OSTIS-2011
(Open Semantic Technologies for Intelligent Systems)

УДК 004.8

ПРИМИТИВНАЯ ПРОГРАММНАЯ АЛГЕБРА ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ И ПРЕДИКАТОВ НАД ВЗВЕШЕННЫМИ ГРАФАМИ

Н.Н.Снигур (*nastena_sss@mail.ru*)
Национальный технический университет Украины "КПІ", Киев, Украина

Введение

Основу алгебраических методов исследования программ составляют программные алгебры [1], то есть алгебры, носителями которых являются специальные классы функций, а операциями - композиции, которые представляют собой абстракции средств синтеза программ. В частности в терминах этих алгебр точно ставятся и решаются проблемы полноты в разных классах вычислимых функций. Эти проблемы до сих пор есть достаточно актуальными в современном программировании.

В данной работе рассматривается совокупность графовых преобразователей, которые действуют на множестве взвешенных графов. При этом рассматриваются два разных класса таких преобразователей: класс всех вычислимых функций над графами и класс функций, которые сохраняют денотаты.

Выбор множества именно графов обусловлен их важностью и популярностью в теоретическом и прикладном программировании (см., например, [3-11]). Инструментом решения поставленных проблем выступают так называемые примитивные программные алгебры (ППА)[2]. Целесообразность данного выбора основывается результатами, полученными, например, в [12-19]. Основное внимание уделено поиска порождающего множества для такой ППА. Все использованные и неопределенные в работе понятия и обозначения понимаются в смысле [15].

Базовые определения, понятия, результаты

Под (конченным) графом графом g будем понимать пару $<V,E>$, где V – некоторое конченное непустое множество объектов (вершин графа), а $E \subset V \times V$ – множество его дуг. Не ограничивая обобщений, положим $V \subset N$. При этом на множестве вершин вводится целиком естественная упорядоченность.

В некоторых случаях ребрам графа могут ставиться в соответствие разные данные - атрибуты (метки). Если в качестве атрибутов используются целые или действительные числа, то такие графы называют взвешенными. Фактически, взвешенный граф представляет собой тройку $<V,E,c>$, где $c: E \to Z$ $(c: E \to R)$ где - определенная функция, определенная на множестве дуг графа. В дальнейшем ограничимся простым случаем, когда вес каждой дуги является натуральным числом, т.е. $c: E \to N$.

Договоримся обозначать вершины графа латинскими буквами u, v, w, а дуги - буквами e, p, s, возможно с индексами $v_1, \dots, e_1, \dots$. В случае необходимости явным образом указать вершины дуги и ее направление, будем использовать запись $\langle v,u \rangle$, понимая, что дуга направлена от v к u. Будем называть первой вершиной графа вершину с наименьшим номером. Граф будем обозначать или через $g^{r}_{|E|}$, где r – номер первой вершины графа g, а $|E|$ - количество его дуг, или сокращено просто g. Чтобы указать, что дуга e_i имеет вес k_i, будем использовать запись (e_i, k_i).

Множество всех графов обозначим G. Под функциями дальше понимаем частичные функции с аргументами и значениями из G, а под предикатами - частичные предикаты на.

Вычислимость G на вводится как нумерационная вычислимость (см. [1]), с помощью арифметической функции, которая представляет данную функцию на G в некоторой зафиксированной нумерации α_G множества G [19]. Существование такой нумерации вытекает из счетности множества N.

Любую частично-рекурсивную многоместную функцию или любой частично-рекурсивный многоместный предикат (чр-функция, чр- предикат) будем называть также графовим преобразователем.

Кроме того введем такое понятие как L-функция (L-предикат). Под этим будем иметь в виду многоместную частичную функцию (предикат) на множестве L.

Через $A^{чр}_{G}$ обозначим ППА, носитель которой составляют графовые преобразователи на G. Порождающее множество алгебры $A^{чр}_{G}$ назовем ее полной системой (ПС); ПС ППА -– I^n_m базисом, если любая ее подсистема, которая получается удалением какого-нибудь предиката или какой-нибудь функции, отличной от селекторной, уже не будет полной

Понятие функции, которая сохраняет денотаты вводится по аналогии с [1], однако с определенным обобщением. Пусть $\beta : G \underset{на}{\rightarrow} 2^N$, где 2^N - множество всех конченных подмножеств N.

Будем говорить, что функция f арности n β-сохраняет денотаты, если существует оконченное множество $V_f \subset N$ такое, что для любого якого $< x_1, \ldots, x_n > \in \mathrm{dom} f$ выполняется

$$\beta(f(< x_1, \ldots, x_n >)) \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} \beta(x_i) \cup V_f .$$

В случае графов функция β есть ничто другое, как выделение множества вершин графа, т.е. для $g = \langle V, E \rangle$ будем иметь $\beta(g) = V$.

Через $A^{чр}_{G,\beta}$ обозначим ППА, носитель которой составляют графовые преобразователи на G, которые β-сохраняют денотаты. Определение порождающего множества, полной системы и базиса - такие самые как и в случае $A^{чр}_{G,\beta}$.

При нахождении полных систем ППА являются полезными определенные необходимые условия полноты, которые здесь приведем в виде утверждений.

Утверждение 1. Любая полная система ППА для произвольного множества L содержит хотя бы одну функцию, которая не сохраняет L.

Утверждение 2. Любая полная система ППА класса функций, которые не сохраняют денотаты, содержит хотя бы одну функцию, которая не сохраняет денотаты.

Наконец в качестве сигнатуры ППА возьмем совокупность $\Omega = \{\circ, \Diamond, *^{(n+1)}\}$, где $\circ$ - операция суперпозиции, $\Diamond$ - операция ветвления, а $*^{(n+1)}$- так называемое $(n+1)$-арное циклирование (определение см. в [13]).

ППА чр- функций и чр- предикатов на множестве конечных взвешенных графов

Рассмотрим $g = \langle V = \{v_1, \ldots, v_n\}, E = \{(\langle v_{i_1}, v_{i_2}\rangle, k_1), (\langle v_{i_3}, v_{i_4}\rangle, k_2), \ldots\}\rangle$, $1 \le i_j \le n$, $j = 1,2,\ldots$, где $k_1, k_2, \ldots$ - весы дуг графа. Для дальнейшего изложения полученных результатов будет уместным договориться об определенной упорядоченности дуг графа, то есть другими словами, об упорядоченности пар натуральных чисел. . (такой шаг целиком природный, поскольку множество N^2, как известно, эффектовно счетное). Заметим, что порядок на множестве N^2 можно вводить по-разному, напрмер как в канторовской нумерации (см., [1, стр. 60]).) , однако в данном случае более удобным нам выдается следующий:

$$\langle 0,0\rangle < \langle 0,1\rangle < \langle 0,2\rangle < \ldots < \langle 0,n\rangle < \ldots < \langle 1,0\rangle < \langle 1,1\rangle < \ldots < \langle 2,0\rangle < \langle 2,1\rangle < \ldots \qquad (1)$$

Тогда, дуги графа занумеруем соответственно порядку (1), т.е. , первой дугой будет дуга, которая отвечает наименьшей паре в этом порядке (самой левой),), а самый большой номер будет иметь дуга, которая отвечает самой большой паре (самой правой).

Часто в литературе по теории графов рассматриваются такие естественные функции на множестве графов как объединение и разность графов, изъятие дуги графа, изъятие его вершины со всеми инцидентными ей дугами. В данной работе рассмотрим несколько модифицированные графовые преобразователи.

Объединение графов $\hat{\cup}$ определим так. Пусть $g_1 = \langle V_1, E_1, c_1\rangle$, $g_2 = \langle V_2, E_2, c_2\rangle$, $g_1 \hat{\cup} g_2 = \langle V_1 \cup V_2$, $E_1 \cup E_2, c\rangle$, где $c(e) = c_1(e)$, если $e \in E_1, e \notin E_2$, $c(e) = c_2(e)$, если $e \notin E_1, e \in E_2$ и $c(e) = c_1(e) + c_2(e)$, если $e \in E_1, e \in E_2$. Разностью графов $\setminus$ будем считать такую функцию. Для $g_1 = \langle V_1, E_1, c_1\rangle$ и $g_2 = \langle V_2, E_2, c_2\rangle$, обозначим $g_1 \setminus g_2 = \langle V, E, c\rangle$, где $E = \{e$ такие, что $e \in E_1, e \notin E_2, c(e) = c_1(e)$ или $e \in E_1, e \in E_2, c(e) = c_1(e) - c_2(e) > 0\}$.

Вместо функций изъятия определим функции выделение "первой" дуги E_e так, что для $g = \langle\{v_1, \ldots\}, \{(\langle v_1, v_{i_1}\rangle, k_1), \ldots\}\rangle$, $E_e(g) = (\langle v_1, v_{i_1}\rangle, k_1)$, и выделение "первой" вершины E_v: для $g = \langle V = \{v_1, \ldots\}, E\rangle$, $E_v(g) = \langle\{v_1\}, \varnothing\rangle$. (Функции изъятия получаются, очевидно, с помощью только что определенных функций выделения и разности графов).

Также рассмотрим следующие графовые преобразователи: D_v - удаление первой вершины, если она изолирована; константная функция $C_0^{\mathrm{G}}(g) = g_0^1$; удаление всех дуг графа $\mathring{D}_e(\pi) = (E_e(\pi) \ne \Delta) \underset{\pi}{*} \langle D_e(\pi)\rangle$; функция генерации пустого графа $C_{\Delta_{\mathrm{G}}}(g) = \Delta_{\mathrm{G}}$; S_{G} - увеличение на единицу номера первой вершины, а именно, для $g = \langle V = \{v_1, v_2, \ldots\}, E\rangle$,

$S_G(g) = < V, E_1 >$, где $E_1 = E \setminus \{< v_1, v_j > | < v_1, v_j > \in E\} \cup E_2$ и $E_2 \equiv \{< v_1 + 1, v_j > | < v_1, v_j > \in E\}$; D_e - уменьшение на единицу веса "первой" дуги графа, причем если вес равняется единице, то дуга удаляется полностью.

Формально, пусть $g = \langle\{v_1, \ldots\}, \{(\langle v_1, v_{i_1}\rangle, k_1), \ldots\}\rangle$, тогда $D_e(g) = \langle\{v_1, \ldots\}, \{(\langle v_1, v_{i_1}\rangle, k_1 - 1), \ldots\}\rangle$, ,если $k_1 > 1$ и $D_e(g) = \langle\{v_1, \ldots\}, \{(e_2, k_2), \ldots\}\rangle$, если $k_1 = 1$.

Наконец понадобится еще частичная функция L, которая действует на множестве из двух нулевых графов $\{m\}$ и $\{n\}$ таким образом, что- $L(\{m\},\{n\}) = \langle \{m,n\}, \{\langle m,n \rangle\} \rangle$ *создание дуги.*

Можно непосредственно проверить, что все эти функции являются частично-рекурсивными.

Положим $\sigma_{\mathsf{G}} := \{C_0^{\mathsf{G}}, S_G, \hat{\cup}, \setminus, E_e, E_v, D_v, L, =_{\mathsf{G}}, I_m^n\}_{m=\overline{1,n}}^{n=1,2,\ldots}$.

и

$\sigma_{\mathsf{G},\beta} := \{C_0^{\mathsf{G}}, \hat{\cup}, \setminus, E_e, E_v, D_v, L, =_{\mathsf{G}}, I_m^n\}_{m=\overline{1,n}}^{n=1,2,\ldots}$.

Вся дальнейшая работа посвящена доказательству того факта, что совокупность σ_{G} ($\sigma_{\mathsf{G},\beta}$) является базисом ППА $A_G^{чр}$ ($A_{G,\beta}^{чр}$).

Из определения понятия графа, приведенного выше, естественным чином вытекает следующее его (эффективное) представление в виде вектора. Положим вектор $A_g = \left(\underbrace{v_{i_1} v_{i_2} v_{i_1} v_{i_2} \ldots v_{i_1} v_{i_2}}_{k_1} \underbrace{v_{i_3} v_{i_4} \ldots v_{i_3} v_{i_4}}_{k_2} \ldots 0 v_{l_1} 0 v_{l_2} \ldots \right)$, где v_{l_j}, $j = 1,2,\ldots$, – изолированные вершины (если они есть). То есть каждую дугу $e_i = \langle v_{i_j}, v_{i_m} \rangle$ пересчитаем в этом векторе такое количество раз, которой есть ее вес k_i.

Очевидно, в таком представлении пустому графу отвечает пустой вектор Λ, а полностью несвязному графу, то есть графу $g \equiv < V, E >$, , где $E = \varnothing$, отвечает вектор $(0 v_1 0 v_2 0 \ldots 0 v_n)$. Заданное таким образом соответствие можно представить в виде отображения $\phi : \mathsf{G} \to \mathsf{N}^*$, где , $\mathsf{N}^* = \bigcup_{i=0}^{\infty} \mathsf{N}^i$, $\mathsf{N}^0 = \{\Lambda\}$, которое очевидно является инъекцией (однако не является сюръекцией). Также понятно, что множество $\mathsf{V} := \phi(\mathsf{G})$ есть рекурсивным в нумерации α_{G}.

Определение 1. V-функцию $F(x_1,\ldots,x_n)$ назовем *векторным образом* графого преобразователя F,, если $F(\phi(g_1),\ldots,\phi(g_n)) \cong \phi \mathsf{F}(g_1,\ldots,g_n)$ для всех $g_1,\ldots,g_n \subset \mathrm{dom}\,\mathsf{F}$. Аналогично V-предикат $P(x_1,\ldots,x_n)$ назовем векторным образом граф- предиката $\mathsf{P}(\xi_1,\ldots,\xi_n)$, если $P(\phi(g_1),\ldots,\phi(g_n)) \cong \phi \mathsf{P}(g_1,\ldots,g_n)$ для всех $g_1,\ldots,g_n \subset \mathrm{dom}\,\mathsf{F}$.

Почти очевидными есть следующая лемма.

Лемма 1.

1. Векторный образ чр- графового перетворвача (чр-графового предиката) есть чр-V-функция (чр-V-предикат).
2. Любая чр- V-функция есть чр- N^*-функцией (т.б. просто векторной чр- функцией). Для чр- V-предикатов аналогично.
3. Векторный образ чр- графового преобразователя (чр -граф-предиката) есть векторной чр- функцией (векторным чр- предикатом).

С целью моделирования векторных функций графовими преобразователями зададим также следующее отображение $\Phi : \mathsf{N}^* \to \mathsf{G}$ так: любому вектору $A = (v_1 v_2 \ldots v_n)$ поставим в соответствие граф $g = \langle V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}, E = \{\langle v_1, v_2 \rangle, \langle v_2, v_3 \rangle, \ldots, \langle v_{n-1}, v_n \rangle\} \rangle$, каждая дуга которого имеет вес 1.

Определение 2. Графовий преобразователь $\mathsf{F}(\xi_1,\ldots,\xi_n)$ называется *граф- моделью* векторного преобразователя $F(x_1,\ldots,x_n)$, если $\mathsf{F}(\Phi(v_1),\ldots,\Phi(v_n)) \cong \Phi(F(v_1,\ldots,v_n))$ для всех $v_1,\ldots,v_n \subset \operatorname{dom} F$.Граф- Модель предиката вводится аналогично.

Лемма 2. Для любых векторных чр- функций и чр- предикатов существуют их граф-модели, которые принадлежат замыканию $\left[\sigma_{\mathsf{G}}\right]_{\Omega}$ ($\left\lfloor\sigma_{\mathsf{G},\beta}\right\rfloor_{\Omega}$) .

Пусть $\psi := \phi \cdot \Phi$. Очевидно, что $\psi : \mathsf{G} \to \Phi(\mathsf{V})$ - биекция. Через χ обозначим какое-нибудь расширение отображения ψ^{-1}.. Графу преобразователи ψ и χ можно рассматривать как *функцию- кодер* и *функцию- декодер*, соответственно.

Непосредственно из приведенных выше определений вытекает лемма.

Лемма 3. Пусть $\mathsf{F}(\xi_1,\ldots,\xi_n)$ - чр -граф- функция, а $\mathsf{H}(\pi_1,\ldots,\pi_n)$ - граф- модель векторного образа функции $\mathsf{F}(\xi_1,\ldots,\xi_n)$. . Тогда

$$\mathsf{F}(A_1,\ldots,A_n) = \chi(\mathsf{H}(\psi(A_1),\ldots,\psi(A_n))) \text{ для всех } A_i,\ i=\overline{1,n},.$$

Аналогично, пусть $\mathsf{P}(\xi_1,\ldots,\xi_m)$ - чр -граф- предикат, а - $\mathsf{K}(\pi_1,\ldots,\pi_m)$ -граф- модель векторного образа этого предиката. Тогда

$$\mathsf{P}(A_1,\ldots,A_n) = \mathsf{K}(\psi(A_1),\ldots,\psi(A_n)) \text{ для всех } A_i,\ i=\overline{1,n}.$$

Лемма 4. Имеет место

$$\psi,\chi \in \left[\sigma_{\mathsf{G}}\right]\ (\psi,\chi \in \left\lfloor\sigma_{\mathsf{G},\beta}\right\rfloor)$$

Доказательство.

1. ψ .

Положим

$$\mathsf{G}_1(\pi) = (E_e(\xi) \neq \Delta) \underset{\pi}{*} \langle D_e(\pi)\rangle$$

и

$$\mathsf{G}_2(\pi,\xi) = (E_e(\xi) \neq \Delta) \underset{\pi,\xi}{*} \langle \pi \cup E_e(\xi) \cup L\left(D_v\left(G_1\left(E_e(\xi)\right)\right)\right), E_v\left(E_e\left(G_1(\xi)\right)\right)\right), G_1(\xi)\rangle .$$

Тогда $\mathsf{G}_2(\Delta, g)$ представляет собой граф-код за исключением изолированных вершин. А вот, полный граф-код

$$\hat{g} = \psi(g) = G_2(\Delta, g) \cup \overset{\circ}{D}_e(g) .$$

2. χ .

Рассмотрим функцию $\mathsf{G}_3(\pi,\xi) = \left(E_e(\xi) \neq \Delta\right) \underset{\pi,\xi}{*} \langle \pi \cup E_e(\xi), G_1\left(G_1(\xi)\right)\rangle$. Тогда

$$g = \chi(\hat{g}) = G_3(\Delta, \hat{g}) \cup \overset{\circ}{D}_e(\hat{g}) .$$

Что и нужно было доказать.

Теорема 1. σ_{G} ($\sigma_{\mathsf{G},\beta}$) является базисом ППА $A_G^{чр}$ ($A_{G,\beta}^{чр}$).

Вывод

В данной работе рассматривались два разных класса графовых преобразователей: класс всех вычислимых функций над графами и класс функций, которые сохраняют денотаты.

Было найдено порождающее множество для примитивной программной алгебры над графовыми фукциями.

Библиографический список

1. Басараб І.А. Базы данных с логико-функциональной точки зрения / Басараб І.А., Редько В.Н. // Программирование. — 1984. — №2. — С.53-67.
2. Мальцев А. И. Алгоритмы и рекурсивные функции. — М.: Наука, 1965. — 391 с
3. Колмогоров А.Н. К определению алгоритма./ Колмогоров А.Н., Успенский В.А.// Успехи матем.наук, 1958, т.13, №4, с.3-28.
4. Asser G. Berechenbare Graphenabbildungen/-In:Kompliziertheit von Lern-und Erkennungsprozessen. Jena: Friedrich-Schiller-Universitat, 1975, p.7-17.
5. Заславский И. Д. Граф-схемы с памятью // Тр. мат. ин-та АН СССР. — 1964. — 72. — С. 99−192.
6. Babai L. Isomorphism of graphs with bounded eigenvalue multiplicity /Babai L., Grigoryev D., Mount D. // Proc. 14th ACM symp. On theory of comput., STOC, 1982, p.310-324.
7. Пролубников А.В. Прямой алгоритм проверки изоморфизма графов // Сб. научн. тр. "Компьютерная оптика". Под ред. акад. РАН Ю.И. Журавлева. Издательство Самарского государственного университета, 2007. Вып. 27. С. 123-128.
8. Foggia P. A Database of graphs for isomorphism and sub-graph isomorphism benchmarking/., Sansone C., Vento M// Proc. of the 3rd IAPR TC-15 international workshop on graph-based representations, Italy, 2001, p. 157-168.
9. Spence E. The Stromgly Regular (40, 12, 2,4) Graphs // The Electronical Journal Of Combinatorics. Vol 7(1), 2000.
10. Ершов А,П. Вычислимость в произвольных областях и базисах// В кн.: Семиотика и информатика.Вып.19.-М.: изд. ВИНИТИ, 1979.-с.3-58
11. Агафонов В.Н. Спецификация программ: понятийные средства и их организация.- Новосибирск: Наука, 1987.- 240 с.
12. Буй Д. Б. Примитивные программные алгебры целочисленных и словарных функций / Буй Д. Б., Редько В. Н. // Докл. АН УССР. Сер. А. — 1984. — №10. — С. 69−71.
13. Буй Д. Б., Мавлянов А. В. К теории программных алгебр // Укр. мат. журн. — 1984. — 36, №6. — С. 761−764.
14. Буй Д. Б. Примитивные программные алгебры: Автореф. дис. канд. физ.-мат. наук. — Киев, 1985. — 22с.
15. Буй Д. Б. Примитивные программные алгебры. I, II / Буй Д. Б., Редько В. Н. // Кибернетика. — 1984. — №5. — С. 1−7; — 1985. — №1. — С.28−33.
16. Буй Д. Б. Неперервність в індуктивних множинах: основні поняття та допоміжні результати// Вісник Київського Університету. Сер.фіз.-мат.науки.-Київ, 1998.-Вип.1.-С.142-148
17. Буй Д. Б. Неперервність в індуктивних множинах: неперервність суперпозиції та суміжні результати// Вісник Київського Університету. Сер.фіз.-мат.науки.-Київ, 1998.-Вип.2.-С.187-195
18. Буй Д. Б. Неперервність в індуктивних множинах: неперервність рекурсії та суміжні результати// Вісник Київського Університету. Сер.фіз.-мат.науки.-Київ, 1998.-Вип.3.-С.128-138
19. Буй Д.Б. Композиційна семантика SQL-подібних мов: табличні структури даних, композиції, приклади / Буй Д.Б., Поляков С.А. // Вісник Київського Університету. Сер.фіз.-мат.науки.-Київ, 1999.-Вип.1.-С.130-140
20. Ершов Ю. Л. Теория нумераций. — М.: Наука, 1977. — 416 с.
21. Голунков Ю. В. О полноте операций в системах алгоритмических алгебр // Алгоритмы и автоматы. — Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1978. — С. 11−53.
22. Новиков Ф. А. Дискретная математика для программистов. — СПб: Питер, 2000. — 304 с.
23. Мальцев А. И. Конструктивные алгебры. I // Успехи мат. наук. — 1961. — 16, №3. —С. 3−60.