ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ВЯЗКОГО ТЕЧЕНИЯ ЖИДКОСТИ В ТРУБЕ КРУГОВОГО СЕЧЕНИЯ

Каянович С.С.

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники, Минск, Беларусь
kayanovichs@gmail.com

В [1] и [2] рассматривались уравнения, описывающие течения вязкой несжимаемой жидкости в ограниченной области двумерного евклидова пространства, и была доказана теорема о разрешимости соответствующей задачи на временных слоях $t_m = m\tau$. В [3] была предложена модель пространственного движения вязкой жидкости в цилиндрической трубе кругового сечения. В данной работе речь идет о разрешимости модели из [3].

Уравнения записываем в цилиндрических координатах $r, \varphi, z,$ полагаем, что искомые неизвестные: компоненты скорости u_z, u_r и давление p являются функциями только переменных r, z (и времени t) и что плотность ρ равна единице, (см. [3])

$$\frac{\partial u_z}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_z}{\partial r} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \right),$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial (r u_r)}{\partial r} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial (r u_r)}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z \partial r} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial r} + \left(\frac{\partial u_r}{\partial r} \right)^2 + 2 \frac{\partial u_r}{\partial z} \frac{\partial u_z}{\partial r} + \left(\frac{\partial u_z}{\partial z} \right)^2 + \frac{1}{r^2} u_r^2 = 0.$$

Учитывая специфику полученных уравнений, помимо срезающей функции $\zeta(x)$, введенной в [1] (здесь она обозначена $\zeta(z)$), вводим в рассмотрение еще и срезающую функцию $\xi(r)$:

$\xi(r) = 0,$ если $-\varepsilon/2 \leqslant r \leqslant \varepsilon/2, \ 0 \leqslant z \leqslant L;$

$0 \leqslant \xi(r) \leqslant 1,$ если $(-\varepsilon \leqslant r \leqslant -\varepsilon/2) \bigcup (\varepsilon/2 \leqslant r \leqslant \varepsilon), \ 0 \leqslant z \leqslant L;$

$\xi(r) = 1,$ если $(-R \leqslant r \leqslant -\varepsilon) \bigcup (\varepsilon \leqslant r \leqslant R), \ 0 \leqslant z \leqslant L,$

где ε – малое положительное число, и приходим к системе [3]

$$\frac{\partial u_z}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_z}{\partial r} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left(\xi(r) \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \right), \tag{1}$$

$$\xi(r) \frac{u_r}{r} + \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0, \xi(r) \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{1}{r^2} u_r \right) + \frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z \partial r} = 0, \tag{2}$$

$$\frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} + \xi(r) \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial r} + \left(\frac{\partial u_r}{\partial r} \right)^2 + 2 \frac{\partial u_r}{\partial z} \frac{\partial u_z}{\partial r} + \left(\frac{\partial u_z}{\partial z} \right)^2 + \xi(r) \frac{1}{r^2} u_r^2 = 0. \tag{3}$$

Для уравнения (1) решаем задачу Дирихле в области $\tilde{\Omega}_T = \tilde{\Omega} \times [0, T],$ где $\tilde{\Omega}$ есть область $\Omega = [0 < z < L, -R < r < R],$ граница которой сглажена (см. [1]), предварительно заменив в нем производную по времени разностной производной. Длина трубы $L,$ радиус сечения $R,$ в качестве оси z выбрана ось трубы. Границу области $\tilde{\Omega}$ обозначим $S.$

Компонента скорости u_r находится из уравнений (2), граничные условия для которых ставятся так же, как в [1]. Для уравнения (3), из которого находится давление, рассматривается задача Неймана с граничным условием

$$\left. \frac{\partial p}{\partial \bar{n}} \right|_S = \zeta(s) \left(\nu \left(\xi(r) \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \right) - u_r \frac{\partial u_z}{\partial r} - u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial t} \right) \cos \alpha_1 \Big|_S +$$

$$+ \zeta(s) \left(\nu \left(\xi(r) \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} - \xi(r) \frac{u_r}{r^2} \right) - u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} - u_z \frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{\partial u_r}{\partial t} \right) \cos \alpha_2 \Big|_S, \tag{4}$$

где $\left. \dfrac{\partial p}{\partial \bar{n}} \right|_S$ – производная по направлению вектора $\bar{n}$ внутренней нормали к границе, $\cos \alpha_1, \cos \alpha_2$ – направляющие косинусы вектора $\bar{n}.$

Теорема. *Пусть выполнены условия: граничная функция для* (1) *принадлежит* $C_{l,\alpha}(S_T),$ *начальная функция –* $C_{l,\alpha}(\bar{\tilde{\Omega}}),$ $f \in C_{l,\alpha}(\bar{\tilde{\Omega}}_T),$ $S \in C_{l,\alpha},$ $\zeta, \xi \in C_{l,\alpha}(\bar{\tilde{\Omega}}_T),$ $l \geqslant 3,$

$\alpha \in (0,1)$, $\partial f/\partial z \geqslant \beta = \mathrm{const}$, $1/\tau + \beta > 0$, *функция* f *вводится в рассмотрение так же, как и в [1]. Тогда задача* (1)–(4), *в которой производные* $\partial u_z/\partial t$ *и* $\partial u_r/\partial t$ *заменены разностными производными, имеет единственное решение на каждом из временных слоев* $t = t_m = m\tau$, *лежащих в области* $\bar{\tilde{\Omega}}_T \underline{\ \ }([-R \leqslant r \leqslant -\varepsilon] \bigcup [\varepsilon \leqslant r \leqslant R])$, $u_z \in C_{l,\alpha}(\bar{\tilde{\Omega}}_m)$, $\partial u_r/\partial r \in C_{l-1,\alpha}(\bar{\tilde{\Omega}}_m)$, $p \in C_{l-1,\alpha}(\bar{\tilde{\Omega}}_m)$, $\bar{\tilde{\Omega}}_m$ – m*-й временнóй слой.*

Литература

1. Каянович С.С. *Разрешимость дифференциальной модели стержневого течения* // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2015. № 1. С. 52–59.

2. Каянович С.С. *О разрешимости дифференциально-разностной задачи для стержневого течения* // Тезисы докл. XVII Международной научной конференции по дифференциальным уравнениям «Еругинские чтения–2017». Мн. 2017. Ч. 2. С. 10–11.

3. Каянович С.С. *Модель движения вязкой жидкости в трубе кругового сечения* // «Way-Science». International Scientific and Practical Internet Conference «Development of Education, Science and Business: Results 2020», 3–4 December, 2020. Ukraine, Dnipro, 2020. Part 1. P. 473–475.