УДК

ДОМИНИРУЮЩИЕ И ОКРЕСТНОСТНЫЕ МНОЖЕСТВА, ВЕРШИННЫЕ ПОКРЫТИЯ В ГРАФАХ

Кузьмин Е.В., студент гр. 024404

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники
г. Минск, Республика Беларусь

Примичева З.Н. – канд. физ.-мат. наук

Аннотация. В данной статье рассматриваются доминирующие и окрестностные множества, вершинные покрытия графов и их свойства, выводятся формулы для подсчета числа доминирования, окрестностного числа, числа вершинного покрытия для различных видов графов, предоставляются алгоритмы для построения графов с заданными условиями, касающимися изучаемых множеств графа.

Ключевые слова. Теория графов, доминирующие множества, окрестностные множества, вершинные покрытия. .

Введение. Пусть *G* – произвольный граф. Множество вершин $D \subseteq V(G)$ называется доминирующим, если каждая вершина из $V(G) \backslash D$ смежна с некоторой вершиной из *D*. Доминирующее множество графа называется минимальным, если оно не содержит никакого другого доминирующего множества этого графа. Наименьшая из мощностей доминирующих множеств графа *G* называется числом доминирования графа *G* и обозначается через γ(*G*).

Доминирующее множество *D* графа *G* называется окрестностным, если для каждого ребра $\{u, v\} \in E(G - D)$ в *D* найдётся вершина, смежная одновременно с обоими его концами *u* и *v*. Окрестностное множество графа называется минимальным, если оно не содержит никакого другого окрестностного множества этого графа. Наименьшая из мощностей окрестностных множеств графа *G* называется окрестностным числом графа *G* и обозначается через *nb(G)*.

Множество вершин $X \subseteq V(G)$ называется вершинным покрытием графа G, если каждое ребро из $E(G)$ инцидентно хотя бы одной вершине из X. Наименьшая из мощностей вершинных покрытий графа G называется числом вершинного покрытия графа *G* и обозначается через $\beta(G)$. [1]

Введем определение совершенно окрестностного графа. Граф *G* назовём совершенным окрестностным, если для каждого его порождённого подграфа *H* без изолированных вершин выполняется равенство

$$nb(H) = \beta(H). \tag{1}$$

В данной статье представлены исследования доминирующих и окрестностных множеств, вершинных покрытий в графах.

Пункты исследования.

1. Вычислить γ(*G*), *nb*(*G*) и β(*G*) для следующих графов: полный граф K_n, простая цепь P_n, простой цикл C_n, колесо W_n, полный двудольный граф $K_{n,m}$, граф n-мерного куба Q_n.

2. Найти граф (бесконечную серию графов), для которых минимальное окрестностное множество не является наименьшим (по мощности).

3. Доказать, что для множества *D*⊆*V*(*G*) следующие утверждения эквивалентны: (а) *D* – окрестностное множество графа *G*; (б) граф *G* является объединением подграфов, порождённых замкнутыми окружениями вершин из *D*, т.е.

$$G = \cup_{u \in D} G(N[u]). \tag{2}$$

4. Доказать, что для любого графа *G* без изолированных вершин выполняются неравенства

$$\gamma(G) \leq nb(G) \leq \beta(G). \tag{3}$$

5. Дать верхнюю и нижнюю оценку окрестностного числа графа *G* порядка *p* с максимальной степенью вершин $\Delta = \Delta(G)$.

6. Найти необходимое и достаточное условие для графа быть совершенным окрестностным.

7. Найти алгоритм построения графа *G* для любых целых чисел $a,\ b,\ c$, таких, что

$$2 \leq a \leq b \leq c, \tag{4}$$

у которого

$$\gamma(G) = a,\ nb(G) = b,\ \beta(G) = c. \tag{5}$$

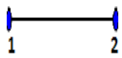
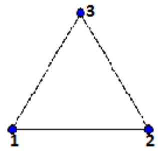
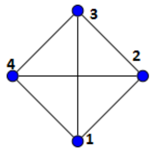
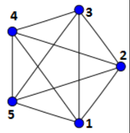
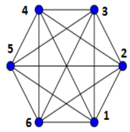
8. Найти алгоритм построения графа *G* для любых положительных целых чисел r, s и t, таких, что

$$r \le s \le t - r, \tag{6}$$

у которого порядок равен *t*, nb(*G*) = *r* и *G* имеет минимальное окрестностное множество мощности *s*.

Полный граф. Найдем числа доминирования, окрестностные числа и числа вершинного покрытия для полных графов порядка $n \le 6$. Результаты исследования занесем в таблицу 1.

Таблица 1 – значения числа доминирования, окрестностного числа и числа вершинного покрытия для полного графа

						
Вершины наименьшего доминирующего множества	1	1	1	1	1	1
$\gamma(K_n)$	1	1	1	1	1	1
Вершины наименьшего окрестностного множества	1	1	1	1	1	1
$nb(K_n)$	1	1	1	1	1	1
Вершины наименьшего вершинного покрытия	1	1	1, 2	1, 2, 3	1, 2, 3, 4	1, 2, 3, 4, 5
$\beta(K_n)$	1	1	2	3	4	5

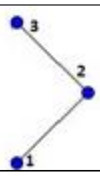
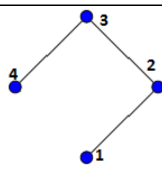
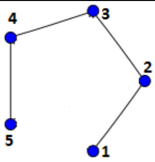
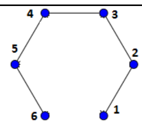
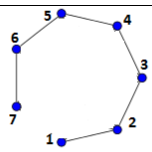
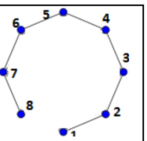
Из результатов таблицы был сделан вывод, что для полных графов число доминирования и окрестностное число равно 1, а число вершинного покрытия на 1 меньше порядка графа.

Действительно, в полном графе любая вершина смежна с остальными, а значит, число доминирования равно 1. Также в полном графе любая вершина является концом каждого из ребер, а значит, не существует ребра, оба конца которого с ней не смежны, а значит, окрестностное число также равно 1.

Доказательство того, что число вершинного покрытия на 1 меньше порядка графа, проведем методом от противного. Предположим, что число вершинного покрытия на 2 меньше порядка графа, то есть существует две вершины полного графа, не принадлежащие вершинному покрытию, а значит, существует ребро (с концами в этих вершинах), оба конца которого не принадлежат вершинному покрытию. Получили противоречие с определением вершинного покрытия. Значит, наше предположение неверно, число вершинного покрытия на 1 меньше порядка графа.

Простая цепь. Найдем числа доминирования, окрестностные числа и числа вершинного покрытия для простых цепей порядка от 3 до 8. Результаты исследования занесем в таблицу 2:

Таблица 2 – значения числа доминирования, окрестностного числа и числа вершинного покрытия для простой цепи

						
Вершины наименьшего доминирующего множества	2	2,4	2,5	2,5	2,5,7	2,5,8
$\gamma(P_n)$	1	2	2	2	3	3
Вершины наименьшего окрестностного множества	2	2,4	2,4	2,4,6	2,4,6	2,4,6,8

$nb(P_n)$	1	2	2	3	3	4
Вершины наименьшего вершинного покрытия	2	2,4	2,4	2,4,6	2,4,6	2,4,6,8
$\beta(P_n)$	1	2	2	3	3	4

Проанализировав результаты таблицы, было замечено, что вершины наименьшего доминирующего множества (кроме последней) расположены через 2 вершины простой цепи, начиная со второй вершины. А значит,

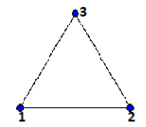
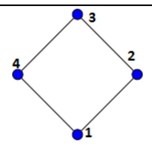
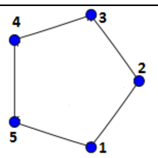
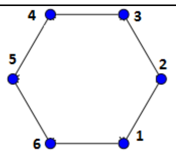
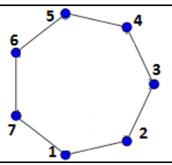
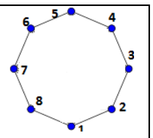
$$\gamma(P_n) = \left\lfloor \frac{n+2}{3} \right\rfloor. \tag{7}$$

Также было замечено, что вершины наименьшего окрестностного множества и вершины наименьшего вершинного покрытия совпадают и расположены через одну, начиная со второй вершины. Значит,

$$nb(P_n) = \beta(P_n) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor. \tag{8}$$

Простой цикл. Найдем числа доминирования, окрестностные числа и числа вершинного покрытия для простых циклов порядка от 3 до 8. Результаты исследования занесем в таблицу 3:

Таблица 3 – значения числа доминирования, окрестностного числа и числа вершинного покрытия для простого цикла

						
Вершины наименьшего доминирующего множества	1	1,4	1,4	1,4	1,4,7	1,4,7
$\gamma(C_n)$	1	2	2	2	3	3
Вершины наименьшего окрестностного множества	1	1,3	1,3,5	1,3,5	1,3,5,7	1,3,5.7
$nb(C_n)$	1	2	3	3	4	4
Вершины наименьшего вершинного покрытия	1,3	1,3	1,3,5	1,3,5	1,3,5,7	1,3,5,7
$\beta(C_n)$	2	2	3	3	4	4

Проанализировав результаты таблицы, было получено, что минимальные доминирующие множества простых циклов совпадают с минимальными доминирующими множествами простых цепей того же порядка. Значит,

$$\gamma(C_n) = \left\lfloor \frac{n+2}{3} \right\rfloor. \tag{9}$$

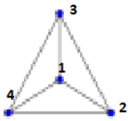
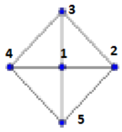
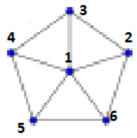
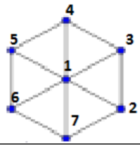
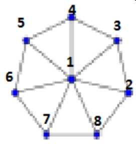
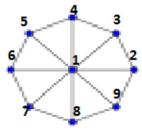
Также было замечено, что если $n > 3$, то вершины наименьшего окрестностного множества и вершины наименьшего вершинного покрытия совпадают и расположены через одну, начиная с первой вершины. Значит,

$$nb(C_n) = \beta(C_n) = \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor. \tag{10}$$

Для цикла порядка 3 справедливы значения полного графа порядка 3.

Граф-колесо. Найдем числа доминирования, окрестностные числа и числа вершинного покрытия для колеса порядка от 4 до 9. Результаты исследования занесем в таблицу 4:

Таблица 4 – значения числа доминирования, окрестностного числа и числа вершинного покрытия для колеса

						
Вершины наименьшего доминирующего множества	1	1	1	1	1	1
$\gamma(W_n)$	1	1	1	1	1	1
Вершины наименьшего окрестностного множества	1	1	1	1	1	1
$nb(W_n)$	1	1	1	1	1	1
Вершины наименьшего вершинного покрытия	1,2,4	1,2,4	1,2,4,6	1,2,4,6	1,2,4,6,8	1,2,4,6,8
$\beta(W_n)$	3	3	4	4	5	5

Проанализировав результаты таблицы, было замечено, что одна вершина колеса смежна со всеми остальными. Также эта вершина смежна с концами всех ребер. Значит,

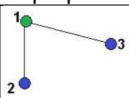
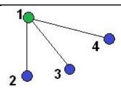
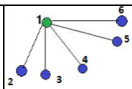
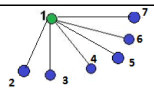
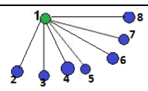
$$\gamma(W_n) = nb(W_n) = 1. \qquad (11)$$

Колесо состоит из простого цикла порядка *n* – 1 и одной вершины, смежной с остальными. Значит, число вершинного покрытия колеса *n*-го порядка на 1 больше числа вершинного покрытия простого цикла порядка *n* – 1. Таким образом,

$$\beta(W_n) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1. \qquad (12)$$

Полный двудольный граф. Найдем числа доминирования, окрестностные числа и числа вершинного покрытия для полного двудольного графа с долями размера *m* = 1 на $2 \leq n \leq 7$. Результаты исследования занесем в таблицу 5:

Таблица 5 – значения числа доминирования, окрестностного числа и числа вершинного покрытия для полного двудольного графа

						
Вершины наименьшего доминирующего множества	1	1	1	1	1	1
$\gamma(K_{1,n})$	1	1	1	1	1	1
Вершины наименьшего окрестностного множества	1	1	1	1	1	1
$nb(K_{1,n})$	1	1	1	1	1	1
Вершины наименьшего вершинного покрытия	1	1	1	1	1	1
$\beta(K_{1,n})$	1	1	1	1	1	1

Проанализировав результаты таблицы, было получено, что числа доминирования, окрестностные числа и числа вершинного покрытия равны *m* = 1.

Выдвинем гипотезу, что в случае полного двудольного графа с долями размера m на n, $m \leq n$, число доминирования, окрестностное число и число вершинного покрытия равны m. Действительно, каждое ребро полного двудольного графа одним из концов имеет вершину из доли m, при этом никакие две вершины из доли m являются смежными. Таким образом, для полного двудольного графа с долями размера m на n, $m \leq n$,

$$\left(K_{m,n}\right) = nb\left(K_{m,n}\right) = \beta\left(K_{m,n}\right) = m. \tag{13}$$

Граф n-мерного куба Q_n. Граф 0-мерного куба Q_0 состоит из одной вершины, для него $\gamma(Q_0) = = nb(Q_0) = \beta(Q_0) = 1$.

Граф 1-мерного куба Q_1 является полным графом порядка 2, для него $\gamma(Q_1) = nb(Q_1) = = \beta(Q_1) = 1$.

Граф 2-мерного куба Q_2 является простым циклом порядка 4, для него $\gamma(Q_2) = 2,\ nb(Q_2) = = \beta(Q_2) = 2$.

Рассмотрим граф 3-мерного куба Q_3, представленный на рисунке 1:

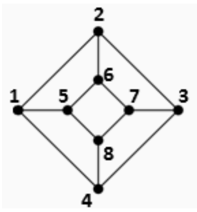


Рисунок 1 – изображение графа 3-мерного куба Q_3

Минимальное доминирующее множество с наименьшей мощностью, минимальное окрестностное множество с наименьшей мощностью и вершинное покрытие с наименьшей мощностью состоят из вершин 1,3,6,8, т.е. $\gamma(Q_3) = nb(Q_3) = \beta(Q_3) = 4$.

Рассмотрим граф 4-мерного куба Q_4, представленного на рисунке 2:

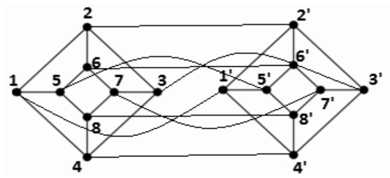


Рисунок 2 – изображение графа 4-мерного куба Q_4

Минимальное доминирующее множество с наименьшей мощностью, минимальное окрестностное множество с наименьшей мощностью и вершинное покрытие с наименьшей мощностью состоят из вершин $1,\ 3,\ 6,\ 8,\ 2',\ 4',\ 5',\ 7'$, т.е. $\gamma(Q_4) = nb(Q_4) = \beta(Q_4) = 8$.

Из данных, полученных выше, можно получить следующий вывод: начиная с Q_1, число доминирования, окрестностное число и число вершинного покрытия каждого последующего графа гиперкуба в два раза больше, чем у предыдущего. Действительно, каждый последующий граф строится несвязным объединением с добавлением рёбер от каждой вершины копии предыдущего гиперкуба до соответствующей вершины последующего, а значит, минимальное окрестностное множество Q_n с наименьшей мощностью будет образовано двумя окрестностными множествами Q_{n-1} с наименьшей мощностью (с той поправкой, что одно из множеств не будет совпадать с другим, а будут соответственными). Таким образом,

$$\gamma(Q_n) = nb(Q_n) = \beta(Q_n) = 2nb(Q_{n-1}). \tag{14}$$

Свойства доминирующих множеств, окрестностных множеств и вершинных покрытий.

1. Покажем, что возможно построить бесконечную серию графов, у которых существует минимальное окрестностное множество, которое не является наименьшим по мощности. Рассмотрим граф колесо порядка 5, представленный на рисунке 3. Так как он является объединением простого цикла порядка 4 и графа-звезды порядка 3, то его минимальными окрестностными множествами будут являться множество, состоящее из вершины 1 и множество, состоящее из вершин 2, 4:

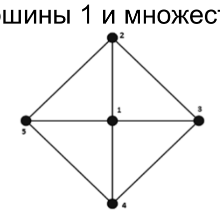


Рисунок 3 – граф-колесо порядка 3

Таким образом, минимальное окрестностное множество не является наименьшим (по мощности). Данное утверждение будет справедливо для любого графа-колеса порядка выше 4, а значит, может быть составлен бесконечный ряд таких графов.

2. Докажем, что для множества $D \subseteq V(G)$ следующие утверждения эквивалентны: (а) D – окрестностное множество графа G; (б) граф G является объединением подграфов, порождённых замкнутыми окружениями вершин из D, т.е. выполняется (2).

Т.к. окрестностное множество является доминирующим, то все вершины из $E(G\text{-}D)$ смежны с какой-либо вершиной из D, а значит, принадлежат замкнутому окружению этой вершины. Пусть существует ребро $\{u, v\}$, оба конца которого не принадлежат множеству D. Так как D – окрестностное множество графа G, то концы этого ребра смежны с какой-либо вершиной из D. Значит, каждое ребро графа G принадлежит подграфу, порожденному замкнутым окружением какой-либо вершины из D. Таким образом, граф G является объединением подграфов, порожденных замкнутыми окружениями вершин из D.

Рассмотрим обратную ситуацию. Пусть граф G является объединением подграфов, порожденных замкнутыми окружениями вершин из D. Значит, каждое ребро из $V(G\text{-}D)$ принадлежит подграфу, порожденному замкнутым окружением вершины из D. Значит, концы всех ребер из $E(G\text{-}D)$ смежны с какой-либо вершиной из D либо совпадают с этой вершиной, а значит, D – окрестностное множество графа G.

3. Докажем, что для любого графа G без изолированных вершин выполняются неравенства (3).

Так как по определению окрестностное множество является доминирующим, то очевидно, что $\gamma(G) \leq nb(G)$. Так как хотя бы одна вершина каждого ребра графа G принадлежит вершинному покрытию, то концы всех ребер графа либо принадлежат вершинному покрытию, либо смежны с какой-нибудь вершиной вершинного покрытия, то есть любое вершинное покрытие графа без изолированных вершин является доминирующим множеством. Так как не существует ребер, оба конца которых не принадлежат вершинному покрытию, то любое вершинное покрытие графа без изолированных вершин является окрестностным множеством. А значит, $nb(G) \leq \beta(G)$.

4. Найдем верхнюю и нижнюю оценку окрестностного числа графа G порядка p с максимальной степенью вершин $\Delta = \Delta(G)$.

Объединение вершин наименьшего окрестностного множества и вершин, смежных с ними, дает множество всех вершин графа G. Поэтому

$$p \leq (d(u_1) + 1) + (d(u_2) + 1) + \ldots + (d(u_{nb}) + 1) \leq (\Delta(G)+1) + (\Delta(G)+ 1) + \\ +\ldots+ (\Delta(G)+ 1) = nb(G) \cdot ((\Delta(G)+ 1), \tag{15}$$

где $d(u_1)$ – степень вершины u_1 наименьшего окрестностного множества.

Значит,

$$\left[\frac{p}{1+\Delta}\right] \leq nb(G). \tag{16}$$

Пусть степень вершины $\{v\}$ равна Δ. Если эта вершина входит в наименьшее окрестностное множество, то вершины, смежные с ней, в это множество не входят. Значит,

$$nb(G) \leq p - \Delta. \tag{17}$$

Таким образом, справедливы следующие неравенства:

$$\left[\frac{p}{1+\Delta}\right] \leq nb(G) \leq p - \Delta. \tag{18}$$

5. Составим необходимые и достаточные условия для того, чтобы граф был совершенным окрестностным:

1) $nb(G) = \beta(G)$, так как один из подграфов состоит из всех вершин графа;

2) граф не является объединением полного графа порядка больше 2 и любого другого графа, так как в данном случае один из подграфов будет полным графом, и тогда $nb(H_n) = 1$, $\beta(H_n) = n - 1$, а несколько подграфов будут включать в себя полный граф. Так же из-за этого становится невозможным наличие подграфа, который был бы колесом, т.к. это бы означало, что существует подграф, являющийся полным графом порядка 3.

В остальных случаях полученные подграфы будут разбиваться на простые цепи, циклы, звёзды и двудольные графы, а также их объединения, для которых равенство окрестностного числа и числа вершинного покрытия выполняется.

6. Алгоритм построения связного графа G, для которого выполняются (4) и (5), следующий: построим a графов-звёзд порядка $2c + b$ (данный порядок является достаточным, но не минимальным) и соединим центры звёзд между собой. Таким образом, $\gamma(G) = a$. Далее, пронумеруем вершины первых двух звёзд от 1 до $b - a$, не учитывая центр, и соединим соответствующие вершины, из-за чего $nb(G) = a + b - a = b$. Затем мы в первой звезде соединяем между собой вершины $2c + b$ и $2c + b - 1$, $2c + b - 2$ и $2c + b - 3, \ldots, c + 2b + 1$ и $c + 2b$, таким образом получая $c - b$ рёбер. Возможны

случаи, когда остаются лишние вершины, но на решение это влиять не будет. Таким образом, граф построен и условия (4) и (5) были выполнены. Общий вид графа приведен на рисунке 4.

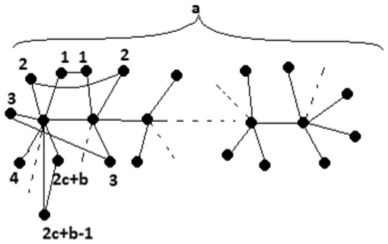


Рисунок 4 – пример построенного по алгоритму графа

7. Алгоритм построения графа *G*, для которого выполняется (6) и порядка *t*, у которого *nb*(*G*) = *r* и *G* имеет минимальное окрестностное множество мощности *s* следующий: поставим *t* вершин, пронумеруем несколько от 1 до *r*, затем от $r+1$ до $r+(s-r+1)=s+1$ и соединим эти вершины с вершиной 1. Оставшиеся непронумерованные вершины соединяем с пронумерованными от 2 до *r* в любом порядке. Таким образом, порядок графа *G* равен *t*, *nb*(*G*) = *r* и в графе существует минимальное окрестностное множество мощности *s*, образованное вершинами 2, 3, 4,…, r, $r+1$, $r+2$,…, $s+1$. Общий вид графа, построенного графа по данному алгоритму, представлен на рисунке 5.

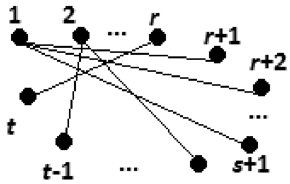


Рисунок 5 – пример построенного по алгоритму графа

Выводы. При исследовании данной задачи были получены следующие основные результаты:

1. Найдены значения числа γ(*G*), *nb*(*G*) и β(*G*) для полного графа K_n, простой цепи P_n, простого цикла C_n, колеса W_n, двудольного графа $K_{n,m}$, графа *n*-мерного куба Q_n.
2. Приведен пример графа, у которого существует минимальное окрестностное множество, которое не является наименьшим по мощности и приведена бесконечная серия таких графов.
3. Доказано, что для множества *D*⊆*V*(*G*) следующие утверждения эквивалентны: (а) *D* – окрестностное множество графа *G*; (б) граф *G* является объединением подграфов, порождённых замкнутыми окружениями вершин из *D*.
4. Доказано, что для любого графа *G* без изолированных вершин выполняются неравенства (4).
5. Найдены верхняя и нижняя оценка окрестностного числа графа *G* порядка *p* с максимальной степенью вершин $\Delta = \Delta(G)$ (18).
6. Найдены необходимые и достаточные условия для того, чтобы граф был совершенным окрестностным.
7. Найден алгоритм построения связного графа G для условий (4) и (5).
8. Найден алгоритм построения граф *G* порядка *t*, у которого *nb*(*G*) = *r* и *G* имеет минимальное окрестностное множество мощности *s* для условия (6).

Список использованных источников:

1. Мельников О.И. Теория графов в занимательных задачах. Изд. 3-е, испр. и доп. – М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2009. – 232 с.

UDC

DOMINANT AND NEIGHBORHOOD SETS, VERTEX COVERS OF GRAPHS

Kuzmin E.V.

Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics[1], Minsk, Republic of Belarus

Primicheva Z.N. – PhD in Physics and Mathematics

Annotation. The article discusses dominant and neighborhood sets, vertex covers of graphs and their properties, deduces formulae for calculating the dominance number, neighborhood number, and vertex cover number for various types of graphs, and provides algorithms for constructing graphs with specified conditions concerning the studied graph sets.

Keywords. Graph theory, dominant set, neighborhood set, vertex cover.