УДК [517.98]:

ОРТОГОНАЛИЗАЦИЯ СИСТЕМЫ ДНФ БУЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ

С.Н. Кардаш
Старший научный сотрудник
ОИПИ НАН Беларуси, кандидат
технических наук

Объединенный институт проблем информатики Национальной Академии Наук Беларуси, Республика Беларусь.
E-mail: kardash77@gmail.com.

С. Н. Кардаш

Окончил БГУ им. Ленина. Старший научный сотрудник лаборатории Логического Синтеза ОИПИ НАН Беларуси, к. т. н.

Аннотация. Для решения многих задач синтеза, диагностики и анализа надежности технических систем используется представление булевых функций в виде дизъюнктивных нормальных форм (ДНФ). Часто бывает полезно иметь такие ДНФ, в которых все входящие в них элементарные конъюнкции взаимно ортогональны. Для получения таких ДНФ необходимо проводить ортогонализацию исходных систем ДНФ. В настоящей работе приводится новый алгоритм решения задачи ортогонализации. Сообщается о разработке компьютерной программы, решающей задачу ортогонализации системы ДНФ. Приводятся результаты экспериментального исследования, подтверждающие эффективность разработанного алгоритма.

Ключевые слова: Дизъюнктивные нормальные формы (ДНФ) булевых функций, ортогонализация.

Введение.

Для решения многих задач синтеза, диагностики и анализа надежности технических систем используется представление булевых функций в виде дизъюнктивных нормальных форм (ДНФ). Часто бывает полезно иметь такие ДНФ, в которых все входящие в них элементарные конъюнкции взаимно ортогональны. Для получения таких ДНФ необходимо проводить ортогонализацию исходных систем ДНФ. В работах [1-3] даны как необходимые понятия, так и идеи, способствующие решению этой задачи. В настоящей работе приводится алгоритм, на основе которого разработана компьютерная программа, решающая задачу ортогонализации системы ДНФ, и результаты ее экспериментального исследования.

В случае небольшого числа переменных задачу ортогонализации системы ДНФ можно решить, разложив дизъюнктивно каждую элементарную конъюнкцию по всем отсутствующим в ней переменным, от которых зависят функции, и после приведения подобных получить в результате совершенную ДНФ. Однако такой способ может оказаться неприемлем, когда переменных много. В частности, для системы ДНФ булевых функций, зависящих от n переменных, число конъюнкций в ортогонализованной системе может достигать 2n.

Предлагаемый ниже алгоритм является модификацией алгоритма, описанного в [4]. Главное отличие состоит в добавлении еще одной проверки отношения поглощения пар элементарных конъюнкций.

Основные определения.

Представим исходную систему ДНФ в матричном виде парой матриц – U (троичной) и S (булевой). Столбцы матрицы U соответствуют аргументам системы, а строки задают элементарные конъюнкции. Столбцы матрицы S соответствуют функциям системы, а единичные значения элементов в матрице S отмечают вхождения соответствующих конъюнкций в ДНФ функций системы.

Строки троичной матрицы задаются троичными векторами, а строки булевой матрицы – булевыми.

Строки u и s принадлежат матрицам U и S соответственно.

Троичный вектор u представляется парой булевых векторов U0 и U1, где вектор U0 своими единичными компонентами задает нулевые компоненты вектора u, а вектор U1 своими единичными компонентами задает единичные компоненты вектора u.

Аналогично, троичный вектор w представляется парой булевых векторов W0 и W1.

Булевы векторы g и s представляются булевыми векторами G1 и S1 соответственно.

В рассмотрение вводится «нулевой» булев вектор Z размерности, равной размерности векторов G1 и S1.

Определим следующие бинарные отношения на множестве векторов одинаковой размерности.

Ортогональность. Троичные векторы u и v ортогональны по i-й компоненте, если и только если i-я компонента имеет значение 0 в одном из этих векторов и 1 – в другом. Троичные векторы ортогональны, если они ортогональны хотя бы по одной компоненте.

Поглощение. Троичный вектор w поглощает вектор u, тогда и только тогда, когда все компоненты вектора w, значения которых отличны от «–», совпадают с одноименными компонентами вектора u, т. е. выполняется соотношение.

$\neg(W0 \vee W1) \wedge \neg(U0 \vee U1) = \neg(U0 \vee U1)$.

Булев вектор g поглощает булев вектор s, если выполняется соотношение.

$\neg G1 \wedge S1 = Z$.

Здесь знаки «¬», «∧», «∨» означают логические операции «инверсия», «конъюнкция» и «дизъюнкция» соответственно.

Склеивание булевых векторов. Два булевых вектора можно заменить одним вектором, у которого значения компонент определяются следующим образом: компонента, в которой соответствующая компонента хотя бы одного исходного вектора имела единичное значение, приобретает значение «1«. Значения остальных компонент получают значение «0».

Постановка задачи.

Пусть в матричном виде задана система ДНФ булевых функций. Требуется построить эквивалентную ей ортогонализованную систему, содержащую минимальное число элементарных конъюнкций.

Для решения этой задачи предлагается приближенный эвристический алгоритм, основная идея которого состоит в последовательном разложении строк матриц U и S и дальнейшем склеивании или поглощении продуктов разложения.

Описание алгоритма.

Результат ортогонализации представляется парой матриц – W (троичной) и G (булевой).

Строки w и g принадлежат матрицам W и G соответственно.

Результат разложения двух строк представляется троичной матрицей V, строка v которой представляется парой булевых векторов V0 и V1.

Матрица W полагается пустой.

1. В матрицу W заносится первая строка u матрицы U, а в матрицу G заносится первая строка s матрицы S.
2. Из матрицы U выбирается очередная строка u.

Если все строки матрицы U просмотрены – переход на п. 3.

Иначе –.

2.1. Выбирается очередная строка w матрицы W.

Если все строки матрицы W просмотрены – переход на п. 3.

Иначе – строки u и w сравниваются.

Если u и w ортогональны – переход на п.2.1.

Иначе – если строки u и w совпадают, то строки s и g склеиваются, и результат склеивания заменяет строку g в матрице G. Переход на п.3.

Иначе – если w поглощает u, а g поглощает s, то переход на п.3.

Иначе – если u поглощает w, а s поглощает g, то строка w матрицы W заменяется строкой u. Переход на п.3.

Иначе – для строк u и w выполняется процедура разложения – строится троичная матрица V, содержащая n (n >1) строк.

2.2. Первые n-1 строк матрицы V переносятся в матрицу W, а соответствующие n-1 строк матрицы G, являются копиями строки S1.

Последняя строка матрицы V добавляется в матрицу W, строки s и g склеиваются, и результат склеивания добавляется в матрицу G. Переход на п.2.

– Если на шаге 2 были склеивания или поглощения, то переход на п.2.

Иначе – строка u добавляется в матрицу W, а строка s – в матрицу G. Переход на п.2.

– Если на шаге 2 не было разложений, то переход на п.5.

Иначе – в матрицу U в обратном порядке переносятся строки матрицы W. Переход на п.1.

– Конец.

Процедура разложения троичных векторов.

Матрица V полагается пустой.

В рассмотрение вводится булев вектор Y:

$Y = (W0 \lor W1) \land (\neg(U0 \lor U1))$.

– До тех пор, пока в векторе Y имеются единичные компоненты, определяется номер j его крайней левой единичной компоненты. Если таких нет, то переход на п.2.

Значение 0 присваивается j-й компоненте вектора Y.

Полагается V0 = U0, V1 = U1.

Значение j-й компоненты вектора W1 присваивается j-й компоненте вектора V0.

Значение j-й компоненты вектора W0 присваивается j-й компоненте вектора V1.

В матрицу V добавляется вектор v. Полагается k = j. Переход на п.1.

Если п.1. выполнялся хотя бы один раз, то k-й компоненте вектора V0 присваивается значение k-й компоненты вектора W0 и k-й компоненте вектора V1 присваивается значение k-й компоненты вектора W1.

Иначе полагается V0 = U0, V1 = U1.

1. В матрицу V добавляется троичный вектор, образованный парой V0 и V1.
2. Конец.

Экспериментальное исследование.

Для проверки эффективности предложенного алгоритма был проведен вычислительный эксперимент.

Примеры матричных SF-описаний систем полностью определенных булевых функций были взяты из набора промышленных тестовых примеров, входящих в библиотеку примеров Berkeley PLA Test Set [5]. Исследовались два алгоритма ортогонализации – предложенный в [4] и представленный в настоящей работе, обозначаемые далее OLD и NEW соответственно.Результаты эксперимента представлены в таблице 1, где n – число переменных, m – число функций, k – число элементарных конъюнкций исходной системы ДНФ булевых функций. Жирным шрифтом выделены лучшие решения.

Таблица 1 – Результаты работы алгоритма ортогонализации.

И	*n*	*m*	*k*		По возрастанию		По убыванию		Без сортировки	
					OLD	NEW	OLD	NEW	OLD	NEW
B2	16	17	110	*C*	7	13	7	13	6	13
				M	229	167	234	189	237	188
				R	122	96	143	106	131	101
				S	175	109	218	128	190	120
				P	42	89	29	89	39	87
				K	175	**124**	206	147	185	138
Mp2d	14	14	123	*C*	15	Ё5	14	14	20	20
				M	893	923	816	814	628	565
				R	3007	3022	2214	2201	3040	2846
				S	4284	4241	3227	3197	3752	3480
				P	132	208	163	180	129	166
				K	580	515	541	524	537	**495**
newtpla	15	5	23	*C*	7	7	6	7	7	10
				M	119	93	155	115	113	88
				R	90	70	137	101	12	108
				S	151	96	221	147	181	146
				P	19	39	22	42	25	43
				K	86	**64**	108	81	93	80
X6dn	39	5	121	*C*	12	12	13	13	12	12
				M	394	310	422	342	418	346
				R	470	385	503	426	550	438
				S	709	516	750	568	770	570
				P	113	201	98	182	108	212
				K	364	**268**	368	292	380	294
sex	9	14	23	*C*	13	12	12	10	11	11
				M	308	271	343	331	205	190
				R	734	635	552	511	356	319
				S	1069	900	872	796	544	468
				P	23	64	34	63	21	30
				K	209	189	210	196	165	**156**
In2	19	10	137	*C*	15	17	14	14	17	18
				M	1165	845	1727	1421	2212	1887
				R	1711	1249	2827	2253	3502	3208
				S	2496	1649	4214	3149	5360	4485
				P	429	646	523	792	544	999
				K	955	**567**	1316	966	1772	1444

Всего для каждого алгоритма рассматривалось три варианта ортогонализации. При первом производилось предварительное упорядочивание строк матриц U и S по возрастанию числа литералов в строках матрицы U, при втором – по убыванию, а в третьем – упорядочивание не производилось.

В ходе вычислений замерялись следующие параметры:

C – число выполнений цикла, включающего пункты 1 – 4 алгоритма;

M – максимальное число строк в матрице W, полученных при работе алгоритма;

R – суммарное число произведенных разложений;

S – суммарное число произведенных склеиваний;

P – суммарное число произведенных поглощений.

K – число элементарных конъюнкций в ортогонализованной системе.

В качестве иллюстрации сложности решаемых в ходе ортогонализации задач приведем результат ортогонализации для примера intb с параметрами: n = 15, m = 7, k = 664. За 10 часов работы программы была получена ДНФ с 12565 конъюнкциями. При этом за 29 выполнений цикла было произведено 116904 разложений, 160516 склеиваний, 23141 поглощений, а число конъюнкций на пике вычислений достигло 39160.

Заключение.

Предложенная в настоящей работе модификация алгоритма показала заметное преимущество в качестве получаемых решений над старым вариантом. Эксперимент показал, что для исследованного множества примеров использование новой программы во всех случаях обеспечивало нахождение лучшего решения.

Список литературы

[1] Поттосин, Ю.В., Шестаков Е.А. Ортогонализация системы полностью определенных булевых функций / Ю.В. Поттосин, Е.А. Шестаков / Логическое проектирование, Вып.5. – Минск: Институт технической Кибернетики НАН Беларуси, 2000 г. – С. 107–115.

[2] Закревский, А.Д. Основы логического проектирования. В двух книгах. Книга 1. Комбинаторные алгоритмы дискретной математики/ А.Д. Закревский, Ю.В. Поттосин, Л.Д. Черемисинова. – Минск: ОИПИ НАН Беларуси, 2004. – 226 с.

[3] Закревский, А.Д. Основы логического проектирования. В двух книгах. Книга 2. Оптимизация в булевом пространстве/ А.Д.Закревский, Ю.В. Поттосин, Л.Д. Черемисинова. – Минск: ОИПИ НАН Беларуси, 2004. – 240 с.

[4] Кардаш, С. Н. Ортогонализация системы ДНФ булевых функций / С. Н. Кардаш // Информационные технологии и системы 2020 (ИТС 2020) Information Tehnologies and Systems 2020 (ITS 2020): материалы междунар. науч. конф., (Республика Беларусь, Минск, 18 ноября 2020 года) редкол.: Л. Ю. Шилин [и др.]. – Минск: БГУИР, 2020. – С. 41–42.-

[5] Berkeley PLA test set [Electronic resource]. Mode of access: http://www1.cs.columbia.edu/~cs6861/sis/espresso-examples/. Date of access: 9.12.2015.

ORTHOGONALIZATION OF THE DNF SYSTEM OF BOOLEAN FUNCTIONS

S.N.KARDASH,

Senior Research Fellow of the
United Institute of Informatics
Problems of the National Academy
of Sciences of Belarus, Ph.D

Research Institute for Applied Problems of Mathematics and Informatics of the Belarusian State University, Republic of Belarus
E-mail: gold@newman.bas-net.by

Abstract. To solve many problems of synthesis, diagnostics and analysis of the reliability of technical systems, the representation of Boolean functions in the form of disjunctive normal forms (DNF) is used. It is often useful to have such DNFs in which all elementary conjunctions included in them are mutually orthogonal. To obtain such DNFs, it is necessary to orthogonalize the original DNF systems. In this paper, we present a new algorithm for solving the orthogonalization problem. The development of a computer program that solves the problem of orthogonalization of the DNF system is reported. The results of an experimental study are presented that confirm the effectiveness of the developed algorithm.

Keywords: disjunctive normal forms, orthogonalization.