ПОЕДИНОК «ГРУЗОВИК – ПЕШЕХОД»: ОПТИМАЛЬНЫЕ ПО БЕЗОПАСНОСТИ ТРАЕКТОРИИ

Кулик А.В., Кугач А.В.

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники
г. Минск, Республика Беларусь

Лущакова И.Н. – канд. физ.-мат. наук

Рассматривается ситуация, когда пешеход пытается увернуться из-под колес приближающегося к нему грузовика. Исследуются различные формы траекторий движения пешехода (прямые и кривые линии) с целью найти траекторию, оптимальную по безопасности. Приводится пример траектории, которая позволяет избежать столкновения с самым быстрым грузовиком.

Представьте, что вы стоите на середине дороги. По направлению к вам мчится грузовик, и за рулем - невнимательный водитель, который вас не видит. Первое, что может прийти вам в голову, это броситься прямо к обочине. Этот путь, хоть и самый короткий, но не самый безопасный. Возможны две интерпретации того, какую траекторию движения считать наиболее безопасной [1,2].

Рассмотрим первую интерпретацию. Предположим, что вы стоите посередине дороги в x метрах от обочины и замечаете грузовик в y метрах от вас, приближающийся с постоянной скоростью $v_{гр}$. Вы можете двигаться со скоростью $v_ч$. Рисунок 1 иллюстрирует эту ситуацию. Рассмотрим в качестве возможных траекторий вашего движения прямые линии. Пусть $v_{гр} > v_ч > 0$. Кроме того, достаточно рассматривать значения θ из интервала $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Тогда длина пути, который вы проделаете к обочине, равна $D_ч(\theta) = \frac{x}{\cos\theta}$, и время, которое займёт этот путь, будет равно $T_ч(\theta) = \frac{x}{v_ч \cos\theta}$.

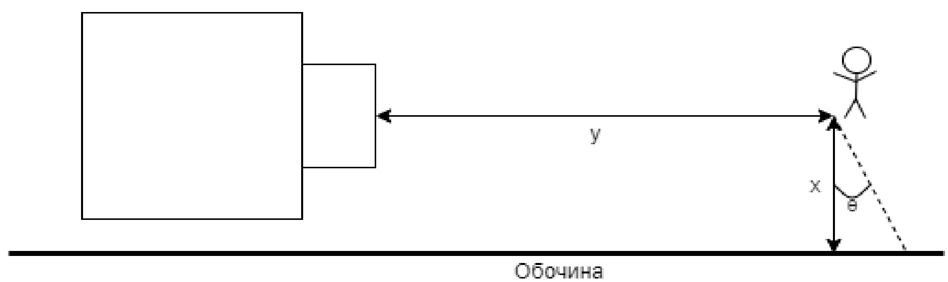

Рисунок 1. Схема приближающегося к человеку грузовика

Двигаясь по такому пути, расстояние между вами и грузовиком в момент, когда вы достигнете обочины, равно:

$$D(\theta) = y + x\tan\theta - v_{гр}T_ч(\theta) = y + x\tan\theta - \frac{v_{гр}}{v_ч} * \frac{x}{\cos\theta}. \qquad (1)$$

Сохраняя все остальные параметры постоянными, значение θ, которое максимизирует расстояние между вами и грузовиком, будет равно $arcsin(\frac{v_ч}{v_{гр}})$.

Рассмотрим вторую интерпретацию. Что если грузовик движется с переменной скоростью или вы не знаете его скорость, а может, вы любитель острых ощущений и хотите побегать от многотонной машины? В этом случае будем рассматривать траектории движения более общего вида, чем прямые. Хотя это может показаться странным, но иногда движение по кривой не только поможет избежать столкновения с грузовиком, но и ещё сэкономить время.

В данной интерпретации изменение угла $\theta = \arctan(\frac{x}{y})$ задается выражением:

$$d\theta = \frac{ydx - xdy}{x^2+y^2} = \frac{-yv_{ч}\cos(\theta) - xv_{ч}\sin(\theta) + xv_{tr}}{r^2}dt == \frac{-v_{ч}r\cos(\theta)^2 - v_{ч}r\sin(\theta)^2 + v_{гр}\sin(\theta)}{r^2}dt, \quad (2)$$

где $y = z - v_{гр}t,\ v = \left(\frac{dz}{dt}, \frac{dx}{dt}\right) = (v_{ч}\sin\theta, -v_{ч}\cos\theta)$, $\mathrm{r} = \mathrm{OP} = \sqrt{x^2+y^2}$, $\mathrm{y} = \mathrm{r}\cos(\theta)$, $\mathrm{x} = \mathrm{r}\sin(\theta)$ в соответствии с рисунком 2.

Рассмотрим общую ситуацию $0 < v_{гр} < v_{гр.max} = \frac{v_{ч}}{\sin(\theta_0)}$, где θ_0 – это исходное значение θ в момент времени $t = 0$. Отметим, что в этом случае $\frac{d\theta}{dt} = \frac{-v_{ч} + v_{гр}\sin(\theta)}{r} < 0$, угол θ будет уменьшаться со временем (становясь равным нулю, когда вы достигнете обочины в точке $\mathrm{x} = 0$), и ваша траектория будет постепенно приближаться к перпендикуляру к обочине, поэтому вы будете приближаться к обочине быстрее, чем в исходном решении для прямой линии.

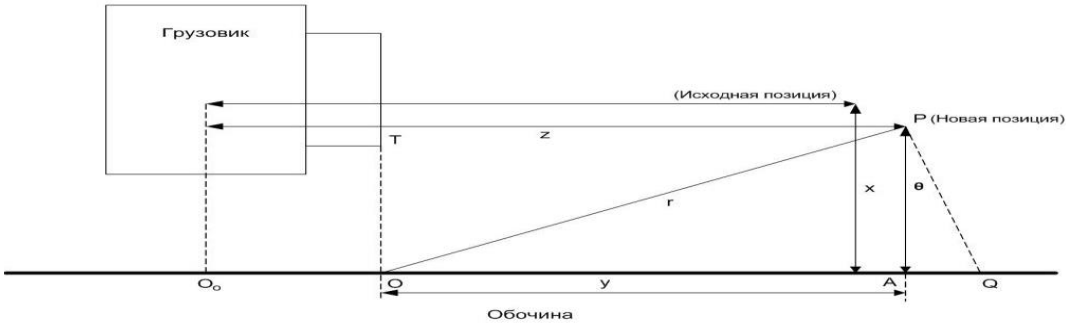

Рисунок 2. Схема приближающегося к человеку грузовика.

В работе получена [2] получена следующая формула для оптимальной траектории движения с точки зрения второй интерпретации:

$$r = \frac{r_0(1 - \frac{v_{гр}}{v_{ч}}sin\theta_0)}{1 - \frac{v_{гр}}{v_{ч}}sin\theta} = \frac{L}{(1 - \varepsilon sin\theta)}. \quad (3)$$

Здесь $L = r_0\left(1 - \frac{v_{гр}}{v_{ч}}sin\theta_0\right), \varepsilon = \frac{v_{гр}}{v_{ч}}$. Это полярное уравнение кривой второго порядка с эксцентриситетом ε. Поскольку грузовик едет быстрее, чем вы бежите, кривая будет иметь эксцентриситет $\varepsilon > 1$, т.е. это будет гипербола. В случае медленного грузовика, движущегося со скоростью $v_{гр} < v_{ч}$, получим эксцентриситет $\varepsilon < 1$, и кривая будет описывать эллипс. Если $v_{гр} = v_{ч}$, то $\varepsilon = 1$, и кривая описывает параболу.

Нами было проведено компьютерное моделирование безопасных траекторий пешехода при различных исходных данных. На рисунке 3 изображена возможная траектория движения пешехода к обочине.

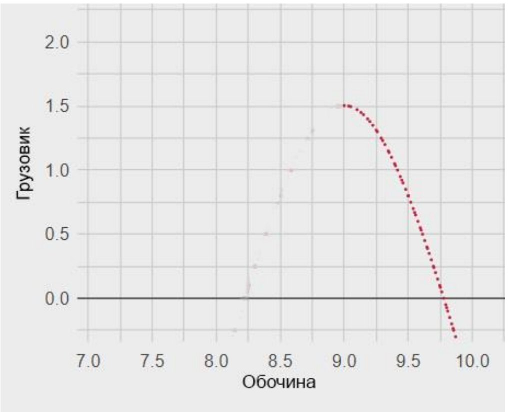

Рисунок 3. Путь пешехода к обочине по гиперболе $(\varepsilon > 1)$.

Список использованных источников:

1. Truck Versus Human: Mathematics Under Pressure /E. Field, R. Ivison, A. Reyher , S. Warner// The College Mathematics Journal , 2014, 45:2, P. 116-120.

2. Truck Versus Human 2.0: Mathematical Follow-Up Under Increasing Pressure, and How Kepler's Laws Come to the Rescue./M.A. Lerma // The College Mathematics Journal, 2021, 52:1, P.22-30.