Министерство образования Республики Беларусь
Учреждение образования
«Белорусский государственный университет
информатики и радиоэлектроники»

Факультет компьютерных систем и сетей

Кафедра высшей математики

ТИПОВЫЕ РАСЧЕТЫ ПО ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ

В трех частях

Часть 3

*Рекомендовано УМО по образованию
в области информатики и радиоэлектроники
в качестве учебно-методического пособия
для специальностей I ступени высшего образования,
закрепленных за УМО*

Минск БГУИР 2015

УДК 517(076.1)
ББК 22.1я73
Т43

А в т о р ы:

Ж. А. Черняк, Н. В. Князюк, Г. И. Амелькина, О. Н. Малышева,
Т. А. Романчук

Р е ц е н з е н т ы:

кафедра общей математики и информатики
Белорусского государственного университета
(протокол №9 от 07.04.2014 г.);

доцент кафедры математического анализа учреждения образования
«Белорусский государственный педагогический университет
им. М. Танка», кандидат физико-математических наук, доцент
С. А. Богданович

Т43 **Типовые** расчеты по высшей математике. В 3 ч. Ч. 3: учеб.-метод. пособие / Ж. А. Черняк [и др.]. – Минск : БГУИР, 2015. – 102 с.
ISBN 978-985-543-117-7 (ч. 3).

Содержит тематические наборы индивидуальных заданий по следующим разделам курса высшей математики: кратные, криволинейные и поверхностные интегралы, числовые и функциональные ряды, элементы теории функций комплексной переменной, а также приложения для самостоятельной контролируемой работы студентов всех специальностей дневной формы обучения.

Часть 1-я издана в БГУИР в 2012 г.
Часть 2-я издана в БГУИР в 2013 г.

УДК 517(076.1)
ББК 22.1я73

ISBN 978-985-543-117-7 (ч. 3)
ISBN 978-985-488-973-3

Содержание

Введение

Настоящее пособие является третьей, заключительной частью учебно-методического комплекса «Типовые расчеты по высшей математике» в трех частях.

Данное пособие содержит наборы индивидуальных заданий (30 вариантов) по следующим разделам высшей математики, изучаемым обычно в третьем семестре: «Кратные, криволинейные и поверхностные интегралы», «Числовые и функциональные ряды», «Элементы теории функций комплексной переменной». Эти разделы математики являются традиционно наиболее сложными для усвоения студентами. Поэтому так же, как и вторая часть комплекса, третья его часть является не только сборником индивидуальных заданий, но и полноценным руководством к решению этих заданий. В приведенных решениях заданий из типовых вариантов подробно комментируется суть решения каждой задачи, приводятся теоретические положения, лежащие в основе ее решения.

Несмотря на то, что задачи из этого сборника рекомендуются как задания для типовых расчетов по высшей математике, их эффективно можно использовать для аудиторных занятий, для проведения самостоятельных и контрольных работ, как базу для составления экзаменационных материалов.

Задачи с подробными решениями можно рекомендовать студентам при подготовке к контрольным работам, зачетам и экзаменам.

Данное учебно-методическое пособие предназначено студентам инженерно-технических специальностей вузов и преподавателям высшей математики.

Типовой расчет №1

Кратные, криволинейные и поверхностные интегралы

Задание 1

Изобразите фигуру, площадь которой выражается повторными интегралами. Найдите эту площадь непосредственно по рисунку и с помощью криволинейного интеграла второго рода.

1.1. а) $\int\limits_0^1 dx \int\limits_{x/2}^{x} dy + \int\limits_1^2 dx \int\limits_{x/2}^{1} dy;$ б) $\int\limits_{-1}^0 dx \int\limits_0^{2x+2} dy + \int\limits_0^2 dx \int\limits_0^{\sqrt{4-x^2}} dy;$

1.2. а) $\int\limits_{-4}^0 dy \int\limits_{-y-4}^0 dx + \int\limits_0^2 dy \int\limits_{2y-4}^0 dx;$ б) $\int\limits_0^1 dx \int\limits_{-x}^0 dy + \int\limits_1^2 dx \int\limits_{-\sqrt{-x^2+2x}}^0 dy;$

1.3. а) $\int\limits_0^2 dy \int\limits_{-y/2}^0 dx + \int\limits_2^3 dy \int\limits_{y-3}^0 dx;$ б) $\int\limits_0^1 dx \int\limits_{1-\sqrt{2x-x^2}}^1 dy + \int\limits_1^2 dx \int\limits_{x-1}^1 dy;$

1.4. а) $\int\limits_{-4}^0 dx \int\limits_{-x/2}^2 dy + \int\limits_0^4 dx \int\limits_{x/2}^2 dy;$ б) $\int\limits_{-1}^1 dy \int\limits_{-1-\sqrt{1-y^2}}^{-1+\sqrt{1-y^2}} dx;$

1.5. а) $\int\limits_0^2 dy \int\limits_0^y dx + \int\limits_2^4 dy \int\limits_0^{4-y} dx;$ б) $\int\limits_{-1}^0 dx \int\limits_{1-x}^{2+\sqrt{1-x^2}} dy;$

1.6. а) $\int\limits_{-1}^0 dy \int\limits_{-2y}^2 dx + \int\limits_0^1 dy \int\limits_{2y}^2 dx;$ б) $\int\limits_{-1}^1 dx \int\limits_{-1}^{-1+\sqrt{1-x^2}} dy;$

1.7. а) $\int\limits_{-3}^0 dy \int\limits_{-y}^3 dx + \int\limits_0^1 dy \int\limits_{3y}^3 dx;$ б) $\int\limits_0^2 dy \int\limits_{3-\sqrt{2y-y^2}}^{3+\sqrt{2y-y^2}} dx;$

1.8. а) $\int\limits_{-2}^0 dx \int\limits_{-2}^x dy + \int\limits_0^4 dx \int\limits_{-2}^{-x/2} dy;$ б) $\int\limits_{-2}^0 dy \int\limits_{2-\sqrt{4-y^2}}^{y+4} dx + \int\limits_0^2 dy \int\limits_{2-\sqrt{4-y^2}}^{2+\sqrt{4-y^2}} dx;$

1.9. а) $\int\limits_{-4}^{-3} dy \int\limits_{-4-y}^0 dx + \int\limits_{-3}^0 dy \int\limits_{y/3}^0 dx;$ б) $\int\limits_2^3 dx \int\limits_{3-x}^{\sqrt{-x^2+4x-3}} dy;$

1.10. а) $\int\limits_{0,5}^1 dx \int\limits_{-2x}^{-1} dy + \int\limits_1^2 dx \int\limits_{-2}^{-x} dy;$ б) $\int\limits_{-3}^{-2} dy \int\limits_0^{3+y} dx + \int\limits_{-2}^{-1} dy \int\limits_0^{\sqrt{-y^2-4y-3}} dx;$

1.11. а) $\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{y/2}^{2y} dx + \int\limits_{1}^{4} dy \int\limits_{y/2}^{2} dx;$ б) $\int\limits_{-3}^{-1} dx \int\limits_{-x-4}^{-1+\sqrt{-x^2-2x+3}} dy;$

1.12. а) $\int\limits_{-5}^{-3} dy \int\limits_{-5-y}^{0} dx + \int\limits_{-3}^{-1} dy \int\limits_{y+1}^{0} dx;$ б) $\int\limits_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} dx \int\limits_{2}^{1+\sqrt{4-x^2}} dy;$

1.13. а) $\int\limits_{-1}^{0} dx \int\limits_{-2x}^{2} dy + \int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{x}^{2} dy;$ б) $\int\limits_{-1}^{1} dy \int\limits_{y+1}^{\sqrt{-y^2+2y+3}} dx;$

1.14. а) $\int\limits_{-1}^{0} dy \int\limits_{-2y}^{1} dx + \int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{2y}^{1} dx;$ б) $\int\limits_{2}^{3} dx \int\limits_{2}^{x} dy + \int\limits_{3}^{4} dx \int\limits_{2}^{2+\sqrt{-x^2+6x-8}} dy;$

1.15. а) $\int\limits_{-3}^{-1} dx \int\limits_{1}^{x+4} dy + \int\limits_{-1}^{0} dx \int\limits_{1}^{-2x+1} dy;$ б) $\int\limits_{2}^{4} dy \int\limits_{3-\sqrt{4y-y^2}}^{7-y} dx;$

1.16. а) $\int\limits_{0}^{3} dx \int\limits_{2}^{x+2} dy + \int\limits_{3}^{4} dx \int\limits_{2}^{14-3x} dy;$ б) $\int\limits_{1}^{3} dx \int\limits_{2-\sqrt{-x^2+2x+3}}^{2+\sqrt{-x^2+2x+3}} dy;$

1.17. а) $\int\limits_{-2}^{0} dy \int\limits_{-y}^{2} dx + \int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{2y}^{2} dx;$ б) $\int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{-1+\sqrt{2x-x^2}}^{0} dy;$

1.18. а) $\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{y/3-3}^{0} dx + \int\limits_{1}^{3} dy \int\limits_{y/3-3}^{1-y} dx;$ б) $\int\limits_{2}^{3} dx \int\limits_{0}^{1-\sqrt{-x^2+4x-3}} dy + \int\limits_{3}^{4} dx \int\limits_{0}^{4-x} dy;$

1.19. а) $\int\limits_{-4}^{-2} dx \int\limits_{-3}^{x+1} dy + \int\limits_{-2}^{-1} dx \int\limits_{3x+3}^{x+1} dy;$ б) $\int\limits_{0}^{2} dy \int\limits_{-2+\sqrt{-y^2+4y}}^{0} dx;$

1.20. а) $\int\limits_{1}^{2} dy \int\limits_{2}^{2y} dx + \int\limits_{2}^{3} dy \int\limits_{2}^{8-2y} dx;$ б) $\int\limits_{-3}^{-2} dx \int\limits_{0}^{1-\sqrt{-x^2-6x-8}} dy + \int\limits_{-2}^{0} dx \int\limits_{0}^{-x/2} dy;$

1.21. а) $\int\limits_{-3}^{-1,5} dx \int\limits_{-x}^{3} dy + \int\limits_{-1,5}^{0} dx \int\limits_{-x}^{-2x} dy;$ б) $\int\limits_{0}^{2} dy \int\limits_{0}^{y/2} dx + \int\limits_{2}^{3} dy \int\limits_{0}^{1-\sqrt{-y^2+6y-8}} dx;$

1.22. а) $\int\limits_{-1,5}^{0,5} dy \int\limits_{1}^{y+0,5} dx + \int\limits_{0,5}^{1} dy \int\limits_{-1}^{3-4y} dx;$ б) $\int\limits_{-3}^{-1} dx \int\limits_{0}^{(x+3)/2} dy + \int\limits_{-1}^{0} dx \int\limits_{0}^{1-\sqrt{1-x^2}} dy;$

1.23. а) $\int\limits_{1}^{2} dy \int\limits_{2-3y}^{-1} dx + \int\limits_{2}^{3} dy \int\limits_{3y-10}^{-1} dx;$ б) $\int\limits_{-1}^{0} dx \int\limits_{1+\sqrt{-x^2-2x}}^{3+x} dy;$

1.24. а) $\int\limits_{-3}^{1} dx \int\limits_{-x-3}^{0} dy + \int\limits_{-1}^{0} dx \int\limits_{2x}^{0} dy;$ б) $\int\limits_{-1}^{0} dy \int\limits_{-y-3}^{-1-\sqrt{-y^2-2y}} dx;$

1.25. а) $\int\limits_{-2}^{-1} dy \int\limits_{0}^{2y+4} dx + \int\limits_{-1}^{1} dy \int\limits_{0}^{1-y} dx;$ б) $\int\limits_{1}^{3} dx \int\limits_{0}^{\sqrt{-x^2+6x-5}} dy + \int\limits_{3}^{5} dx \int\limits_{0}^{5-x} dy;$

1.26. а) $\int\limits_{-2}^{0} dx \int\limits_{-2}^{x} dy + \int\limits_{0}^{2} dx \int\limits_{-2}^{-x} dy;$ б) $\int\limits_{0}^{2} dy \int\limits_{3-\sqrt{-y^2+4y}}^{3+y} dx;$

1.27. а) $\int\limits_{-2}^{0} dy \int\limits_{-y/2}^{1} dx + \int\limits_{0}^{2} dy \int\limits_{y/2}^{1} dx;$ б) $\int\limits_{-2}^{0} dx \int\limits_{-x-2}^{0} dy + \int\limits_{0}^{2} dx \int\limits_{-\sqrt{4-x^2}}^{0} dy;$

1.28. а) $\int\limits_{0}^{3} dx \int\limits_{0}^{x/3} dy + \int\limits_{3}^{4} dx \int\limits_{0}^{4-x} dy;$ б) $\int\limits_{0}^{3} dy \int\limits_{-2-\sqrt{9-y^2}}^{1-y} dx;$

1.29. а) $\int\limits_{-1}^{1} dx \int\limits_{-x-1}^{0} dy + \int\limits_{1}^{2} dx \int\limits_{2x-4}^{0} dy;$ б) $\int\limits_{2}^{3} dy \int\limits_{3-\sqrt{-y^2+6y-8}}^{3} dx + \int\limits_{3}^{4} dy \int\limits_{y-1}^{3} dx;$

1.30. а) $\int\limits_{-1}^{0} dx \int\limits_{-3x}^{2-x} dy + \int\limits_{0}^{2} dx \int\limits_{0}^{2-x} dy;$ б) $\int\limits_{-2}^{0} dy \int\limits_{0}^{\sqrt{4-y^2}} dx + \int\limits_{0}^{2} dy \int\limits_{0}^{2-y} dx.$

Задание 2

Для данной функции $f(x,y)$ и области D представьте двойной интеграл $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ в виде повторного двумя способами: с внешним интегрированием по x и внешним интегрированием по y. Вычислите двойной интеграл одним из способов.

2.1. а) $f(x,y) = \dfrac{1}{(x+y)^2}, \quad D:\ 0 \le x \le 1,\ 1 \le y \le 2;$

б) $f(x,y) = 2x + y + 1, \quad D:\ y = x^2 + 1,\ y = 5,\ x = 0;$

в) $f(x,y) = x^2 y, \quad D:\ y = \dfrac{1}{x},\ y = x,\ y = 0,\ x = 2;$

2.2. а) $f(x,y) = \dfrac{1}{(x+y+1)^2}, \quad D:\ 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1;$

б) $f(x,y) = \dfrac{y}{(2-x)^2}, \quad D:\ y = 4 - x^2,\ x = 0,\ y = 1;$

в) $f(x,y)=3-x-y, \quad D:\ y=\dfrac{2}{x},\ \ y=0,\ \ x=1,\ \ x=3;$

2.3. а) $f(x,y)=\dfrac{x}{(x^2+y^2+1)^2}, \quad D:\ 0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1;$

б) $f(x,y)=2x-y, \quad D:\ y=-x^2,\ \ y=0,\ \ x=2;$

в) $f(x,y)=y\ln x, \quad D:\ y=\dfrac{1}{x},\ \ y=\sqrt{x},\ \ x=2;$

2.4. а) $f(x,y)=\dfrac{x}{(x^2+y^2)^2}, \quad D:\ 0\le x\le 1,\ 1\le y\le 2;$

б) $f(x,y)=1-x, \quad D:\ y=e^x,\ \ y=e,\ \ x=0;$

в) $f(x,y)=x^2+y, \quad D:\ y=\dfrac{2}{x},\ \ y=2x,\ \ y=0,\ \ x=2;$

2.5. а) $f(x,y)=x\cos(x+y), \quad D:\ 0\le x\le \pi,\ 0\le y\le \dfrac{\pi}{2};$

б) $f(x,y)=ye^x, \quad D:\ y=\dfrac{x}{2},\ \ x=2,\ \ y=0;$

в) $f(x,y)=xy, \quad D:\ y=x^2,\ \ y=-x,\ \ y=1;$

2.6. а) $f(x,y)=y\sin(x-y), \quad D:\ 0\le x\le \pi,\ 0\le y\le \dfrac{\pi}{2};$

б) $f(x,y)=y2^x, \quad D:\ y=\dfrac{1}{2}x+2,\ \ y=3,\ \ x=0;$

в) $f(x,y)=-2y-x, \quad D:\ y=x^2-1,\ \ y=-3x+3,\ \ x=0;$

2.7. а) $f(x,y)=x^2y\cos(xy^2), \quad D:\ 0\le x\le \dfrac{\pi}{2},\ \ 0\le y\le 2;$

б) $f(x,y)=x+y, \quad D:\ y=\ln x,\ \ y=0,\ \ x=e;$

в) $f(x,y)=2x+3y, \quad D:\ y=\sqrt{x},\ \ y=2-x,\ \ y=0,\ \ x=4;$

2.8. а) $f(x,y)=\dfrac{x}{(x+y)^3}, \quad D:\ 1\le x\le 2,\ \ 0\le y\le 1;$

б) $f(x,y)=y^2\sin x, \quad D:\ y=1+\cos x,\ \ y=0,\ \ x=0;$

в) $f(x,y)=x^2+2y, \quad D:\ y=3x,\ \ y=\dfrac{3}{x},\ \ y=0,\ \ x=2;$

2.9. а) $f(x,y)=x^2y^2\sin xy^3, \quad D:\ 0\le x\le \dfrac{\pi}{2},\ 1\le y\le 2;$

б) $f(x,y)=2x-y, \quad D:\ y=e^x,\ \ y=3,\ \ x=0;$

в) $f(x,y)=x^3+y, \quad D:\ x=y^2,\ \ x=3,\ \ y=0,\ \ y=1;$

2.10. а) $f(x,y)=\dfrac{y^2}{(x+y^3)^2}$, $\quad D:\ 0\le x\le 1,\ 1\le y\le 2;$

б) $f(x,y)=y^2\cos x$, $\quad D:\ y=\sin x,\ \ y=0,\ \ x=\dfrac{\pi}{2};$

в) $f(x,y)=\dfrac{x}{\sqrt{y}}$, $\quad D:\ x=y^2,\ \ y=1,\ \ y=2,\ \ x=0;$

2.11. а) $f(x,y)=\dfrac{x^3}{\sqrt{x^4+y^2}}$, $\quad D:\ 0\le x\le 1,\ 1\le y\le 2;$

б) $f(x,y)=ye^x$, $\quad D:\ y=\dfrac{1}{2}x,\ \ y=2,\ \ x=0;$

в) $f(x,y)=y\sqrt{x}$, $\quad D:\ x=y^2,\ \ y=x,\ \ x=1;$

2.12. а) $f(x,y)=y\cos(2x+y)$, $\quad D:\ 0\le x\le \dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{\pi}{2}\le y\le \pi;$

б) $f(x,y)=x^2+y$, $\quad D:\ x=y^2,\ \ y=1,\ \ x=0;$

в) $f(x,y)=xy$, $\quad D:\ y=\ln x+1,\ \ y=0,\ \ x=0,\ \ x=1;$

2.13. а) $f(x,y)=x^2\sin(y-x)$, $\quad D:\ \dfrac{\pi}{2}\le x\le \pi,\ 0\le y\le \pi;$

б) $f(x,y)=x+y$, $\quad D:\ y=\dfrac{1}{x-2},\ \ y=3,\ \ x=4;$

в) $f(x,y)=\dfrac{x}{y}$, $\quad D:\ y=2x,\ \ y=\dfrac{x}{3},\ \ y=2;$

2.14. а) $f(x,y)=\dfrac{y^4}{(x^2+y^5)^2}$, $\quad D:\ 1\le x\le \sqrt{3},\ 0\le y\le 1;$

б) $f(x,y)=y\cos x$, $\quad D:\ y=1+\cos x,\ \ y=0,\ \ x=\dfrac{\pi}{2};$

в) $f(x,y)=\dfrac{x}{y}$, $\quad D:\ y=x^2,\ \ y=2-x,\ \ y=4;$

2.15. а) $f(x,y)=y\cos(x-y)$, $\quad D:\ \dfrac{\pi}{2}\le x\le \pi,\ 0\le y\le \dfrac{\pi}{2};$

б) $f(x,y)=\sqrt{xy}$, $\quad D:\ x=y^2,\ \ y=0,\ \ x=4;$

в) $f(x,y)=y(x-1)$, $\quad D:\ y=\dfrac{1}{x-1},\ \ y=0,\ \ x=2,\ \ x=3;$

2.16. а) $f(x,y)=\dfrac{x^2}{(x^3+y)^2}$, $\quad D:\ 1\le x\le 2,\ 0\le y\le 1;$

б) $f(x,y)=x+2y,\quad D:\ y=-x,\ \ y=-\dfrac{1}{2}x+1,\ \ x=0;$

в) $f(x,y)=\dfrac{x}{y^2},\quad D:\ y=2x^2+1,\ \ y=1-2x,\ \ y=3;$

2.17. а) $f(x,y)=\dfrac{y}{(x+y)^3},\quad D:\ 0\le x\le 1,\ 1\le y\le 2;$

б) $f(x,y)=\dfrac{x^2}{y^2},\quad D:\ y=x,\ \ y=\dfrac{1}{x},\ \ x=2;$

в) $f(x,y)=x^2,\quad D:\ y=2^x,\ \ y=1-x,\ \ y=0,\ \ x=-1;$

2.18. а) $f(x,y)=x\sin(2x+y),\quad D:\ 0\le x\le\dfrac{\pi}{4},\ \ 0\le y\le\dfrac{\pi}{2};$

б) $f(x,y)=yx^3,\quad D:\ y=x^2-2,\ \ y=x,\ \ y=0,\ \ x\ge 0;$

в) $f(x,y)=x,\quad D:\ x=-y^2,\ \ y=2-x,\ \ y=0,\ \ x=-1;$

2.19. а) $f(x,y)=\dfrac{1}{\sqrt{(x^2+y+1)^3}},\quad D:\ 0\le x\le 1,\ \ 0\le y\le 1;$

б) $f(x,y)=x-y,\quad D:\ y=e^x,\ \ y=1,\ \ x=2;$

в) $f(x,y)=x+2,\quad D:\ y=x^2+1,\ \ y=-x+1,\ \ y=0,\ \ x=2;$

2.20. а) $f(x,y)=x^2e^{xy},\quad D:\ 1\le x\le 2,\ \ 0\le y\le 2;$

б) $f(x,y)=y\sin x,\quad D:\ y=1-\sin x,\ \ y=0,\ \ x=0;$

в) $f(x,y)=xy,\quad D:\ y=\dfrac{1}{x-1},\ \ y=x-1,\ \ y=0,\ \ x=3;$

2.21. а) $f(x,y)=xy^2e^{x^2y},\quad D:\ 0\le x\le 2,\ \ 0\le y\le 1;$

б) $f(x,y)=3x+2y,\quad D:\ y=x+1,\ \ y=0,\ \ x=2;$

в) $f(x,y)=x+1,\quad D:\ y=x^2+1,\ \ y=x+1,\ \ y=3-x,\ \ y=0;$

2.22. а) $f(x,y)=x2^{xy},\quad D:\ 2\le x\le 3,\ \ 0\le y\le 1;$

б) $f(x,y)=x+2y,\quad D:\ y=-x-1,\ \ x=0,\ \ y=2;$

в) $f(x,y)=\dfrac{x}{y},\quad D:\ x=-y^2,\ \ y=x+6,\ \ y=4,\ \ x=0;$

2.23. а) $f(x,y)=x(x+y)^5,\quad D:\ 0\le x\le 1,\ \ 0\le y\le 1;$

б) $f(x,y)=x+y,\quad D:\ y=x^2-2,\ \ y=x;$

в) $f(x,y)=2x,\quad D:\ y=e^x,\ \ y=1-x,\ \ y=0,\ \ x=2;$

2.24. а) $f(x,y)=x^2y^2e^{x^3y},\quad D:\ 0\le x\le 1,\ \ 1\le y\le 2;$

б) $f(x,y)=\dfrac{x^2}{y^2}$, D: $y=\sqrt{x}$, $y=2$, $x=0$;

в) $f(x,y)=x+1$, D: $y=2-x$, $y=\dfrac{1}{3}x+2$, $y=0$, $x=3$;

2.25. а) $f(x,y)=x^2 3^{xy}$, D: $0\le x\le 1$, $0\le y\le 1$;

б) $f(x,y)=2x-y$, D: $y=3-x$, $y=0$, $x=1$;

в) $f(x,y)=\dfrac{x^2}{y^2}$, D: $y=-x^2$, $y=x$, $x=1$;

2.26. а) $f(x,y)=x^3y^2e^{x^4y}$, D: $0\le x\le 1$, $1\le y\le 2$;

б) $f(x,y)=3x+y$, D: $y=x^2$, $y=0$, $x=2$;

в) $f(x,y)=\dfrac{y}{x+1}$, D: $y=1+x$, $y=9-3x$, $y=0$, $x=0$;

2.27. а) $f(x,y)=y\sqrt{x+y^2}$, D: $0\le x\le 1$, $0\le y\le 1$;

б) $f(x,y)=x^2+y^2$, D: $y=\dfrac{2}{x}$, $y=1$, $x=1$;

в) $f(x,y)=xy$, D: $y=e^x$, $y=-\dfrac{1}{2}x+1$, $y=0$, $x=-1$;

2.28. а) $f(x,y)=y(x+y)^5$, D: $0\le x\le 1$, $0\le y\le 1$;

б) $f(x,y)=x^2+2y$, D: $y=\dfrac{2}{x}$, $y=3$, $x=2$;

в) $f(x,y)=x+1$, D: $y=(x-1)^2$, $y=x+1$, $y=1-x$;

2.29. а) $f(x,y)=xe^{xy}$, D: $1\le x\le 2$, $1\le y\le 2$;

б) $f(x,y)=x^3+2y$, D: $y=2-x$, $y=x$, $x=0$;

в) $f(x,y)=xy$, D: $y=x-1$, $y=-x-1$, $y=0$, $x=2$;

2.30. а) $f(x,y)=x^2y^2e^{xy^3}$, D: $1\le x\le 2$, $0\le y\le 1$;

б) $f(x,y)=x^2+y$, D: $y=2+2x$, $y=2$, $x=-1$;

в) $f(x,y)=x+y$, D: $y=-\dfrac{1}{x}$, $y=2$, $y=0$, $x=-1$, $x=0$.

Задание 3

Расставьте пределы интегрирования в двойном интеграле $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$, если D – трапеция с вершинами в точках A_1, A_2, A_3, A_4, и найдите площадь трапеции $A_1A_2A_3A_4$. Вычислите периметр этой трапеции с помощью криволинейного интеграла первого рода.

3.1. $A_1(1;1),\ A_2(1;3),\ A_3(3;5),\ A_4(4;4)$;

3.2. $A_1(-1;-1),\ A_2(1;-3),\ A_3(3;-3),\ A_4\left(-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$;

3.3. $A_1(1;-2),\ A_2(2;0),\ A_3(7;-5),\ A_4(4;-5)$;

3.4. $A_1(2;-1),\ A_2(5;-1),\ A_3\left(2\frac{1}{2};4\right),\ A_4(1;1)$;

3.5. $A_1(-2;-1),\ A_2(-2;2),\ A_3(0;3),\ A_4\left(3;1\frac{1}{2}\right)$;

3.6. $A_1(-1;-2),\ A_2(2;0),\ A_3(2;3),\ A_4\left(0;1\frac{2}{3}\right)$;

3.7. $A_1(1;2),\ A_2\left(2;4\frac{1}{3}\right),\ A_3(4;5),\ A_4(4;3)$;

3.8. $A_1(1;1),\ A_2\left(3;1\frac{2}{3}\right),\ A_3(4;1),\ A_4(4;-1)$;

3.9. $A_1(1;-1),\ A_2(1;4),\ A_3(4;1),\ A_4(3;-3)$;

3.10. $A_1(-4;3),\ A_2(-1;3),\ A_3(0;1),\ A_4\left(-3\frac{1}{2};2\right)$;

3.11. $A_1(-4;4),\ A_2(-3;5),\ A_3(-1;3),\ A_4(-1;1)$;

3.12. $A_1(1;2),\ A_2(2;0),\ A_3(7;5),\ A_4(4;5)$;

3.13. $A_1(2;1),\ A_2(5;1),\ A_3\left(2\frac{1}{2};-4\right),\ A_4(1;-1)$;

3.14. $A_1(1;-2),\ A_2\left(2;-4\frac{1}{3}\right),\ A_3(4;-5),\ A_4(4;-3)$;

3.15. $A_1(-1;3),\ A_2(1;5),\ A_3(2;4),\ A_4(-1;1)$;

3.16. $A_1(-1;0),\ A_2(2;-2),\ A_3(2;0),\ A_4\left(1;\frac{2}{3}\right)$;

3.17. $A_1(-1;4),\ A_2(2;4),\ A_3(3;2),\ A_4\left(-\frac{1}{2};3\right)$;

3.18. $A_1\left(0;\frac{1}{2}\right),\ A_2\left(3;\frac{1}{2}\right),\ A_3\left(\frac{1}{2};5\frac{1}{2}\right),\ A_4\left(-1;2\frac{1}{2}\right)$;

3.19. $A_1\left(-4; -2\frac{1}{2}\right)$, $A_2\left(-4; \frac{1}{2}\right)$, $A_3\left(-2; 1\frac{1}{2}\right)$, $A_4(1; 0)$;

3.20. $A_1(0; -1)$, $A_2\left(1; 2\frac{2}{3}\right)$, $A_3(3; 4)$, $A_4(3; 1)$;

3.21. $A_1(-2; -1)$, $A_2(-1; 1)$, $A_3(4; -4)$, $A_4(1; -4)$;

3.22. $A_1(-5; -3)$, $A_2\left(-4\frac{1}{2}; -2\right)$, $A_3(-1; -1)$, $A_4(-2; -3)$;

3.23. $A_1(2; -3)$, $A_2\left(2\frac{1}{2}; -1\frac{1}{2}\right)$, $A_3(6; -5)$, $A_4(4; -5)$;

3.24. $A_1(-1; 1)$, $A_2(2; -1)$, $A_3(2; -4)$, $A_4\left(0; -2\frac{2}{3}\right)$;

3.25. $A_1(-2; 0)$, $A_2(0; 2)$, $A_3(2; 2)$, $A_4\left(-1\frac{1}{2}; -1\frac{1}{2}\right)$;

3.26. $A_1(-4; -3)$, $A_2(-4; -1)$, $A_3\left(-3; -\frac{1}{3}\right)$, $A_4(-1; -1)$;

3.27. $A_1(-4; 1)$, $A_2(-4; 3)$, $A_3\left(-2; 2\frac{1}{3}\right)$, $A_4(-1; 0)$;

3.28. $A_1(0; -3)$, $A_2(-1; -1)$, $A_3\left(2\frac{1}{2}; -2\right)$, $A_4(3; -3)$;

3.29. $A_1(-1; -3)$, $A_2(-2; 1)$, $A_3(1; 4)$, $A_4(1; -1)$;

3.30. $A_1(-4; 5)$, $A_2(-1; 5)$, $A_3(2; 2)$, $A_4(1; 0)$.

Задание 4

Пусть D – область интегрирования интеграла из задания 1а). Найдите массу пластинки, имеющей форму области D, если ее плотность задана функцией $\rho(x, y)$. Вычислите среднее значение плотности в области D.

4.1. $\rho(x, y) = x + y$;

4.2. $\rho(x, y) = 2 - x$;

4.3. $\rho(x, y) = 3 - 2x$;

4.4. $\rho(x, y) = 2x + 4y$;

4.5. $\rho(x, y) = 4x + 1$;

4.6. $\rho(x, y) = 3x + 2y$;

4.7. $\rho(x, y) = 5x + y + 1$;

4.8. $\rho(x, y) = 8 - 2x - y$;

4.9. $\rho(x, y) = -2x - 2y$;

4.10. $\rho(x, y) = 4 - y$;

4.11. $\rho(x, y) = \frac{1}{2}x + 2y$;

4.12. $\rho(x, y) = 2 - x$;

4.13. $\rho(x, y) = 2y + 1$;

4.14. $\rho(x, y) = x + y + 3$;

4.15. $\rho(x, y) = y + 1;$

4.16. $\rho(x, y) = 3y + 3;$

4.17. $\rho(x, y) = 4x + 2y + 1;$

4.18. $\rho(x, y) = 3y + 6;$

4.19. $\rho(x, y) = 1 - y;$

4.20. $\rho(x, y) = x + 2y;$

4.21. $\rho(x, y) = y - 2x;$

4.22. $\rho(x, y) = 2 - x;$

4.23. $\rho(x, y) = -3x;$

4.24. $\rho(x, y) = -2x - 2y;$

4.25. $\rho(x, y) = 4x + 1;$

4.26. $\rho(x, y) = 4 - x - y;$

4.27. $\rho(x, y) = 4x + 2;$

4.28. $\rho(x, y) = 2x + y;$

4.29. $\rho(x, y) = 1 - 2y;$

4.30. $\rho(x, y) = 3 + 4y.$

Задание 5

Для данной функции $f(x, y)$ и области D вычислите $\iint\limits_D f(x, y)dxdy$, используя полярные координаты.

5.1. $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2 - 9},$ $\quad D: 9 \le x^2 + y^2 \le 25;$

5.2. $f(x, y) = e^{x^2 + y^2},$ $\quad D: 1 \le x^2 + y^2 \le 4,\ x \ge 0,\ y \ge 0;$

5.3. $f(x, y) = \dfrac{1}{1 + x^2 + y^2},$ $\quad D: 9 \le x^2 + y^2 \le 16,\ x \le 0,\ y \ge 0;$

5.4. $f(x, y) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}},$ $\quad D: 1 \le x^2 + y^2 \le 16,\ x \le 0,\ y \le 0;$

5.5. $f(x, y) = \ln(1 + x^2 + y^2),$ $\quad D: 4 \le x^2 + y^2 \le 36,\ y \ge 0;$

5.6. $f(x, y) = \cos(x^2 + y^2),$ $\quad D: \dfrac{\pi}{3} \le x^2 + y^2 \le \dfrac{\pi}{2},\ x \ge 0,\ y \le 0;$

5.7. $f(x, y) = x^2 y,$ $\quad D: 1 \le x^2 + y^2 \le 4,\ x \ge 0,\ y \le 0;$

5.8. $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2 - 1},$ $\quad D: 4 \le x^2 + y^2 \le 9,\ y \ge 0;$

5.9. $f(x, y) = x^2 - y^2,$ $\quad D: 4 \le x^2 + y^2 \le 9,\ y = x,\ x = 0,\ y \ge 0;$

5.10. $f(x, y) = x^2\sqrt{x^2 + y^2},$ $\quad D: 1 \le x^2 + y^2 \le 9,\ y \le 0;$

5.11. $f(x, y) = (x^2 + y^2)^2,$ $\quad D: 1 \le x^2 + y^2 \le 4,\ x \le 0;$

5.12. $f(x, y) = \dfrac{y^2\sqrt{x^2 + y^2 - 1}}{x^2 + y^2},$ $\quad D: 1 \le x^2 + y^2 \le 25,\ x \ge 0,\ y \ge 0;$

5.13. $f(x, y) = x\sqrt{x^2 + y^2},$ $\quad D: 1 \le x^2 + y^2 \le 4,\ y = x,\ x = 0,\ y \ge 0;$

5.14. $f(x, y) = x\sin\sqrt{x^2 + y^2},$ $\quad D: 4\pi^2 \le x^2 + y^2 \le 9\pi^2,\ x \ge 0,\ y \ge 0;$

5.15. $f(x,y) = y\cos\sqrt{x^2+y^2}$, $\quad D: \dfrac{\pi^2}{4} \le x^2+y^2 \le \pi^2,\ x \ge 0,\ y \ge 0;$

5.16. $f(x,y) = x\cos\sqrt{(x^2+y^2)^3}$, $\quad D: 4 \le x^2+y^2 \le 9,\ x \ge 0,\ y \le 0;$

5.17. $f(x,y) = y\sin\sqrt{x^2+y^2}$, $\quad D: \pi^2 \le x^2+y^2 \le \dfrac{9\pi^2}{4},\ y \ge 0;$

5.18. $f(x,y) = \dfrac{x}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}$, $\quad D: 1 \le x^2+y^2 \le 9,\ y = x,\ y = 0,\ x \ge 0;$

5.19. $f(x,y) = \dfrac{y\cos\sqrt{x^2+y^2}}{x^2+y^2}$, $\quad D: \dfrac{\pi^2}{4} \le x^2+y^2 \le \pi^2,\ y \ge 0;$

5.20. $f(x,y) = \dfrac{x\cos^2\sqrt{x^2+y^2}}{x^2+y^2}$, $\quad D: 4\pi^2 \le x^2+y^2 \le \dfrac{25\pi^2}{4},\ x \le 0;$

5.21. $f(x,y) = \dfrac{xe^{-\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2}$, $\quad D: 1 \le x^2+y^2 \le 9,\ y = x,\ x = 0,\ y \le 0;$

5.22. $f(x,y) = \dfrac{ye^{-x^2-y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $\quad D: 4 \le x^2+y^2 \le 9,\ y \le 0;$

5.23. $f(x,y) = \dfrac{xy^2}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}$, $\quad D: 4 \le x^2+y^2 \le 16,\ x = y,\ x = -y,\ x \ge 0;$

5.24. $f(x,y) = \dfrac{1}{e^{x^2+y^2}}$, $\quad D: 1 \le x^2+y^2 \le 25,\ y = -x,\ y = 0,\ x \le 0;$

5.25. $f(x,y) = \dfrac{x\sqrt{1-x^2-y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $\quad D: 1 \le x^2+y^2 \le \pi^2,\ x \le 0,\ y \ge 0;$

5.26. $f(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{25-x^2-y^2}}$, $\quad D: 4 \le x^2+y^2 \le 9,\ y = x,\ y = 0,\ x \ge 0;$

5.27. $f(x,y) = \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $\quad D: \dfrac{1}{4} \le x^2+y^2 \le 1,\ y = -x,\ x = 0,\ y \ge 0;$

5.28. $f(x,y) = xy$, $\quad D: 1 \le x^2+y^2 \le 4,\ x \le 0,\ y \le 0;$

5.29. $f(x,y) = e^{-x^2-y^2}$, $\quad D: 16 \le x^2+y^2 \le 25,\ y \le 0;$

5.30. $f(x,y) = x^4+y^4$, $\quad D: 1 \le x^2+y^2 \le 4.$

Задание 6

Дан трехкратный интеграл.

1. Вычислите этот интеграл.

2. Изобразите тело *T*, объем которого вычисляется с помощью этого интеграла.

3. Найдите массу тела *T*, если известна функция $\rho(x, y, z)$, описывающая плотность распределения массы в области *T*.

6.1. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{\frac{1}{2}-\frac{x}{2}} dy \int\limits_0^{\frac{1}{5}-\frac{x}{5}-\frac{2y}{5}} dz, \quad \rho(x, y, z) = 4x + 3y + 1;$

6.2. $\int\limits_{-1}^0 dx \int\limits_0^{\frac{1}{2}+\frac{x}{2}} dy \int\limits_0^{\frac{1}{4}+\frac{x}{4}-\frac{y}{2}} dz, \quad \rho(x, y, z) = -3x + 2y;$

6.3. $\int\limits_0^3 dx \int\limits_0^{-\frac{3}{2}+\frac{x}{2}} dy \int\limits_0^{\frac{3}{5}-\frac{x}{5}+\frac{2y}{5}} dz, \quad \rho(x, y, z) = x - 4y;$

6.4. $\int\limits_0^2 dx \int\limits_0^{\frac{1}{4}-\frac{x}{8}} dy \int\limits_{-\frac{1}{3}+\frac{x}{6}+\frac{4}{3}y}^0 dz, \quad \rho(x, y, z) = 2x + y;$

6.5. $\int\limits_{-3}^0 dx \int\limits_0^{1+\frac{x}{3}} dy \int\limits_0^{\frac{1}{3}+\frac{x}{9}-\frac{y}{3}} dz, \quad \rho(x, y, z) = 2 - x + y;$

6.6. $\int\limits_0^{\frac{1}{2}} dx \int\limits_{-\frac{1}{3}+\frac{2x}{3}}^0 dy \int\limits_{-2+4x-6y}^0 dz, \quad \rho(x, y, z) = 2x - y;$

6.7. $\int\limits_{-4}^0 dx \int\limits_{-2-\frac{x}{2}}^0 dy \int\limits_{-4-x-2y}^0 dz, \quad \rho(x, y, z) = -3x - y;$

6.8. $\int\limits_{-1}^0 dx \int\limits_0^{\frac{5}{2}+\frac{5x}{2}} dy \int\limits_{-5-5x+2y}^0 dz, \quad \rho(x, y, z) = -x + 2y;$

6.9. $\int\limits_{-1}^0 dx \int\limits_{-\frac{1}{2}-\frac{x}{2}}^0 dy \int\limits_0^{3x+6y+3} dz, \quad \rho(x, y, z) = -2x - 2y;$

6.10. $\int\limits_0^2 dx \int\limits_{-2+x}^{0} dy \int\limits_0^{\frac{1}{2}-\frac{x}{4}+\frac{y}{4}} dz, \quad \rho(x,y,z)=3x-2y;$

6.11. $\int\limits_0^4 dx \int\limits_{-4+x}^{0} dy \int\limits_{-8+2x-2y}^{0} dz, \quad \rho(x,y,z)=2x-3y;$

6.12. $\int\limits_0^3 dx \int\limits_0^{6-2x} dy \int\limits_0^{2-\frac{2x}{3}-\frac{y}{3}} dz, \quad \rho(x,y,z)=x+y+2;$

6.13. $\int\limits_0^3 dx \int\limits_0^{2-\frac{2x}{3}} dy \int\limits_{-2+\frac{2x}{3}+y}^{0} dz, \quad \rho(x,y,z)=3+x+y;$

6.14. $\int\limits_{-2}^0 dx \int\limits_0^{x+2} dy \int\limits_{-1-\frac{x}{2}+\frac{y}{2}}^{0} dz, \quad \rho(x,y,z)=-x+4y;$

6.15. $\int\limits_{-6}^0 dx \int\limits_{-3-\frac{x}{2}}^{0} dy \int\limits_{-3-\frac{x}{2}-y}^{0} dz, \quad \rho(x,y,z)=-x-2y+1;$

6.16. $\int\limits_0^4 dx \int\limits_{\frac{x}{12}-\frac{1}{3}}^{0} dy \int\limits_0^{1-\frac{x}{4}+3y} dz, \quad \rho(x,y,z)=2x-y;$

6.17. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{2-2x} dy \int\limits_{-1+x+\frac{y}{2}}^{0} dz, \quad \rho(x,y,z)=2x+y+3;$

6.18. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_{2x-2}^{0} dy \int\limits_0^{2-2x+y} dz, \quad \rho(x,y,z)=x-3y;$

6.19. $\int\limits_0^2 dx \int\limits_0^{2-x} dy \int\limits_{-1+\frac{x}{2}+\frac{y}{2}}^{0} dz, \quad \rho(x,y,z)=1+x+y;$

6.20. $\int\limits_{-3}^0 dx \int\limits_0^{1+\frac{x}{3}} dy \int\limits_0^{3+x-3y} dz, \quad \rho(x,y,z)=y-2x;$

6.21. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_{3x-3}^{0} dy \int\limits_0^{3-3x+y} dz, \quad \rho(x,y,z)=x-y;$

6.22. $\int\limits_{0}^{3} dx \int\limits_{-1+\frac{x}{3}}^{0} dy \int\limits_{-1+\frac{x}{3}-y}^{0} dz, \quad \rho(x,y,z) = x - 2y;$

6.23. $\int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{0}^{3-3x} dy \int\limits_{-1+x+\frac{y}{3}}^{0} dz, \quad \rho(x,y,z) = 5 + x + 2y;$

6.24. $\int\limits_{-2}^{0} dx \int\limits_{0}^{4+2x} dy \int\limits_{-1-\frac{x}{2}+\frac{y}{2}}^{0} dz, \quad \rho(x,y,z) = 2y - 3x;$

6.25. $\int\limits_{-2}^{0} dx \int\limits_{-1-\frac{x}{2}}^{0} dy \int\limits_{0}^{4+2x+4y} dz, \quad \rho(x,y,z) = -2x - 2y;$

6.26. $\int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{0}^{2-2x} dy \int\limits_{0}^{1-x-\frac{y}{2}} dz, \quad \rho(x,y,z) = 3 + x + y;$

6.27. $\int\limits_{0}^{2} dx \int\limits_{0}^{2-x} dy \int\limits_{-1+\frac{x}{2}+\frac{y}{2}}^{0} dz, \quad \rho(x,y,z) = 1 + 2x + y;$

6.28. $\int\limits_{-2}^{0} dx \int\limits_{-1-\frac{x}{2}}^{0} dy \int\limits_{-2-x-2y}^{0} dz, \quad \rho(x,y,z) = 2 - x - 3y;$

6.29. $\int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{4x-4}^{0} dy \int\limits_{-4+4x-y}^{0} dz, \quad \rho(x,y,z) = x - 3y;$

6.30. $\int\limits_{0}^{3} dx \int\limits_{0}^{2-\frac{2x}{3}} dy \int\limits_{-1+\frac{x}{3}+\frac{y}{2}}^{0} dz, \quad \rho(x,y,z) = 2 + x + 2y.$

Задание 7

Дана замкнутая поверхность S.

1. Найдите объем тела, ограниченного этой поверхностью.

2. Вычислите поток векторного поля $\overline{a}$ через поверхность S (в направлении внешней нормали).

3. Найдите циркуляцию векторного поля $\overline{a}$ вдоль контура L (в направлении, соответствующем возрастанию параметра t).

7.1. $S:\begin{cases} x^2+y^2+z^2=16, \\ x^2+y^2=3z^2 \quad \text{(внутри конуса)}. \end{cases}$ $\quad \bar{a}=2x\bar{i}+3y\bar{j}-z\bar{k}.$

$L-$ линия пересечения поверхностей: $\begin{cases} x^2+y^2=3z^2, \\ z=2. \end{cases}$

7.2. $S:\begin{cases} z=10(x^2+y^2)+1, \\ 20y+z=1. \end{cases}$ $\quad \bar{a}=3x\bar{i}-5y\bar{j}+2z\bar{k}.$

$L-$ линия пересечения поверхностей: $\begin{cases} x^2+(y+1)^2=1, \\ z=1-20y. \end{cases}$

7.3. $S:\begin{cases} z=\sqrt{25-x^2-y^2}, \\ z=1,\ \ x^2+y^2=21 \quad \text{(внутри цилиндра)}. \end{cases}$ $\quad \bar{a}=9x\bar{i}+2y\bar{j}-6z\bar{k}.$

$L-$ линия пересечения поверхностей: $\begin{cases} x^2+y^2=21, \\ z=2. \end{cases}$

7.4. $S:\begin{cases} x^2+y^2=3z, \\ x^2+y^2=1,\ \ z=0. \end{cases}$ $\quad \bar{a}=5x\bar{i}+4y\bar{j}-3z\bar{k}.$

$L-$ линия пересечения поверхностей: $\begin{cases} x^2+y^2=3z, \\ x^2+y^2=1. \end{cases}$

7.5. $S:\begin{cases} z=28(x^2+y^2)+3, \\ 56y-z+3=0. \end{cases}$ $\quad \bar{a}=-3x\bar{i}+6y\bar{j}+z\bar{k}.$

$L-$ линия пересечения поверхностей: $\begin{cases} x^2+(y+1)^2=1, \\ z=56y+3. \end{cases}$

7.6. $S:\begin{cases} z=\sqrt{64-x^2-y^2}, \\ 12z=x^2+y^2. \end{cases}$ $\quad \bar{a}=4x\bar{i}+2y\bar{j}-3z\bar{k}.$

$L-$ линия пересечения поверхностей: $\begin{cases} z=4, \\ 12z=x^2+y^2. \end{cases}$

7.7. $S:\begin{cases} x^2+y^2=4, \\ x^2+y^2=z^2. \end{cases}$ $\quad \bar{a}=12x\bar{i}-10y\bar{j}+3z\bar{k}.$

$L-$ линия пересечения поверхностей: $\begin{cases} x^2+y^2=z^2, \\ z=-2. \end{cases}$

7.8. $S:\begin{cases} z = 22(x^2+y^2)+3, \\ 44y+z=3. \end{cases}$ $\qquad \bar{a} = x\bar{i} - 5y\bar{j} + 7z\bar{k}.$

$L-$ линия пересечения поверхностей: $\begin{cases} x+(y+1)^2 = 1, \\ z = 3-44y. \end{cases}$

7.9. $S:\begin{cases} z = \sqrt{\frac{4}{9} - x^2 - y^2}, \\ z = x^2+y^2. \end{cases}$ $\qquad \bar{a} = -4x\bar{i} - 3y\bar{j} + 10z\bar{k}.$

$L-$ линия пересечения поверхностей: $\begin{cases} z = \frac{1}{3}, \\ z = x^2+y^2. \end{cases}$

7.10. $S:\begin{cases} x^2+y^2+z^2 = 4, \\ x^2+y^2 = 1 \quad \text{(внутри цилиндра)}. \end{cases}$ $\qquad \bar{a} = 6x\bar{i} - 3y\bar{j} + 7z\bar{k}.$

$L-$ линия пересечения поверхностей: $\begin{cases} x^2+y^2+z^2 = 4, \\ z = -\sqrt{3}. \end{cases}$

7.11. $S:\begin{cases} z = 30(x^2+y^2)+1, \\ 60y-z+1=0. \end{cases}$ $\qquad \bar{a} = -5x\bar{i} + 9y\bar{j} + 4z\bar{k}.$

$L-$ линия пересечения поверхностей: $\begin{cases} x^2+(y+1)^2 = 1, \\ z = 60y+1. \end{cases}$

7.12. $S:\begin{cases} z = \sqrt{9-x^2-y^2}, \\ \frac{9}{2}z = x^2+y^2. \end{cases}$ $\qquad \bar{a} = -2x\bar{i} + 9y\bar{j} - z\bar{k}.$

$L-$ линия пересечения поверхностей: $\begin{cases} z = \frac{3}{2}, \\ \frac{9}{2}z = x^2+y^2. \end{cases}$

7.13. $S:\begin{cases} x^2+y^2+z^2 = 10, \\ x^2+y^2 = 9z^2 \quad \text{(внутри конуса)}. \end{cases}$ $\qquad \bar{a} = x\bar{i} - 4y\bar{j} + 6z\bar{k}.$

$L-$ линия пересечения поверхностей: $\begin{cases} x^2+y^2+z^2 = 10, \\ z = -1. \end{cases}$

7.14. $S:\begin{cases} z=26(x^2+y^2)-2, \\ 52x+z+2=0. \end{cases}$ $\qquad \bar{a}=6x\bar{i}-5y\bar{j}+4z\bar{k}.$

$L-$ линия пересечения поверхностей: $\begin{cases} z=-2-52x, \\ (x+1)^2+y^2=1. \end{cases}$

7.15. $S:\begin{cases} z=\sqrt{64-x^2-y^2}, \ \ z=1, \\ x^2+y^2=60 \quad \text{(внутри цилиндра)}. \end{cases}$ $\qquad \bar{a}=-3x\bar{i}+4y\bar{j}+5z\bar{k}.$

$L-$ линия пересечения поверхностей: $\begin{cases} x^2+y^2=60, \\ z=2. \end{cases}$

7.16. $S:\begin{cases} x^2+y^2=1, \\ x^2+y^2=2z, \quad z=0. \end{cases}$ $\qquad \bar{a}=10x\bar{i}-2y\bar{j}-3z\bar{k}.$

$L-$ линия пересечения поверхностей: $\begin{cases} x^2+y^2=1, \\ x^2+y^2=2z. \end{cases}$

7.17. $S:\begin{cases} z=24(x^2+y^2)+1, \\ 48x-z+1=0. \end{cases}$ $\qquad \bar{a}=-2x\bar{i}-y\bar{j}+7z\bar{k}.$

$L-$ линия пересечения поверхностей: $\begin{cases} (x+1)^2+y^2=1, \\ z=1+48x. \end{cases}$

7.18. $S:\begin{cases} z=\sqrt{1-x^2-y^2}, \\ \dfrac{3}{2}z=x^2+y^2. \end{cases}$ $\qquad \bar{a}=x\bar{i}+2y\bar{j}+4z\bar{k}.$

$L-$ линия пересечения поверхностей: $\begin{cases} \dfrac{3}{2}z=x^2+y^2, \\ z=\dfrac{1}{2}. \end{cases}$

7.19. $S:\begin{cases} x^2+y^2=\dfrac{4}{25}z^2, \\ x^2+y^2=\dfrac{2}{5}z. \end{cases}$ $\qquad \bar{a}=2x\bar{i}-7y\bar{j}+8z\bar{k}.$

$L-$ линия пересечения поверхностей: $\begin{cases} x^2+y^2=\dfrac{2}{5}z, \\ z=\dfrac{5}{2}. \end{cases}$

7.20. $S:\begin{cases} z = 2 - 4(x^2 + y^2), \\ 8x - z + 2 = 0. \end{cases}$ $\qquad \bar{a} = 8x\bar{i} - y\bar{j} - 5z\bar{k}.$

$L -$ линия пересечения поверхностей: $\begin{cases} (x+1)^2 + y^2 = 1, \\ z = 8x + 2. \end{cases}$

7.21. $S:\begin{cases} z = \sqrt{16 - x^2 - y^2}, \\ 6z = x^2 + y^2. \end{cases}$ $\qquad \bar{a} = x\bar{i} + 2y\bar{j} + 3z\bar{k}.$

$L -$ линия пересечения поверхностей: $\begin{cases} 6z = x^2 + y^2, \\ z = 2. \end{cases}$

7.22. $S:\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 16, \\ x^2 + y^2 = 4 \quad \text{(внутри цилиндра)}. \end{cases}$ $\qquad \bar{a} = -3x\bar{i} + 4y\bar{j} + z\bar{k}.$

$L -$ линия пересечения поверхностей: $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4, \\ z = -2\sqrt{3}. \end{cases}$

7.23. $S:\begin{cases} z = 32(x^2 + y^2) + 3, \\ 64x + z = 3. \end{cases}$ $\qquad \bar{a} = 5x\bar{i} - 3y\bar{j} + 2z\bar{k}.$

$L -$ линия пересечения поверхностей: $\begin{cases} (x+1)^2 + y^2 = 1, \\ z = 3 - 64x. \end{cases}$

7.24. $S:\begin{cases} z = \sqrt{81 - x^2 - y^2}, \ z = 5, \\ x^2 + y^2 = 45 \quad \text{(внутри цилиндра)}. \end{cases}$ $\qquad \bar{a} = 2x\bar{i} + 4y\bar{j} - 5z\bar{k}.$

$L -$ линия пересечения поверхностей: $\begin{cases} x^2 + y^2 = 45, \\ z = 6. \end{cases}$

7.25. $S:\begin{cases} x^2 + y^2 = \dfrac{z^2}{25}, \\ x^2 + y^2 = \dfrac{z}{5}. \end{cases}$ $\qquad \bar{a} = -2x\bar{i} + 10y\bar{j} - 7z\bar{k}.$

$L -$ линия пересечения поверхностей: $\begin{cases} x^2 + y^2 = \dfrac{z}{5}, \\ z = 5. \end{cases}$

7.26. $S:\begin{cases} z = 8(x^2 + y^2) + 3, \\ 16x - z + 3 = 0. \end{cases}$ $\qquad \bar{a} = 5x\bar{i} + 4y\bar{j} - z\bar{k}.$

$L -$ линия пересечения поверхностей: $\begin{cases} (x-1)^2 + y^2 = 1, \\ z = 16x + 3. \end{cases}$

7.27. $S: \begin{cases} z = \sqrt{36 - x^2 - y^2}, \;\; z = 2, \\ x^2 + y^2 = 27 \quad \text{(внутри цилиндра).} \end{cases}$ $\quad \bar{a} = 10x\bar{i} - 5y\bar{j} - 2z\bar{k}.$

$L -$ линия пересечения поверхностей: $\begin{cases} x^2 + y^2 = 27, \\ z = 3. \end{cases}$

7.28. $S: \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 4, \\ x^2 + y^2 = z^2 \quad \text{(внутри конуса).} \end{cases}$ $\quad \bar{a} = x\bar{i} + 6y\bar{j} - 4z\bar{k}.$

$L -$ линия пересечения поверхностей: $\begin{cases} x^2 + y^2 = z^2, \\ z = \sqrt{2}. \end{cases}$

7.29. $S: \begin{cases} z = 2 - 12(x^2 + y^2), \\ 24x - z + 2 = 0. \end{cases}$ $\quad \bar{a} = 4x\bar{i} - 2y\bar{j} + z\bar{k}.$

$L -$ линия пересечения поверхностей: $\begin{cases} (x+1)^2 + y^2 = 1, \\ z = 24x + 2. \end{cases}$

7.30. $S: \begin{cases} z = \sqrt{49 - x^2 - y^2}, \;\; z = 3, \\ x^2 + y^2 = 33 \quad \text{(внутри цилиндра).} \end{cases}$ $\quad \bar{a} = 6x\bar{i} + y\bar{j} - 3z\bar{k}.$

$L -$ линия пересечения поверхностей: $\begin{cases} x^2 + y^2 = 33, \\ z = 4. \end{cases}$

Задание 8

Пусть l – граница области интегрирования интеграла из задания 1 (б). Найдите массу дуги l, если ее плотность задана функцией $\rho(x, y)$.

8.1. $\rho(x, y) = x^2 + 2y;$
8.2. $\rho(x, y) = 2x + 1;$
8.3. $\rho(x, y) = x + y;$
8.4. $\rho(x, y) = y^2 + 2y;$
8.5. $\rho(x, y) = 3 - x;$
8.6. $\rho(x, y) = 2x - y;$
8.7. $\rho(x, y) = 1 + x + y^2;$
8.8. $\rho(x, y) = x + y + 5;$
8.9. $\rho(x, y) = 2y + 2;$
8.10. $\rho(x, y) = 1 + x - y;$
8.11. $\rho(x, y) = -2 - 2x - y;$
8.12. $\rho(x, y) = y + 3;$
8.13. $\rho(x, y) = x + 1;$
8.14. $\rho(x, y) = 2(x + y);$
8.15. $\rho(x, y) = y + 1;$
8.16. $\rho(x, y) = 3x + 2y + 1;$

8.17. $\rho(x, y) = y^2 + 1;$

8.18. $\rho(x, y) = xy + 1;$

8.19. $\rho(x, y) = 1 - x + y;$

8.20. $\rho(x, y) = 2y - x;$

8.21. $\rho(x, y) = 4x + y + 1;$

8.22. $\rho(x, y) = y - 2x;$

8.23. $\rho(x, y) = 2 - x;$

8.24. $\rho(x, y) = -x - y;$

8.25. $\rho(x, y) = y^2 + x;$

8.26. $\rho(x, y) = 2y + 3x;$

8.27. $\rho(x, y) = 2 - y;$

8.28. $\rho(x, y) = y - 2x;$

8.29. $\rho(x, y) = x^2 + y;$

8.30. $\rho(x, y) = 4x - y + 1.$

Задание 9

Вычислите работу *A* силы $\vec{F} = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$ при перемещении вдоль отрезка прямой *AB*.

9.1. $P(x, y, z) = xy^2$, $Q(x, y, z) = yz^2$, $R(x, y, z) = -x^2 z$,
$A(0; 0; 0)$, $B(-2; 4; 5)$;

9.2. $P(x, y, z) = x$, $Q(x, y, z) = y$, $R(x, y, z) = x - y + 1$,
$A(1; 1; 1)$, $B(2; 3; 4)$;

9.3. $P(x, y, z) = 2xy$, $Q(x, y, z) = -x^2$, $R(x, y, z) = z$,
$A(0; 0; 0)$, $B(2; 1; -1)$;

9.4. $P(x, y, z) = xy$, $Q(x, y, z) = z - 1$, $R(x, y, z) = y + 2$,
$A(0; 1; 0)$, $B(1; 2; 2)$;

9.5. $P(x, y, z) = 2 - x$, $Q(x, y, z) = y + z$, $R(x, y, z) = yz$,
$A(-1; 0; 1)$, $B(0; 3; 2)$;

9.6. $P(x, y, z) = 2z$, $Q(x, y, z) = 3 - x$, $R(x, y, z) = z + y$,
$A(-2; 1; -1)$, $B(-1; 3; 2)$;

9.7. $P(x, y, z) = -y^2$, $Q(x, y, z) = yz$, $R(x, y, z) = x - 2$,
$A(1; 1; 3)$, $B(-1; 2; 0)$;

9.8. $P(x, y, z) = 3y + 6$, $Q(x, y, z) = x^2$, $R(x, y, z) = z + 4$,
$A(-1; -2; -3)$, $B(0; 1; -1)$;

9.9. $P(x, y, z) = yz$, $Q(x, y, z) = z + 2$, $R(x, y, z) = x + 4$,
$A(-3; -1; 2)$, $B(-1; 2; 3)$;

9.10. $P(x, y, z) = -2y$, $Q(x, y, z) = xy$, $R(x, y, z) = z - 3$,
$A(3; 3; 2)$, $B(2; 4; -1)$;

9.11. $P(x, y, z) = y - 1$, $Q(x, y, z) = -xz$, $R(x, y, z) = x^2$,
$A(2; 4; 1)$, $B(4; 3; 0)$;

9.12. $P(x, y, z) = y + 2$, $Q(x, y, z) = -z^2$, $R(x, y, z) = 4 - x$,
$A(-3; 2; -1)$, $B(1; 0; 1)$;

9.13. $P(x,y,z)=5z,\ Q(x,y,z)=2-y,\ R(x,y,z)=x-y,$
$A(2;\,3;\,0),\ B(-2;\,1;\,-1);$

9.14. $P(x,y,z)=z-y,\ Q(x,y,z)=x^2,\ R(x,y,z)=y,$
$A(1;\,-2;\,-2),\ B(0;\,3;\,1);$

9.15. $P(x,y,z)=2z^2,\ Q(x,y,z)=-x,\ R(x,y,z)=4+y,$
$A(-2;\,-2;\,0),\ B(1;\,2;\,2);$

9.16. $P(x,y,z)=1-y,\ Q(x,y,z)=yz,\ R(x,y,z)=x,$
$A(-1;\,-1;\,-2),\ B(2;\,-2;\,0);$

9.17. $P(x,y,z)=xy,\ Q(x,y,z)=x^2+2,\ R(x,y,z)=z,$
$A(0;\,2;\,-2),\ B(1;\,3;\,1);$

9.18. $P(x,y,z)=(1-z)^2,\ Q(x,y,z)=2x,\ R(x,y,z)=y-2,$
$A(4;\,-4;\,1),\ B(3;\,0;\,-1);$

9.19. $P(x,y,z)=-xz,\ Q(x,y,z)=y+1,\ R(x,y,z)=1-z,$
$A(1;\,-1;\,4),\ B(0;\,2;\,3);$

9.20. $P(x,y,z)=1-y^2,\ Q(x,y,z)=z-1,\ R(x,y,z)=2x,$
$A(3;\,-3;\,5),\ B(2;\,0;\,3);$

9.21. $P(x,y,z)=xy,\ Q(x,y,z)=z,\ R(x,y,z)=xz,$
$A(0;\,5;\,0),\ B(1;\,4;\,-1);$

9.22. $P(x,y,z)=1-y,\ Q(x,y,z)=2-z,\ R(x,y,z)=xy,$
$A(6;\,2;\,4),\ B(5;\,0;\,5);$

9.23. $P(x,y,z)=z^2,\ Q(x,y,z)=2x,\ R(x,y,z)=y+1,$
$A(-2;\,-1;\,-4),\ B(1;\,2;\,0);$

9.24. $P(x,y,z)=xz,\ Q(x,y,z)=z^2,\ R(x,y,z)=y+1,$
$A(1;\,-1;\,1),\ B(2;\,2;\,3);$

9.25. $P(x,y,z)=2-z,\ Q(x,y,z)=x+y,\ R(x,y,z)=4-x,$
$A(3;\,-1;\,2),\ B(2;\,2;\,5);$

9.26. $P(x,y,z)=2yz,\ Q(x,y,z)=4xy,\ R(x,y,z)=2-x,$
$A(4;\,0;\,5),\ B(3;\,1;\,4);$

9.27. $P(x,y,z)=yz,\ Q(x,y,z)=z^2,\ R(x,y,z)=x+6,$
$A(-5;\,-2;\,-1),\ B(-4;\,-1;\,2);$

9.28. $P(x,y,z)=x+y,\ Q(x,y,z)=xz,\ R(x,y,z)=z^2,$
$A(-3;\,4;\,0),\ B(-2;\,6;\,2);$

9.29. $P(x,y,z)=1-y,\ Q(x,y,z)=xz,\ R(x,y,z)=2xy,$
$A(1;\,5;\,-2),\ B(0;\,7;\,-1);$

9.30. $P(x,y,z)=yz,\ Q(x,y,z)=z+x+y,\ R(x,y,z)=1-y^2,$
$A(-2;\,0;\,5),\ B(-1;\,1;\,3).$

Типовой расчет №2

Ряды

Задание 1

Найдите сумму данного ряда (если он сходится) либо докажите расходимость этого ряда.

1.1. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{n^2-1}{n^2+1}\right)^{3n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\operatorname{arctg}^n\dfrac{\pi}{6}$;

1.2. а) $\dfrac{1}{1\cdot 3}+\dfrac{1}{3\cdot 5}+\ldots+\dfrac{1}{(2n+1)(2n+3)}+\ldots$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\left(\dfrac{n-1}{n+9}\right)^{n}$;

1.3. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\cos\dfrac{n^2-1}{n^3-3n+5}$; б) $-\dfrac{1}{\pi}+\dfrac{1}{\pi^2}-\dfrac{1}{\pi^3}+\ldots$;

1.4. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\arccos^n\dfrac{\sqrt{3}}{2}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{2n^2-1}{2n^2+4}\right)^{3n-1}$;

1.5. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\dfrac{2n-3}{4+5n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2n^2-3n+1}{5-7n+10n^2}$;

1.6. а) $\dfrac{1}{2\cdot 3}+\dfrac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\dfrac{1}{(n+2)(n+3)}+\ldots$; б) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\left(\dfrac{n^3+1}{4n^2-3}\right)^{2n}$;

1.7. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{5^n+5}{2^n-1}$; б) $\arccos\dfrac{\sqrt{2}}{2}-\left(\arccos\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(\arccos\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^3-\ldots$;

1.8. а) $\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{16}-\dfrac{1}{25}+\dfrac{1}{64}-\dfrac{1}{125}+\ldots$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3n^2-2}{(3n+1)^2}$;

1.9. а) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{5}{\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)^n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(2n+1)!}{(2n-1)!}$;

1.10. а) $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\left(\arcsin\dfrac{1}{2}\right)^{n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(n+9)(n+10)}$;

1.11. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{7^n+3^n}{21^n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\operatorname{arctg}\dfrac{(n+1)^2}{(3n-1)}$;

1.12. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{7}{n^2+13n+42}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n\cdot\ln\dfrac{n+1}{n-1}$;

1.13. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\pi^{n}-1}{4^{n}}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|\cos n^{2}\right|$;

1.14. а) $\sum\limits_{n=5}^{\infty}\frac{1}{1-4n^{2}}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\left(1-\cos\frac{1}{3^{n}}\right)$;

1.15. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^{2}}{3n^{2}-2n+1}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{4^{n}-3^{n}}{12^{n}}$;

1.16. а) $10^{2}-10^{3}+10^{4}-\ldots$; б) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+5)(2n+7)}$;

1.17. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\log_{3}2)^{n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+3}{n+6}\right)^{n^{2}}$;

1.18. а) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{3}+2}\right)^{n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\operatorname{arcctg}\frac{1}{2}+\operatorname{arctg}2\right)^{n}$;

1.19. а) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(5^{n+1}-5^{1-n}\right)$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{15}{(3n+2)(3n+5)}$;

1.20. а) $-\frac{1}{7}+\frac{1}{7}-\frac{1}{7}+\frac{1}{7}-\ldots$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\lg 15)^{-3n}$;

1.21. а) $\frac{2}{\left(\sqrt{3}-2\right)^{2}}+\frac{2}{\left(\sqrt{3}-2\right)^{3}}+\frac{2}{\left(\sqrt{3}-2\right)^{4}}+\ldots$; б) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{4n^{2}-1}$;

1.22. а) $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\frac{1+\sqrt{5}}{3^{n}}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{4n-1}$;

1.23. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n^{2}-3}{2n^{2}+1}\right)^{n^{2}}$; б) $\left(\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{2}-\left(\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{3}+\left(\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{4}-\ldots$;

1.24. а) $\frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 7}+\ldots+\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}+\ldots$; б) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}(-1)^{n}\frac{n+3}{n+5}$;

1.25. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{4}{4n^{2}+4n-3}$; б) $-\frac{1}{e}+\frac{1}{e^{2}}-\frac{1}{e^{3}}+\ldots$;

1.26. а) $\frac{1}{27}-\frac{1}{81}+\frac{1}{243}-\ldots$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\arcsin\frac{1}{2}+\arccos\frac{1}{2}\right)^{n}$;

1.27. а) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{2^{n}+2^{3n}}{6^{n}}$; б) $\frac{1}{20}-\frac{1}{20}+\frac{1}{20}-\frac{1}{20}+\ldots$;

1.28. а) $\sum\limits_{n=3}^{\infty}(\ln 3)^{2n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{6}{4n^{2}-9}$;

1.29. а) $-1{,}1+(1{,}1)^2-(1{,}1)^3+\ldots;$ б) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{n^2+n-2};$

1.30. а) $2-2+2-2+\ldots;$ б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^n-5^n}{10^n}.$

Задание 2

Исследуйте сходимость числового ряда, применив для этого подходящий признак сходимости.

2.1. а) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{\ln n}{n};$ б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n\cdot\sin^2\left(\dfrac{\pi}{n^2\cdot\sqrt{n}}\right);$ в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{3n+1}{n^2+8}\right)^{2n};$

2.2. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^2\cdot\arcsin^2\dfrac{1}{n^2};$ б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n!}{(n+1)^n};$ в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{4n^2+3n-1}{6n^2-n+2}\right)^n;$

2.3. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{8^n}{n!};$ б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(n+1)\ln^2(n+1)};$ в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n\cdot\left(\sqrt{1+\dfrac{1}{n^2}}-1\right);$

2.4. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\operatorname{arctg}\dfrac{\pi}{n^3};$ б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{2n+1}{9n-4}\right)^{n^2};$ в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3^n}{(2n+2)!!};$

2.5. а) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{(n+1)!}{4^{n+1}};$ б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\ln n}{\sqrt{n}};$ в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{n+4}{3n^2-2}\right)^{4n};$

2.6. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{5^n};$ б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n+1}\cdot\left(e^{\frac{n}{n^2+1}}-1\right);$ в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(2n)!}{7^{3n}};$

2.7. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}\cdot\sin\dfrac{n}{n^2+1};$ б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{3n-2}{8n+4}\right)^{n^2};$ в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2n+1)\ln(n+1)};$

2.8. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n\ln(2n)};$ б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n\cdot\operatorname{arctg}\dfrac{3n+4}{n^3+8};$ в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(n+1)!(3n)!}{(2n+1)!};$

2.9. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n!}{n+2};$ б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{n+2}{10n}\right)^{2n};$ в) $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\dfrac{\ln(n-2)}{(n-2)^2};$

2.10. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{2n}{4n+3}\right)^n;$ б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(n^5+1)\cdot5^{2n}}{(n+3)!};$ в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(4n-1)\cdot\left(1-\cos\dfrac{5n}{n^2+4}\right);$

2.11. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{4^n}{(4n)!};$ б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n\sqrt{n}}\cdot\arcsin\dfrac{n+4}{n^3+5};$ в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2n-1)\ln(2n+1)};$

2.12. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)\ln^2(2n+1)}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{7n-1}{n^3}\cdot\ln\left(\frac{n^2+1}{n^2}\right)$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+4}{n^2+3n-1}\right)^{n^2}$;

2.13. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt[3]{n}\cdot\operatorname{arctg}\frac{1}{n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^{2n}}{(\ln n)^n}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n+2)!!}$;

2.14. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{3^n(n+1)}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n\cdot n!}{(3n+1)!}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n-1)\ln(2n)}$;

2.15. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n-1)\ln^3(3n-1)}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2}\cdot 5^n$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+4}{n+1}\operatorname{tg}\frac{\pi}{n^3}$;

2.16. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{4n}\right)^{3n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3n\sqrt{\ln(n+1)}}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n\sqrt{n}\cdot\left(e^{\frac{n+2}{n^5+1}}-1\right)$;

2.17. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}tg\,\frac{n-1}{n^3-1}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot4\cdot7\cdot\ldots\cdot(3n-2)}{3^{n+1}}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{5^{n+5}}{(n+2)^n}$;

2.18. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+2}{3n+3}\right)^{n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(\ln(n+1))}{(n+1)\ln(n+1)}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n+2)!}{n^3\cdot 2^{2n+1}}$;

2.19. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{4^n}{(n+3)!}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+4}{7n-3}\right)^{3n}\cdot(n^2+1)^5$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\pi}{n^2+1}\operatorname{arctg}\frac{n^2+1}{n^3}$;

2.20. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\frac{\pi}{5n+1}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n^2}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(\ln n)^n}{(n^2+3n+1)^{2n}}$;

2.21. а) $\sum\limits_{n=4}^{\infty}\frac{1}{n\ln^2\left(\frac{n}{2}\right)}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3n+4}{n^2+5}\cdot\sin\frac{4n-2}{n^2}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+4n+8}{(3n-1)!}$;

2.22. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{7^n(n+6)}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{((2n-1)!)^2}$; в) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{n+1}{(n^2-1)\cdot\sqrt[3]{\ln^2 n}}$;

2.23. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n\cdot(n+2)!}{n^5}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\cdot\left(\sqrt{1+\frac{2n+1}{n^3+1}}-1\right)$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\operatorname{arctg}^{3n}\frac{\pi}{\sqrt{n}}$;

2.24. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\operatorname{arctg}^2\frac{1}{n+1}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4n^2+4n-8}{7n^2+7}\right)^{2n}$; в) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{n^2+3}{(n^3+1)\cdot\sqrt[4]{\ln n}}$;

2.25. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+1}{4n^2+1}\right)^{2n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{5\cdot8\cdot11\cdot\ldots\cdot(3n+2)}{7\cdot13\cdot19\cdot\ldots\cdot(6n+1)}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n^2}\cdot\left(1-\cos\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$;

2.26. а) $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\frac{1}{(n-1)\sqrt{\ln(n-1)}}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)^4}{(\ln(n+1))^n}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{5\cdot 9\cdot 13\cdot\ldots\cdot(4n+1)}{3\cdot 8\cdot 13\cdot\ldots\cdot(5n-2)}$;

2.27. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{4n!}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{\sqrt[3]{n^2}}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{\sqrt[6]{n}}$;

2.28. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(2n+3)!}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{4}{\sqrt{n+2}}\cdot\ln\left(\frac{5n+6}{5n+1}\right)$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^{n-2}}{(n+4)^{2n}}$;

2.29. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\arcsin\frac{1}{3^n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{(3n^2+4)\ln(n+2)}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 6\cdot 11\cdot\ldots\cdot(5n-4)}{(n+1)!}$;

2.30. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{2n}\right)^{4n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\left(\arcsin\frac{\pi}{\sqrt[3]{n+1}}\right)^3$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\ln\sqrt{n}}{n^2}$

Задание 3

Исследуйте сходимость знакочередующегося ряда.

3.1. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{\left(n^2+1\right)\ln n}$;

3.2. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\frac{n}{3}\ln^2(n+9)}$;

3.3. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n\sqrt{\ln(3n+1)}}$;

3.4. $\sum\limits_{n=5}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(n-2)\ln(n-3)}$;

3.5. $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n+1)}{\left(\frac{3n^2}{2}+2\right)\ln\left(\frac{n}{2}\right)}$;

3.6. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n n^2}{\left(n^3+1\right)\ln n}$;

3.7. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n-3)\ln(3n+1)}$;

3.8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(3n+4)\ln^3(5n+2)}$;

3.9. $\sum\limits_{n=5}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(n-2)\sqrt{\ln(n-3)}}$;

3.10. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n(3n-1)}{\left(n^2-2\right)\ln(2n)}$;

3.11. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+3)\ln^2\left(n\sqrt{7}+2\right)}$;

3.12. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n\cdot\ln^7(6n+1)}$;

3.13. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\left(n\sqrt{3}+1\right)\ln^4\left(n\sqrt{5}+1\right)}$;

3.14. $\sum\limits_{n=5}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n-2)\sqrt[3]{\ln(n-2)}}$;

3.15. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}n^4}{\left(n^5-1\right)\ln n^2}$;

3.16. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}(n+1)^2}{\left(2n^2+3\right)\ln n^n}$;

3.17. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{(7n+1)\sqrt[5]{\ln^2(n-2)}}$;

3.18. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1} n^2}{(5n+1)^3 \ln \sqrt[3]{n}}$;

3.19. $\sum\limits_{n=3}^{\infty} \dfrac{(-1)^n (5n+1)}{(n^2-7)\ln\left(\dfrac{n}{2}\right)}$;

3.20. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{2n\sqrt[5]{\ln(3n-1)}}$;

3.21. $\sum\limits_{n=3}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{n\ln(n-1)^{10}}$;

3.22. $\sum\limits_{n=5}^{\infty} \dfrac{(-1)^n (n^2-1)}{n^3\sqrt{\ln(5n-3)}}$;

3.23. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{(-1)^n (5n-11)}{(3n^2+1)\ln \sqrt[13]{n}}$;

3.24. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1} (n+1)^2}{(n^3+1)\ln n}$;

3.25. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{(3+2n)\ln^{1/6}(n+1)}$;

3.26. $\sum\limits_{n=3}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{(5-3n)\ln^7(4n-7)}$;

3.27. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}\sqrt{n}}{2n\sqrt{\ln(3n-1)^n}}$;

3.28. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{\left(\dfrac{n}{3}-1\right)\sqrt{\ln(n+7)}}$;

3.29. $\sum\limits_{n=4}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1} (2n-1)^3}{(5n^2+10)^2 \ln(n-2)}$;

3.30. $\sum\limits_{n=5}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{(n-3)\sqrt[7]{\ln^2(n-3)}}$.

Задание 4

Найдите интервал и область сходимости степенного ряда. Укажите, какими свойствами обладает сумма этого ряда в интервале сходимости.

4.1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n \cdot n\sqrt{n}}{(2+n)\cdot 3^n}(x-1)^n$;

4.2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(x+2)^n}{(n+1)!}$;

4.3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(x-3)^{2n}}{2n^2+4n+2}$;

4.4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{4n-1}{(3n^2+2)\cdot 6^n}(x+1)^{2n+1}$;

4.5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n \cdot (x+3)^n}{(n+3)\cdot 5^n}$;

4.6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{4^n}{n^2+1}(x-4)^{2n-1}$;

4.7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n \cdot \sqrt{n}}{4n+7}(x-2)^{3n}$;

4.8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(x+5)^{2n}}{(n+5)\cdot 7^{2n+3}}$;

4.9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n \cdot n^4}{(n\sqrt{n}+6)^2 \cdot 9^n}(x+6)^{2n+1}$;

4.10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(2n+8)}{n^2-n+1}(x+4)^n$;

4.11. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(n+5)}{(n^2-4n+6)\cdot 9^n}(x-6)^n$;

4.12. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^4+3n^2+1}{(n+4)^2}(x-5)^{2n-1}$;

4.13. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(5n^2-4)\cdot 8^n}(x-8)^n$;

4.14. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5n^2-1}{n^3+2}(x+7)^{2n-1}$;

4.15. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-7)^n}{5^n\cdot n\ln n}$;

4.16. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+3}{n^5+8n+1}(x+9)^n$;

4.17. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\sqrt{n}+4}(x-9)^n$;

4.18. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(3\sqrt{n}-2)\cdot 7^n}(x+8)^{2n}$;

4.19. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+1)^{3n}}{4^n}$;

4.20. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n^3+4}(x-2)^{2n+1}$;

4.21. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot(x-4)^{3n}}{3^n+6n}$;

4.22. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+5)^{2n}}{(n+5)!}$;

4.23. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot(3n+7)}{n^2+3}(x-3)^n$;

4.24. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{16^{n+1}}{n^4-7n+1}(x+2)^{2n-1}$;

4.25. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot(x-1)^n}{(\sqrt{n}+2)^2}$;

4.26. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\sqrt{n}}{(n^2+8)\cdot 2^n}(x-5)^n$;

4.27. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+5}{n^2+1}(x-7)^n$;

4.28. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3+n}{8^n}(x+6)^n$;

4.29. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+3)^{2n+1}}{2^{n+1}}$;

4.30. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+4)^n}{(n+2)!}$.

Задание 5

Пользуясь признаком Вейерштрасса, докажите равномерную сходимость данного ряда на указанном промежутке. Обоснуйте, обладает ли сумма ряда свойством непрерывности на этом промежутке.

5.1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{x^{2n}+n}$, $x\in\mathbf{R}$;

5.2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(x+n)^2}$, $x\in[0;+\infty)$;

5.3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos^2(2nx)}{5^{n+2}}$, $x\in\mathbf{R}$;

5.4. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)^4\cdot(3x)^{2n}}{n^2+n-8}$, $x\in\left[-\frac{1}{5};\frac{1}{5}\right]$;

5.5. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{(x-5)^{3n}}$, $x\in(-\infty;-3]$;

5.6. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{x+2^n}$, $x\in[0;+\infty)$;

5.7. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{(x+1)^{2n}}$, $x\in[1;+\infty)$;

5.8. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n+3}}{(x^2+n^2)^2}$, $x\in\mathbf{R}$;

5.9. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{arctg}(nx)}{n\sqrt{n}}$, $x\in\mathbf{R}$;

5.10. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{n\cdot\ln^2 n}$, $x\in[-1;1]$;

5.11. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{x^2+4^n}$, $x\in[0;+\infty)$;

5.12. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+2)^n}{4^{2n+1}}$, $x\in[-12;12]$;

5.13. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{x^3+n}{n^2}$, $x\in[1;4]$;

5.14. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+5)^n}{7^n}$, $x\in[-11;-4]$;

5.15. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n\cdot\cos^2(\pi nx)}{n^2+1}$, $x\in[-1;1]$;

5.16. $\sum_{n=1}^{\infty}(x-7)^n\operatorname{arctg}\frac{1}{4^n}$, $x\in[4;10]$;

5.17. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{3n}}{2n+1}$, $x\in\left[-\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right]$;

5.18. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot x^n}{n^2\cdot 6^n}$, $x\in[-6;6]$;

5.19. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\arcsin(nx^2)}{n^3}$, $x\in\mathbf{R}$;

5.20. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\sin(nx)}{3^{n+1}}$, $x\in\mathbf{R}$;

5.21. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{x^4+n^4}$, $x\in\mathbf{R}$;

5.22. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{(x+4)^{2n}}$, $x\in[-1;+\infty)$;

5.23. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{(n+2)\cdot\ln^4(n+2)}$, $x\in[-1;1]$;

5.24. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+3)^3}{n^4+7}\cdot(x-2)^n$, $x\in\left[1;\frac{5}{2}\right]$;

5.25. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-4)^n}{3^n}$, $x\in[2;5]$;

5.26. $\sum_{n=1}^{\infty}x^{n-1}$, $x\in\left[-\frac{1}{4};\frac{1}{4}\right]$;

5.27. $\sum_{n=1}^{\infty}x^n\cdot\arcsin\frac{n^2}{3^{2n}}$, $x\in[-8;8]$;

5.28. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+2)^2}{n^3+4}\cdot x^n$, $x\in\left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]$;

5.29. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^3(nx)}{(n+1)!}$, $x\in\mathbf{R}$;

5.30. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\cdot(x-4)^n}$, $x\in[5;+\infty)$.

Задание 6

Найдите область сходимости и сумму степенного ряда.

6.1. а) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n+5}$;

б) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot 3n^2\cdot x^n$;

6.2. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n}$;

б) $\sum_{n=2}^{\infty}(n^2+n-2)\cdot x^{n-2}$;

6.3. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n+2}}{2n+1}$; б) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{9n^2+6n+1}{3^n}\cdot x^{3n}$;

6.4. а) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^{n+4}}{n-1}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+n}{3^n}\cdot x^{n}$;

6.5. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{2n+1}$; б) $\sum_{n=2}^{\infty}(n^2-n)\cdot x^{n-1}$;

6.6. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n+3}}{4n^2+8n+3}$; б) $\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)\cdot x^{2n}$;

6.7. а) $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{x^{n}}{n-2}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}(16n^2-1)\cdot x^{4n-2}$;

6.8. а) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^{n}}{n-1}$; б) $\sum_{n=0}^{\infty}(n^2+7n+12)\cdot x^{n+2}$;

6.9. а) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+4}$; б) $\sum_{n=0}^{\infty}(9n^2+9n+2)\cdot x^{3n}$;

6.10. а) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{4n^2+4n+1}$; б) $\sum_{n=3}^{\infty}(n-2)\cdot x^{2n-6}$;

6.11. а) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^{n-2}}{n-1}$; б) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{49n^2+14n+1}{7^n}\cdot x^{7n}$;

6.12. а) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n-2}$; б) $\sum_{n=3}^{\infty}(n^2-2n)\cdot x^{n-2}$;

6.13.а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+3}}{n}$; б) $\sum_{n=2}^{\infty}(4n^2-6n+2)\cdot x^{2n}$;

6.14. а) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot x^{n+3}}{n^2+4n+3}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}(n+3)\cdot x^{2n-2}$;

6.15. а) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^{n-2}}{n+3}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}(4n^2-2n-2)\cdot x^{2n-1}$;

6.16. а) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n}}{2^n(n+1)}$; б) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{36n^2+12n+1}{6^n}\cdot x^{6n}$;

6.17. а) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+3}}{n+1}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}(9n^2-9n+2)\cdot x^{3n}$;

6.18. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n-1}$; б) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot(n^2+3n+2)\cdot x^{n}$;

6.19. а) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+2}}{n^2+7n+12}$; б) $\sum_{n=2}^{\infty}(n-1)\cdot x^{3n-3}$;

6.20. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-2}}{n\cdot 4^{n-1}}$; б) $\sum_{n=0}^{\infty}(n^2+5n+4)\cdot x^{n}$;

6.21. а) $\sum_{n=4}^{\infty}\frac{x^{n}}{n-3}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}(4n^2-1)\cdot x^{2n-1}$;

6.22. а) $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{x^{n}}{n-2}$; б) $\sum_{n=0}^{\infty}(4n^2+8n+3)\cdot x^{2n}$;

6.23. а) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^{n-2}}{n^2+n-2}$; б) $\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)\cdot x^{n+5}$;

6.24. а) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{18x^{3n+3}}{n+1}$; б) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{25n^2+10n+1}{5^n}\cdot x^{5n}$;

6.25. а) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n^2-n}$; б) $\sum_{n=0}^{\infty}(n+6)\cdot x^{6n}$;

6.26. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{2n+1}$; б) $\sum_{n=2}^{\infty}(n^2+2n-3)\cdot x^{n-2}$;

6.27. а) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot x^{n}}{n+3}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{7^{n+1}}\cdot x^{n-1}$;

6.28. а) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+6}}{n+3}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}(9n^2-1)\cdot x^{3n}$;

6.29. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{4^n\cdot n}$; б) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot(4n^2+6n+2)\cdot x^{2n}$;

6.30. а) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{3n}}{n+2}$; б) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{16n^2+8n+1}{4^n}\cdot x^{4n}$.

Задание 7

Вычислите интеграл, разложив подынтегральную функцию в ряд Маклорена. Укажите количество членов числового ряда, полученного после интегрирования степенного ряда, необходимое для достижения точности вычислений с погрешностью $\varepsilon=10^{-5}$.

7.1. $\int_0^{1/4}\ln(1+2x)dx$; 7.2. $\int_0^{1/2}\frac{dx}{1+x^4}$;

7.3. $\int\limits_0^{1/2} e^{-x^2}\,dx;$

7.4. $\int\limits_0^{\pi/4} \sin\left(x^2\right)dx;$

7.5. $\int\limits_0^1 \frac{\ln(1+x)^2}{x}\,dx;$

7.6. $\int\limits_0^1 e^{-x^3/4}\,dx;$

7.7. $\int\limits_0^1 \frac{\sin x}{x}\,dx;$

7.8. $\int\limits_0^{0,1} \cos\left(100x^2\right)dx;$

7.9. $\int\limits_0^{0,2} \frac{e^{-3x^2}-1}{x}\,dx;$

7.10. $\int\limits_0^{0,4} \sin\left(\frac{5x^2}{2}\right)dx;$

7.11. $\int\limits_0^{0,1} \frac{1-e^{-2x}}{x}\,dx;$

7.12. $\int\limits_0^{2,5} \frac{dx}{\sqrt[3]{125+x^3}};$

7.13. $\int\limits_0^{1/2} \frac{\cos x-1}{x}\,dx;$

7.14. $\int\limits_0^{0,1} \frac{\operatorname{arctg} x}{x}\,dx;$

7.15. $\int\limits_0^{0,5} \frac{\sin x^2}{x}\,dx;$

7.16. $\int\limits_0^{1/3} \frac{dx}{1+x^6};$

7.17. $\int\limits_0^{0,5} \frac{e^{5x}-1}{x}\,dx;$

7.18. $\int\limits_0^1 \frac{\sin(x^3)}{x}\,dx;$

7.19. $\int\limits_0^{0,5} \frac{\cos\left(\frac{x^2}{3}\right)-1}{x^2}\,dx;$

7.20. $\int\limits_0^{0,2} e^{-3x^2/4}\,dx;$

7.21. $\int\limits_0^{0,5} \cos\left(10x^2\right)dx;$

7.22. $\int\limits_0^2 \frac{dx}{\sqrt[4]{256+x^4}};$

7.23. $\int\limits_0^1 \sin\left(x^3\right)dx;$

7.24. $\int\limits_0^1 \operatorname{arctg}\left(x^3\right)dx;$

7.25. $\int\limits_0^{0,5} \frac{\operatorname{arctg} x^2}{x}\,dx;$

7.26. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt[4]{16+x^4}};$

7.27. $\int\limits_0^{1/4} \frac{\sin(x^2)}{x^2}\,dx;$

7.28. $\int\limits_0^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{64+x^3}};$

7.29. $\int\limits_0^{0,2} \frac{1-\cos\left(25x^2\right)}{x}\,dx;$

7.30. $\int\limits_0^1 \sin\left(\frac{x^3}{10}\right)dx.$

Задание 8

Вычислите предел, используя разложение элементарных функций в ряд Маклорена.

8.1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\operatorname{ch}x+\sin x}{e^{-x^2}-1+x^2}$;

8.2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 2x-1+2x^2}{3x-\sin 3x}$;

8.3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+\arcsin(-x)}{-x^2\cdot\operatorname{arctg}x+x^3}$;

8.4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x+\ln(1+x^2)-1}{-e^{x^3}+1+\arcsin(x^3)}$;

8.5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\cdot\sin x+\arcsin x-x}{\operatorname{sh}3x}$;

8.6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\arcsin x-x^3}{-1+e^{-x}+x}$;

8.7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-\operatorname{sh}(x^2)}{\sin x-x}$;

8.8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x-x}{x\cdot\ln(1-x^2)}$;

8.9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-\ln(1+x^2)}{x\cdot\ln(1+2x)-2\operatorname{arctg}(x^2)}$;

8.10. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 3x+\dfrac{9x^2}{2}}{-\operatorname{arctg}x+x}$;

8.11. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-\arcsin x+\sin x}{\operatorname{arctg}(-x^2)+x^2}$;

8.12. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sh}5x-\sin 5x}{x^3+\ln(1-x^3)}$;

8.13. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-1-x^2}{\operatorname{arctg}(x^2)-x\cdot\sin x}$;

8.14. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg}x-e^x+1}{x^2-\arcsin(x^2)}$;

8.15. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\operatorname{ch}(x^2)-\dfrac{x^4}{2}}{\ln(1-x^4)-1+x^4}$;

8.16. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 2x-1-\sin 2x}{x+\sin(-x)}$;

8.17. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x^2-\sin(x^2)}{-x\cdot\arcsin x+\sin(x^2)}$;

8.18. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sh}x-\operatorname{ch}x+1}{x^2-\ln(1+x^2)}$;

8.19. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg}3x-\arcsin 3x}{x^2-\sin(x^2)}$;

8.20. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cdot\sin 5x+\operatorname{arctg}(-5x^2)}{x-\arcsin x}$;

8.21. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sh}(x^4)-x^4}{\operatorname{ch}2x-1-2x^2}$;

8.22. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-x)-1+x}{x^3\cdot(\sin x-x)}$;

8.23. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3-\sin(x^3)}{\operatorname{arctg}x-\arcsin x}$;

8.24. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sh}(x^5)-x^5}{x^3-\sin(x^3)}$;

8.25. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 5x-\sin 5x}{-5x+\ln(1+5x)}$;

8.26. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\operatorname{arctg}x-\arcsin 2x}{x^5-\arcsin(x^5)}$;

8.27. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{7x-\operatorname{arctg}7x}{\arcsin 7x-7x}$;

8.28. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{-x}+e^{x}-2}{\operatorname{ch}6x-1-\sin 18x}$;

8.29. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 8x-1-\operatorname{arctg}32x}{x^2-\operatorname{arctg}\left(x^2\right)+\dfrac{x^6}{3}}$;

8.30. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^4-2\sin\left(x^4\right)+\arcsin\left(x^4\right)}{\operatorname{arctg}x-\sin x}$.

Задание 9

Представьте число a в виде суммы сходящегося числового ряда. Какова будет точность вычисления данного числа, если взять первые четыре члена этого ряда?

9.1. $\dfrac{1}{\sqrt[3]{e}}$;

9.2. $\sin\dfrac{1}{2}$;

9.3. $\ln 2$;

9.4. $\sqrt[5]{250}$;

9.5. $\lg e$;

9.6. $\sqrt[5]{1{,}02}$;

9.7. $\operatorname{ch}2$;

9.8. π;

9.9. $\sin\dfrac{\pi}{360}$;

9.10. $\operatorname{arctg}\dfrac{1}{2}$;

9.11. $\dfrac{1}{\sqrt[3]{30}}$;

9.12. e^2;

9.13. $\ln 3$;

9.14. $\sqrt[3]{80}$;

9.15. $\sqrt[4]{90}$;

9.16. $\sin 1^{\circ}$;

9.17. $\sqrt{e}$;

9.18. $\cos 2^{\circ}$;

9.19. $\sqrt[3]{8{,}36}$;

9.20. $\arcsin\dfrac{1}{3}$;

9.21. $\sqrt{1{,}3}$;

9.22. $\lg 7$;

9.23. $\dfrac{1}{e^2}$;

9.24. $136^{-1/7}$;

9.25. $\sqrt[5]{34}$;

9.26. e^{-1};

9.27. $\sqrt[6]{738}$;

9.28. $\ln 10$;

9.29. $\sqrt[7]{1{,}03}$;

9.30. $\cos 10^{\circ}$.

Типовой расчет №3

Элементы теории функций комплексной переменной

Задание 1

Постройте линии, заданные уравнениями (а–в), и область D, заданную системой неравенств (г). Проверьте, принадлежит ли данная точка z_0 области D.

1.1. а) $|z-1-i|=1$; б) $\operatorname{Re} z = 1{,}5$; в) $\arg z = \dfrac{\pi}{3}$;

г) $|z-1-i|\le 1,\quad \operatorname{Re} z<1{,}5,\quad 0<\arg z\le \dfrac{\pi}{3};\quad z_0=i.$

1.2. а) $|z-2i|=2$; б) $\operatorname{Im} z=3$; в) $\operatorname{Re} z=1$;

г) $|z-2i|\le 2,\quad \operatorname{Im} z<3,\quad \operatorname{Re} z\ge 1;\quad z_0=2.$

1.3. а) $|z+1|=2$; б) $\arg(z+1)=\dfrac{\pi}{4}$; в) $\operatorname{Im} z=1$;

г) $|z+1|\ge 2,\quad 0<\arg(z+1)<\dfrac{\pi}{4},\quad \operatorname{Im} z\ge 1,\quad \operatorname{Re} z\ge 1;\quad z_0=1.$

1.4. а) $|z-1+i|=1$; б) $\operatorname{Im}\bar z=1$; в) $\operatorname{Re}\bar z=1$;

г) $|z-1+i|>1,\quad \operatorname{Im}\bar z\ge 1,\quad \operatorname{Re}\bar z\ge 1;\quad z_0=1+i.$

1.5. а) $|z+i|=1$; б) $|z+2i|=2$; в) $\arg z=-\dfrac{\pi}{4}$;

г) $|z+i|\ge 1,\quad |z+2i|\le 2,\quad -\dfrac{3\pi}{4}\le \arg z<-\dfrac{\pi}{4};\quad z_0=-2-i.$

1.6. а) $|z+1+i|=\sqrt{2}$; б) $\operatorname{Im}(z+1)=-1$; в) $\arg z=-\dfrac{3\pi}{4}$;

г) $|z+1+i|\le\sqrt{2},\quad \operatorname{Im}(z+1)\ge -1,\quad -\dfrac{3\pi}{4}\le \arg z<0;\quad z_0=-1-i.$

1.7. а) $|z-1|=1$; б) $|z-2|=2$; в) $|\arg z|=\dfrac{\pi}{6}$;

г) $|z-1|>1,\quad |z-2|<2,\quad |\arg z|\le\dfrac{\pi}{6};\quad z_0=3.$

1.8. а) $|z-2+2i|=2$; б) $\operatorname{Re} z=2$; в) $\operatorname{Im} z=-3$;

г) $|z-2+2i|<2,\quad \operatorname{Re} z<2,\quad \operatorname{Im} z\ge -3;\quad z_0=1-i.$

1.9. а) $|z-i|=3$; б) $|\operatorname{Re} z|=1$; в) $\operatorname{Im} z=0$;

г) $|z-i|<3,\quad |\operatorname{Re} z|\le 1,\quad \operatorname{Im} z>0;\quad z_0=2i.$

1.10. а) $|z+1|=1$; б) $|z-i|=1$; в) $\arg z=\dfrac{3\pi}{4}$;

г) $|z+1|\le 1$, $|z-i|<1$, $0<\arg z\le\dfrac{3\pi}{4}$; $z_0=-0{,}5+0{,}5i$.

1.11. а) $|z+1-i|=1$; б) $\operatorname{Re} z=-1{,}5$; в) $\arg z=\dfrac{2\pi}{3}$;

г) $|z+1-i|<1$; $\operatorname{Re} z\ge -1{,}5$, $\arg z\in\left(\dfrac{2}{3}\pi;\pi\right]$; $z_0=2i$.

1.12. а) $|z+2i|=2$; б) $\operatorname{Im} z=-3$; в) $\operatorname{Re} z=-1$;

г) $|z+2i|\le 2$, $\operatorname{Im} z\ge -3$, $\operatorname{Re} z<-1$; $z_0=-2-2i$.

1.13. а) $|z-1|=2$; б) $\arg(z+1)=-\dfrac{\pi}{4}$; в) $\operatorname{Im} z=-1$;

г) $|z-1|\le 2$, $\arg(z+1)\in\left(-\dfrac{\pi}{4};0\right]$, $\operatorname{Im} z\ge -1$; $z_0=i$.

1.14. а) $|z+1-i|=1$; б) $\operatorname{Im}\bar z=-1$; в) $\operatorname{Re} z=-1$;

г) $|z+1-i|\le 1$, $\operatorname{Im}\bar z\ge -1$, $\operatorname{Re} z\ge -1$; $z_0=-0{,}5+0{,}5i$.

1.15. а) $|z-i|=1$; б) $|z-2i|=2$; в) $\arg z=\dfrac{\pi}{4}$;

г) $|z-i|\ge 1$, $|z-2i|\le 2$, $\arg z\in\left[\dfrac{\pi}{4};\dfrac{\pi}{2}\right)$; $z_0=3i$.

1.16. а) $|z-1-i|=\sqrt{2}$; б) $\operatorname{Im}(z-1)=1$; в) $\arg z=\dfrac{\pi}{2}$;

г) $|z-1-i|\le\sqrt{2}$, $\operatorname{Im}(z-1)\ge 1$, $\dfrac{\pi}{4}<\arg z\le\dfrac{\pi}{2}$; $z_0=2+2i$.

1.17. а) $|z+1|=1$; б) $|z+2|=2$; в) $\arg z=\dfrac{3\pi}{4}$;

г) $|z+1|\ge 1$, $|z+2|\le 2$, $\arg z\in\left(\dfrac{\pi}{2};\dfrac{3\pi}{4}\right]$; $z_0=-2+2i$.

1.18. а) $|z+2-2i|=2$; б) $\operatorname{Re} z=-2$; в) $\operatorname{Im} z=3$;

г) $|z+2-2i|<2$, $\operatorname{Re} z\ge -2$, $\operatorname{Im} z\le 3$; $z_0=-1+i$.

1.19. а) $|z+i|=3$; б) $\operatorname{Re} z=-1$; в) $\operatorname{Im} z=0$;

г) $|z+i|\le 3$, $\operatorname{Re} z\le -1$, $\operatorname{Im} z\le 0$; $z_0=-2-i$.

1.20. а) $|z+i|=1$; б) $|z-1|=1$; в) $\operatorname{Im} z=-\dfrac{3}{4}$;

г) $|z+i|\le 1$, $|z-1|\le 1$, $\operatorname{Im} z\ge -\dfrac{3}{4}$; $z_0=-\dfrac{1}{2}+i\dfrac{1}{2}$.

1.21. а) $|z+3-3i|=3;$ б) $|z-3i|=2;$ в) $\operatorname{Re} z=-1;$

г) $|z+3-3i|\le 3,\quad |z-3i|\le 2,\quad \operatorname{Re} z\ge -1;\quad z_0=2i.$

1.22. а) $|z-2i|=2;$ б) $|z-2|=2;$ в) $\arg z=\dfrac{\pi}{4};$

г) $|z-2i|\le 2,\quad |z-2|\le 2,\quad \dfrac{\pi}{4}\le \arg z<\dfrac{\pi}{2};\quad z_0=2+2i.$

1.23. а) $|z+1-i|=1;$ б) $|z+1+i|=3;$ в) $\arg z=\dfrac{5\pi}{6};$

г) $|z+1-i|\ge 1,\quad |z+1+i|\le 3,\quad \dfrac{5\pi}{6}<\arg z\le \pi;\quad z_0=-2.$

1.24. а) $|z+1|=1;$ б) $|z-2|=3;$ в) $\arg z=\dfrac{\pi}{4};$

г) $|z+1|\ge 1,\quad |z-2|<3,\quad \dfrac{\pi}{4}<\arg z\le \pi;\quad z_0=i.$

1.25. а) $|z-i|=3;$ б) $|z+i|=1;$ в) $\arg z=\dfrac{5\pi}{4};$

г) $|z-i|\le 3,\quad |z+i|>1,\quad \dfrac{\pi}{2}<\arg z\le \dfrac{5\pi}{4};\quad z_0=-1+i.$

1.26. а) $|z-i|=2;$ б) $\operatorname{Re} z=1;$ в) $\operatorname{Im} 1=-1;$

г) $|z-i|\le 2,\quad \operatorname{Re} z\le 1,\quad \operatorname{Im} z\ge -1;\quad z_0=1+2i.$

1.27. а) $|z-4-i|=1;$ б) $|z-2-i|=4;$ в) $\arg z=\dfrac{\pi}{3};$

г) $|z-4-i|\ge 1,\quad |z-2-i|\le 4,\quad 0<\arg z<\dfrac{\pi}{3};\quad z_0=3+2i.$

1.28. а) $|z+1-i|=2;$ б) $|z-1|=1;$ в) $\operatorname{Im} z=0;$

г) $|z+1-i|\ge 2,\quad |z-1|\le 1,\quad \operatorname{Im} z\ge 0;\quad z_0=i.$

1.29. а) $|z+2-2i|=2\sqrt{2};$ б) $|z-2i|=2;$ в) $\operatorname{Im} z=1;$

г) $|z+2-2i|<2\sqrt{2},\quad |z-2i|<2,\quad \operatorname{Im} z\ge 1;\quad z_0=-1+2i.$

1.30. а) $|z-2i-4|=3;$ б) $|z-4-4i|=2;$ в) $\arg z=\dfrac{\pi}{4};$

г) $|z-2i-4|\ge 3,\quad |z-4-4i|\le 2,\quad \dfrac{\pi}{4}\le \arg z<\dfrac{\pi}{2};\quad z_0=5+4i.$

Задание 2

Дано уравнение и область D, заданная неравенством.

1. Найдите все корни уравнения.

2. Определите, какие из корней являются простыми, а какие – кратными.
3. Укажите корни, принадлежащие области D.

2.1. $(z^2+4)(e^z-1)=0,$ $D:|z+i|<2;$

2.2. $(2z^2+\pi z)\sin\pi z=0,$ $D:\left|z-\frac{i+1}{2}\right|<1;$

2.3. $(4z^2-1)(1-\cos z)=0,$ $D:\left|z-\frac{\pi}{4}\right|<1;$

2.4. $(z^3-1)\cos\pi z=0,$ $D:\left|z+\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\right|<1;$

2.5. $(\sqrt{2}z+1+i)(z^4+1)=0,$ $D:\left|z+\frac{1}{\sqrt{2}}\right|<1;$

2.6. $(z-1+i)^2(e^{\frac{\pi z}{2i}}+1)=0,$ $D:|z+2i|<2{,}5;$

2.7. $(z^3-4z^2+4z)\sin 2z=0,$ $D:|z-3|<\sqrt{2};$

2.8. $(z-1+i)^2(e^{\pi z}+i)=0,$ $D:|z+i|<\sqrt{2};$

2.9. $(z-3)^2\cos\frac{3z}{2}=0,$ $D:|z-3|<1;$

2.10. $(iz+3)\sin\left(\frac{\pi iz}{3}\right)=0,$ $D:|z-i|<3;$

2.11. $(z-5i)^2(z^3-125)=0,$ $D:|z-4-4i|<\sqrt{18};$

2.12. $(4z^2-\pi^2)^2(e^z+1)=0,$ $D:|z-\pi|<\pi;$

2.13. $(8z^2+2z^3-z^4)\sin 3z=0,$ $D:\left|z+\frac{\pi}{3}\right|<1;$

2.14. $(2z^3+z^2-z)\operatorname{sh}(\pi zi)=0,$ $D:\left|z-\frac{1}{2}\right|<\frac{1}{3};$

2.15. $(z^2-z)\cos\frac{\pi z}{2}=0,$ $D:|z+1|<\frac{3}{2};$

2.16. $(4z^2+9)\left(e^{\pi z}-i\right)=0,$ $D:|z|<1;$

2.17. $(z^2+\pi^2)(e^{-z}+1)=0,$ $D:|z-\pi i|<\pi;$

2.18. $(9z^2-1)(1+\cos z)=0,$ $D:|z-\pi|<\pi;$

2.19. $(z^3+1)\sin\frac{z}{2}=0,$ $D:|z+1|<1{,}5;$

2.20. $(z^3+4z^2)\sin\pi z=0,$ $D:|z-2|<\sqrt{2};$

2.21. $(z^3+z^2-z-1)\,\mathrm{sh}\,z=0, \qquad D:|z|<2;$

2.22. $(z^2+2z+1)(z+2-3i)=0, \qquad D:|z+2-3i|<4;$

2.23. $(z^2+4)(e^z+1)=0, \qquad D:|z|<2{,}5;$

2.24. $(z-1+i)(z^4-1)=0, \qquad D:|z-1+i|<1{,}5;$

2.25. $(z^2+\pi^2)\sin\dfrac{\pi z}{2}=0, \qquad D:|z+2i|<2{,}5;$

2.26. $(z^3+2z^2)\cos\dfrac{\pi z}{2}=0, \qquad D:|z+3|<2{,}5;$

2.27. $(iz-3)\,\mathrm{sh}\,\dfrac{\pi z}{2}=0, \qquad D:|z+3i|<1{,}5;$

2.28. $(z^3+4z^2+3z)(e^{\frac{\pi z}{2}}-i)=0, \qquad D:|z|<\sqrt{2};$

2.29. $(z^2+2z)\,\mathrm{sh}(iz)=0, \qquad D:|z-\pi|<4;$

2.30. $(z^2+9)(e^{\frac{\pi z}{2}}+i)=0, \qquad D:|z+i|<3.$

Задание 3

1. Проверьте, является ли функция $f(z)$ аналитической в области D.
2. Вычислите интеграл от этой функции по указанной кривой L.

3.1. $f(z)=2z+\sin z, \quad D:|z|<1, \quad L:\{|z|=1,\ \mathrm{Re}\,z\le 0\};$

3.2. $f(z)=3|z|+1, \quad D:|z|<\sqrt{2}, \quad L:\left\{|z|=\sqrt{2},\ \dfrac{3\pi}{4}\le\arg z\le\dfrac{5\pi}{4}\right\};$

3.3. $f(z)=2-z^2, \quad D:|z|<2, \quad L$ – контур ΔABC:

$z_A=0,\ z_B=-1-i,\ z_C=-i;$

3.4. $f(z)=e^{|z|^2}\cdot\mathrm{Im}\,z, \quad D:|z|<\sqrt{3}, \quad L$ – ломаная ABC:

$z_A=-1,\ z_B=0,\ z_C=1+i;$

3.5. $f(z)=z-\sin iz, \quad D:|z|<1, \quad L:\{|z|=1,\ \mathrm{Im}\,z\ge 0\};$

3.6. $f(z)=\mathrm{Re}\,\dfrac{\bar z}{z}, \quad D:|z|<2, \quad L$ – кривая ABC, где $AB:\{|z|=1,\ \mathrm{Im}\,z\ge 0\}$,

BC – отрезок: $z_B=1,\ z_C=2;$

3.7. $f(z)=e^z(z+1), \quad D:|z|<1, \quad L:\{|z|=1,\ \mathrm{Re}\,z\ge 0\};$

3.8. $f(z)=\mathrm{Im}\,z^3, \quad D:|z|<3, \quad L$ – ломаная ABC:

$z_A=0,\ z_B=2+2i,\ z_C=2i;$

3.9. $f(z)=2z^2-z+1,\quad D:|z-1+i|<1,\quad L-$ ломаная ABC:

$$z_A=1,\ z_B=1-i,\ z_C=-i;$$

3.10. $f(z)=3z|z|,\quad D:|z|<1,\quad L:\{|z|=1,\ \operatorname{Im} z\le 0\};$

3.11. $f(z)=-\dfrac{1}{2}\bar{z}^2,\quad D:|z|<\sqrt{2},\quad L-$ кривая ABC, где AB – отрезок:

$z_A=-1,\ z_B=0$, BC – дуга параболы $y=x^2$, $z_C=1+i;$

3.12. $f(z)=\operatorname{chz}-z,\quad D:|z|<1,\quad L:|z|=1;$

3.13. $f(z)=z\cdot\operatorname{Re} z^2,\quad D:|z-1-i|<1,\quad L-$ ломаная ABC:

$$z_A=2i,\ z_B=1+2i,\ z_C=1;$$

3.14. $f(z)=3z^2-2z+1,\quad D:|z-i|<1,\quad L-$ замкнутый контур $ABCA$:

$z_A=0,\ z_B=1+i,\ z_C=i,\quad AB: y=x^2,\quad BC$ и CA – отрезки;

3.15. $f(z)=\dfrac{\bar{z}}{z},\quad D:1<|z|<2,\quad L-$ граница области $\{1<|z|<2,\ \operatorname{Re} z\ge 0\};$

3.16. $f(z)=2z|z|,\quad D:|z|<1,\quad L:\{|z|=1,\operatorname{Im} z\ge 0\};$

3.17. $f(z)=\dfrac{|z|}{2}-1,\quad D:|z|<\sqrt{3},\quad L:\left\{|z|=\sqrt{3},\ \dfrac{\pi}{4}\le\arg z\le\dfrac{3\pi}{4}\right\};$

3.18. $f(z)=z^2-3,\quad D:|z|<3,\quad L-$ контур $\Delta ABC: z_A=i,\ z_B=2+i,\ z_C=2;$

3.19. $f(z)=e^{|z|^4}\cdot\operatorname{Re} z,\quad D:|z|<\sqrt{3},\quad L-$ ломаная ABC:

$$z_A=-1+i,\ z_B=i,\ z_C=1;$$

3.20. $f(z)=z^2+1,\quad D:|z|<2,\quad L-$ ломаная $ABC: z_A=0,\ z_B=-1+i,\ z_C=i;$

3.21. $f(z)=\sin iz+z,\quad D:|z|<1,\quad L:\{|z|=1,\operatorname{Re} z\ge 0\};$

3.22. $f(z)=z\operatorname{Re} z^2,\quad D:|z-i|<2,\quad L-$ ломаная ABC:

$$z_A=-1+i,\ z_B=1+i,\ z_C=1-i;$$

3.23. $f(z)=z^2+z+2,\quad D:|z+2i|<2,\quad L-$ ломаная ABC:

$$z_A=-i,\ z_B=1-2i,\ z_C=-2i;$$

3.24. $f(z)=z^2-z,\quad D:|z|<2,\quad L-$ ломаная ABC:

$$z_A=i,\ z_B=1+i,\ z_C=0;$$

3.25. $f(z)=e^z(z-1),\quad D:|z|<2,\quad L:\{|z|=2,\ \operatorname{Im} z\le 0\};$

3.26. $f(z)=(2z+1)\bar{z},\quad D:|z|<1,\quad L:\{|z|=1,0\le\arg z\le\pi\};$

3.27. $f(z)=iz^2-2\bar{z},\quad D:|z|<2,\quad L:\left\{|z|=2,0\le\arg z\le\dfrac{\pi}{2}\right\};$

3.28. $f(z)=\dfrac{z}{\overline{z}},\quad D:|z|<1,\quad L:\{|z|=1,\ \operatorname{Im}z\ge 0,\ \operatorname{Re}z\ge 0\};$

3.29. $f(z)=\overline{z^2}-z,\quad D:|z|<1,\quad L:\{|z|=1,\ \operatorname{Im}z\le 0\};$

3.30. $f(z)=\operatorname{Re}(z+z^2),\quad D:|z-2i|<2,\quad L:\{\,y=2x^2,\ x\in[0;1]\}.$

Задание 4

Функция $f(z)$ разложена в ряд Лорана в окрестности своей изолированной особой точки z_0 $(0<|z-z_0|<R)$.

1. Определите тип изолированной особой точки z_0.
2. Найдите вычет функции в этой точке.
3. Используя формулы для коэффициентов ряда Лорана, вычислите $\oint\limits_C \dfrac{f(z)dz}{(z-z_0)^{n+1}}$ для указанного n, если C – произвольная окружность $|z-z_0|=r$, где $0<r<R$.

4.1. $f(z)=\sum\limits_{n=-2}^{\infty}\dfrac{(-1)^n(n+3)}{2^{n+4}}(z-1)^n,\quad z_0=1;\quad \oint\limits_{|z-1|=r}\dfrac{f(z)}{(z-1)^2}dz;$

4.2. $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{(2n)!\,z^{2n-3}},\quad z_0=0;\quad \oint\limits_{|z|=r} z\cdot f(z)dz;$

4.3. $f(z)=\sum\limits_{n=-3}^{\infty}(-1)^n(z+1)^n,\quad z_0=-1;\quad \oint\limits_{|z+1|=r} f(z)(z+1)^2dz;$

4.4. $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{(2n+1)!\,z^{2n+5}},\quad z_0=0;\quad \oint\limits_{|z|=r}\dfrac{f(z)}{z^4}dz;$

4.5. $f(z)=-\dfrac{i}{2(z-i)}+\dfrac{1}{4}\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{(z-i)^n}{(2i)^n},\quad z_0=i;\quad \oint\limits_{|z-i|=r}\dfrac{f(z)}{(z-i)^3}dz;$

4.6. $f(z)=\sum\limits_{n=-5}^{\infty}\dfrac{(z+i)^n}{3\sqrt{2n}},\quad z_0=-i;\quad \oint\limits_{|z+i|=r}(z+i)^3\cdot f(z)dz;$

4.7. $f(z)=\sum\limits_{n=-3}^{\infty}(1+in)(z-2+i)^n,\quad z_0=2-i;\quad \oint\limits_{|z-2+i|=r}\dfrac{f(z)dz}{z-2+i};$

4.8. $f(z)=\dfrac{i}{2(z+i)}+\dfrac{1}{4}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(z+i)^n}{(2i)^n},\quad z_0=-i;\quad \oint\limits_{|z+i|=r}\dfrac{f(z)}{(z+i)^2}dz;$

4.9. $f(z)=\sum\limits_{n=-4}^{\infty}\dfrac{2n+1}{n^3+5}(z-i)^n,\quad z_0=i;\qquad \oint\limits_{|z-i|=r} f(z)(z-i)^2\,dz;$

4.10. $f(z)=\sum\limits_{n=-2}^{\infty}\dfrac{(3n+1)}{5^{n+1}}(z+i)^n,\quad z_0=-i;\qquad \oint\limits_{|z+i|=r} f(z)(z+i)dz;$

4.11. $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n(n+2)}{3^{n+1}z^{2n-1}},\quad z_0=0;\qquad \oint\limits_{|z|=r}\dfrac{f(z)}{z^2}dz;$

4.12. $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{n!(z-1)^n},\quad z_0=1;\qquad \oint\limits_{|z-1|=r} f(z)(z-1)^3\,dz;$

4.13. $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{(2n+1)!(z+i)^{2n}},\quad z_0=-i;\qquad \oint\limits_{|z+i|=r} f(z)(z+i)dz;$

4.14. $f(z)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3^n(z-1)^n}{\sqrt{(3n-2)2^n}},\quad z_0=1;\qquad \oint\limits_{|z-1|=r}\dfrac{f(z)}{(z-1)^2}dz;$

4.15. $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(1-i)^n}{(n+1)(n+2)}(z+1)^n,\quad z_0=-1;\qquad \oint\limits_{|z+1|=r}\dfrac{f(z)}{(z+1)^2}dz;$

4.16. $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{n!(z+i)^n},\quad z_0=-i;\qquad \oint\limits_{|z+i|=r} f(z)(z+i)^2\,dz;$

4.17. $f(z)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n!}{n^n}(z-i)^n,\quad z_0=i;\qquad \oint\limits_{|z-i|=r}\dfrac{f(z)}{(z-i)^2}dz;$

4.18. $f(z)=\sum\limits_{n=-1}^{\infty}\dfrac{(1+i)^n}{(n+3)(n+2)}(z-2)^n,\quad z_0=2;\qquad \oint\limits_{|z-2|=r}\dfrac{f(z)}{(z-2)^3}dz;$

4.19. $f(z)=\dfrac{3}{z+2}-\dfrac{2}{(z+2)^2}-3\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z+2)^n,\quad z_0=-2;\qquad \oint\limits_{|z+2|=r}\dfrac{f(z)dz}{(z+2)^3};$

4.20. $f(z)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{5^n(z+1)^n}{\sqrt{3n-1}\cdot 2^n},\quad z_0=-1;\qquad \oint\limits_{|z+1|=r}\dfrac{f(z)}{(z+1)^3}dz;$

4.21. $f(z)=\sum\limits_{n=-2}^{\infty}\dfrac{(z-1+i)^n}{(1-in)},\quad z_0=1-i;\qquad \oint\limits_{|z-1+i|=r}\dfrac{f(z)}{z-1+i}dz;$

4.22. $f(z)=-\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{\sin\left(1+\dfrac{\pi n}{2}\right)}{n!(z-1)^n},\quad z_0=1;\qquad \oint\limits_{|z-1|=r}\dfrac{f(z)}{z-1}dz;$

4.23. $f(z)=-\dfrac{i}{6(z-3i)}+\dfrac{1}{36}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n(z-3i)^n}{(6i)^n}$, $\quad z_0=3i;\quad \oint\limits_{|z-3i|=r}\dfrac{f(z)}{(z-3i)^2}dz;$

4.24. $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{\sqrt{n+1}}{5^n\cdot z^{2n+1}}$, $\quad z_0=0;\quad \oint\limits_{|z|=r}f(z)\cdot z^4dz;$

4.25. $f(z)=-\dfrac{i}{4(z-2i)}+\dfrac{1}{16}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n(z-2i)^n}{(4i)^n}$, $\quad z_0=2i;\quad \oint\limits_{|z-2i|=r}\dfrac{f(z)}{(z-2i)^2}dz;$

4.26. $f(z)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{(n+1)!}-\dfrac{1}{n!}\right)(z+i)^{-n}$, $\quad z_0=-i;\quad \oint\limits_{|z+i|=r}f(z)(z+i)^2dz;$

4.27. $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{(n^2+1)z^{2n+1}}$, $\quad z_0=0;\quad \oint\limits_{|z|=r}f(z)\cdot z^2dz;$

4.28. $f(z)=\dfrac{i}{6(z+3i)}+\dfrac{1}{36}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(z+3i)^n}{(6i)^n}$, $\quad z_0=-3i;\quad \oint\limits_{|z+3i|=r}\dfrac{f(z)}{(z+3i)^2}dz;$

4.29. $f(z)=\sum\limits_{n=-3}^{\infty}(1-in)(z-3-i)^n$, $\quad z_0=3+i;\quad \oint\limits_{|z-3-i|=r}f(z)(z-3-i)^2dz;$

4.30. $f(z)=\dfrac{i}{4(z+2i)}+\dfrac{1}{16}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(z+2i)^n}{(4i)^n}$, $\quad z_0=-2i;\quad \oint\limits_{|z+2i|=r}\dfrac{f(z)}{(z+2i)^3}dz.$

Задание 5

Дана функция $f(z)$.

1. Найдите ее изолированную особую точку z_0.
2. Разложите функцию в ряд Лорана в окрестности точки z_0.
3. Определите тип этой изолированной особой точки.
4. Найдите вычет функции в точке z_0.
5. Вычислите $\oint\limits_{C_i}f(z)dz$, где C_i – заданные контуры, $i=1, 2, 3$.

5.1. $f(z)=ze^{\frac{1}{z-2}}$, $\quad C_1:|z|=1,\ C_2:|z-2|=1,\quad C_3:|z-1-i|=\sqrt{3};$

5.2. $f(z)=\dfrac{\cos(z^2)-1}{z^4}$, $\quad C_1:|z|=1,\ C_2:|z-2|=1,\quad C_3:|z+1-i|=1{,}5;$

5.3. $f(z)=\sin\dfrac{z}{z-3}$, $\quad C_1:|z|=1,\ C_2:|z-3|=1,\quad C_3:|z-1+i|=2;$

5.4. $f(z)=\dfrac{5z^3-3z^2+4z-7}{6z^2}$, $C_1:|z|=0{,}1$, $C_2:|z-2i|=1$, $C_3:|z+1+i|=\sqrt{3}$;

5.5. $f(z)=\dfrac{e^{z^2}-1}{z^3}$, $C_1:|z|=0{,}2$, $C_2:|z+2i|=1$, $C_3:|z-1-i|=2$;

5.6. $f(z)=\cos\dfrac{z}{z+2i}$, $C_1:|z|=1$, $C_2:|z+2i|=1$, $C_3:|z+i+1|=1{,}5$;

5.7. $f(z)=\sin\dfrac{3z+i}{3z-i}$, $C_1:|z|=0{,}5$, $C_2:|z-2|=1$, $C_3:|z-1-i|=\dfrac{4}{3}$;

5.8. $f(z)=ze^{\frac{z}{z-4}}$, $C_1:|z|=1$, $C_2:|z-4|=0{,}3$, $C_3:|z-2-i|=2$;

5.9. $f(z)=\dfrac{3z^4-5z^3+z^2+1}{2z^3}$, $C_1:|z|=0{,}2$, $C_2:|z-2|=1$, $C_3:|z-1-i|=1{,}7$;

5.10. $f(z)=\dfrac{3z-\sin 3z}{z^4}$, $C_1:|z|=0{,}5$, $C_2:|z+2i|=1$, $C_3:|z-1+i|=\sqrt{3}$;

5.11. $f(z)=\sin\pi\dfrac{z-1}{z-2}$, $C_1:|z|=1$, $C_2:|z-2|=0{,}1$, $C_3:|z+1+i|=2$;

5.12. $f(z)=\cos\dfrac{3z}{z-1}$, $C_1:|z|=2$, $C_2:|z+2|=1$, $C_3:|z+i|=1{,}5$;

5.13. $f(z)=\dfrac{e^{iz}-1}{z^3}$, $C_1:|z|=1$, $C_2:|z-2|=1$, $C_3:|z+1-i|=1{,}6$;

5.14. $f(z)=\dfrac{4-2z+z^2-3z^5}{2z^2}$, $C_1:|z|=0{,}3$, $C_2:|z-2|=1$, $C_3:|z-1-i|=2$;

5.15. $f(z)=z^2\sin\pi\dfrac{z+2}{z}$, $C_1:|z|=0{,}2$, $C_2:|z-4|=2$, $C_3:|z-i|=\sqrt{2}$;

5.16. $f(z)=\dfrac{\cos iz-1}{z^3}$, $C_1:|z|=0{,}1$, $C_2:|z-1-i|=1$, $C_3:|z-i|=\dfrac{2}{3}$;

5.17. $f(z)=ze^{\frac{1}{z+i}}$, $C_1:|z|=1{,}5$, $C_2:|z+i|=2$, $C_3:|z-3i|=1$;

5.18. $f(z)=\sin\dfrac{z}{z-i}$, $C_1:|z|=2$, $C_2:|z-i|=1$, $C_3:|z+4i|=2$;

5.19. $f(z)=\dfrac{4-3z+5z^2-z^6}{z^2}$, $C_1:|z|=\dfrac{1}{7}$, $C_2:|z+i|=2$, $C_3:|z-2+3i|=1$;

5.20. $f(z)=\dfrac{1-\cos 2z}{z^3}$, $C_1:|z|=\dfrac{1}{3}$, $C_2:|z+i|=1{,}5$, $C_3:|z-2-i|=2$;

5.21. $f(z)=\sin\dfrac{z}{1-z}$, $C_1:|z|=2$, $C_2:|z+1|=0{,}5$, $C_3:|z-1-2i|=3$;

5.22. $f(z) = \cos\pi\,\dfrac{z+3}{z-1}$, $\quad C_1 : |z| = 2,\; C_2 : |z-i| = 2, \quad C_3 : |z+1-2i| = 2;$

5.23. $f(z) = e^{\frac{\pi z}{z-\pi}}$, $\quad C_1 : |z| = 4,\; C_2 : |z-\pi| = 1, \quad C_3 : |z| = 1;$

5.24. $f(z) = \sin\dfrac{2z}{z-4}$, $\quad C_1 : |z| = 1,\; C_2 : |z-4+i| = 2, \quad C_3 : |z+2i| = 1;$

5.25. $f(z) = \dfrac{\cos(2z)-1}{z^5}$, $\quad C_1 : |z| = \dfrac{1}{9},\; C_2 : |z-3i| = 1, \quad C_3 : |z-1-i| = \sqrt{3};$

5.26. $f(z) = \dfrac{3z-\sin 3z}{5z^2}$, $\quad C_1 : |z| = 0{,}5,\; C_2 : |z-1| = 2, \quad C_3 : |z+3-i| = 1;$

5.27. $f(z) = z\cos\dfrac{1}{z}$, $\quad C_1 : |z| = \dfrac{1}{6},\; C_2 : |z+2i| = 1, \quad C_3 : |z-1-i| = 2;$

5.28. $f(z) = ze^{\frac{z}{z-4}}$, $\quad C_1 : |z| = 2,\; C_2 : |z-4| = 1, \quad C_3 : |z-2-3i| = 2;$

5.29. $f(z) = \dfrac{5z^6-7z^4+3z+11}{2z^2}$, $C_1 : |z| = \dfrac{1}{3},\; C_2 : |z+i| = 0{,}5,\; C_3 : |z-1+i| = 1;$

5.30. $f(z) = \dfrac{\sin 2z - 2z}{3z^6}$, $\quad C_1 : |z| = \dfrac{1}{\sqrt{2}},\; C_2 : |z-i| = 2, \quad C_3 : |z+1| = 1{,}5.$

Задание 6

Вычислите $\oint\limits_C f(z)dz$, используя результаты, полученные при решении задания 2.

6.1. $\oint\limits_C \dfrac{(z+2i)^3 dz}{(z^2+4)(e^z-1)}$, $\quad C : |z+i| = 2;$

6.2. $\oint\limits_C \dfrac{(z-1)dz}{(2z^2+\pi z)\sin\pi z}$, $\quad C : \left|z - \dfrac{i+1}{2}\right| = 1;$

6.3. $\oint\limits_C \dfrac{z^4 dz}{(4z^2-1)(1-\cos z)}$, $\quad C : \left|z - \dfrac{\pi}{4}\right| = 1;$

6.4. $\oint\limits_C \dfrac{dz}{(z^3-1)\cos\pi z}$, $\quad C : \left|z + \dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}\right| = 1;$

6.5. $\oint\limits_C \dfrac{dz}{(\sqrt{2}z+i+1)(z^4+1)}$, $\quad C : \left|z + \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right| = 1;$

6.6. $\oint\limits_C \frac{(z+2i)dz}{(e^{\frac{\pi z}{2i}}+1)(z-1+i)^2}, \quad C: |z+2i| = 2{,}5;$

6.7. $\oint\limits_C \frac{(z^2-\frac{\pi^2}{4})dz}{(z^3-4z^2+4z)\sin 2z}, \quad C: |z-3| = \sqrt{2};$

6.8. $\oint\limits_C \frac{(2z+i)dz}{(z-1+i)^2(e^{\pi z}+i)}, \quad C: |z+1| = \sqrt{2};$

6.9. $\oint\limits_C \frac{dz}{(z-3)^2\cos\frac{3z}{2}}, \quad C: |z-3| = 1;$

6.10. $\oint\limits_C \frac{(z^2+9)^2 dz}{(iz+3)\sin\frac{\pi iz}{3}}, \quad C: |z-i| = 3;$

6.11. $\oint\limits_C \frac{dz}{(z-5i)^2(z^3-125)}, \quad C: |z-4-4i| = \sqrt{18};$

6.12. $\oint\limits_C \frac{dz}{(e^z+1)(4z^2-\pi^2)^2}, \quad C: |z-\pi| = \pi;$

6.13. $\oint\limits_C \frac{dz}{\sin 3z(8z^2+2z^3-z^4)}, \quad C: \left|z+\frac{\pi}{3}\right| = 1;$

6.14. $\oint\limits_C \frac{dz}{(2z^3+z^2-z)\,\mathrm{sh}(iz)}, \quad C: \left|z-\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{3};$

6.15. $\oint\limits_C \frac{dz}{(z^2-z)\cos\frac{\pi z}{2}}, \quad C: |z+1| = \frac{3}{2};$

6.16. $\oint\limits_C \frac{dz}{(4z^2+9)(e^{\pi z}-i)}, \quad C: |z| = 1;$

6.17. $\oint\limits_C \frac{dz}{(z^2+\pi^2)(e^{-z}+1)}, \quad C: |z-\pi i| = \pi;$

6.18. $\oint\limits_C \frac{(z-\pi)^3 dz}{(9z^2-1)(1+\cos z)}, \quad C: |z-\pi| = \pi;$

6.19. $\oint\limits_C \frac{dz}{(z^3+1)\sin\frac{z}{2}}, \quad C: |z+1| = 1{,}5;$

6.20. $\oint\limits_C \frac{(z^2-9)dz}{(z^3+4z^2)\sin \pi z}, \quad C: |z-2| = \sqrt{2};$

6.21. $\oint\limits_C \frac{dz}{(z^3+z^2-z-1)\,\mathrm{sh}\, z}, \quad C: |z| = 2;$

6.22. $\oint\limits_C \frac{dz}{(z^2+2z+1)(z+2-3i)}, \quad C: |z+2-3i| = 4;$

6.23. $\oint\limits_C \frac{dz}{(z^2+4)(e^z+1)}, \quad C: |z| = 2{,}5;$

6.24. $\oint\limits_C \frac{(1-z^2)dz}{(z-1+i)(z^4-1)}, \quad C: |z-1+i| = 1{,}5;$

6.25. $\oint\limits_C \frac{dz}{(z^2+\pi^2)\sin \frac{\pi z}{2}}, \quad C: |z+2i| = 2{,}5;$

6.26. $\oint\limits_C \frac{(z^2+4z+3)dz}{(z^3+2z^2)\cos \frac{\pi z}{2}}, \quad C: |z+3| = 2{,}5;$

6.27. $\oint\limits_C \frac{\left(\frac{z}{2}+i\right)dz}{(iz-3)\,\mathrm{sh}\, \frac{\pi z}{2}}, \quad C: |z+3i| = 1{,}5;$

6.28. $\oint\limits_C \frac{\sin z dz}{(z^3+4z^2+3z)(e^{\frac{\pi z}{2}}-i)}, \quad C: |z| = \sqrt{2};$

6.29. $\oint\limits_C \frac{dz}{(z^2+2z)\,\mathrm{sh}(iz)}, \quad C: |z-\pi| = 4;$

6.30. $\oint\limits_C \frac{dz}{(z^2+9)(e^{\frac{\pi z}{2}}+i)}, \quad C: |z+i| = 3.$

Задание 7

Вычислите определенный интеграл.

7.1. $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dx}{\frac{5}{4}-\cos x}$;

7.2. $\int\limits_0^{2\pi} \frac{\cos 2x dx}{\frac{13}{4}-3\cos x}$;

7.3. $\int\limits_0^{2\pi} \frac{\cos x dx}{\frac{26}{25}-\frac{2}{5}\sin x}$;

7.4. $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dx}{2+\cos x}$;

7.5. $\int\limits_0^{2\pi} \frac{\sin^2 x dx}{2+\cos x}$;

7.6. $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dx}{\frac{10}{9}-\frac{2}{3}\cos x}$;

7.7. $\int\limits_0^{2\pi} \frac{\cos 2x dx}{\frac{41}{25}-\frac{5}{2}\cos x}$;

7.8. $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dx}{\sqrt{5}+\cos x}$;

7.9. $\int\limits_0^{2\pi} \frac{\cos x dx}{\frac{5}{4}-\sin x}$;

7.10. $\int\limits_0^{2\pi} \frac{\sin^2 x dx}{\sqrt{3}+\sqrt{2}\cos x}$;

7.11. $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dx}{\frac{25}{26}-\frac{3}{2}\cos x}$;

7.12. $\int\limits_0^{2\pi} \frac{\cos 2x dx}{\frac{25}{9}-\frac{8}{3}\cos x}$;

7.13. $\int\limits_0^{2\pi} \frac{\cos x dx}{\frac{25}{16}-\frac{3}{2}\sin x}$;

7.14. $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dx}{\sqrt{2}+\cos x}$;

7.15. $\int\limits_0^{2\pi} \frac{\sin^2 x dx}{\sqrt{5}+2\cos x}$;

7.16. $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dx}{\frac{17}{16}-\frac{\cos x}{2}}$;

7.17. $\int\limits_0^{2\pi} \frac{\cos 2x dx}{17-8\cos x}$;

7.18. $\int\limits_0^{2\pi} \frac{\cos x dx}{\frac{17}{16}-\frac{\sin x}{2}}$;

7.19. $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dx}{4+\cos x}$;

7.20. $\int\limits_0^{2\pi} \frac{\sin^2 x dx}{2+\sqrt{3}\cos x}$;

7.21. $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dx}{\frac{13}{9}-\frac{4}{3}\cos x}$;

7.22. $\int\limits_0^{2\pi} \frac{\cos 2x dx}{5-4\cos x}$;

7.23. $\int\limits_0^{2\pi} \frac{\cos x dx}{\frac{13}{9} - \frac{4}{3}\sin x}$;

7.24. $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dx}{\sqrt{10} + \cos x}$;

7.25. $\int\limits_0^{2\pi} \frac{\sin^2 x dx}{\sqrt{6} + \sqrt{2}\cos x}$;

7.26. $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dx}{1{,}04 - 0{,}4\cos x}$;

7.27. $\int\limits_0^{2\pi} \frac{\cos 2x dx}{10 - 6\cos x}$;

7.28. $\int\limits_0^{2\pi} \frac{\cos x dx}{\frac{37}{36} - \frac{\sin x}{3}}$;

7.29. $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dx}{\sqrt{17} + \cos x}$;

7.30. $\int\limits_0^{2\pi} \frac{\sin^2 x dx}{\sqrt{10} + 3\cos x}$.

Задание 8

Вычислите несобственный интеграл.

8.1. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^2 dx}{(x^2 + 0{,}25)^2}$;

8.2. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + 1)(x^2 + 4)}$;

8.3. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x\sin x}{x^2 + 9} dx$;

8.4. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos 4x}{x^2 + \frac{1}{4}} dx$;

8.5. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^3 \sin \frac{x}{2}}{(1 + x^2)^2} dx$;

8.6. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^2 dx}{(x^2 + 0{,}5)^2}$;

8.7. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + 4)(x^2 + 9)}$;

8.8. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x\sin 2x}{x^2 + \frac{1}{9}} dx$;

8.9. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos 3x}{x^2 + 1} dx$;

8.10. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^3 \sin \frac{x}{3}}{(1 + x^2)} dx$;

8.11. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^2 dx}{(x^2 + 1)^2}$;

8.12. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + 1)(x^2 + 9)}$;

8.13. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x\sin \frac{x}{2}}{x^2 + 4} dx$;

8.14. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos \frac{x}{3}}{x^2 + 4} dx$;

8.15. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^3 \sin 2x}{(1 + x^2)^2} dx$;

8.16. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^2 dx}{(x^2 + 2)^2}$;

8.17. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{\left(x^2+\frac{1}{4}\right)(x^2+1)}$;

8.18. $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{x\sin 3x}{x^2+\frac{1}{4}}dx$;

8.19. $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\cos 2x}{x^2+\frac{1}{9}}dx$;

8.20. $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{x^3\sin 4x}{(1+x^2)^2}dx$;

8.21. $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{x^2dx}{(x^2+3)^2}$;

8.22. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{\left(x^2+\frac{1}{9}\right)(x^2+1)}$;

8.23. $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{x\sin\frac{x}{3}}{x^2+1}dx$;

8.24. $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\cos\frac{x}{2}}{x^2+16}dx$;

8.25. $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{x^3\sin x}{(1+x^2)^2}dx$;

8.26. $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{x^2dx}{\left(x^2+\frac{1}{9}\right)^2}$;

8.27. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{\left(x^2+\frac{1}{4}\right)(x^2+\frac{1}{9})}$;

8.28. $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{x\sin x}{x^2+4}dx$;

8.29. $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2+1}dx$;

8.30. $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{x^3\sin 3x}{(x^2+1)^2}dx$.

Задание 9

Решите задачу Коши операционным методом.

9.1. $x''+3x'=e^t,\quad x(0)=0,\ x'(0)=-1$;

9.2. $x''+2x'-3x=e^{-t},\quad x(0)=0,\ x'(0)=1$;

9.3. $x''+2x'+x=\sin t,\quad x(0)=0,\ x'(0)=-1$;

9.4. $x''-2x'+x=e^t,\quad x(0)=0,\ x'(0)=1$;

9.5. $x''+x'=\cos t,\quad x(0)=2,\ x'(0)=0$;

9.6. $x''+2x'+x=t^2,\quad x(0)=1,\ x'(0)=0$;

9.7. $x''+x=\cos t,\quad x(0)=-1,\ x'(0)=1$;

9.8. $x''+2x'+5x=3,\quad x(0)=1,\ x'(0)=0$;

9.9. $x''+x=1,\quad x(0)=-1,\ x'(0)=0$;

9.10. $x''+4x=t,\quad x(0)=1,\ x'(0)=0$;

9.11. $x'' - x' + x = e^{-t}, \quad x(0) = 0, \; x'(0) = 1;$
9.12. $x'' - x = \sin t, \quad x(0) = -1, \; x'(0) = 0;$
9.13. $x'' + x = 2\sin t, \quad x(0) = 1, \; x'(0) = -1;$
9.14. $x'' - x' = te^{t}, \quad x(0) = 1, \; x'(0) = 0;$
9.15. $x'' + x' = 4\sin^{2} t, \quad x(0) = 0, \; x'(0) = -1;$
9.16. $x'' - x' = t^{2}, \quad x(0) = 0, \; x'(0) = 1;$
9.17. $x'' - 4x = \sin\frac{3t}{2}\sin\frac{t}{2}, \quad x(0) = 1, \; x'(0) = 0;$
9.18. $x'' - 3x' + 2x = 2e^{t}\cos\frac{t}{2}, \quad x(0) = 1, \; x'(0) = 0;$
9.19. $x'' + x = 2\cos t, \quad x(0) = 0, \; x'(0) = 1;$
9.20. $x'' + x' - 2x = e^{-t}, \quad x(0) = -1, \; x'(0) = 0;$
9.21. $x'' - x' - 6x = 2, \quad x(0) = 1, \; x'(0) = 0;$
9.22. $x'' + 4x = \sin 2t, \quad x(0) = 0, \; x'(0) = 1;$
9.23. $2x'' + 5x' = 29\cos t, \quad x(0) = -1, \; x'(0) = 0;$
9.24. $2x'' + 3x' + x = 3e^{t}, \quad x(0) = 0, \; x'(0) = 1;$
9.25. $x'' + 4x' + 29x = e^{-2t}, \quad x(0) = 0, \; x'(0) = 1;$
9.26. $x'' - 3x' + 2x = e^{t}, \quad x(0) = 1, \; x'(0) = 0;$
9.27. $x'' + x' = t^{2} + 2t, \quad x(0) = 0, \; x'(0) = -2;$
9.28. $2x'' - x' = \sin 3t, \quad x(0) = 2, \; x'(0) = 1;$
9.29. $x'' + x' = \operatorname{sh} t, \quad x(0) = 2, \; x'(0) = 1;$
9.30. $x'' - x = \cos 3t, \quad x(0) = 1, \; x'(0) = 1.$

Решение типового варианта

Кратные, криволинейные и поверхностные интегралы

Задание 1

Изобразите фигуру, площадь которой выражается повторными интегралами. Найдите эту площадь непосредственно по рисунку и с помощью криволинейного интеграла второго рода:

а) $\int\limits_{-3}^{0} dx \int\limits_{-x}^{3} dy + \int\limits_{0}^{3} dx \int\limits_{x}^{3} dy;$ б) $\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} dx.$

Решение

1. Искомая фигура состоит из двух областей D_1 и D_2, площади которых выражаются повторными интегралами $\int\limits_{-3}^{0} dx \int\limits_{-x}^{3} dy$ и $\int\limits_{0}^{3} dx \int\limits_{x}^{3} dy$ соответственно. Найдем границы областей D_1 и D_2. Для этого зададим D_1 и D_2 системами неравенств в соответствии с пределами интегрирования в повторных интегралах:

$$D_1: \begin{cases} -3 \le x \le 0, \\ -x \le y \le 3 \end{cases} \text{ и } D_2: \begin{cases} 0 \le x \le 3, \\ x \le y \le 3. \end{cases}$$

Очевидно, что D_1 ограничена прямыми $x = -3,\ x = 0,\ y = -x,\ y = 3,$ а D_2 – прямыми $x = 0,\ x = 3,\ y = x,\ y = 3.$ Таким образом, D_1 представляет собой треугольник AOB, а D_2 – треугольник BOC (рис. 1). Искомая фигура – треугольник AOC с основанием AC и высотой OB, площадь которого

$$S = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 6 = 9.$$

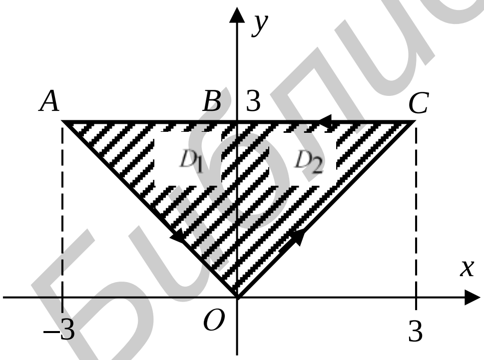


Рис. 1

Найдем площадь S треугольника AOC с помощью криволинейного интеграла второго рода. Для этого воспользуемся формулой

$$S = \frac{1}{2} \oint\limits_{\Gamma^+} x dy - y dx, \qquad (1)$$

где Γ^+ – положительно ориентированная граница треугольника AOC, состоящая из отрезков OC, CA и AO.

Вычислим КРИ – 2 по каждому из указанных отрезков.

OC: уравнение отрезка OC имеет вид $y = x,\ x \in [0; 3],$ следовательно, $dy = dx$ и $\int\limits_{OC} xdy - ydx = \int\limits_0^3 (xdx - xdx) = 0.$

CA: $y = 3,\ x \in [3; -3],\ dy = 0,$ следовательно,

$$\int\limits_{CA} xdy - ydx = \int\limits_3^{-3} -3dx = -3(-3-3) = 18.$$

AO: $y = -x,\ x \in [-3; 0],\ dy = -dx,$ следовательно,

$$\int\limits_{AO} xdy - ydx = \int\limits_{-3}^{0} (x(-dx) - (-x)dx) = 0.$$

Таким образом, учитывая свойство аддитивности КРИ – 2, получим

$$S = \frac{1}{2}\left(\int\limits_{OC} xdy - ydx + \int\limits_{CA} xdy - ydx + \int\limits_{AO} xdy - ydx \right) = \frac{1}{2}(0 + 18 + 0) = 9.$$

2. Учитывая пределы интегрирования в повторном интеграле, зададим искомую фигуру системой неравенств $\begin{cases} 0 \le y \le 1, \\ -\sqrt{1 - y^2} \le x \le 1 - y. \end{cases}$ Границами фигуры являются следующие линии: ось Ox ($y = 0$), горизонтальная прямая $y = 1$, прямая $x = 1 - y$ и кривая $x = -\sqrt{1 - y^2}$, которая представляет собой левую полуокружность окружности $x^2 + y^2 = 1$ (возведя в квадрат обе части равенства $x = -\sqrt{1 - y^2}$ при $x \le 0$, получим $x^2 = 1 - y^2$ или $x^2 + y^2 = 1$). Таким образом, если $y \in [0; 1]$, то переменная x изменяется от дуги AB окружности $x^2 + y^2 = 1$ до отрезка BC прямой $x = 1 - y$. Искомая фигура изображена на рис. 2. Ее площадь $S = \frac{1}{4} S_{\text{круга}} + S_{\Delta AOC} = \frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2} = \frac{1}{4}(\pi + 2).$

Найдем площадь S полученной фигуры с помощью формулы (1). Поскольку граница Γ^+ состоит из отрезков AC, CB и дуги BA окружности $x^2 + y^2 = 1,$ то $\oint\limits_{\Gamma^+} = \int\limits_{AC} + \int\limits_{CB} + \int\limits_{BA}.$

Вычислим отдельно интегралы по указанным кривым:

AC: $y = 0,\ x \in [-1; 1],\ dy = 0,$ и, следовательно,

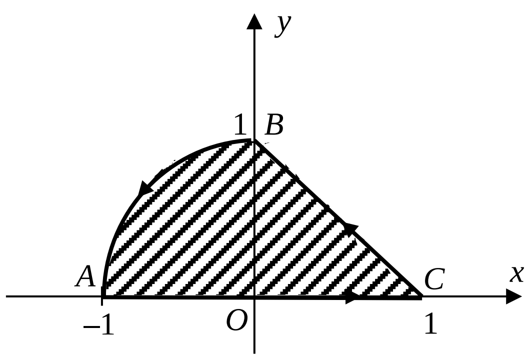


Рис. 2

$$\int\limits_{AC} xdy - ydx = \int\limits_{-1}^{1} (x \cdot 0 - 0 \cdot dx) = 0.$$

CB: $y = 1 - x$, $x \in [1; 0]$, $dy = -dx$, следовательно,

$$\int\limits_{CB} xdy - ydx = \int\limits_1^0 x(-dx) - (1-x)dx = \int\limits_0^1 dx = 1.$$

Чтобы вычислить интеграл по дуге BA окружности $x^2 + y^2 = 1$, запишем уравнение этой окружности в параметрической форме $x = \cos t$, $y = \sin t$, следовательно, $dx = -\sin t dt$, $dy = \cos t dt$. Точке $B(0; 1)$ соответствует значение параметра $t = \frac{\pi}{2}$, точке $A(-1;\ 0)$ – значение $t = \pi$, следовательно, $t \in \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$:

$$\int\limits_{BA} xdy - ydx = \int\limits_{\pi/2}^{\pi} \left(\cos t(\cos t dt) - \sin(-\sin t dt)\right) = \int\limits_{\pi/2}^{\pi} (\cos^2 t + \sin^2 t)dt =$$

$$= \int\limits_{\pi/2}^{\pi} dt = \frac{\pi}{2}.$$

Задание 2

Для данной функции и области D представьте двойной интеграл $\iint\limits_D f(x, y)dxdy$ в виде повторного двумя способами: с внешним интегрированием по x и внешним интегрированием по y. Вычислите $\iint\limits_D f(x, y)dxdy$ одним из способов:

а) $f(x, y) = \dfrac{y}{(x^2 + y^2 + 1)^{3/2}}$, $\quad D$: $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 2$;

б) $f(x, y) = x + y$, $\quad D$: $y = x^2$, $y = 0$, $x = 2$;

в) $f(x, y) = xy$, $\quad D$: $y = \ln x$, $y = 0$, $y = 1$, $x = 0$.

Решение

1. Поскольку область интегрирования D является прямоугольником, ограниченным прямыми $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$, $y = 2$, то двойной интеграл $\iint\limits_D \dfrac{ydxdy}{(x^2 + y^2 + 1)^{3/2}}$ можно представить в виде повторного двумя способами: $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^2 \dfrac{ydy}{(x^2 + y^2 + 1)^{3/2}}$ и $\int\limits_0^2 ydy \int\limits_0^1 \dfrac{dx}{(1 + x^2 + y^2)^{3/2}}$ с внешним интегрированием по x и внешним интегрированием по y соответственно. Первый из повторных

интегралов вычисляется проще, так как его внутренний интеграл легко сводится к табличному. Таким образом,

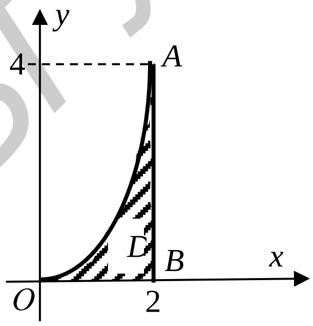
$$\iint_D \frac{ydxdy}{(x^2+y^2+1)^{3/2}} = \int_0^1 dx \int_0^2 \frac{ydy}{(y^2+x^2+1)^{3/2}} = \int_0^1 dx \int_0^2 \frac{1}{2}\cdot\frac{d(y^2+x^2+1)}{(y^2+x^2+1)^{3/2}} =$$

$$= \int_0^1 \left(-\frac{1}{\sqrt{y^2+x^2+1}} \Bigg|_0^2 \right) dx = \int_0^1 \left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} - \frac{1}{\sqrt{5+x^2}} \right) dx =$$

$$= \left(\ln\left| x+\sqrt{1+x^2} \right| - \ln\left| x+\sqrt{5+x^2} \right| \right) \Bigg|_0^1 = \ln\frac{\sqrt{5}(1+\sqrt{2})}{1+\sqrt{6}}.$$

2. Область интегрирования D ограничена параболой $y = x^2$, осью Ox $(y=0)$ и вертикальной прямой $x = 2$. Изобразим область D (рис. 3).

Найдем координаты точки A, решая совместно уравнения $y = x^2$ и $x = 2$. Получим $A(2;\,4)$. Представим $\iint_D (x+y)dxdy$ в виде повторного с внешним интегрированием по x. Очевидно, что при $x \in [0;\,2]$ переменная y изменяется от оси Ox $(y=0)$ до ветви параболы $y = x^2$. Следовательно,



$$\iint_D (x+y)dxdy = \int_0^2 dx \int_0^{x^2} (x+y)dy.$$

Рис. 3

Представим $\iint_D (x+y)dxdy$ в виде повторного с внешним интегрированием по y. Выразим x из уравнения $y = x^2$. Получим $x = \sqrt{y}$ $(x \ge 0)$. Заметим, что при $y \in [0;\,4]$ переменная x изменяется от кривой $x = \sqrt{y}$ до прямой $x = 2$. Следовательно, $\iint_D (x+y)dxdy = \int_0^4 dy \int_{\sqrt{y}}^2 (x+y)dx.$

Вычислим повторный интеграл с внешним интегрированием по x:

$$\int_0^2 dx \int_0^{x^2} (x+y)dy = \int_0^2 \left(xy + \frac{y^2}{2} \right)\Bigg|_0^{x^2} dx = \int_0^2 \left(x^3 + \frac{x^4}{2} \right) dx = \left(\frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{10} \right)\Bigg|_0^2 = 7\frac{1}{5}.$$

Таким образом, $\iint_D (x+y)dxdy = 7\frac{1}{5}.$

3. Изобразим область D, которая ограничена кривой $y = \ln x$, осями координат $(x=0,\ y=0)$ и горизонтальной прямой $y = 1$ (рис. 4). Найдем

координаты точки B, решая совместно уравнения $y=\ln x$ и $y=1$. Получим $B(e;\,1)$.

Представим $\iint\limits_D xydxdy$ в виде повторного интеграла с внешним интегрированием по x. Заметим, что при $x\in[0;1]$ переменная y изменяется от оси Ox $(y=0)$ до прямой $y=1$, а при $x\in[1;e]$ – от кривой $y=\ln x$ до прямой $y=1$.

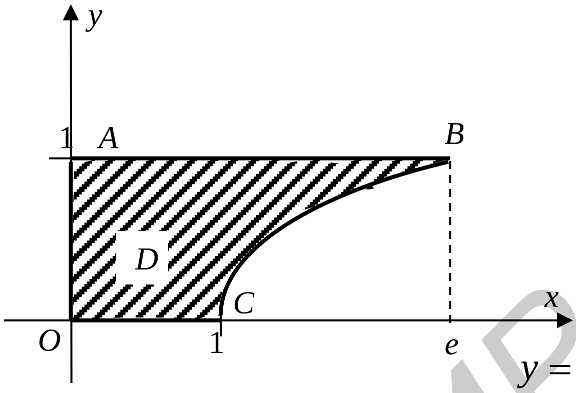


Рис. 4

Следовательно, $\iint\limits_D xydxdy=\int\limits_0^1 xdx\int\limits_0^1 ydy+\int\limits_1^e$

Запишем повторный интеграл с внешним интегрированием по y. Выразим x из уравнения $y=\ln x$. Получим $x=e^y$. Тогда при $y\in[0;1]$ переменная x изменяется от оси Oy $(x=0)$ до кривой $x=e^y$. Следовательно,

$$\iint\limits_D xydxdy=\int\limits_0^1 ydy\int\limits_0^{e^y} xdx.$$

Для вычисления удобнее выбрать повторный интеграл с внешним интегрированием по y:

$$\iint\limits_D xydxdy=\int\limits_0^1 ydy\int\limits_0^{e^y} xdx=\int\limits_0^1 y\left(\frac{x^2}{2}\bigg|_0^{e^y}\right)dy=\int\limits_0^1\frac{1}{2}ye^{2y}dy=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}ye^{2y}\bigg|_0^1-\frac{1}{2}\int\limits_0^1 e^{2y}dy\right)=\frac{1}{4}e^2-\frac{1}{8}e^{2y}\bigg|_0^1=\frac{1}{8}(e^2+1).$$

Задание 3

Расставьте пределы интегрирования в двойном интеграле $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$, если область интегрирования D – трапеция с вершинами в точках $A_1(2;4)$, $A_2(4;5)$, $A_3(6;3)$, $A_4(2;1)$, и найдите площадь трапеции $A_1A_2A_3A_4$. Вычислите периметр этой трапеции с помощью криволинейного интеграла первого рода.

Решение

Изобразим область D (рис. 5). Найдем уравнения сторон трапеции $A_1A_2A_3A_4$.

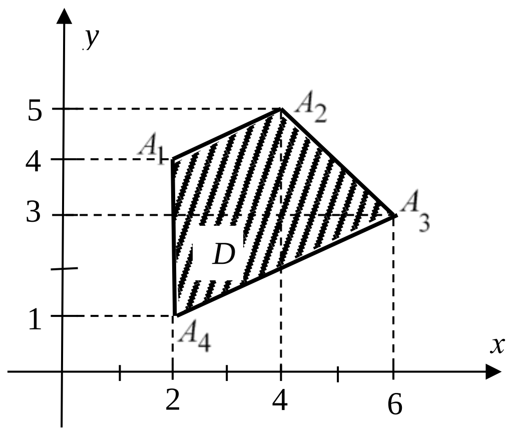


Рис. 5

Запишем уравнение прямой A_1A_2. Для этого воспользуемся уравнением прямой, проходящей через две точки $\frac{x-2}{4-2}=\frac{y-4}{5-4} \Leftrightarrow y=\frac{1}{2}x+3.$ Аналогично найдем уравнение прямой A_2A_3: $y=9-x$. Уравнение прямой A_1A_4: $x=2$. Прямые A_3A_4 и A_1A_2 параллельны, поэтому будем искать уравнение A_3A_4 в виде $y=\frac{1}{2}x+b$.

Подставив координаты точки A_4 в последнее равенство, получим $1=\frac{1}{2}\cdot 2+b \Rightarrow b=0$. Следовательно, уравнение A_3A_4: $y=\frac{1}{2}x$. Представим двойной интеграл $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ в виде повторного с внешним интегрированием по x. Поскольку при $x\in[2;4]$ переменная y изменяется от прямой A_3A_4 $\left(y=\frac{1}{2}x\right)$ до прямой A_1A_2 $\left(y=\frac{1}{2}x+3\right)$, а при $x\in[4;6]$ – от прямой A_3A_4 $\left(y=\frac{1}{2}x\right)$ до прямой A_2A_3 $(y=9-x)$, то двойной интеграл запишем как сумму двух повторных интегралов:

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\int_2^4 dx\int_{x/2}^{x/2+3} f(x,y)dy+\int_4^6 dx\int_{x/2}^{9-x} f(x,y)dy.$$

Площадь трапеции $A_1A_2A_3A_4$ вычислим по формуле

$$S=\iint\limits_D dxdy=\int_2^4 dx\int_{x/2}^{x/2+3} dy+\int_4^6 dx\int_{x/2}^{9-x} dy=\int_2^4\left(y\Big|_{\frac{x}{2}}^{\frac{x}{2}+3}\right)dx+\int_4^6\left(y\Big|_{\frac{x}{2}}^{9-x}\right)dx=$$

$$=\int_2^4\left(\frac{1}{2}x+3-\frac{1}{2}x\right)dx+\int_4^6\left(9-x-\frac{1}{2}x\right)dx=9.$$

Периметр P трапеции $A_1A_2A_3A_4$ равен сумме длин отрезков A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4 и A_4A_1. Найдем длину каждого из них, применяя формулу

$$\int\limits_{AB} dl=L_{AB},$$

где L_{AB} – длина кривой AB.

A_1A_2: уравнение прямой A_1A_2 имеет вид $y=\frac{1}{2}x+3$, тогда дифференциал длины дуги $dl=\sqrt{1+(y'_x)^2}dx=\sqrt{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2}dx=\frac{\sqrt{5}}{2}dx$. Отсюда, учитывая, что x изменяется от 2 до 4, получим $\int\limits_{A_1A_2} dl=\int\limits_2^4\frac{\sqrt{5}}{2}dx=\sqrt{5}.$

A_2A_3: $y=9-x$, $dl=\sqrt{1+(-1)^2}dx=\sqrt{2}dx$, $x\in[4;6]$, следовательно, $\int\limits_{A_2A_3} dl=\int\limits_4^6\sqrt{2}dx=2\sqrt{2}.$

A_3A_4: $y=\frac{1}{2}x$, $dl=\sqrt{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2}dx=\frac{\sqrt{5}}{2}dx$, $x\in[2;6]$, следовательно, $\int\limits_{A_3A_4} dl=\int\limits_2^6\frac{\sqrt{5}}{2}dx=2\sqrt{5}.$

A_4A_1: $x=2$, $dl=\sqrt{1+\left(x'_y\right)^2}dy=\sqrt{1+0}\,dy=dy$, $y\in[1;4]$, следовательно, $\int\limits_{A_4A_1} dl=\int\limits_1^4 dy=3.$

Таким образом, $P=\sqrt{5}+2\sqrt{2}+2\sqrt{5}+3=3\sqrt{5}+2\sqrt{2}+3.$

Задание 4

Пусть D – область интегрирования интеграла из задания 1(а). Найдите массу пластинки, имеющей форму области D, если ее плотность задана функцией $\rho(x,y)=2x+y$. Вычислите среднее значение плотности в области D.

Решение

Для нахождения массы пластинки применим формулу

$$m=\iint\limits_D \rho(x,y)dxdy,$$

где $\rho(x,y)$ – плотность пластинки. Область D изображена на рис. 1.

Для вычисления этого интеграла по данной области удобнее использовать повторный интеграл с внешним интегрированием по y.

$$m=\iint\limits_D(2x+y)dxdy=\int\limits_0^1 dy\int\limits_{-y}^{y}(2x+y)dx=\int\limits_0^1(x^2+xy)\Big|_{-y}^{y}dy=$$

$$=\int\limits_0^1(y^2+y^2-y^2+y^2)dy=2\int\limits_0^1 y^2dy=\frac{2}{3}.$$

Среднее значение плотности $\rho(x, y)$ в области D есть интегральное среднее значение функции $\rho(x, y)$ в области D, которое по определению равно

$$\frac{1}{S}\iint\limits_D \rho(x, y)dxdy,$$

где S – площадь области D.

В нашем случае $S = 9$ (найдено при решении первой части задания 1), $\iint\limits_D (2x + y)dxdy = \frac{2}{3}.$

Таким образом, среднее значение плотности равно $\frac{1}{9}\cdot\frac{2}{3}$, т. е. $\frac{2}{27}$.

Задание 5

Для функции $f(x, y) = \sin\sqrt{x^2 + y^2}$ и области D: $\pi^2 \le x^2 + y^2 \le 4\pi^2$ вычислите $\iint\limits_D f(x, y)dxdy,$ используя полярные координаты.

Решение

Область интегрирования D ограничена двумя концентрическими окружностями с центром в начале координат и радиусами $r_1 = \pi$ и $r_2 = 2\pi$ (рис. 6). Перейдем к полярным координатам $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$. Для удобства расстановки пределов интегрирования совместим полярную систему координат с прямоугольной так, как это показано на рис. 6

Тогда в полярных координатах область D определяется системой неравенств $\begin{cases} 0 \le \varphi \le 2\pi, \\ \pi \le \rho \le 2\pi \end{cases}$, подынтегральная функция имеет вид $f(\rho, \varphi) = \sin\rho$, $dxdy = \rho d\rho d\varphi$.

Таким образом,

$$\iint\limits_D \sin\sqrt{x^2 + y^2}dxdy = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi\int\limits_\pi^{2\pi} \rho\sin\rho d\rho =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi}\left(-\rho\cos\rho\Big|_\pi^{2\pi} + \int\limits_0^{2\pi}\cos\rho d\rho\right)d\varphi =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi}\left(-3\pi + \sin\rho\Big|_\pi^{2\pi}\right)d\varphi = -3\pi\int\limits_0^{2\pi} d\varphi =$$

$$= -3\pi\cdot 2\pi = -6\pi^2.$$

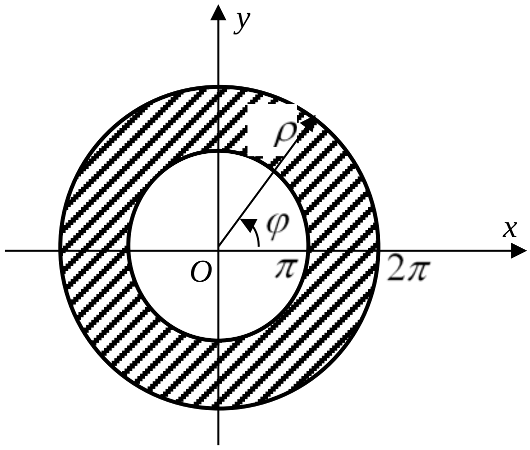


Рис. 6

Задание 6

Дан трехкратный интеграл $\int\limits_0^2 dx \int\limits_{-3+\frac{3}{2}x}^{0} dy \int\limits_{-6+3x-2y}^{0} dz.$

1. Вычислите этот интеграл.

2. Изобразите тело *T*, объем которого вычисляется с помощью этого интеграла.

3. Найдите массу тела *T*, если функция $\rho(x, y) = x - 2y$ описывает плотность распределения массы в области Т.

Решение

1. Вычисление данного трехкратного интеграла начнем с вычисления внутреннего интеграла по переменной z, затем – среднего интеграла по переменной y и, наконец, внешнего интеграла по переменной x:

$$\int\limits_0^2 dx \int\limits_{-3+\frac{3}{2}x}^{0} dy \int\limits_{-6+3x-2y}^{0} dz = \int\limits_0^2 dx \int\limits_{-3+\frac{3}{2}x}^{0} dy \left(z\Big|_{-6+3x-2y}^{0} \right) =$$

$$= \int\limits_0^2 dx \int\limits_{-3+\frac{3}{2}x}^{0} dy(0-(-6+3x-2y)) = \int\limits_0^2 dx \int\limits_{-3+\frac{3}{2}x}^{0} (6-3x+2y)dy =$$

$$= \int\limits_0^2 dx(6y - 3xy + y^2)\Big|_{-3+\frac{3}{2}x}^{0} =$$

$$= \int\limits_0^2 dx\left(0 - 6\left(-3+\frac{3}{2}x\right) + 3x\left(-3+\frac{3}{2}x\right) - \left(-3+\frac{3}{2}x\right)^2 \right) =$$

$$= \int\limits_0^2 \left(-6\frac{3x-6}{2} + 3x\frac{3x-6}{2} - \left(\frac{3x-6}{2}\right)^2 \right) dx = \int\limits_0^2 \left(\frac{3x-6}{2}\right)\left(-6+3x-\frac{3x-6}{2}\right)dx =$$

$$= \int\limits_0^2 \left(\frac{3x-6}{2}\right)^2 dx = \frac{9}{4}\int\limits_0^2 (x-2)^2 dx = \frac{9}{4}\cdot\frac{(x-2)^3}{3}\Bigg|_0^2 = \frac{9}{12}(0+8) = 6.$$

2. Изобразим тело *T*, объем которого вычислен выше с помощью трехкратного интеграла. Как следует из вида пределов интегрирования:

$$0 \le x \le 2, \quad -3+\frac{3}{2}x \le y \le 0, \quad -6+3x-2y \le z \le 0.$$

Это означает, что в направлении оси Oz тело *T* ограничено плоскостью $z = -6+3x-2y$ (снизу) и плоскостью $z = 0$ (сверху). Проекцией тела *T* на плоскость xOy является треугольник, ограниченный прямыми $x = 0,\ x = 2,\ y = 0,\ y = -3 + \frac{3}{2}x.$

Таким образом, тело T (рис. 7) является треугольной пирамидой $CAOB$, где A(0;–3;0), O(0;0;0), B(2;0;0;), C(0;0;–6). Как легко убедиться, объем этой пирамиды равен $\frac{1}{6}\cdot 2\cdot 3\cdot 6 = 6$, что мы и получили при вычислении трехкратного интеграла в п. 1 решения данного задания.

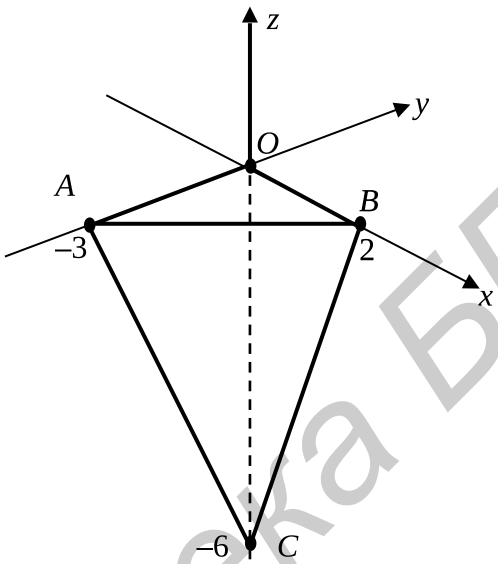


Рис. 7

3. Массу тела T с указанной плотностью $\rho(x, y) = x - 2y$ найдем по формуле $M = \iiint\limits_T \rho(x, y)dxdydz.$

В нашем случае масса M вычисляется с помощью трехкратного интеграла

$$M = \int_0^2 dx \int_{-3+\frac{3}{2}x}^{0} dy \int_{-6+3x-2y}^{0} (x - 2y)dz = \int_0^2 dx \int_{\frac{-6+3x}{2}}^{0} dy(x - 2y)\cdot z\Big|_{-6+3x-2y}^{0} =$$

$$= \int_0^2 dx \int_{\frac{3x-6}{2}}^{0} (x - 2y)(0 - (-6 + 3x - 2y))dy =$$

$$= \int_0^2 dx \int_{\frac{3x-6}{2}}^{0} (6x - 3x^2 + 8xy - 4y^2 - 12y)dy =$$

$$= \int_0^2 dx\left((6x - 3x^2)y + (8x - 12)\frac{y^2}{2} - \frac{4}{3}y^3\right)\Bigg|_{\frac{3x-6}{2}}^{0} =$$

$$=\int_0^2 dx\left(3x(x-2)\frac{(3x-6)}{2}-4(2x-3)\frac{(3x-6)^2}{2\cdot 4}+\frac{4}{3}\cdot\frac{(3x-6)^3}{2^2}\right)=$$

$$=\int_0^2\left(\frac{9}{2}x(x-2)^2-\frac{9}{2}(2x-3)(x-2)^2+\frac{9}{2}(x-2)^3\right)dx=$$

$$=\frac{9}{2}\int_0^2(x-2)^2(x-2x+3+x-2)dx=\frac{9}{2}\int_0^2(x-2)^2dx=\frac{9}{2}\cdot\frac{(x-2)^3}{3}\bigg|_0^2=$$

$$=\frac{3}{2}\cdot(0-(-2)^3)=12.$$

Задание 7

Дана замкнутая поверхность $S:\begin{cases} z=\sqrt{16-x^2-y^2}, \\ z=\sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{15}}. \end{cases}$

1. Найдите объем тела, ограниченного этой поверхностью.

2. Вычислите поток векторного поля $\bar{a}=(5x+1)\bar{i}+(3-2y)\bar{j}+(3z-8)\bar{k}$ через поверхность S (в направлении внешней нормали).

3. Найдите циркуляцию векторного поля $\bar{a}$ вдоль контура L, если L – линия пересечения поверхностей $x^2+y^2=15z^2$ и $z=1$ (в направлении возрастания параметра).

Решение

1. Вычислим объем данного тела по формуле $V=\iiint\limits_T dxdydz$. Поскольку в направлении оси Oz тело ограничено снизу поверхностью конуса с уравнением $z=\sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{15}}$, а сверху – полусферой с уравнением $z=\sqrt{16-x^2-y^2}$, то

$$V=\iiint\limits_T dxdydz=\iint\limits_{D_{xy}}dxdy\int\limits_{\sqrt{\frac{x^2+y^2}{15}}}^{\sqrt{16-x^2-y^2}}dz,$$

где D_{xy} – плоская область, являющаяся проекцией поверхности S на плоскость xOy (рис. 8).

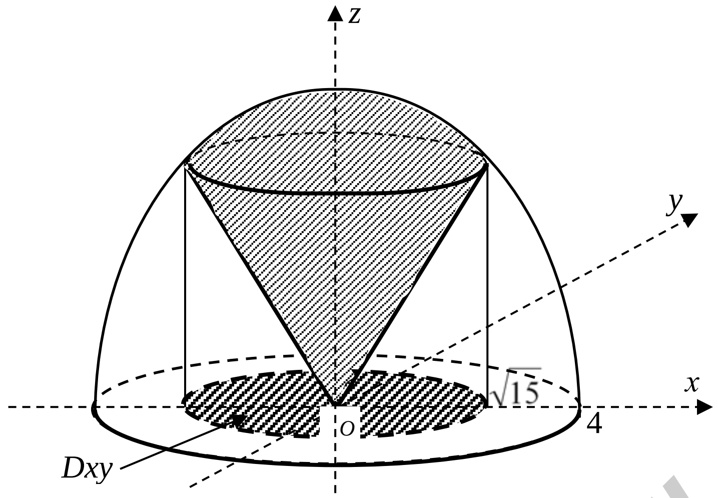


Рис. 8

Чтобы определить, какая кривая ограничивает область D_{xy}, решим уравнение

$$\sqrt{16-x^2-y^2}=\sqrt{\frac{x^2+y^2}{15}}\Leftrightarrow 16-x^2-y^2=\frac{x^2+y^2}{15}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 16\cdot 15-15(x^2+y^2)=x^2+y^2\Leftrightarrow 16\cdot 15=16(x^2+y^2)\Leftrightarrow x^2+y^2=15.$$

Уравнение $x^2+y^2=15$ на плоскости xOy определяет окружность радиусом $\sqrt{15}$ с центром в начале координат, т. е. D_{xy} – круг.

Таким образом, для вычисления тройного интеграла по области T (ограниченной конусом и полусферой), которая проецируется в круг $x^2+y^2\le 15$ на плоскости xOy, удобно перейти к цилиндрическим координатам:

$$x=\rho\cos\varphi,\quad y=\rho\sin\varphi,\quad z=z.$$

Тогда $V=\iiint\limits_T dxdydz=\iint\limits_{D_{xy}}dxdy\int\limits_{\sqrt{\frac{x^2+y^2}{15}}}^{\sqrt{16-x^2-y^2}}dz=\begin{bmatrix} x^2+y^2=\rho^2 \\ 0\le\rho\le\sqrt{15} \\ 0\le\varphi\le 2\pi \end{bmatrix}=$

$$=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{\sqrt{15}}\rho d\rho\int\limits_{\frac{\rho}{\sqrt{15}}}^{\sqrt{16-\rho^2}}dz=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{\sqrt{15}}\rho d\rho\cdot z\Bigg|_{\frac{\rho}{\sqrt{15}}}^{\sqrt{16-\rho^2}}=$$

$$=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{\sqrt{15}}\rho\left(\sqrt{16-\rho^2}-\frac{\rho}{\sqrt{15}}\right)d\rho=2\pi\left(\int\limits_0^{\sqrt{15}}\rho\sqrt{16-\rho^2}d\rho-\frac{1}{\sqrt{15}}\int\limits_0^{\sqrt{15}}\rho^2 d\rho\right)=$$

$$= 2\pi\left(-\frac{1}{2}\int\limits_0^{\sqrt{15}} (16-\rho^2)^{1/2} d(16-\rho^2) - \frac{1}{\sqrt{15}}\cdot\frac{\rho^3}{3}\Bigg|_0^{\sqrt{15}} \right) =$$

$$= 2\pi\left(-\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}(16-\rho^2)^{3/2}\Bigg|_0^{\sqrt{15}} - \frac{1}{\sqrt{15}}\cdot\frac{15\sqrt{15}}{3} \right) = 2\pi\left(-\frac{1}{3}(1-4^3)-5 \right) = 2\pi\cdot 16 = 32\pi.$$

2. Для нахождения потока векторного поля $\bar{a}$ через замкнутую поверхность S в направлении внешней нормали используем формулу Остроградского – Гаусса. Если $\bar{a} = C(x,y,z)\bar{i} + Q(x,y,z)\bar{j} + R(x,y,z)\bar{k}$, то поток П вычисляется через тройной интеграл так:

$$\Pi = \iiint\limits_T \left(\frac{\partial C}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dxdydz,$$

где T – пространственная область, ограниченная поверхностью S.

В нашем случае $\bar{a} = (5x+1)\bar{i} + (3-2y)\bar{j} + (3z-8)\bar{k}$. Значит,

$$P = 5x+1, \quad \frac{\partial P}{\partial x} = 5;$$

$$Q = 3-2y, \quad \frac{\partial Q}{\partial y} = -2;$$

$$R = 3z-8, \quad \frac{\partial R}{\partial z} = 3.$$

Тогда $\dfrac{\partial P}{\partial x} + \dfrac{\partial Q}{\partial y} + \dfrac{\partial R}{\partial z} = 5-2+3 = 6.$

Поток $\Pi = \oiiint\limits_{(T)} 6dxdydz = 6\cdot V = 6\cdot 32\pi = 192\pi,$

учитывая, что объем V тела T был вычислен нами выше и равен 32π.

3. Найдем циркуляцию векторного поля $\bar{a} = (P;Q;R)$ вдоль замкнутого контура L по формуле

$$C = \int\limits_L Pdx + Qdy + Rdz = \int\limits_L (5x+1)dx + (3-2y)dy + (3z-8)dz.$$

Для нашего случая линия L – окружность, полученная в результате пересечения конуса $15z^2 = x^2 + y^2$ плоскостью $z=1$. Подставив $z=1$ в уравнение конуса, получим $x^2 + y^2 = 15$ – уравнение окружности L, лежащей в плоскости $z=1$. Параметрические уравнения линии L: $x = \sqrt{15}\cos t$, $y = \sqrt{15}\sin t$, $z=1$, $t\in[0;2\pi]$. (Значит, $dx = -\sqrt{15}\sin t dt$, $dy = \sqrt{15}\cos t dt$, $dz = 0$).

Запишем теперь циркуляцию C как определенный интеграл по отрезку $[0;2\pi]$, зависящий от переменной t:

$$C=\int_0^{2\pi}((5\cdot\sqrt{15}\cos t+1)(-\sqrt{15}\sin t)+(3-2\sqrt{15}\sin t)\sqrt{15}\cos t+(3\cdot 1-8)\cdot 0)dt=$$

$$=\int_0^{2\pi}(-75\cos t\sin t-\sqrt{15}\sin t+3\sqrt{15}\cos t-30\sin t\cos t)dt=$$

$$=\int_0^{2\pi}(-105\sin t\cos t-\sqrt{15}\sin t+3\sqrt{15}\cos t)dt=0,$$

поскольку интеграл вычисляется от функций, имеющих период 2π, по отрезку длиной 2π.

Задание 8

Пусть l – граница области интегрирования интеграла из задания 1 (б). Найдите массу дуги l, если ее плотность задана функцией $\rho(x,y)=x^2$.

Решение

Для нахождения массы m дуги l применим формулу $m=\int\limits_l \rho(x,y)dl$, где $\rho(x,y)$ – плотность дуги l. В нашем случае l – граница области, изображенной на рис. 2, являющаяся объединением отрезков *AC, CB* и дуги *AB*. Используя свойство аддитивности, вычислим интегралы по *AC, CB* и *BA*:

AC: $y=0,\quad x\in[-1;1],\quad dl=\sqrt{1+(y'_x)^2}dx=\sqrt{1+0}\,dx=dx$.

Следовательно, $\int\limits_{AC} x^2dl=\int\limits_{-1}^{1}x^2dx=\frac{1}{3}x^3\Big|_{-1}^{1}=\frac{2}{3}.$

BC: $y=1-x,\quad x\in[0;1],\quad dl=\sqrt{1+(-1)^2}dx=\sqrt{2}\,dx$.

Следовательно, $\int\limits_{BC} x^2dl=\int\limits_{0}^{1}x^2\sqrt{2}dx=\frac{\sqrt{2}}{3}x^3\Big|_{0}^{1}=\frac{\sqrt{2}}{3}.$

AB: $\begin{cases}x=\cos t,\\ y=\sin t,\end{cases}\quad t\in\left[\frac{\pi}{2};\pi\right],$

$dl=\sqrt{(x'_t)^2+(y'_t)^2}dt=\sqrt{(-\sin t)^2+(\cos t)^2}\,dt=dt$.

Следовательно, $\int\limits_{AB} x^2dl=\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos^2 tdt=\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{1+\cos 2t}{2}dt=$

$$=\frac{1}{2}t\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}+\frac{1}{4}\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos 2td(2t)=\frac{1}{4}\pi+\frac{1}{4}\sin 2t\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{4}(0-0)=\frac{\pi}{4}.$$

Таким образом, $m = \frac{2}{3} + \frac{\sqrt{2}}{3} + \frac{\pi}{4} = \frac{2\sqrt{2}}{3} + \frac{\pi}{4}.$

Задание 9

Вычислите работу A силы $\vec{F} = yz\vec{i} + xz\vec{j} + xy\vec{k}$ при перемещении вдоль отрезка прямой AB, если $A(1;1;1)$ и B $(2;3;4)$.

Решение

Составим канонические уравнения прямой, проходящей через точки A и B:

$$\frac{x-1}{2-1} = \frac{y-1}{3-1} = \frac{z-1}{4-1} \quad \Leftrightarrow \quad x-1 = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{3}.$$

Перейдем к параметрическим уравнениям:

$$\begin{cases} x-1 = t, \\ \dfrac{y-1}{2} = t, \quad t \in \;, \\ \dfrac{z-1}{3} = t, \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = 1+t, \\ y = 1+2t, \quad t \in \;. \\ z = 1+3t, \end{cases}$$

Поскольку точкам A и B соответствуют значения параметра t, равные 0 и 1, то параметрические уравнения отрезка AB имеют вид

$$\begin{cases} x = 1+t, \\ y = 1+2t, \quad t \in [0;1]. \\ z = 1+3t, \end{cases}$$

Тогда работа A силы $\vec{F}$ по отрезку AB вычисляется по формуле

$$A = \int\limits_{AB} yzdx + xzdy + xydz = \int\limits_0^1 (1+2t)(1+3t)dt + (1+t)(1+3t)2dt +$$

$$+ (1+t)(1+2t)3dt = \int\limits_0^1 (18t^2 + 22t + 6)dt = 23.$$

Решение типового варианта

Ряды

Задание 1

Найдите сумму данного ряда (если он сходится) либо докажите расходимость этого ряда.

а) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{2}{4n^2+8n+3}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^n \operatorname{arctg} e^{n^2-n}$;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^n+7^n}{14^n}$; г) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n e^e$.

Решение

1. Представим n-й член $a_n=\dfrac{2}{4n^2+8n+3}$ в виде суммы простых дробей, учитывая, что $4n^2+8n+3=4\left(n+\dfrac{3}{2}\right)\left(n+\dfrac{1}{2}\right)=(2n+3)(2n+1)$:

$$\frac{2}{4n^2+8n+3}=\frac{2}{(2n+3)(2n+1)}=\frac{A}{2n+3}+\frac{B}{2n+1}=\frac{A(2n+1)+B(2n+3)}{(2n+3)(2n+1)}.$$

Тогда $A(2n+1)+B(2n+3)=2$. При $n=-\dfrac{1}{2}$ будем иметь $B=1$, а при $n=-\dfrac{3}{2}$ получим $A=-1$.

Таким образом,

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2}{4n^2+8n+3}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{2n+3}+\frac{1}{2n+1}\right).$$

Составим n-ю частичную сумму данного ряда:

$$S_n=\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{2k+3}\right)=\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2k+1}-\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2k+3}\right)=$$

$$=1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{3}-\frac{1}{5}-\ldots-\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+3}=1-\frac{1}{2n+3}.$$

Тогда сумма данного ряда

$$S=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2n+3}\right)=1.$$

2. Воспользуемся достаточным условием расходимости знакоположительных рядов, для чего найдем

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n \operatorname{arctg} e^{n^2-n} = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n \cdot \lim_{n\to\infty}\operatorname{arctg} e^{n^2-n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n}\right)^{-1} \cdot \frac{\pi}{2} = e^{-1}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2e}.$$

Поскольку $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$, данный ряд расходится.

3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^n+7^n}{14^n} = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{7}\right)^n + \sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n.$

Исходный числовой ряд является суммой двух рядов, составленных из членов убывающих геометрических прогрессий со знаменателями $q_1 = \dfrac{1}{7} < 1$ и $q_2 = \dfrac{1}{2} < 1$. Тогда сумма исходного ряда

$$S = S_1 + S_2 = \frac{b_1}{1-q_1} + \frac{b_2}{1-q_2} = \frac{\frac{1}{7}}{1-\frac{1}{7}} + \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{7}:\frac{6}{7} + \frac{1}{2}:\frac{1}{2} = 1\frac{1}{6}.$$

4. Составим последовательность частичных сумм данного ряда:

$S_1 = a_1 = e^e,$

$S_2 = a_1 + a_2 = e^e - e^e = 0,$

$S_3 = a_1 + a_2 + a_3 = e^e,$

$S_4 = 0, \ldots .$

Таким образом, $S_n = \{e^e;\, 0;\, e^e;\, 0; \ldots\}$.

Очевидно, что последовательность S_n предела не имеет, что говорит о расходимости данного ряда.

Задание 2

Исследуйте сходимость числового ряда, применив для этого подходящий признак сходимости.

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n+3}}\sin\dfrac{1}{n+2};$ б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\ln n}{\sqrt[3]{n^7}};$ в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(2n+3)!}{n^4}.$

Решение

1. Для исследования сходимости данного ряда используем признак

сравнения в предельной форме. Если ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ – знакоположительные и $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = k > 0$, то эти ряды либо оба сходятся, либо оба расходятся.

Для сравнения с данным рядом $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+3}} \sin\frac{1}{n+2}$ возьмем обобщенный гармонический ряд с общим членом $b_n = \frac{1}{n\sqrt{n}}$, который является сходящимся $\left(\alpha = \frac{3}{2} > 1\right)$.

Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{n+3}} \sin\frac{1}{n+2}}{\frac{1}{n\sqrt{n}}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n\sqrt{n}\sin\frac{1}{n+2}}{\sqrt{n+3}}$.

Для вычисления предела воспользуемся первым замечательным пределом $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, из которого следует, что $\sin x \sim x$ при $x \to 0$. В нашем случае $\sin\frac{1}{n+2} \sim \frac{1}{n+2}$ при $n \to \infty$.

Следовательно,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n\sqrt{n}\sin\frac{1}{n+2}}{\sqrt{n+3}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n\sqrt{n}}{(n+2)\sqrt{n+3}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n\sqrt{n}}{n\left(1+\frac{2}{n}\right)\cdot\sqrt{n}\cdot\sqrt{1+\frac{3}{n}}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n\sqrt{n}}{n\sqrt{n}\left(1+\frac{2}{n}\right)\sqrt{1+\frac{3}{n}}} = 1 \neq 0.$$

Значит, исследуемый ряд сходится.

2. Для исследования сходимости данного ряда используем интегральный признак Коши: если члены знакоположительного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ монотонно убывают и функция $y = f(x)$, непрерывная при $x \geq 1$, такова, что $f(n) = a_n$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и несобственный интеграл $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ одновременно либо сходятся, либо расходятся.

Так как $a_n = \dfrac{\ln n}{\sqrt[3]{n^7}}$, то $f(x) = \dfrac{\ln x}{\sqrt[3]{x^7}}$. Эта функция удовлетворяет всем условиям интегрального признака Коши.

Вычислим

$$\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{\sqrt[3]{x^7}} dx = \lim_{b\to+\infty} \int_1^b \frac{\ln x}{\sqrt[3]{x^7}} dx = \left[\begin{array}{l} u = \ln x,\, du = \dfrac{dx}{x} \\ dv = \dfrac{dx}{x^{\frac{7}{3}}},\, v = \int dv = \int \dfrac{dx}{x^{\frac{7}{3}}} = -\dfrac{3}{4 \cdot x^{\frac{4}{3}}} \end{array} \right] =$$

$$= \lim_{b\to+\infty} \left(-\frac{3}{4} \cdot \frac{\ln x}{x^{\frac{4}{3}}} \Bigg|_1^b + \frac{3}{4} \int_1^b \frac{dx}{x^{\frac{7}{3}}} \right) = \lim_{b\to+\infty} \left(-\frac{3}{4} \cdot \frac{\ln b}{b^{\frac{4}{3}}} + \frac{3}{4} \ln 1 - \frac{9}{16} \cdot \frac{1}{x^{\frac{4}{3}}} \Bigg|_1^b \right) =$$

$$= \lim_{b\to+\infty} \left(-\frac{3}{4} \cdot \frac{\ln b}{b^{\frac{4}{3}}} - \frac{9}{16} \cdot \frac{1}{b^{\frac{4}{3}}} + \frac{9}{16} \right) = -\frac{3}{4} \lim_{b\to+\infty} \frac{\ln b}{b^{\frac{4}{3}}} - \frac{9}{16} \lim_{b\to+\infty} \frac{1}{b^{\frac{4}{3}}} + \frac{9}{16}.$$

Очевидно, что $\lim\limits_{b\to+\infty} \dfrac{1}{b^{\frac{4}{3}}} = 0$. Рассмотрим $\lim\limits_{b\to+\infty} \dfrac{\ln b}{b^{\frac{4}{3}}}$. Для его вычисления используем правило Лопиталя:

$$\lim_{b\to+\infty} \frac{\ln b}{b^{\frac{4}{3}}} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{b\to+\infty} \frac{(\ln b)'}{(b^{4/3})'} = \lim_{b\to+\infty} \frac{\frac{1}{b}}{\frac{4}{3} \cdot b^{\frac{1}{3}}} = \lim_{b\to+\infty} \frac{3}{4b^{\frac{4}{3}}} = 0.$$

Таким образом, $\int\limits_1^{+\infty} \dfrac{\ln x}{\sqrt[3]{x^7}} dx = \dfrac{9}{16}$, значит, сходящимся является и исследуемый ряд.

3. Для исследования сходимости данного ряда используем признак Д'Аламбера: если $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ – знакоположительный ряд и $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = q$, то при 1) $q < 1$ ряд сходится; 2) $q > 1$ ряд расходится; 3) $q = 1$ необходимы дополнительные исследования.

Так как $a_n = \dfrac{(2n+3)!}{n^4}$, то $a_{n+1} = \dfrac{(2(n+1)+3)!}{(n+1)^4} = \dfrac{(2n+5)!}{(n+1)^4}$.

Следовательно,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+5)!n^4}{(n+1)^4 \cdot (2n+3)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+3)!(2n+4)\cdot(2n+5)\cdot n^4}{n^4 \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)^4 \cdot (2n+3)!} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+4)(2n+5)}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^4} = \infty > 1.$$

Значит, исследуемый ряд расходится.

Задание 3

Исследуйте сходимость знакочередующегося ряда:

а) $\sum\limits_{n=3}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(3n-5)\ln^2(4n-7)}$; б) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(3n-1)\ln n}$.

Найдите его сумму с точностью 0,01 в случае его абсолютной сходимости.

Решение

1. Рассмотрим ряд, составленный из модулей членов данного ряда

$\sum\limits_{n=3}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n}{(3n-5)\ln^2(4n-7)} \right| = \sum\limits_{n=3}^{\infty} \frac{1}{(3n-5)\ln^2(4n-7)}$ и исследуем его сходимость.

Так как $4n-7 > 3n-5, \ \forall n \geq 3,$ то

$$\frac{1}{(3n-5)\ln^2(4n-7)} < \frac{1}{(3n-5)\ln^2(3n-5)}. \tag{2}$$

Исследуем сходимость мажорирующего ряда $\sum\limits_{n=3}^{\infty} \frac{1}{(3n-5)\ln^2(3n-5)}$ интегральным признаком.

Положим $f(x) = \frac{1}{(3x-5)\ln^2(3x-5)}$ для $x \in [3;\infty]$. Убедимся в том, что условия интегрального признака сходимости выполняются для функции $f(x)$ на промежутке $[3;\infty]$. Исследуем монотонность функции $f(x)$ с помощью производной:

$$f'(x) = \left(\frac{1}{(3x-5)\ln^2(3x-5)} \right)' = -\frac{(3x-5)'\ln^2(3x-5) - (3x-5)(\ln^2(3x-5))'}{(3x-5)^2\ln^4(3x-5)} =$$

$$= -\frac{3\ln^2(3x-5) - (3x-5)\cdot 2\ln(3x-5)\cdot \frac{1}{3x-5}\cdot 3}{(3x-5)^2\ln^4(3x-5)} =$$

$$= -\frac{3\ln(3x-5)(\ln(3x-5)-2)}{(3x-5)^2\ln^4(3x-5)} = \frac{6-3\ln(3x-5)}{(3x-5)^2\ln^3(3x-5)}.$$

$f'(x) < 0 \;\; \forall x \in [3;+\infty)$, следовательно, функция $f(x)$ монотонно убывает на промежутке $[3;+\infty)$. Кроме того, $f(x)$ непрерывна и неотрицательна на этом промежутке.

Таким образом, условия интегрального признака для функции $f(x)$ на промежутке $[3;+\infty)$ выполнены.

Исследуем теперь сходимость несобственного интеграла

$$\int_3^{\infty} \frac{dx}{(3x-5)\ln^2(3x-5)} = \frac{1}{3}\lim_{b\to\infty}\int_3^b \frac{d(\ln(3x-5))}{\ln^2(3x-5)} = -\frac{1}{3}\lim_{b\to\infty} \frac{1}{\ln(3x-5)}\bigg|_3^b =$$

$$= -\frac{1}{3}\lim_{b\to\infty}\left(\frac{1}{\ln(3b-5)} - \frac{1}{\ln 4}\right) = \frac{1}{6\ln 2}.$$

Несобственный интеграл сходится, следовательно, по интегральному признаку Коши ряд $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\frac{1}{(3n-5)\ln^2(3n-5)}$ тоже сходится. В таком случае из неравенства (2) по признаку сравнения вытекает сходимость мажорируемого ряда $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\frac{1}{(3n-5)\ln^2(4n-7)}$.

Таким образом, окончательно получаем: исходный ряд

$\sum\limits_{n=3}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(3n-5)\ln^2(4n-7)}$ сходится абсолютно.

Остается найти его сумму S с точностью 0,01. Известно, что $S = S_n + r_n$, где r_n – остаточный член ряда, S_n – n-я частичная сумма. Как следует из признака Лейбница, $|r_n| \le |a_{n+1}|$. Найдем n, при котором $|a_{n+1}| \le 0{,}01$. Неравенство $\frac{1}{(3n-2)\ln^2(4n-3)} \le 0{,}01$ справедливо при $n \ge 5$. Значит, в соответствии с условием сумма данного ряда

$$S \approx S_5 = -\frac{1}{4\ln^2 5} + \frac{1}{7\ln^2 11} - \frac{1}{10\ln^2 13} =$$

$$= -0{,}09651 + 0{,}02485 - 0{,}00958 = -0{,}95.$$

2. Исследуем абсолютную сходимость данного ряда. Ряд из модулей его членов имеет вид $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(3n-1)\ln n}$.

Так как $\frac{1}{(3n-1)\ln n} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{3n\ln n}$ и $\int\limits_2^{\infty}\frac{dx}{3x\ln x} = \frac{1}{3}\lim\limits_{b\to\infty}\ln|\ln x|\Big|_2^b = \infty$, то ряд из модулей расходится. Это значит, что ряд не является абсолютно сходящимся.

Проверим, сходится ли он условно. Поскольку для исходного знакочередующегося ряда выполнен признак Лейбница:

1) $\frac{1}{5\ln 2} > \frac{1}{8\ln 3} > \ldots > \frac{1}{(3n-1)\ln n} > \frac{1}{(3n+2)\ln(n+1)} > \ldots;$

2) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{(3n-1)\ln n} = 0,$

то он сходится условно.

Задание 4

Найдите интервал и область сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x-6)^n}{(n+4)\cdot 4^n}$.

Укажите, какими свойствами обладает сумма этого ряда в интервале сходимости.

Решение

Для нахождения радиуса сходимости R степенного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n (x-x_0)^n$ воспользуемся формулой $R = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|$. Так как $c_n = \frac{1}{(n+4)\cdot 4^n}$, $c_{n+1} = \frac{1}{(n+5)\cdot 4^{n+1}}$, то $R = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{c_n}{c_{n+1}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+5)\cdot 4^{n+1}}{(n+4)\cdot 4^n} = 4$.

Следовательно, интервал сходимости ряда определяется неравенством $|x-6| < 4 \Leftrightarrow -4 < x-6 < 4 \Leftrightarrow 2 < x < 10$, т. е. $x \in (2;10)$.

Исследуем поведение ряда на границах этого интервала.

При $x = 2$ получаем числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+4}$.

Исследуем его сходимость с помощью признака Лейбница: если для знакочередующегося ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n u_n$ выполняются два условия

1) $u_1 > u_2 > \ldots > u_n > \ldots$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$,

то этот ряд сходится.

Проверим эти условия:

1) $u_n = \frac{1}{n+4}$: $\frac{1}{5} > \frac{1}{6} > \ldots > \frac{1}{n+4} > \ldots$. Первое из условий выполняется.

2) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n+4} = 0$ – верно.

Таким образом, по признаку Лейбница данный ряд сходится. Следовательно, точку $x=2$ нужно присоединить к интервалу сходимости.

Выясним, является ли эта сходимость абсолютной или условной.

Рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+4}$, составленный из модулей членов данного ряда.

Воспользуемся признаком сравнения в предельной форме и сравним этот ряд с гармоническим рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, который является расходящимся:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n+4}}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+4}=1\neq 0.$$

Следовательно, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+4}$ расходится, а значит, исследуемый ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+4}$ сходится условно.

При $x=10$ получаем числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+4}$, который, как было показано выше, является расходящимся.

Значит, точка $x=10$ не входит в область сходимости.

Таким образом, областью сходимости ряда является промежуток $x\in[2;10)$; областью абсолютной сходимости – интервал $(2;10)$. Отметим, что в области сходимости сумма степенного ряда является непрерывной, дифференцируемой и интегрируемой функцией.

Ответ: область сходимости – $[2;10)$; область абсолютной сходимости – $(2;10)$.

Задание 5

Пользуясь признаком Вейерштрасса, докажите равномерную сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(nx)}{n^2}$ при $x\in\mathbf{R}$. Обоснуйте, обладает ли сумма ряда свойством непрерывности на этом промежутке.

Решение

Напомним признак Вейерштрасса: если функциональный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ в области D мажорируется сходящимся числовым рядом с положительными членами $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, т. е. выполняется неравенство $|u_n(x)| \le a_n \quad \forall x \in X$, то он равномерно сходится в этой области.

Рассматриваемый функциональный ряд на множестве $D = \mathbf{R}$ мажорируется сходящимся числовым рядом с общим членом $a_n = \dfrac{1}{n^2}$, так как для $\forall x \in \mathbf{R}$ верно: $|\cos(nx)| \le 1$ и $\left|\dfrac{\cos(nx)}{n^2}\right| \le \dfrac{1}{n^2}$. Значит, функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos(nx)}{n^2}$ является равномерно сходящимся на $\mathbf{R}$.

При этом сумма ряда является непрерывной функцией на $\mathbf{R}$, так как членами ряда являются непрерывные функции и ряд сходится равномерно на множестве $\mathbf{R}$.

Задание 6

Найдите область сходимости и сумму степенного ряда.

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^{2n-1}}{4^n \cdot 2n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} (3n-2) \cdot x^{3n-1}$.

Решение

1. Для нахождения области сходимости степенного ряда с «пропусками» (некоторые коэффициенты c_n ряда $\sum_{n=1}^{\infty} c_n \cdot x^n$ равны нулю) воспользуемся признаком Д'Аламбера.

Так как $u_n(x) = \dfrac{x^{2n-1}}{4^n \cdot 2n}$, а $u_{n+1}(x) = \dfrac{x^{2n+1}}{4^{n+1} \cdot 2(n+1)}$, то

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{2n+1} \cdot 4^n \cdot 2n}{4^{n+1} \cdot 2(n+1) \cdot x^{2n-1}}\right| = \frac{x^2}{4}.$$

Для сходимости ряда необходимо, чтобы $\dfrac{x^2}{4} < 1$, т. е. $|x| < 2$. Значит, (–2; 2) – интервал сходимости ряда.

Исследуем поведение ряда в граничных точках.

Повторяя рассуждения, аналогичные проведенным при решении задания 4, заключаем, что точки $x = -2$ и $x = 2$ являются точками расходимости данного степенного ряда.

Для нахождения суммы степенного ряда запишем его в виде $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{4^n\cdot 2n}=\frac{1}{x}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{4^n\cdot 2n}=\frac{1}{x}S_1(x)$, где $S_1(x)$ – сумма ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{4^n\cdot 2n}$ в интервале сходимости (–2; 2).

Так как любой степенной ряд $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ в своей области сходимости является равномерно сходящимся, то он допускает почленное дифференцирование, при этом интервал сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty}u_n'(x)$ остается тем же, что и у ряда $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$.

Таким образом,

$$S_1^{/}(x)=\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{4^n\cdot 2n}\right)^{/}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x^{2n}}{4^n\cdot 2n}\right)^{/}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{4^n}=$$

$$=\frac{x}{4}+\frac{x^3}{4^2}+\frac{x^5}{4^3}+\ldots+\frac{x^{2n-1}}{4^n}+\ldots\ .$$

При $|x|<2$ данный ряд представляет собой сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии с первым членом $b_1=\frac{x}{4}$ и знаменателем $q=\frac{x^2}{4}<1$, а значит $S_1^{/}(x)=\frac{b_1}{1-q}=\frac{\frac{x}{4}}{1-\frac{x^2}{4}}=\frac{x}{4-x^2}$.

Для нахождения суммы $S_1(x)$ проинтегрируем $S_1^{/}(x)$:

$$S_1(x)=\int\frac{xdx}{4-x^2}=\left\{\begin{array}{l}4-x^2=t\\ -2xdx=dt\\ xdx=-\frac{dt}{2}\end{array}\right\}=-\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t}=-\frac{1}{2}\ln|t|+C=-\frac{1}{2}\ln\left|4-x^2\right|+C.$$

Найдем C, исходя из условия $S_1(0)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{0^{2n}}{4^n\cdot 2n}=0$. Тогда

$$0=-\frac{1}{2}\ln|4-0|+C\ \Rightarrow\ C=\frac{1}{2}\ln 4,\ \text{ т. е. } C=\ln 2.$$

Следовательно, сумма исходного ряда равна

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{4^n\cdot 2n}=\frac{1}{x}\cdot S_1(x)=\frac{1}{x}\left(-\frac{1}{2}\ln\left|4-x^2\right|+\ln 2\right)=-\frac{1}{2x}\ln\left|4-x^2\right|+\frac{\ln 2}{x}.$$

Таким образом, $S(x)=-\frac{1}{2x}\ln\left|4-x^2\right|$, $x\neq 0$; $S(x)=0$ при $x=0$.

2. Для нахождения области сходимости степенного ряда с «пропусками» воспользуемся признаком Д'Аламбера.

Так как $u_n(x)=(3n-2)x^{3n-1}$, а $u_{n+1}(x)=(3n+1)x^{3n+2}$, то

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{3n+2}\cdot(3n+1)}{(3n-2)\cdot x^{3n-1}}\right|=\left|x^3\right|.$$

Для сходимости ряда необходимо, чтобы $\left|x^3\right|<1$, т. е. $|x|<1$. Значит, $(-1;1)$ – интервал сходимости.

Исследуем поведение ряда в граничных точках.

При $x=\pm 1$ ряды $\sum_{n=1}^{\infty}(3n-2)$ и $\sum_{n=1}^{\infty}(3n-2)\cdot(-1)^{3n-1}$ будут расходящимися, так как для них не выполняется необходимое условие сходимости числовых рядов: $\lim_{n\to\infty}a_n=0$. Значит, область сходимости исходного ряда – интервал $(-1;1)$.

Для нахождения суммы степенного ряда запишем его в виде:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(3n-2)x^{3n-1}=x^2\sum_{n=1}^{\infty}(3n-2)x^{3n-3}=x^2S_1(x),$$

где $S_1(x)$ – сумма ряда $\sum_{n=1}^{\infty}(3n-2)x^{3n-3}$ в интервале сходимости $(-1;1)$.

Так как степенной ряд в своей области сходимости является равномерно сходящимся, то он допускает почленное интегрирование, при этом полученный после интегрирования степенной ряд по-прежнему имеет интервал сходимости $(-1;1)$.

Таким образом,

$$S_2(x)=\int S_1(x)dx=\int\left(\sum_{n=1}^{\infty}(3n-2)x^{3n-3}\right)dx=\sum_{n=1}^{\infty}\int(3n-2)x^{3n-3}dx=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}x^{3n-2}=x+x^4+\ldots+x^{3n-2}+\ldots.$$

При $|x|<1$ данный ряд представляет собой сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии с первым членом $b_1=x$ и знаменателем $q=x^3$: $|q|=\left|x^3\right|<1$, а значит, $S_2(x)=\frac{b_1}{1-q}=\frac{x}{1-x^3}$.

Для нахождения суммы $S_1(x)$ продифференцируем $S_2(x)$:

$$S_1(x) = S_2^{/}(x) = \left(\frac{x}{1-x^3}\right)^{/} = \frac{2x^3+1}{(1-x^3)^2}.$$

Следовательно, сумма исходного ряда

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty}(3n-2)x^{3n-1} = x^2 \cdot S_1(x) = \frac{x^2(2x^3+1)}{(1-x^3)^2}.$$

Ответ: $S(x) = \dfrac{x^2(2x^3+1)}{(1-x^3)^2}, \quad x \in (-1;1).$

Задание 7

Вычислите интеграл $\int\limits_0^1 \dfrac{\ln\left(1+\dfrac{x}{5}\right)}{x}dx,$ разложив подынтегральную функцию в ряд Маклорена. Укажите число членов числового ряда, полученного после интегрирования степенного ряда, необходимых для достижения точности вычислений с погрешностью $\varepsilon = 10^{-5}$.

Решение

Поскольку для подынтегральной функции $f(x) = \dfrac{\ln\left(1+\dfrac{x}{5}\right)}{x}$ не существует первообразной, выражающейся через элементарные функции, разложим эту функцию в ряд Маклорена. После подстановки $t = \dfrac{x}{5}$ в ряд Маклорена функции

$$\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{t^n}{n} + \ldots, \quad t \in (-1;1],$$

получаем ряд

$$\ln\left(1+\frac{x}{5}\right) = \frac{x}{5} - \frac{\left(\frac{x}{5}\right)^2}{2} + \frac{\left(\frac{x}{5}\right)^3}{3} - \ldots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{\left(\frac{x}{5}\right)^n}{n} + \ldots, \ \frac{x}{5} \in (-1;1].$$

Полученный ряд сходится для $x \in (-5;5]$. Тогда

$$\int_0^1 \frac{\ln\left(1+\frac{x}{5}\right)}{x}dx = \int_0^1 \frac{1}{x}\left(\frac{x}{5} - \frac{\left(\frac{x}{5}\right)^2}{2} + \frac{\left(\frac{x}{5}\right)^3}{3} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{\left(\frac{x}{5}\right)^n}{n} + \ldots\right)dx =$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{2}\cdot\frac{x}{5^2} + \frac{1}{3}\cdot\frac{x^2}{5^3} - \ldots + (-1)^{n-1}\cdot\frac{1}{n}\cdot\frac{x^{n-1}}{5^n} + \ldots\right)dx =$$

$$= \left(\frac{1}{5}x - \frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{2\cdot 5^3} + \frac{1}{3}\cdot\frac{x^3}{3\cdot 5^3} - \ldots + (-1)^{n-1}\cdot\frac{1}{n^2}\cdot\frac{x^n}{5^n} + \ldots\right)\Bigg|_0^1 =$$

$$= \frac{1}{5} - \frac{1}{2^2\cdot 5^3} + \frac{1}{3^2\cdot 5^4} - \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{n^2\cdot 5^n} + \ldots .$$

Полученный числовой ряд знакочередующийся и, согласно теореме Лейбница, остаток ряда, взятый по модулю, не превосходит модуля первого отбрасываемого члена. Таким образом, абсолютная погрешность будет меньше, чем первый отбрасываемый член, взятый по модулю, т. е. $|r_n| \le |a_{n+1}| < \varepsilon$. В нашем случае неравенство $\frac{1}{(n+1)^2\cdot 5^{n+1}} < 10^{-5}$ справедливо $\forall n \ge 4$. Тогда указанная точность достигается уже при $n = 4$, значит,

$$\int_0^1 \frac{\ln\left(1+\frac{x}{5}\right)dx}{x} \approx \frac{1}{5} - \frac{1}{2^2\cdot 5^3} + \frac{1}{3^2\cdot 5^4} - \frac{1}{4^2\cdot 5^5}.$$

Задание 8

Вычислите предел $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x - x}{x^{12}+5x^3}$, используя разложение элементарных функций в ряд Маклорена.

Решение

Ряд Маклорена для функции $\sin x$ имеет вид

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots .$$

Он сходится для любого $x \in$. Тогда

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x}{x^{12}+5x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots\right) - x}{x^{12}+5x^3} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\ldots}{x^{12}+5x^3}=\left(\frac{0}{0}\right)=$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{x^3\left(-\frac{1}{3!}+\frac{x^2}{5!}-\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n-2}}{(2n+1)!}+\ldots\right)}{x^3(x^9+5)}=$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{3!}+\frac{x^2}{5!}-\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n-2}}{(2n+1)!}+\ldots}{x^9+5}=$$

$$=\left|\begin{array}{l}\frac{x^2}{5!}-\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n-2}}{(2n+1)!}+\cdots=\frac{x^2}{5!}+o(x^5)\\ \text{при}\ \ x\to 0\end{array}\right|=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{3!}+\frac{x^2}{5!}}{5+x^9}=-\frac{1}{3!\cdot 5}=-\frac{1}{30}.$$

Задание 9

Представьте число $a=\sqrt[3]{9}$ в виде суммы сходящегося числового ряда. Какова будет точность вычисления данного числа, если взять первые четыре члена этого ряда?

Решение

Запишем данное число a в следующем виде:

$$\sqrt[3]{9}=\sqrt[3]{8+1}=(8+1)^{1/3}=8^{1/3}\cdot\left(1+\frac{1}{8}\right)^{1/3}=2\cdot\left(1+\frac{1}{8}\right)^{1/3}.$$

Для представления этого числа в виде суммы сходящегося числового ряда воспользуемся биноминальным рядом

$$(1+x)^\alpha=1+\frac{\alpha}{1!}x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\ldots+\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+\ldots,$$

сходящимся для всех $x\in[-1;1)$.

Тогда данное число $\sqrt[3]{9}$ будет суммой числового ряда, полученного при $x=\frac{1}{8}$, $\alpha=\frac{1}{3}$. Очевидно, что это сходящийся знакочередующийся ряд:

$$2\cdot\left(1+\frac{1}{8}\right)^{1/3}=2\cdot\left(1+\frac{\frac{1}{3}}{1!}\cdot\frac{1}{8}+\frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)}{2!}\cdot\left(\frac{1}{8}\right)^2+\frac{\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{3}-1\right)\left(\frac{1}{3}-2\right)}{3!}\cdot\left(\frac{1}{8}\right)^3+\ldots\right).$$

Если, в соответствии с условием задачи, взять только первые четыре члена этого ряда, то, согласно признаку Лейбница, абсолютная погрешность вычислений $\varepsilon = r_4$ меньше, чем взятый по модулю пятый член ряда. Вычислим a_5 :

$$a_5=\frac{2\cdot\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{3}-1\right)\left(\frac{1}{3}-2\right)\left(\frac{1}{3}-3\right)}{4!}\cdot\left(\frac{1}{8}\right)^4=\frac{2\cdot\frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{5}{3}\right)\left(-\frac{8}{3}\right)}{2\cdot3\cdot4\cdot8^4}=-\frac{5}{497664}.$$

Таким образом, $\varepsilon=|r_4|<|a_5|$, при этом $a_5\approx 2{,}01\cdot10^{-5}<10^{-4}$.

Значит, точность ε вычисления числа $\sqrt[3]{9}$ с помощью частичной суммы S_4 будет выше чем 10^{-4}.

Решение типового варианта

Элементы теории функций комплексной переменной

Задание 1

Постройте линии, заданные уравнениями: 1) $\operatorname{Re} z = 1$, 2) $|z-2| = 2$, 3) $\arg z = \dfrac{\pi}{4}$, и область D, заданную системой неравенств: 4) $|z-2| \le 2$, $\operatorname{Re} z \le 1$, $\dfrac{\pi}{4} \le \arg z < \dfrac{\pi}{2}$. Проверьте, принадлежит ли точка $z_0 = 1 + \sqrt{3}i$ области D.

Решение

1. Пусть $z = x + iy$. Тогда $\operatorname{Re} z = x$, следовательно, уравнение $\operatorname{Re} z = 1$ равносильно уравнению $x = 1$, которое определяет прямую, параллельную оси Oy (рис. 9).

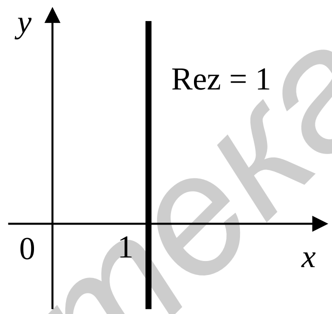


Рис. 9

2. Подставим $z = x + iy$ в уравнение $|z-2| = 2$. Получим

$$|x + iy - 2| = 2 \Leftrightarrow |(x-2) + iy| = 2 \Leftrightarrow \sqrt{(x-2)^2 + y^2} = 2 \Leftrightarrow (x-2)^2 + y^2 = 2^2.$$

Это уравнение определяет окружность радиусом 2 с центром в точке $z_0 = 2$ (рис. 10).

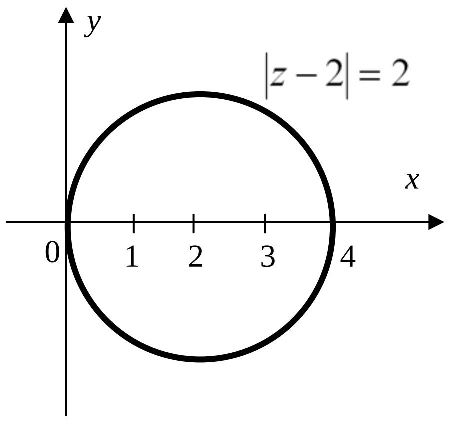


Рис. 10

3. Уравнение $\arg z = \dfrac{\pi}{4}$ определяет луч, исходящий из начала координат под углом $\varphi = \dfrac{\pi}{4}$ к оси Ox (рис. 11).

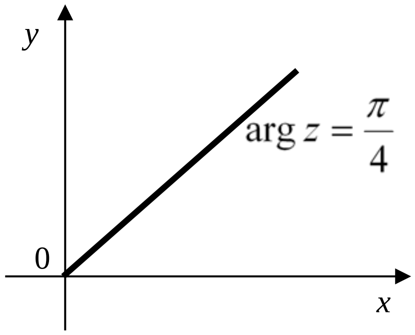


Рис. 11

4. Для построения области D изобразим линии 1–3 на одном рисунке. Добавим к ним луч $\arg z = \dfrac{\pi}{2}$.

Нестрогое неравенство $|z-2| \le 2$ определяет множество точек круга с границей $|z-2| = 2$. Нестрогое неравенство $\operatorname{Re} z \le 1$ определяет полуплоскость, лежащую слева от прямой $x = 1$, включая и саму прямую.

Неравенство $\dfrac{\pi}{4} \le \arg z < \dfrac{\pi}{2}$ определяет множество точек, заполняющих угол между лучами $\arg z = \dfrac{\pi}{4}$ и $\arg z = \dfrac{\pi}{2}$. Пересечение описанных множеств – часть сегмента круга $|z-2| \le 2$ с удаленной точкой 0 (рис. 12).

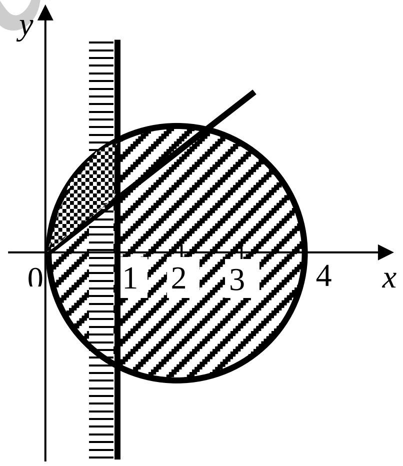


Рис. 12

Для того чтобы установить, принадлежит ли точка $z_0 = 1+\sqrt{3}\,i$ области *D*, проверим, выполняются ли для нее неравенства $|z_0 - 2| \le 2$, $\operatorname{Re} z_0 \le 1$, $\frac{\pi}{4} \le \arg z_0 < \frac{\pi}{2}$.

$|z_0 - 2| = |1+\sqrt{3}i - 2| = |-1+\sqrt{3}i| = \sqrt{1+(\sqrt{3})^2} = 2 \le 2$ – верно,

$\operatorname{Re} z_0 = 1 \le 1$ – верно, $\arg z_0 = \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{1} = \frac{\pi}{3} \in \left[\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right)$ – верно.

Таким образом, $z_0 = 1+\sqrt{3}\,i$ принадлежит области *D*.

Задание 2

Дано уравнение $(4z^2 - iz)(1+\sin 2\pi iz) = 0$ и область $D: \left|z - \frac{1}{2}\right| < 1$.

1. Найдите все корни этого уравнения.
2. Определите, какие из корней являются простыми, а какие – кратными.
3. Укажите, какие из корней принадлежат области *D*.

Решение

1. $(4z^2 - iz)(1+\sin 2\pi iz) = 0 \;\Leftrightarrow\; \left[\begin{array}{l} 4z^2 - iz = 0, \\ 1+\sin 2\pi iz = 0 \end{array}\right. \;\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow\; \left[\begin{array}{l} z(4z-i) = 0, \\ \sin 2\pi iz = -1 \end{array}\right. \;\Leftrightarrow\; \left[\begin{array}{l} z = 0, \\ z = \dfrac{i}{4}, \\ 2\pi iz = \arcsin(-1). \end{array}\right.$$

Вычислим $\arcsin(-1)$.

Поскольку $\arcsin z_0 = -i\,\mathrm{Ln}(iz_0 + \sqrt{1-z_0{}^2})$, то

$\arcsin(-1) = -i\,\mathrm{Ln}(-i + \sqrt{1-(-1)^2}) = -i\,\mathrm{Ln}(-i)$.

Используя формулу $\mathrm{Ln}(-i) = \ln|-i| + i(\arg(-i) + 2\pi k)$, где $k \in \mathrm{Z}$, получаем

$$\mathrm{Ln}(-i) = \ln 1 + i\left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right) = \pi i\left(-\frac{1}{2} + 2k\right),$$

где $k \in \mathrm{Z}$.

Таким образом, $\arcsin(-1) = -i\pi i\left(-\frac{1}{2} + 2k\right) = \pi\left(-\frac{1}{2} + 2k\right)$.

Возвращаясь к уравнению $2\pi iz = \arcsin(-1)$, получаем

$$2\pi iz = \pi\left(-\frac{1}{2}+2k\right) \quad\Leftrightarrow\quad z=\frac{1}{2i}\left(-\frac{1}{2}+2k\right)=i\left(\frac{1}{4}-k\right), \quad k\in Z.$$

В итоге множество всех корней данного уравнения имеет вид:

$$\left\{z=0,\ z=\frac{i}{4},\ z_k=i\left(\frac{1}{4}-k\right),\ k\in Z\right\}.$$

2. Очевидно, что корень $z=0$ не встречается в наборе корней z_k ни при каких целых значениях k. Это означает: $z=0$ – простой корень исходного уравнения.

Заметим, что корень $z=\frac{i}{4}$ встречается также и в наборе корней вида $z_k=i\left(\frac{1}{4}-k\right)$ при $k=0$.

Остается только проверить, являются ли корни $z_k=i\left(\frac{1}{4}-k\right)$ кратными корнями уравнения. Это равносильно вопросу о том, являются ли эти числа кратными нулями функции $f(z)=1+\sin 2\pi iz$. Для проверки этого вычислим производную $f'(z)=\cos 2\pi iz\cdot 2\pi i$ в точках $z_k=i\left(\frac{1}{4}-k\right), \quad k\in Z$:

$$f'\left(i\left(\frac{1}{4}-k\right)\right)=2\pi i\cdot\cos\left(2\pi i\cdot i\left(\frac{1}{4}-k\right)\right)=2\pi i\cdot\cos\left(-2\pi\left(\frac{1}{4}-k\right)\right)=$$

$$=2\pi i\cdot\cos\left(2\pi k-\frac{\pi}{2}\right)=2\pi i\cdot\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)=0.$$

Вычислим теперь вторую производную функции $f(z)$:

$$f''(z)=(2\pi i\cdot\cos 2\pi iz)'=(2\pi i)^2(-\sin 2\pi iz)=4\pi^2\sin 2\pi iz.$$

Подставим в $f''(z)$ $\quad z_k=i\left(\frac{1}{4}-k\right)$:

$$f''\left(i\left(\frac{1}{4}-k\right)\right)=4\pi^2\sin\left(2\pi i\cdot i\left(\frac{1}{4}-k\right)\right)=4\pi^2\sin\left(-2\pi\left(\frac{1}{4}-k\right)\right)=$$

$$=4\pi^2\cdot\sin\left(2\pi k-\frac{\pi}{2}\right)=4\pi^2\cdot\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)=-4\pi^2\neq 0.$$

В итоге мы получили: $f(z_k)=0$, $f'(z_k)=0$, $f''(z_k)\neq 0$. Это означает, что числа $z_k=i\left(\frac{1}{4}-k\right)$, $k\in Z$ – двукратные нули функции $f(z)$. Таким образом, для исходного уравнения числа z_k, $k \neq 0$ – корни кратности 2, $z = \frac{i}{4}$ – корень кратности 3, $z = 0$ – простой корень.

3. Выясним, какие из корней принадлежат области D.

Для этого достаточно проверить, выполняется ли для каждого из них неравенство $\left|z - \frac{1}{2}\right| < 1$.

Проверим корень $z = 0$: $\left|0 - \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2} < 1 \Rightarrow z = 0 \in D$.

Проверим корень $z = \frac{i}{4}$: $\left|\frac{i}{4} - \frac{1}{2}\right| = \sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{5}{16}} < 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow z = \frac{i}{4} \in D$.

Рассмотрим корни $z_k = i\left(\frac{1}{4} - k\right), k \neq 0, k \in Z$. Пусть $k = 1$, тогда $z = -\frac{3i}{4}$.

Проверим, принадлежит ли он области D:

$$\left|-\frac{3i}{4} - \frac{1}{2}\right| = \sqrt{\left(-\frac{3}{4}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{13}{16}} < 1 \Rightarrow z = -\frac{3i}{4} \in D.$$

Остальные корни z_k лежат вне области D, так как

$$\left|z_k - \frac{1}{2}\right| > 1, \; k \in Z, \; k \neq 0, \; k \neq 1.$$

Задание 3

1. Выясните, является ли функция $f(z) = e^{\bar{z}}$ аналитической в области

$$D: \begin{cases} |\operatorname{Re} z| < \pi, \\ -\pi < \operatorname{Im} z < 0. \end{cases}$$

2. Вычислите $\int\limits_L e^{\bar{z}} dz$, где L – отрезок прямой, соединяющий точки $z_1 = 0$ и $z_2 = \pi - \pi i$.

Решение

1. Запишем данную функцию $f(z)$ в виде $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$, а

затем проверим, выполняются ли для этой функции в области D условия Коши – Римана: $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y},\ \dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{\partial v}{\partial x}.$

Пусть $z=x+iy,$ тогда $\bar z=x-iy,$ а значит,

$$e^{\bar z}=e^{x-iy}=e^{x}\cdot e^{-iy}=e^{x}(\cos(-y)+i\sin(-y))=e^{x}\cos y-ie^{x}\sin y.$$

Таким образом, действительная часть функции $e^{\bar z}$ равна: $u(x,y)=e^{x}\cos y,$ мнимая часть этой функции равна $v(x,y)=-e^{x}\sin y.$

Функции $u(x,y)$ и $v(x,y)$ действительных переменных x,y дифференцируемы в любой точке $(x;\,y).$ Вычислим их частные производные первого порядка:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=e^{x}\cos y,\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-e^{x}\sin y,\ \frac{\partial v}{\partial x}=-e^{x}\sin y,\ \frac{\partial v}{\partial y}=-e^{x}\cos y.$$

Условия Коши – Римана в этом случае имеют вид

$$\begin{cases}e^{x}\cos y=-e^{x}\cos y,\\ -e^{x}\sin y=e^{x}\sin y\end{cases}\Leftrightarrow\quad\begin{cases}e^{x}\cdot 2\cos y=0,\\ e^{x}\cdot 2\sin y=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\cos y=0,\\ \sin y=0\end{cases}\Leftrightarrow y\in\varnothing.$$

Таким образом, $f(z)=e^{\bar z}$ не является аналитической ни в одной точке из области D.

2. Напишем уравнение прямой, проходящей через точки $z_1=0$ и $z_2=\pi-\pi i.$ Поскольку прямая проходит через начало координат, то ее уравнение $y=kx.$ Так как $z_2=(\pi;-\pi)$, то, подставив в это уравнение $x_2=\pi$ и $y_2=-\pi,$ получим $-\pi=k\pi.$ Следовательно, $k=-1.$

Итак, $y=-x,\ \ x\in[0;\pi].$ Тогда на данном отрезке, соединяющем точки z_1 и z_2, интеграл принимает следующий вид:

$$\int\limits_L e^{\bar z}dz=\left|\begin{array}{l}z=x+iy=x-xi\\ \bar z=x+ix=x(1+i)\\ dz=dx(1-i)\\ 0\le x\le\pi\end{array}\right|=\int\limits_0^{\pi}e^{x(1+i)}dx(1-i)=(1-i)\frac{e^{x(1+i)}}{1+i}\Bigg|_0^{\pi}=$$

$$=\frac{1-i}{1+i}(e^{\pi(1+i)}-e^{0})=\frac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)}(e^{\pi}\cdot e^{\pi i}-1)=(-i)(e^{\pi}(\cos\pi+i\sin\pi)-1)=(e^{\pi}+1)i.$$

Задание 4

Функция $f(z)$ в окрестности $(0<|z+i|<R)$ своей изолированной

особой точки $z_0 = -i$ разложена в ряд Лорана $f(z) = \sum_{n=-2}^{\infty} \frac{(z+i)^n}{(2n+5)!}.$

1. Определите тип особой точки $z_0 = -i.$

2. Найдите вычет функции $f(z)$ в этой точке.

3. Вычислите интегралы

$$\oint_{|z+i|=r} \frac{f(z)}{(z+i)^2} dz \quad \text{и} \quad \oint_{|z+i|=r} f(z)(z+i)^2 dz,$$

где $0 < r < R.$

Решение

В соответствии с условием задачи в окрестности $0 < |z+i| < R$ функция $f(z)$ представлена своим рядом Лорана:

$$\sum_{n=-2}^{\infty} \frac{(z+i)^n}{(2n+5)!} = \frac{(z+i)^{-2}}{(-4+5)!} + \frac{(z+i)^{-1}}{(-2+5)!} + \frac{(z+i)^0}{5!} + \frac{z+i}{(2+5)!} + \frac{(z+i)^2}{(4+5)!} + \ldots =$$

$$= \frac{1}{(z+i)^2} + \frac{1}{3!(z+i)} + \frac{1}{5!} + \frac{z+i}{7!} + \frac{(z+i)^2}{9!} + \ldots .$$

1. Так как главная часть ряда Лорана $\frac{1}{(z+i)^2} + \frac{1}{3!(z+i)}$ содержит два члена, то $z_0 = -i$ – полюс второго порядка.

2. Поскольку вычет функции $f(z)$ в изолированной особой точке $z_0 = -i$ равен коэффициенту c_{-1} при минус первой степени $(z+i)$, то $\operatorname{res} f(-i) = \frac{1}{3!} = \frac{1}{6}.$

3. Как известно, коэффициенты ряда Лорана для функции $f(z)$ в указанной окрестности $(0 < |z+i| < R)$ можно найти по формулам

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z+i|=r} \frac{f(z)dz}{(z+i)^{n+1}}, \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots),$$

где $|z+i| = r$ – произвольная окружность с радиусом $r < R.$

Отсюда следует, что $\frac{1}{2\pi i} \oint_{|z+i|=r} \frac{f(z)dz}{(z+i)^2} = c_1$, т. е. $\oint_{|z+i|=r} \frac{f(z)dz}{(z+i)^2} = 2\pi i c_1.$

Аналогично $\frac{1}{2\pi i} \oint_{|z+i|=r} f(z)(z+i)^2 dz = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z+i|=r} \frac{f(z)dz}{(z+i)^{-2}} =$

$$= \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z+i|=r} \frac{f(z)dz}{(z+i)^{-3+1}} = c_{-3}, \text{ откуда следует, что } \oint_{|z+i|=r} f(z)(z+i)^2 dz = 2\pi i c_{-3}.$$

В соответствии с данным лорановским разложением $c_1 = \dfrac{1}{7!}$, $c_{-3} = 0$. Таким образом, $\oint\limits_{|z+i|=r} \dfrac{f(z)}{(z+i)^2}\,dz = \dfrac{2\pi i}{7!}$, $\oint\limits_{|z+i|=r} f(z)(z+i)^2\,dz = 0.$

Задание 5

Дана функция $f(z) = \dfrac{2}{z}\cos^2\left(\dfrac{2}{z}\right).$

1. Найдите ее изолированную особую точку z_0.
2. Разложите функцию в ряд Лорана в окрестности этой точки.
3. Определите тип этой точки.
4. Найдите вычет функции $f(z)$ в точке z_0.
5. Вычислите интегралы $\oint\limits_{C_i} f(z)dz$, где C_i – заданные контуры, $i = 1, 2, 3$:

$C_1 : |z| = 0{,}2;$ $C_2 :$ $|z-1-i| = 1;$ C_3: $|z-1-i| = 2.$

Решение

1. Функция $f(z) = \dfrac{2}{z}\cos^2\left(\dfrac{2}{z}\right)$ имеет единственную особую точку $z_0 = 0.$

2. Запишем функцию $f(z)$ в следующем виде:

$$f(z) = \frac{2}{z}\left(\frac{1+\cos\left(\frac{4}{z}\right)}{2}\right) = \frac{1}{z}\left(1+\cos\left(\frac{4}{z}\right)\right).$$

Для любого комплексного числа t справедливо разложение

$$\cos t = 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \frac{t^6}{6!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\,\frac{t^{2n}}{(2n)!}.$$

Полагая $t = \dfrac{4}{z}$, получим

$$\frac{1}{z}\left(1+\cos\left(\frac{4}{z}\right)\right) = \frac{1}{z}\left(1+1-\frac{1}{2!}\cdot\left(\frac{4}{z}\right)^2 + \frac{1}{4!}\cdot\left(\frac{4}{z}\right)^4 - \frac{1}{6!}\cdot\left(\frac{4}{z}\right)^6 + \ldots\right) =$$

$$= \frac{1}{z}\left(2 - \frac{4^2}{2!\,z^2} + \frac{4^4}{4!\,z^4} - \frac{4^6}{6!\,z^6} + \ldots\right) = \frac{2}{z} - \frac{4^2}{2!\,z^3} + \frac{4^4}{4!\,z^5} - \frac{4^6}{6!\,z^7} + \ldots =$$

$$= \frac{2}{z} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 4^{2n}}{(2n)!\,z^{2n+1}}.$$

Это разложение справедливо для любого $z \neq 0$, т. е. в кольце $0 < |z| < +\infty$.

3. Поскольку главная часть ряда Лорана содержит только один член $\dfrac{2}{z}$, то $z_0 = 0$ является простым полюсом.

4. Так как $\operatorname{res} f(0) = c_{-1}$, то вычет функции в нуле равен 2.

5. Для вычисления интегралов будем использовать теорему Коши о вычетах.

$$\oint\limits_{|z|=0,2} \frac{2}{z}\cos^2\left(\frac{2}{z}\right)dz = 2\pi i \cdot \operatorname{res} f(0) = 2\pi i \cdot 2 = 4\pi i,$$

так как в области $|z| < 0{,}2$ $f(z)$ является аналитической всюду, за исключением точки $z_0 = 0$.

В области $|z - i - 1| < 1$, ограниченной контуром C_2, функция $f(z)$ является аналитической, так как особая точка $z_0 = 0$ лежит вне этой области $\left(\text{действительно, } |z_0 - i - 1| = |0 - i - 1| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2} > 1\right)$. Значит,

$$\oint\limits_{|z-1-i|=1} \frac{2}{z}\cos^2\left(\frac{2}{z}\right)dz = 0.$$

В области $|z - i - 1| < 2$, ограниченной контуром C_3, функция $f(z)$ является аналитической всюду, кроме точки $z_0 = 0$. Действительно, $|0 - i - 1| = \sqrt{2} < 2$, следовательно, особая точка находится в указанной области. По теореме Коши о вычетах $\displaystyle\oint\limits_{|z-1-i|=2} \frac{2}{z}\cos^2\left(\frac{2}{z}\right)dz = 2\pi i \cdot \operatorname{res} f(0) = 4\pi i.$

Задание 6

Вычислите $\displaystyle\oint\limits_{\left|z-\frac{1}{2}\right|=\frac{2}{3}} \frac{(16z^2+1)^3\,dz}{(4z^2 - iz)(1+\sin 2\pi i z)}$, используя результаты, полученные при решении задания 2.

Решение

Для вычисления интеграла используем теорему Коши о вычетах. Для этого найдем особые точки подынтегральной функции, принадлежащие области $D: \left|z - \dfrac{1}{2}\right| < \dfrac{2}{3}$.

Особыми точками подынтегральной функции будут нули ее знаменателя $\psi(z)=(4z^2-iz)(1+\sin 2\pi iz)$, найденные при решении задания 2: $z=0$, $z=i\left(\frac{1}{4}-k\right)$, $k\in Z$.

Проверим, какие из особых точек попали в область $\left|z-\frac{1}{2}\right|<\frac{2}{3}$.

Очевидно, что $z=0\in D$, поскольку $\left|0-\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{2}<\frac{2}{3}$.

Проверим точку $z=\frac{i}{4}$: $\left|\frac{i}{4}-\frac{1}{2}\right|=\sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^2+\left(-\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{5}}{4}<\frac{2}{3}$, поскольку $\left(\frac{\sqrt{5}}{4}\right)^2<\left(\frac{2}{3}\right)^2\Leftrightarrow\frac{5}{16}<\frac{4}{9}$ $\left(\frac{5}{16}<\frac{4}{9}\Leftrightarrow\frac{5}{16}\cdot\frac{9}{9}<\frac{4}{9}\cdot\frac{16}{16}\right)$. Значит, $z=\frac{i}{4}\in D$.

Проверим точку $z=-\frac{3i}{4}$: $\left|\frac{3i}{4}-\frac{1}{2}\right|=\sqrt{\left(\frac{3}{4}\right)^2+\left(-\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{13}}{4}>\frac{2}{3}$.

Значит, точка $z=-\frac{3i}{4}\notin D$.

Установим тип особых точек $z=0$ и $z=\frac{i}{4}$.

Как было показано в задании 2, $z=0$ – нуль первого порядка знаменателя $\psi(z)$ подынтегральной функции, при этом числитель $\varphi(z)=(16z^2+1)^3$ не обращается в нуль при $z=0$. Значит, $z=0$ – простой полюс подынтегральной функции $f(z)$.

Найдем вычет $f(z)$ в точке $z=0$.

$$\operatorname{res} f(0)=\lim_{z\to 0} f(z)\cdot z=\lim_{z\to 0}\frac{(16z^2+1)^3 z}{z(4z-i)(1+\sin 2\pi iz)}=$$

$$=\lim_{z\to 0}\frac{(16z^2+1)^3}{(4z-i)(1+\sin 2\pi iz)}=\frac{1}{-i}=i.$$

Определим теперь тип особой точки $z=\frac{i}{4}$. Как было установлено при решении задания 2, точка $z=\frac{i}{4}$ является нулем третьего порядка функции $\psi(z)$. Убедимся, что эта же точка является нулем числителя $\varphi(z)=(16z^2+1)^3$. Найдем нули функции $\varphi(z)$:

$$16z^2+1=(4z)^2-i^2=(4z-i)(4z+i).$$

Значит, $\varphi(z) = (4z - i)^3 (4z + i)^3.$

Следовательно, $z = \frac{i}{4}$ и $z = -\frac{i}{4}$ – нули третьего порядка $\varphi(z).$

Таким образом, $z = \frac{i}{4}$ является нулем третьего порядка как числителя $\varphi(z),$ так и знаменателя $\psi(z)$ подынтегральной функции. Это означает, что точка $z = \frac{i}{4}$ – устранимая особая точка функции $f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}.$ Как известно, вычет функции в устранимой особой точке равен нулю, т. е. $\operatorname{res} f\left(\frac{i}{4}\right) = 0.$

Окончательно получаем: подынтегральная функция $f(z)$ является аналитической в области $\left|z - \frac{1}{2}\right| < \frac{2}{3}$ всюду, за исключением изолированных особых точек $z = 0$ (простой полюс) и $z = \frac{i}{4}$ (устранимая особая точка). По теореме Коши о вычетах

$$\oint\limits_{\left|z-\frac{1}{2}\right|=\frac{2}{3}} \frac{(16z^2+1)^3 dz}{(4z^2 - iz)(1 + \sin 2\pi i z)} = 2\pi i\left(\operatorname{res} f(0) + \operatorname{res} f\left(\frac{i}{4}\right)\right) = 2\pi i(i + 0) = -2\pi.$$

Задание 7

Вычислите определенный интеграл $\int\limits_0^{2\pi} \frac{\sin^2 x dx}{\sqrt{2} + \cos x}.$

Решение

С помощью подстановки $e^{ix} = z$ преобразуем исходный интеграл к контурному интегралу по окружности $|z| = 1$ от функции комплексной переменной $z,$ который, в свою очередь, вычислим, используя теорему Коши о вычетах.

Итак, полагаем $z = e^{ix}$, тогда $dz = ie^{ix}dx,$ следовательно, $dx = \frac{dz}{iz}.$

$$\sin x = \frac{z^2 - 1}{2iz}, \quad \cos x = \frac{z^2 + 1}{2z}.$$

Поскольку $0 \le x \le 2\pi,$ то $|z| = \left|e^{ix}\right| = 1,$ поэтому исходный интеграл принимает вид

$$\oint\limits_{|z|=1} \frac{(z^2-1)^2 dz}{(2iz)^2 iz\left(\sqrt{2}+\dfrac{z^2+1}{2z}\right)} = \oint\limits_{|z|=1} \frac{(z^2-1)^2 dz}{-4z^2 \cdot iz \dfrac{z^2+2\sqrt{2}z+1}{2z}} =$$

$$= -\frac{1}{2i} \oint\limits_{|z|=1} \frac{(z^2-1)^2 dz}{z^2(z^2+2\sqrt{2}z+1)} = -\frac{1}{2i} \oint\limits_{|z|=1} F(z)dz.$$

Особыми точками подынтегральной функции $F(z)$ являются корни ее знаменателя: $z_1 = 0$ – полюс 2-го порядка, $z_2 = -\sqrt{2}+1$ – простой полюс, $z_3 = -\sqrt{2}-1$ – простой полюс. Внутри единичного круга $|z|<1$ находятся только точки $z_1 = 0$ и $z_2 = -\sqrt{2}+1$.

Вычислим вычеты функции $F(z)$ в этих точках.

$$\operatorname{res} F(0) = \lim_{z\to 0}\left(\frac{(z^2-1)^2 z^2}{z^2(z^2+2\sqrt{2}z+1)}\right)' = \lim_{z\to 0}\left(\frac{(z^2-1)^2}{z^2+2\sqrt{2}+1}\right)' =$$

$$= \lim_{z\to 0} \frac{2(z^2-1)\cdot 2z(z^2+2\sqrt{2}z+1)-(z^2-1)^2(2z+2\sqrt{2})}{(z^2+2\sqrt{2}z+1)^2} = -2\sqrt{2}.$$

$$\operatorname{res} F(-\sqrt{2}+1) = \lim_{z\to -\sqrt{2}+1} \frac{(z^2-1)^2\left(z-\left(-\sqrt{2}+1\right)\right)}{z^2(z-(-\sqrt{2}+1))(z+\sqrt{2}+1)} =$$

$$= \lim_{z\to -\sqrt{2}+1} \frac{(z^2-1)^2}{z^2(z+\sqrt{2}+1)} = \frac{((1-\sqrt{2})^2-1)^2}{(1-\sqrt{2})^2(1-\sqrt{2}+\sqrt{2}+1)} = \frac{(2-2\sqrt{2})^2}{2(1-\sqrt{2})^2} = 2.$$

По теореме Коши о вычетах получаем

$$-\frac{1}{2i}\oint\limits_{|z|=1} F(z)dz = -\frac{1}{2i} 2\pi i(\operatorname{res} F(0) + \operatorname{res} F(-\sqrt{2}+1)) = -\pi(-2\sqrt{2}+2) =$$

$$= 2\pi(\sqrt{2}-1).$$

Задание 8

Вычислите несобственный интеграл $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x\sin\frac{x}{3}}{x^2+9}dx.$

Решение

Для вычисления этого интеграла введем вспомогательную функцию $F(z) = \dfrac{ze^{iz/3}}{z^2+9}.$

Заметим, что $F(z)=\dfrac{z\left(\cos\dfrac{z}{3}+i\sin\dfrac{z}{3}\right)}{z^2+9}$, поэтому $\operatorname{Im}F(x)=\dfrac{x\sin\dfrac{x}{3}}{x^2+9}$ совпадает с подынтегральной функцией $f(x)$ исходного несобственного интеграла, если $z = x \in$.

Рассмотрим замкнутый контур $C = C_R \cup [-R; R]$,
где C_R – верхняя полуокружность окружности $|z| = R,$ а $[-R; R]$ – отрезок действительной оси (рис. 13).

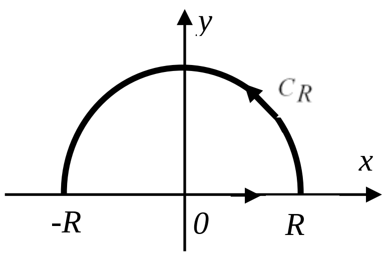


Рис. 13

Если $|z|\to\infty$, то функция $\dfrac{z}{z^2+9}\to 0$. Значит, по лемме Жордана

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R}\frac{ze^{iz/3}}{z^2+9}dz=0.$$

При этом по теореме Коши о вычетах для любого $R>3$

$$\oint_C\frac{ze^{iz/3}}{z^2+9}dz=2\pi i\cdot\operatorname{res}F(3i),$$

поскольку единственной особой точкой функции $F(z)$, лежащей в верхней полуплоскости $(\operatorname{Im} z>0)$, является $z=3i.$

Найдем вычет в простом полюсе $z=3i$:

$$\operatorname{res}F(3i)=\lim_{z\to 3i}\frac{ze^{iz/3}(z-3i)}{(z-3i)(z+3i)}=\lim_{z\to 3i}\frac{ze^{iz/3}}{z+3i}=\frac{3i\cdot e^{i(3i)/3}}{3i+3i}=\frac{e^{-1}}{2}.$$

Итак, $\displaystyle\oint_C\frac{ze^{iz/3}}{z^2+9}dz=2\pi i\cdot\frac{e^{-1}}{2}=\frac{\pi i}{e}$ (для $R>3$).

С другой стороны,

$$\oint_C\frac{ze^{iz/3}}{z^2+9}dz=\oint_{C_R}\frac{ze^{iz/3}}{z^2+9}dz+\int_{-R}^{R}\frac{xe^{ix/3}}{x^2+9}dx=\frac{\pi i}{e}.$$

Перейдем в последнем равенстве к пределу при $R \to \infty$. В силу леммы Жордана $\lim\limits_{R\to\infty} \int\limits_{C_R} \dfrac{ze^{iz/3}}{z^2+9}\,dz = 0.$

По определению несобственного интеграла по промежутку от $-\infty$ до $+\infty$, рассматриваемому в смысле главного значения:

$$\lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{+R} \frac{xe^{ix/3}}{x^2+9}\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{xe^{ix/3}}{x^2+9}\,dx.$$

В силу сказанного, получаем $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{xe^{ix/3}}{x^2+9}\,dx = \frac{\pi i}{e}.$

Отделим в интеграле действительную и мнимую части

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\cos\frac{x}{3}}{x^2+9}\,dx + i\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\sin\frac{x}{3}}{x^2+9}\,dx = \frac{\pi i}{e}.$$

Приравняв мнимые части слева и справа в последнем равенстве, получаем

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\sin\frac{x}{3}}{x^2+9}\,dx = \frac{\pi}{e}.$$

Поскольку подынтегральная функция является четной, то

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{x\sin\frac{x}{3}}{x^2+9}\,dx = \int_{0}^{+\infty} \frac{x\sin\frac{x}{3}}{x^2+9}\,dx,$$

откуда следует, что $\displaystyle 2\int_{0}^{+\infty} \frac{x\sin\frac{x}{3}}{x^2+9}\,dx = \frac{\pi}{e}$, а значит, $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{x\sin\frac{x}{3}}{x^2+9}\,dx = \frac{\pi}{2e}.$

Задание 9

Решите задачу Коши $x'' + x = 2\cos t, \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = -1$ операционным методом.

Решение

Пусть $x(t) \quad X(p)$. Тогда по теореме о дифференцировании оригинала находим

$$x'(t) \quad pX(p) - x(0) = pX(p):$$

$$x''(t) \quad p^2X(p) - px(0) - x'(0) = p^2X(p) + 1.$$

$$2\cos t \quad \frac{2p}{p^2+1}.$$

Таким образом, операторное уравнение имеет вид

$$p^2 X(p) + 1 + X(p) = \frac{2p}{p^2+1},$$

откуда получаем

$$X(p)(p^2+1) = \frac{2p}{p^2+1} - 1 \Leftrightarrow X(p) = \frac{2p}{(p^2+1)^2} - \frac{1}{p^2+1}.$$

Находим оригинал для $X(p)$:

$$-\frac{1}{p^2+1} \quad -\sin t.$$

Для нахождения оригинала для функции $\dfrac{2p}{(p^2+1)^2}$ можно воспользоваться теоремой о дифференцировании изображения

$$\frac{2p}{(p^2+1)^2} = -\left(\frac{1}{p^2+1}\right)'_p \quad t\sin t.$$

В итоге $X(p) \quad t\sin t - \sin t = (t-1)\sin t.$

Таким образом, $x(t) = (t-1)\sin t$ – искомое решение задачи Коши.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бугров, Я. С. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. ФКП / Я. С. Бугров, С. М. Никольский. – М. : Наука, 1985.

2. Высшая математика. В 5 ч. – Минск : Выш. шк. : Ч. 3 / Р. М. Жевняк, А. А. Карпук, 1985 ; Ч. 4 / Р. М. Жевняк., А. А. Карпук, 1987 ; Ч. 5 / Р. М. Жевняк., А. А. Карпук, 1988.

3. Герасимович, А. И. Математический анализ / А. И. Герасимович, Н. А. Рысюк. – Минск : Выш. шк., 1989.

4. Данко, П. Е. Высшая математика в упражнениях и задачах : учеб. пособие для вузов. В 2 ч. Ч. 2. / П. Е. Данко, А. Г. Попов, Т. Я. Кожевникова. – 6-е изд. – М. : ОНИКС 21 век; Мир и образование, 2002.

5. Жевняк, Р. М. Высшая математика. Дифференциальные уравнения. Ряды. Уравнения математической физики. Теория функций комплексных переменных / Р. М. Жевняк, А. А. Карпук. – Минск : ИРФ «Обозрение», 1997.

6. Кудрявцев, Л. Д. Краткий курс математического анализа / Л. Д. Кудрявцев. – М. : Наука, 1989.

7. Пискунов, Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисление для втузов / Н. С. Пискунов. – М. : Наука, 1985.

8. Письменный, Д. Т. Конспект лекций по высшей математике. В 2 ч. Ч. 2 / Д. Т. Письменный. – М. : Рольф, 2002.

9. Ефимов, А. В. Сборник задач по математике для втузов: специальные разделы математического анализа / А. В. Ефимов, Б. П. Демидович. – М. : Наука, 1982.

10. Сборник задач по высшей математике. В 10 ч. – Минск : БГУИР: Ч. 7. Интегральное исчисление функций многих переменных / А. А. Карпук [и др.], 2007; Ч. 8. Ряды. Фурье-анализ / А. А. Карпук [и др.], 2007; Ч. 10. Функции комплексной переменной. Операционное исчисление анализ / А. А. Карпук [и др.], 2010.

11. Третьякова, Н. Н. Руководство к решению задач. Высшая математика. Кратные интегралы, векторный анализ, теория поля / Н. Н. Третьякова, В. А. Ранцевич, Н. В. Спичекова. – Минск : ФУАинформ, 2011.

Св. план 2015, поз. 35

Учебное издание

ТИПОВЫЕ РАСЧЕТЫ ПО ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ

В трех частях

Часть 3

Черняк Жанна Альбертовна
Князюк Наталья Владимировна
Амелькина Галина Ивановна и др.

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ

Редактор *Е. И. Герман*

Компьютерная правка, оригинал-макет *М. В. Гуртатовская*

Подписано в печать 05.05.2015. Формат 60х84 1/16. Бумага офсетная. Гарнитура «Таймс».
Отпечатано на ризографе. Усл. печ. л. 6,05. Уч.-изд. л. 6,0. Тираж 300 экз. Заказ 255.

Издатель и полиграфическое исполнение: учреждение образования
«Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники».
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя,
распространителя печатных изданий №1/238 от 24.03.2014,
№2/113 от 07.04.2014, №3/615 от 07.04.2014.
ЛП №02330/264 от 14.04.2014.
220013, Минск, П. Бровки, 6