e^{-pt} dt = \int_0^{+\infty} e^{-(p-\alpha)t} dt = \left.\frac{e^{-(p-\alpha)t}}{-(p-\alpha)}\right|_0^{+\infty} = \frac{1}{p-\alpha}, \text{ если } \operatorname{Re} p > \alpha .$$

Следовательно, $e^{\alpha t} \doteqdot \dfrac{1}{p-\alpha}$.

Вычисления в Mathematica

Функция **LaplaceTransform[expr,t,s]** вычисляет значение преобразования Лапласа выражения **expt**, зависящего от переменной **t**, и возвращает функцию переменной **s** (рис. 7.1).

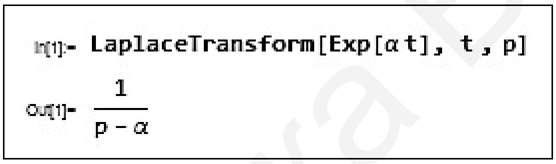


Рис. 7.1

Пример 7.1.2

Найти изображение оригинала $f(t) = \begin{cases} \sin(t-\pi), t > \pi, \\ 0, t \le \pi. \end{cases}$

Решение

В теории операционного исчисления известна теорема запаздывания, которая формулируется следующим образом. Если $f(t) \doteqdot F(p)$ и $a > 0$, то $f(t-a) \doteqdot e^{-ap} F(p)$.

Так как $e^{\alpha t} \doteqdot \dfrac{1}{p-\alpha}$, то, учитывая теорему запаздывания, находим, что $L\{\sin(t-\pi)\} = e^{-\pi p} L\{\sin t\}$.

Так как $\sin\beta t = \dfrac{1}{2i}(e^{i\beta t} - e^{-i\beta t})$, то $\sin\beta t \doteqdot \dfrac{1}{2i}\left(\dfrac{1}{p-i\beta} - \dfrac{1}{p+i\beta}\right) = \dfrac{\beta}{p^2+\beta^2}$.

Следовательно, $L\{\sin t\} = \dfrac{1}{p^2+1}$. Поэтому $L\{\sin(t-\pi)\} = e^{-\pi p} L\{\sin t\} = \dfrac{e^{-\pi p}}{p^2+1}$.

Вычисления в Mathematica

Решение примера 7.1.2 приведено на рис. 7.2.

```
In[2]:= f[t_] := Piecewise[{{Sin[t - π], t > π}, {0, t ≤ π}}]
In[3]:= LaplaceTransform[f[t], t , p]
Out[3]= e^{-p π}/(1 + p^2)
```

Рис. 7.2

Пример 7.1.3

Записать аналитически оригинал, изображенный на рис. 7.3, и найти его изображение.

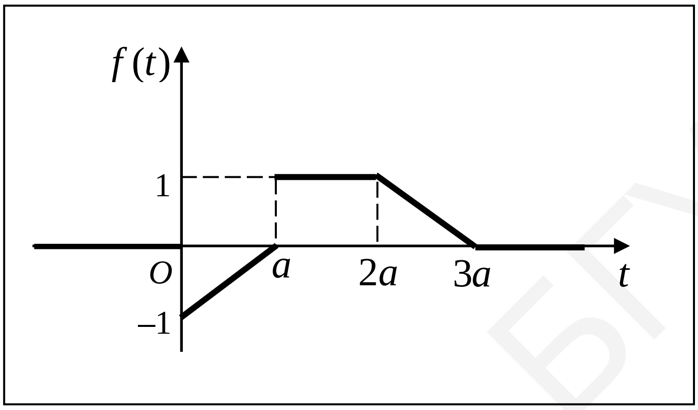


Рис. 7.3

Решение

На $(0, a)$ функция $\varphi(t)$ имеет вид $\varphi(t) = \dfrac{t-a}{a}$. Следовательно, на этом интервале оригинал $f_1(t) = \dfrac{t-a}{a}\left[1(t) - 1(t-a)\right]$. На интервале $(a, 2a)$ функция $\varphi(t) = 1$. Оригинал $f_2(t) = 1(t-a) - 1(t-2a)$. Наконец, на интервале $(2a, 3a)$ $\varphi(t) = \dfrac{3a-t}{a} \Rightarrow f_3(t) = \dfrac{3a-t}{a}[1(t-2a) - 1(t-3a)]$.

В результате для оригинала $f(t)$, изображенного на рис. 7.3, получаем следующую аналитическую запись: $f(t) = f_1(t) + f_2(t) + f_3(t) =$ $= \dfrac{t-a}{a}[1(t) - 1(t-a)] + [1(t-a) - 1(t-2a)] + \dfrac{3a-t}{a}[1(t-2a) - 1(t-3a)]$.

В этом равенстве приведем подобные члены, чтобы каждое слагаемое в окончательном выражении содержало произведение вида $h(t-a)\cdot 1(t-a)$, где $h(t)$ – некоторая функция, $a = \text{const}$. Получим

$$f(t) = \frac{1}{a}t\cdot 1(t) - 1(t) - \frac{1}{a}(t-a)\cdot 1(t-a) + 1(t-a) - \frac{1}{a}(t-2a)\cdot 1(t-2a) +$$
$$+\frac{1}{a}(t-3a)\cdot 1(t-3a).$$

Отсюда по теореме запаздывания будем иметь

$$f(t) \risingdotseq F(p) = \frac{1}{ap^2} - \frac{1}{p} - \frac{e^{-ap}}{ap^2} + \frac{e^{-ap}}{p} - \frac{e^{-2ap}}{ap^2} + \frac{e^{-3ap}}{ap^2} =$$

$$= \frac{e^{-ap} - 1}{p} + \frac{1 - e^{-ap} - e^{-2ap} + e^{-3ap}}{ap^2}.$$

Вычисления в Mathematica

Первый способ

Для задания функции $f(t)$ используем функцию **Piecewise** (рис. 7.4).

```
In[1]:= f[t_] :=
    Piecewise[{{0, t ≤ 0}, {(t - a)/a, 0 < t ≤ a}, {1, a < t <= 2 a},
      {(3 a - t)/a, 2 a < t ≤ 3 a}, {0, t > 3 a}}]

In[2]:= LaplaceTransform[f[t], t , p, Assumptions → a > 0]

Out[2]= - (e^(-3 a p) (-1 + e^(a p)) (1 - e^(2 a p) + a e^(2 a p) p)) / (a p^2)
```

Рис. 7.4

Второй способ

Зададим функцию $f(t)$ с помощью **UnitStep[]** (рис. 7.5).

```
In[3]:= f[t_] := (t - a)/a (UnitStep[t] - UnitStep[t - a]) +
    (UnitStep[t - a] - UnitStep[t - 2 a]) +
    (3 a - t)/a (UnitStep[t - 2 a] - UnitStep[t - 3 a ])
  Simplify[LaplaceTransform[f[t], t , p, Assumptions → a > 0]]

Out[4]= - (e^(-3 a p) (-1 + e^(a p)) (1 + e^(2 a p) (-1 + a p))) / (a p^2)
```

Рис. 7.5

Вместо **UnitStep[]** можно использовать **HeavisideTheta[]** (рис. 7.6).

```
In[6]:= f[t_] := (t - a)/a (HeavisideTheta[t] - HeavisideTheta[t - a]) +
    (HeavisideTheta[t - a] - HeavisideTheta[t - 2 a]) +
    (3 a - t)/a (HeavisideTheta[t - 2 a] - HeavisideTheta[t - 3 a ])

In[7]:= Simplify[LaplaceTransform[f[t], t , p, Assumptions → a > 0]]

Out[7]= - (e^(-3 a p) (-1 + e^(a p)) (1 + e^(2 a p) (-1 + a p))) / (a p^2)
```

Рис. 7.6

Функция **Simplify[]** используется для упрощения выражений.

Пример 7.1.4

Найти изображение оригинала периода $T > 0$, изображенного на рис. 7.7.

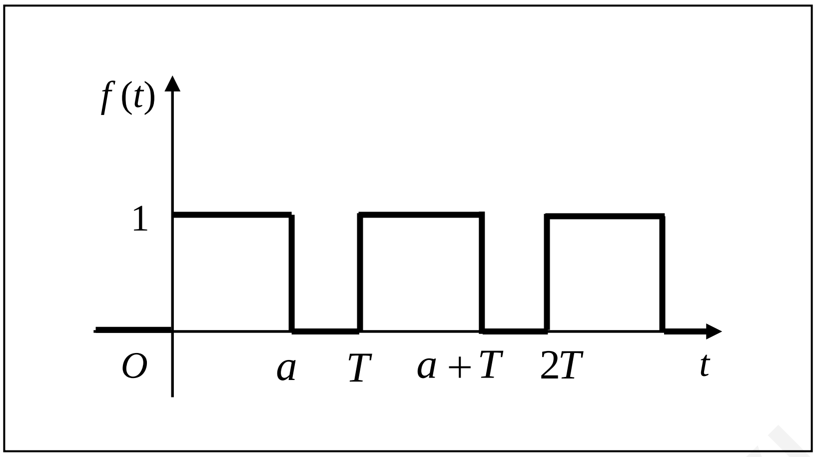


Рис. 7.7

Решение

В операционном исчислении известна теорема об изображении периодического оригинала, которая формулируется следующим образом: если $f(t)$ – оригинал периода $T > 0$, то $f(t) \doteqdot \dfrac{\int\limits_0^T f(t)e^{-pt}dt}{1-e^{-pT}} = F(p)$.

Найдем значение интеграла $\int\limits_0^T f(t)e^{-pt}dt = \int\limits_0^a 1\cdot e^{-pt}dt = \dfrac{1-e^{-ap}}{p}$. Из теоремы об изображении периодического оригинала следует, что искомое изображение будет равно $F(p) = \dfrac{1-e^{-ap}}{p(1-e^{-pT})}$.

Вычисления в Mathematica

Решение примера 7.1.4 приведено на рис. 7.8.

```
In[1]:= f[t_] := Piecewise[{{1, 0 ≤ t < a}, {0, a ≤ t < T}}]

In[2]:= Integrate[Exp[-p t] f[t], {t, 0, T}, Assumptions → {a > 0, T > a}] /
          (1 - Exp[-pT])
```

$$\text{Out[2]=}\ \frac{e^{-a p}\left(-1+e^{a p}\right)}{\left(1-e^{-pT}\right) p}$$

Рис. 7.8

Пример 7.1.5

Найти изображение дифференциального выражения $f''(t) + 2f'(t) + f(t)$, если $f(0) = 1, \quad f'(0) = 2$.

Решение

В операционном исчислении известна теорема о дифференцировании оригинала, которая формулируется следующим образом: если $f(t),\ f'(t),\ f''(t),\ ...,\ f^{(n)}(t)$ – оригиналы и $f(t) \risingdotseq F(p)$, то $f^{(n)}(t) \risingdotseq p^n F(p) - p^{n-1} f(0) - p^{n-2} f'(0) - ... - pf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0)$.

Из предыдущей формулы следует, что $f'(t) \risingdotseq pF(p) - f(0) = pF(p) - 1$; $f''(t) \risingdotseq p^2 F(p) - pf(0) - f'(0) = p^2 F(p) - p - 2$.

Тогда

$$f''(t) + 2f'(t) + f(t) \risingdotseq (p^2 + 2p + 1)F(p) - p - 4.$$

Вычисления в Mathematica

Функция **LaplaceTransform[]** используется для нахождения оригинала изображения заданного дифференциального изображения. **expr/. rules** выполняет подстановку в выражении **expr** в соответствии с заданным списком правил **rules**. **ReplaceAll[expr, rules]** эквивалентно **expr/. Rules**. **Simplify[]** используется для упрощения выражения. Решение приведено на рис. 7.9.

```
In[1]:= Simplify[LaplaceTransform[f''[t] + 2 f'[t] + f[t], t, p] /.
          {f[0] → 1, f'[0] → 2}]
Out[1]= -4 - p + (1 + p)^2 LaplaceTransform[f[t], t, p]
```

Рис. 7.9

Полученный ответ содержит **LaplaceTransform[f[t],t,p]**. Заменим это выражение на $F(p)$ (рис. 7.10).

```
In[2]:= % /. {LaplaceTransform[f[t], t, p] → F[p]}
Out[2]= -4 - p + (1 + p)^2 F[p]
```

Рис. 7.10

% означает результат вычисления предыдущей ячейки.

Задания для самостоятельной работы

1. Пользуясь определением, найти изображения оригиналов: 1) $3t$; 2) t^2.

2. Найти изображения оригиналов: 1) $\operatorname{sh}\beta t$; 2) $\cos(t+3)$.

3. Найти изображение $F(p)$ оригинала $f(t)$, заданного графически (рис. 7.11–7.14).

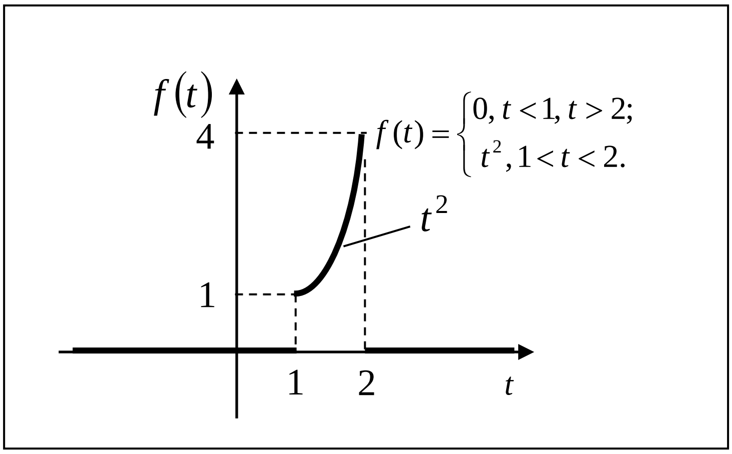


Рис. 7.11

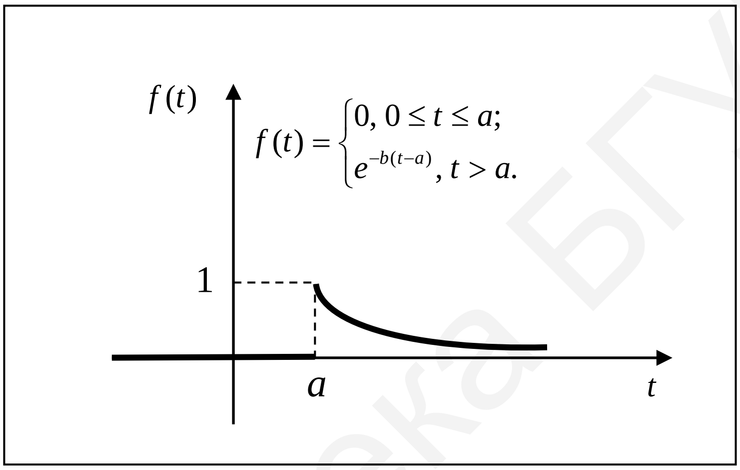


Рис. 7.12

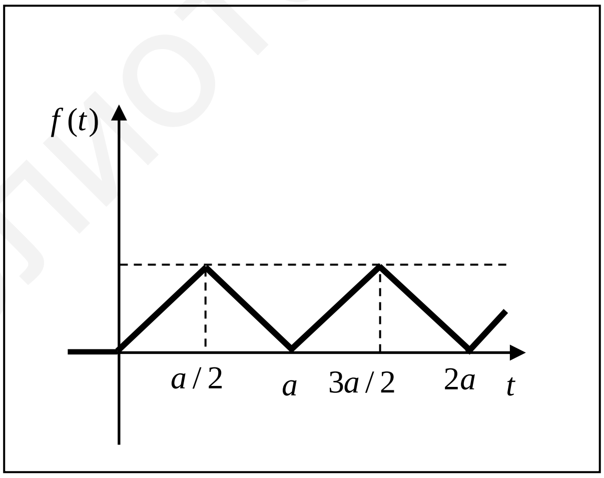


Рис. 7.13

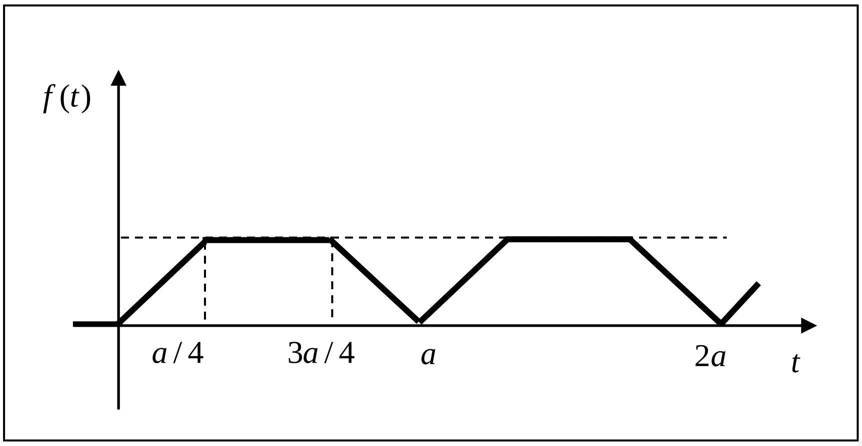


Рис. 7.14

4. Найти изображения заданных дифференциальных выражений при указанных начальных условиях, считая, что $x = x(t)$ – оригинал и $x(t) \risingdotseq X(t)$:

1) $x'' + 3x' + 2x + 1,\ x(0) = -1,\ x'(0) = -2;$

2) $x^{\mathrm{IV}} + 4x''' + 2x'' - 3x' - 5,\ x(0) = 1,\ x'(0) = -1,\ x''(0) = -3,\ x(0) = 5.$

7.2. Восстановление оригинала по изображению

Пример 7.2.1

Найти оригинал по его изображению $F(p) = \dfrac{p^2}{(p^2+1)^2}$.

Решение

В теории операционного исчисления доказывается, что если $f_1(t)$ и $f_2(t)$ – непрерывно дифференцируемые оригиналы, а $F_1(p)$ и $F_2(p)$ – их изображения, то справедливо равенство, называемое интегралом Дюамеля:

$$pF_1(p)F_2(p) \risingdotseq f_1(t)\, f_2(0) + \int_0^t f_1(\tau)\, f_2'(t-\tau)\, d\tau.$$

Представим $F(p)$ в виде $p \cdot \dfrac{p}{p^2+1} \cdot \dfrac{1}{p^2+1}$. Так как $\sin t \risingdotseq \dfrac{1}{p^2+1}$, $\cos t \risingdotseq \dfrac{p}{p^2+1}$, то, используя интеграл Дюамеля, найдем:

$$p \cdot \frac{p}{p^2+1} \cdot \frac{1}{p^2+1} \risingdotseq \cos t \sin 0 + \int_0^t \cos\tau \cos(t-\tau)\, d\tau = \frac{1}{2}(t\cos t + \sin t) = f(t).$$

Вычисления в Mathematica

InverseLaplaseTransform[expr,p,t] находит оригинал выражения **expr** как функцию переменной **t** (рис. 7.15).

```
In[3]:= InverseLaplaceTransform[p^2 / (p^2 + 1)^2, p, t] // FullSimplify
Out[3]= 1/2 (t Cos[t] + Sin[t])
```

Рис. 7.15

FullSimplify[expr] упрощает **expr**. **FullSimplify[]** является аналогом **Simplify[]**, но использует более широкий перечень преобразований. Записи **FullSimplify[expr]** и **expr//FullSimplify** эквивалентны.

Пример 7.2.2

Найти оригинал по заданному изображению $F(p)=\dfrac{p}{p^2-2p+5}$.

Решение

Имеем $F(p)=\dfrac{p}{p^2-2p+5}=\dfrac{(p-1)+1}{(p-1)^2+4}=\dfrac{p-1}{(p-1)^2+2^2}+\dfrac{1}{(p-1)^2+2^2}$.

Используя таблицу оригиналов и изображений, получаем:

$f(t)=e^t\cos 2t+\dfrac{1}{2}e^t\sin 2t$.

Вычисления в Mathematica

Решение примера 7.2.2 приведено на рис. 7.16.

```
In[4]:= InverseLaplaceTransform[p / (p^2 - 2 p + 5), p, t] // FullSimplify
Out[4]= 1/2 e^t (2 Cos[2 t] + Sin[2 t])
```

Рис. 7.16

Пример 7.2.3

Найти оригинал по данному изображению $F(p)=\dfrac{2p}{(p^2+4p+8)^2}$.

Решение

Пусть изображение $F(p)$ представляет собой правильную дробь $F(p)=$ $=\dfrac{A(p)}{B(p)}=\dfrac{a_0p^m+a_1p^{m-1}+...+a_{m-1}p+a_m}{b_0p^n+b_1p^{n-1}+...+b_{n-1}p+b_n}$, $m<n$. Если $p_1, p_2, ..., p_l$ – корни знаменателя $B(p)$ кратности $k_1, k_2, ..., k_l$ соответственно ($k_1+k_2+...+k_l=n$), т. е. $p=p_i$, $i=\overline{1,l}$, – полюсы порядка k_i функции $F(p)$, то в этом случае для вычисления оригинала $f(t)$ справедлива *основная формула разложения*:

$$f(t)=\sum_{i=1}^{l}\frac{1}{(k_i-1)!}\lim_{p\to p_i}\frac{d^{k_i-1}}{dp^{k_i-1}}\Big((p-p_i)^{k_i}F(p)e^{pt}\Big).$$

Знаменатель $(p^2+4p+8)^2 = B(p)$ имеет двукратные корни $-2+2i$ и $-2-2i$. Находим вычеты функции $F_1(p)e^{pt}$ в этих точках:

$$\operatorname*{Res}_{p=-2+2i}(F_1(p)e^{pt}) = \lim_{p\to-2+2i}\left(\frac{2pe^{pt}(p+2-2i)^2}{(p+2-2i)^2(p+2+2i)^2}\right)'_p = \frac{e^{(-2+2i)t}(1-2t(1+i))}{-8i};$$

$$\operatorname*{Res}_{p=-2-2i}(F_1(p)e^{pt}) = \lim_{p\to-2-2i}\left(\frac{2pe^{pt}(p+2+2i)^2}{(p+2-2i)^2(p+2+2i)^2}\right)'_p = \frac{e^{(-2-2i)t}(1-2t(1-i))}{8i}.$$

Используя основную формулу разложения, находим искомый оригинал:

$$f_1(t) = \frac{e^{(-2+2i)t}\,(1-2t(1+i))}{-8i} + \frac{e^{(-2-2i)t}(1-2t(1-i))}{8i} =$$

$$= \frac{e^{-2t}}{4}\big((2t-1)\sin 2t + 2t\cos 2t\big).$$

Вычисления в Mathematica

Решение примера 7.2.3 приведено на рис. 7.17.

```
In[5]:= InverseLaplaceTransform[2 p / (p^2 + 4 p + 8) ^2, p, t] // FullSimplify
Out[5]= 1/4 e^-2t (2 t Cos[2 t] + (-1 + 2 t) Sin[2 t])
```

Рис. 7.17

Задания для самостоятельной работы

1. Применяя формулу Дюамеля, найти оригиналы по их изображениям:

1) $\dfrac{1}{(p^2+1)p^3}$; 2) $\dfrac{p^2}{(p-1)(p^2+1)}$.

2. Найти оригинал $f(t)$ по заданному изображению $F(p)$:

1) $F(p) = \dfrac{1}{p^2+4p+3}$; 2) $\dfrac{p^2+p+1}{(p-1)(p+1)^2}$.

7.3. Приложения операционного исчисления

Пример 7.3.1

Решить задачу Коши методами операционного исчисления:

$y'' + 2y' + y = e^{-t}(\cos t + t)$; $y(0) = y'(0) = 2$.

Решение

Пусть $Y(p)$ – изображение оригинала $y(t)$, т. е. $y(t) \risingdotseq Y(p)$.

Тогда $y'(t) \risingdotseq pY(p) - y(0) = pY(p) - 2$; $y''(t) \risingdotseq p^2Y(p) - py(0) - y'(0) =$ $= p^2Y(p) - 2p - 2$.

Для правой части уравнения получаем

$$e^{-t}(\cos t + t) \risingdotseq \frac{p+1}{(p+1)^2+1} + \frac{1}{(p+1)^2}.$$

Следовательно, операторное уравнение имеет вид

$$p^2Y(p) - 2p - 2 + 2pY(p) - 4 + Y(p) = \frac{p+1}{(p+1)^2+1} + \frac{1}{(p+1)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (p^2 + 2p + 1)Y(p) = \frac{p+1}{(p+1)^2+1} + \frac{1}{(p+1)^2} + 2(p+1) + 4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Y(p) = \frac{1}{(p^2+2p+2)(p+1)} + \frac{1}{(p+1)^4} + \frac{2}{p+1} + \frac{4}{(p+1)^2}.$$

Найдем оригинал решения $y(t)$:

$$\frac{1}{(p^2+2p+2)(p+1)} = \frac{1}{p+1} - \frac{p+1}{(p+1)^2+1} \risingdotseq e^{-t} - e^{-t}\cos t;$$

$$\frac{1}{(p+1)^4} \risingdotseq e^{-t}\frac{t^3}{3!};\ \frac{2}{p+1} \risingdotseq 2e^{-t};\ \frac{4}{(p+1)^2} \risingdotseq 4te^{-t}.$$

Значит, искомое решение задачи Коши имеет следующий вид:

$$y(t) = e^{-t}\cdot\frac{t^3}{3!} + 2e^{-t} + 4te^{-t} + e^{-t} - e^{-t}\cos t = e^{-t}\left(\frac{t^3}{6} + 4t - \cos t + 3\right).$$

Вычисления в Mathematica

Первый способ

Найдем операторное уравнение, подействовав на обе части уравнения преобразованием Лапласа (рис. 7.18).

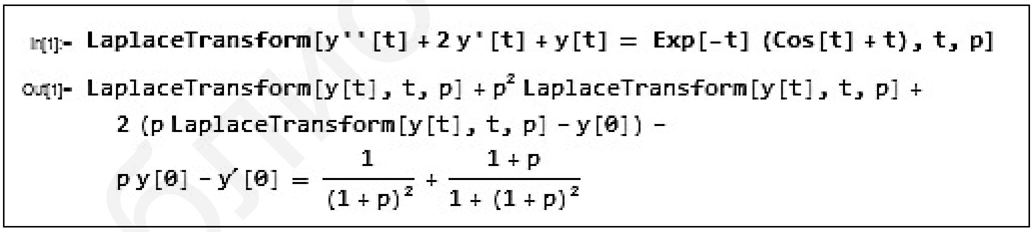


Рис. 7.18

Решим полученное уравнение относительно **LaplaceTransform[y[t],t,p]** (рис. 7.19).

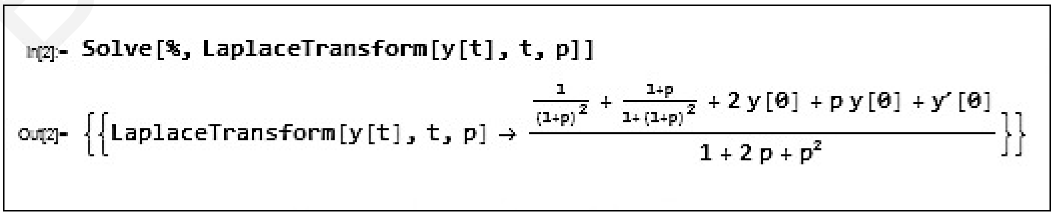


Рис. 7.19

Восстановим оригинал, используя обратное преобразование Лапласа (рис. 7.20).

```
In[3]:= InverseLaplaceTransform[%, p, t] // FullSimplify
Out[3]= {{y[t] → 1/6 e^-t (t^3 - 6 Cos[t] + 6 (1 + y[0]) + 6 t (y[0] + y'[0]))}}
```

Рис. 7.20

Учтем начальные условия (см. рис. 7.21).

```
In[4]:= y[t] /. %[[1]] /. {y[0] → 2, y'[0] → 2}
Out[4]= 1/6 e^-t (18 + 24 t + t^3 - 6 Cos[t])
```

Рис. 7.21

%[[1]] означает первый элемент списка из результата вычисления предыдущей ячейки.

Второй способ

Решение задачи Коши можно найти, непосредственно используя функцию **DSolve[]** (рис. 7.22).

```
In[5]:= DSolve[{y[t] + 2 y'[t] + y''[t] == e^-t (t + Cos[t]), y[0] == 2, y'[0] == 2}, y[t], t]
Out[5]= {{y[t] → 1/6 e^-t (18 + 24 t + t^3 - 6 Cos[t])}}
```

Рис. 7.22

Пример 7.3.2

Методами операционного исчисления решить задачу Коши для системы линейных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} x' - 2x - 3y = 5t, \\ y' - 3x - 2y = 8e^{t}, \end{cases} \quad x(0) = 0, \;\; y(0) = 1.$$

Решение

Пусть $x = x(t) \risingdotseq X(p)$, $y = y(t) \risingdotseq Y(p)$. Тогда операторная система относительно $X(p)$ и $Y(p)$ с учетом начальных условий примет вид

$$\begin{cases} pX(p) - 2X(p) - 3Y(p) = 5/p^2, \\ pY(p) - 1 - 3X(p) - 2Y(p) = 8/(p-1), \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (p-2)X(p) - 3Y(p) = 5/p^2, \\ -3X(p) + (p-2)Y(p) = 8/(p-1) + 1. \end{cases}$$

Полученную систему решим по формулам Крамера. Для этого вначале находим определители $\Delta, \Delta_X, \Delta_Y$ данной системы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} p-2 & -3 \\ -3 & p-2 \end{vmatrix} = p^2 - 4p - 5 = (p-5)(p+1);$$

$$\Delta_X = \begin{vmatrix} 5/p^2 & -3 \\ 8/(p-1)+1 & p-2 \end{vmatrix} = \frac{3p^3 + 26p^2 - 15p + 10}{p^2(p-1)};$$

$$\Delta_Y = \begin{vmatrix} p-2 & 5/p^2 \\ -3 & 8/(p-1)+1 \end{vmatrix} = \frac{p^4 + 5p^3 - 14p^2 + 15p - 15}{p^2(p-1)}.$$

Отсюда по формулам Крамера находим

$$X(p) = \frac{\Delta_X}{\Delta} = \frac{3p^3 + 26p^2 - 15p + 10}{(p^2-1)(p-5)p^2};$$

$$Y(p) = \frac{\Delta_Y}{\Delta} = \frac{p^4 + 5p^3 - 14p^2 + 15p - 15}{(p^2-1)(p-5)p^2}.$$

Применив формулу разложения, получим

$$x(t) = \underset{p=0}{\operatorname{Res}}\left(X(p)\, e^{pt}\right) + \underset{p=-1}{\operatorname{Res}}\left(X(p)\, e^{pt}\right) + \underset{p=1}{\operatorname{Res}}\left(X(p)\, e^{pt}\right) + \underset{p=5}{\operatorname{Res}}\left(X(p)\, e^{pt}\right) =$$

$$= -\frac{13}{5} + 4e^{-t} - 3e^{t} + \frac{8}{5}e^{5t} + 2t.$$

Аналогично найдем, что $y(t) = \frac{12}{5} - 3t + e^{t} - 4e^{-t} + \frac{8}{5}e^{5t}$.

Вычисления в Mathematica

Первый способ

Найдем операторную систему, подействовав на обе части каждого уравнения системы преобразованием Лапласа (рис. 7.23).

```
In[6]:= LaplaceTransform[{x'[t] - 2 x[t] - 3 y[t] == 5 t,
          y'[t] - 3 x[t] - 2 y[t] == 8 Exp[t]}, t, p]

Out[6]= {-2 LaplaceTransform[x[t], t, p] +
          p LaplaceTransform[x[t], t, p] - 3 LaplaceTransform[y[t], t, p] - x[0] == 5/p^2,
        -3 LaplaceTransform[x[t], t, p] - 2 LaplaceTransform[y[t], t, p] +
          p LaplaceTransform[y[t], t, p] - y[0] == 8/(-1 + p)}
```

Рис. 7.23

Решим полученную систему уравнений относительно **LaplaceTransform[x[t],t,p]** и **LaplaceTransform[y[t],t,p]** (рис. 7.24).

```
In[7]:= Solve[%, {LaplaceTransform[x[t], t, p], LaplaceTransform[y[t], t, p]}]

Out[7]= {{LaplaceTransform[x[t], t, p] -> -(-(-2 + p) (-5/p^2 - x[0]) - 3 (-8/(-1+p) - y[0]))/(5 + 4 p - p^2),
          LaplaceTransform[y[t], t, p] ->
           -(15 - 15 p + 16 p^2 - 8 p^3 + 3 p^2 x[0] - 3 p^3 x[0] - 2 p^2 y[0] + 3 p^3 y[0] - p^4 y[0])/((-1 + p) p^2 (-5 - 4 p + p^2))}}
```

Рис. 7.24

Восстановим оригинал, используя обратное преобразование Лапласа (рис. 7.25).

```
In[8]:= InverseLaplaceTransform[%, p, t] // FullSimplify
```

Out[8]= $\left\{\left\{x[t] \to \frac{1}{10}\left(-26 - 30\,e^{t} + 20\,t + 5\,e^{-t}\,(9 + x[0] - y[0]) + e^{5t}\,(11 + 5\,x[0] + 5\,y[0])\right),\ y[t] \to \frac{12}{5} + e^{t} - 3\,t - \frac{1}{2}\,e^{-t}\,(9 + x[0] - y[0]) + \frac{1}{10}\,e^{5t}\,(11 + 5\,x[0] + 5\,y[0])\right\}\right\}$

Рис. 7.25

Учтем начальные условия (рис. 7.26).

```
In[9]:= {x[t] /. %[[1, 1]], y[t] /. %[[1, 2]]} /. {x[0] → 0, y[0] → 1}
```

Out[9]= $\left\{\frac{1}{10}\left(-26 + 40\,e^{-t} - 30\,e^{t} + 16\,e^{5t} + 20\,t\right),\ \frac{12}{5} - 4\,e^{-t} + e^{t} + \frac{8\,e^{5t}}{5} - 3\,t\right\}$

Рис. 7.26

Второй способ

Решение задачи Коши можно найти, непосредственно используя функцию **DSolve[]** (рис. 7.27).

```
In[10]:= DSolve[{x'[t] - 2 x[t] - 3 y[t] == 5 t, y'[t] - 3 x[t] - 2 y[t] == 8 Exp[t],
     x[0] == 0, y[0] == 1}, {x[t], y[t]}, t] // Simplify
```

Out[10]= $\left\{\left\{x[t] \to -\frac{13}{5} + 4\,e^{-t} - 3\,e^{t} + \frac{8\,e^{5t}}{5} + 2\,t,\ y[t] \to \frac{12}{5} - 4\,e^{-t} + e^{t} + \frac{8\,e^{5t}}{5} - 3\,t\right\}\right\}$

Рис. 7.27

Задания для самостоятельной работы

1. Решить задачу Коши ($x = x(t)$):

1) $x''' + x = 0;\ x(0) = 0,\ x'(0) = -1,\ x''(0) = 2$;

2) $x'' - 2x' + 5x = 1 - t;\ x(0) = x'(0) = 0$.

2. Операционным методом решить задачи Коши для систем линейных дифференциальных уравнений:

1) $\begin{cases} x' - 4x + 3y = \sin t, \\ y' - 2x + y = -2\cos t, \end{cases} \quad x(0) = y(0) = 0;$

2) $\begin{cases} x'' - 3y'' - x = 0, \\ x' - 3y' - 2y = 0, \end{cases} \quad x(0) = -\frac{4}{3},\ y(0) = 1,\ x'(0) = 0,\ y'(0) = -\frac{2}{3}.$

ПРИЛОЖЕНИЕ
Основные операции и функции

Таблица П.1

Интегральное исчисление функции одной и нескольких переменных

Функция	Описание
Integrate[f,x]	Вычисляет неопределенный интеграл функции f по переменной x
Integrate[f,{x,x_{min}, x_{max}}]	Вычисляет значение интеграла $\int\limits_{x_{min}}^{x_{max}} f(x)dx$
Integrate[f,{x,x_{min}, x_{max}},{y,y_{min}, y_{max}}]	Вычисляет значение интеграла $\int\limits_{x_{min}}^{x_{max}} \int\limits_{y_{min}}^{y_{max}} f(x, y)dxdy$
NIntegrate[f,{x,x_{min}, x_{max}}] **или** **Integrate[f,{x,x_{min}, x_{max}}]//N**	Выдает численное приближенное значение интеграла функции f по переменной x

Таблица П.2

Дифференциальное исчисление функции нескольких переменных

Функция	Описание
1	2
$\mathbf{D[f, x]}$	Вычисляет частную производную функции f по переменной x
$\mathbf{D[f, \{x, n\}]}$	Вычисляет частную производную n-го порядка функции f по переменной x
$\mathbf{D[f, \{x_1, n_1\}, \{x_2, n_2\}, ...]}$	Вычисляет смешанную частную производную функции f по переменной x_1 порядка n_1, по переменной x_2 порядка n_2 и т. д.
$\mathbf{D[f, \{\{x_1, x_2, ...\}\}]}$	Вычисляет вектор производных $\{f'_{x_1}, f'_{x_2}, ...\}$ скалярной функции f
$\mathbf{FindMinimum[f, \{\{x, x_0\}, \{y, y_0\}, ...\}]}$	Находит локальный минимум функции f многих переменных в окрестностях указанных точек
$\mathbf{FindMaximum[f, \{\{x, x_0\}, \{y, y_0\}, ...\}]}$	Находит локальный максимум функции f многих переменных в окрестностях указанных точек

Окончание табл. П.2

1	2
Grad[f,{x$_1$,x$_2$,...,x$_n$}]	Вычисляет градиент $\left(f'_{x_1}, f'_{x_2}, ..., f'_{x_n}\right)$
Grad[f,{x$_1$,x$_2$,...,x$_n$},...,"система"]	Вычисляет градиент в различных системах координат

Таблица П.3

Дифференциальные уравнения

Функция	Описание
DSolve[eqn,y[x],x]	Решает дифференциальное уравнение *eqn* относительно функции $y(x)$ с независимой переменной x
DSolve[{eqn,y[a]= =b},y[x],x],	Решает задачу Коши, здесь $y(a) = b$ есть начальное (граничное) условие
NDSolve [eqns, y, {x, xmin, xmax}]	Ищет численное решение дифференциальных уравнений *eqns* относительно функции y независимой переменной x в интервале от $x_{\min}$ до $x_{\max}$
NDSolve [eqns, {yl, y2, ...}, {x, xmin, xmax}]	Ищет численные решения относительно функций y_i
DSolve[{egn1,egn2,…},{y1[t],y2[t],…},t]	Решает систему дифференциальных уравнений egn_1, egn_2, … относительно неизвестных функций $y_1(t)$, $y_2(t)$, … с независимой переменной t

Таблица П.4

Работа с рядами

Функция	Описание
1	2
Sum[f,{n, 1, Infinity}]	Вычисляет сумму $n, n = \overline{1,\infty},$ членов последовательности f
SumConvergence[f,n]	Исследует ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f$ на сходимость
NSum[f,{n, 1, Infinity}]	Вычисляет приближенно сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty} f$
Series[f,{x,x$_0$,n}]	Раскладывает функцию $f(x)$ в степенной ряд в окрестности точки x_0 до слагаемых, содержащих $(x-x_0)^n$ включительно

Окончание табл. П.4

1	2
SeriesCoefficient[f,{x,x0,n}]	Вычисляет коэффициент при слагаемом $(x-x_0)^n$ в разложении функции $f(x)$ в степенной ряд в окрестности точки x_0
Normal[expr]	Выдает нормальную форму записи для выражения *expr*. Если в качестве *expr* используется Series[f,{x,x0,n}], то возвращает разложение функции $f(x)$ в степенной ряд без остаточного члена
Piecewise[{{val1, cond1},{val2, cond2},…}]	Задает кусочную функцию, которая принимает значения val_i в области $cond_i$
FourierTrigSeries[f,x,n]	Раскладывает функцию $f(x)$ в тригонометрический ряд Фурье до порядка n
FourierSinSeries[f,x,n]	Раскладывает функцию $f(x)$ в тригонометрический ряд Фурье по синусам до порядка n
FourierCosSeries[f,x,n]	Раскладывает функцию $f(x)$ в тригонометрический ряд Фурье по косинусам до порядка n
FourierSinCoefficient[f,x,n]	Выдает *n*-й коэффициент тригонометрического ряда Фурье по синусам функции $f(x)$
FourierCosCoefficient[f,x,n]	Выдает *n*-й коэффициент тригонометрического ряда Фурье по косинусам функции $f(x)$

Таблица П.5

Элементы теории поля

Функция	Описание
1	2
StreamPlot[{P,Q},{x,x$_{min}$,x$_{max}$},{y,y$_{min}$,y$_{max}$}]	Строит график линий тока векторного поля $(P(x,y),Q(x,y))$ на плоскости xy
Div[{P,Q,R},{x,y,z}]	Вычисляет дивергенцию $P'_x+Q'_y+R'_z$ векторного поля $\vec{a}(M)=P\vec{i}+Q\vec{j}+R\vec{k}$
Curl[{P,Q,R},{x,y,z}]	Вычисляет ротор векторного поля $\vec{a}(M)=P\vec{i}+Q\vec{j}+R\vec{k}$
Curl[Grad[u{x,y,z},{x,y,z}],{x,y,z}]	Вычисляет $\operatorname{rot}\operatorname{grad}u$
Div[Grad[u{x,y,z},{x,y,z}],{x,y,z}]	Вычисляет $\operatorname{div}\operatorname{grad}u$

Таблица П.6

Работа с оригиналами и изображениями

Функция	Описание
UnitStep[t]	Задает единичную ступенчатую функцию, равную нулю при $t < 0$ и единице при $t \geq 0$
HeavisideTheta[t]	Задает функцию Хевисайда, равную нулю при $t < 0$ и единице при $t > 0$
LaplaceTransform[expr,t,s]	Вычисляет значение преобразования Лапласа выражения $expr$, зависящего от переменной t, и возвращает функцию переменной *s*
InverseLaplaseTransform[expr, p,t]	Выполняет обратное преобразование Лапласа, т. е. находит оригинал выражения $expr$, зависящее от p, как функцию переменной *t*

Список использованных источников

Основная литература

1. Левин, В. А. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии на базе пакета «Mathematica» / В. А. Левин, В. В. Калинин, Е. В. Рыбалка. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2007.
2. Половко, А. М. Mathematica для студента / А. М. Половко. – СПб. : БХВ-Петербург, 2007.
3. Дьяконов, В. П. Mathematica 5.1/5.2/6. Программирование и математические вычисления / В. П. Дьяконов. – М. : ДМК-Пресс, 2008.
4. Сборник задач по высшей математике: учеб. пособие. В 10 ч. Ч. 10 : Функции комплексной переменной. Операционное исчисление / А. А. Карпук [и др.]. – Минск : БГУИР, 2010.
5. Сборник индивидуальных заданий по высшей математике: учеб. пособие. В 3 ч. Ч. 3 / А. П. Рябушко [и др.]. – Минск : Выш. шк., 1991.
6. WolframAlpha по-русски [Электронный ресурс]. – 2019. – Режим доступа : http://www.wolframalpha-ru.com.

Дополнительная литература

7. Голубева, Л. Л. Компьютерная математика. Символьный пакет Mathematica: курс лекций/ Л. Л. Голубева, А. Э. Малевич, Н. Л. Щеглова. – Минск : БГУ, 2005.
8. Голубева, Л. Л. Компьютерная математика. Символьный пакет Mathematica: лаб. практикум для студентов мех.-мат. фак. В 2 ч. Ч. 1 / Л. Л. Голубева, А. Э. Малевич, Н. Л. Щеглова. – Минск : БГУ, 2012.

Св. план 2020, поз. 22

Учебное издание

МАТЕМАТИКА. ПРИМЕНЕНИЕ ПАКЕТА MATHEMATICA

В двух частях

Часть 2

Фомичёва Людмила Александровна
Спичекова Наталья Викторовна
Малышева Ольга Николаевна
Вагнер Ольга Александровна

ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ. ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ И НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ. РЯДЫ. ОПЕРАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

ПОСОБИЕ

Редактор *Е. С. Юрец*
Корректор *Е. Н. Батурчик*
Компьютерная правка, оригинал-макет *М. В. Касабуцкий*

Подписано в печать 26.01.2021. Формат 60×84 1/16. Бумага офсетная. Гарнитура «Таймс».
Отпечатано на ризографе. Усл. печ. л. 8,72. Уч.-изд. л. 9,3. Тираж 100 экз. Заказ 12.

Издатель и полиграфическое исполнение: учреждение образования
«Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники».
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя,
распространителя печатных изданий №1/238 от 24.03.2014,
№2/113 от 07.04.2014, №3/615 от 07.04.2014.
Ул. П. Бровки, 6, 220013, г. Минск