В.В. ЦЕГЕЛЬНИК

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники, Минск, Беларусь

О ПРЕОБРАЗОВАНИЯХ БЕКЛУНДА ДВУХ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА ПЕНЛЕВЕ-ТИПА

Рассмотрена система двух дифференциальных уравнений первого порядка с квадратичной нелинейностью производных неизвестных функций. Показано, что исследуемая система уравнений, с одной стороны, эквивалентна XXXIV уравнению из списка Айнса [1], а с другой стороны, нелинейному дифференциальному уравнению второго порядка, решения которого обладают свойством Пенлеве. При этом прямое и обратное преобразования Беклунда для этого уравнения совпадают с парой преобразований Беклунда для уравнения XXXIV.

V.V. TSEGEL’NIK

Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics, Minsk, Belarus

ON THE BACKLUND TRANSFORMATIONS OF TWO NONLINEAR SECOND-ORDER DIFFERENTIAL EQUATIONS OF THE PAINLEVE’ TYPE

A system of two first-order differential equations with quadratic nonlinearity of the derivative of unknown functions is considered. It is shown that the system of equations under study, on the one hand, is equivalent to the XXXIV equation from the Ince list [1], and on the other hand, to a nonlinear differential equation of the second order, the solutions of which have the Painleve’ property. In this case, the direct and inverse Backlund transformations for this equation coincide with a pair of Backlund transformations for equation XXXIV.

Доклад посвящен изложению результатов исследования аналитических свойств решений системы дифференциальных уравнений

$$p_{1-b} = -p_b + \frac{(p_b' - b)^2}{2p_b^2} + t, \qquad (1)$$

$$p_b = -p_{1-b} + \frac{(p_{1-b}' + b - 1)^2}{2p_{1-b}^2} + t, \qquad (2)$$

в которой p_b, p_{1-b}– произвольные функции независимой переменной t; b – произвольный параметр.

Теорема 1. Пусть p_b $(p_b' - b \neq 0)$, p_{1-b} $(p_{1-b}' + b - 1 \neq 0)$ – произвольные функции, удовлетворяющие системе (1), (2). Тогда при условии $p_{1-b}(p_b' - b) - p_b(p_{1-b}' + b - 1) = 0$ они являются решениями уравнений

$$2p_b p_b'' = {p_b'}^2 + 4p_b^3 - 2t\, p_b^2 - b^2, \qquad (3)$$

$$2p_{1-b} p_{1-b}'' = {p_{1-b}'}^2 + 4p_{1-b}^3 - 2t\, p_{1-b}^2 - (1-b)^2 \qquad (4)$$

соответственно.

Уравнение (3) с точностью до преобразования $p_b = 2\alpha w$, $b = 2\alpha$ $(\alpha \neq 0)$ совпадает с уравнением XXXIV из списка Айнса [1].

Уравнение (3) инвариантно относительно замены $b \to -b$. Уравнение (4) получается из (3) заменой $b \to 1-b$. Используя формулы (1), (2) получено нелинейное функциональное соотношение, связывающее решения уравнения (3) при различных значениях параметра b. Данное соотношение можно рассматривать как принцип нелинейной суперпозиции решений уравнения (3).

Теорема 2. Пусть p_b $(p_b' - b \neq 0)$, p_{1-b} $(p_{1-b}' + b - 1 \neq 0)$ – произвольные функции, удовлетворяющие системе (1), (2). Тогда при условии $p_{1-b}(p_b' - b) + p_b(p_{1-b}' + b - 1) = 0$ они являются решениями уравнений

$$2p_b p_b'' = 3{p_b'}^2 - 4b p_b' + 2t\, p_b^2 + b^2, \qquad (5)$$

$$2p_{1-b} p_{1-b}'' = 3{p_{1-b}'}^2 - 4(1-b) p_{1-b}' + 2t\, p_{1-b}^2 + (1-b)^2$$

соответственно.

Если $p_b = p(t, b)$ – решение уравнения (5), то $-p(t, -b)$ также решение этого уравнения.

Уравнение (5) в случае $b = 0$ заменой $p_b = u^{-2}$ приводится к уравнению Эйри $u'' = -\frac{t}{2} u$.

С помощью преобразований $p = b \cdot v^{-1} (b \neq 0)$, $v = T' \cdot T^{-1}$ и дифференцированием относительно функции T получается линейное уравнение четвертого порядка.

Теорема 3. Уравнение (5) является уравнением Пенлеве-типа. Его общее решение есть рациональная функция постоянных интегрирования.

Список литературы

1. Э.Л. Айнс. Обыкновенные дифференциальные уравнения. // ОНТИ. Харьков. 1939.